openstax™

Física

Universitaria

Volumen 1

Física Universitaria
Volumen 1

AUTORES PRINCIPALES
Samuel J. Ling, Universidad Estatal de Truman
Jeff Sanny, Universidad Loyola Marymount
William Moebs, Anteriormente de la Universidad Loyola Marymount



openstax™

OpenStax
Rice University
6100 Main Street MS-375
Houston, Texas 77005

Para obtener más información sobre OpenStax, visite https://openstax.org.
Pueden adquirirse copias impresas individuales y pedidos al por mayor a través de nuestro sitio web.

©2021 Rice University. El contenido de los libros de texto que produce OpenStax tiene una licencia de atribución internacional de Creative Commons 4.0 (CC BY 4.0). De conformidad con esta licencia, todo usuario de este libro de texto o de su contenido debe proporcionar la atribución adecuada de la siguiente manera:

- Si redistribuye este libro de texto en formato digital (lo que incluye, entre otros, PDF y HTML), entonces debe mantener en cada página la siguiente atribució:
  “Acceso gratuito en openstax.org”.
- Si redistribuye este libro de texto en formato impreso, debe incluir en cada página física la siguiente atribución:
  “Acceso gratuito en openstax.org”.
- Si redistribuye parte de este libro de texto, debe mantener en cada página de formato digital (lo que incluye, entre otros, PDF y HTML) y en cada página física impresa la siguiente atribución:
  “Acceso gratuito en openstax.org.”
- Si utiliza este libro de texto como referencia bibliográfica, incluya https://openstax.org/details/books/física-universitaria-volumen-1 en su cita.

Si tiene preguntas sobre esta licencia, póngase en contacto con support@openstax.org.

Marcas registradas
El nombre de OpenStax, el logotipo de OpenStax, las portadas de los libros de OpenStax, el nombre de OpenStax CNX, el logotipo de OpenStax CNX, el nombre de OpenStax Tutor, el logotipo de Openstax Tutor, el nombre de Connexions, el logotipo de Connexions, el nombre de Rice University y el logotipo de Rice University no están sujetos a la licencia y no se pueden reproducir sin el consentimiento previo y expreso por escrito de Rice University.

VERSIÓN DE TAPA BLANDA ISBN-13	**978-1-711494-63-0**
VERSIÓN DIGITAL ISBN-13	**978-1-951693-90-9**
AÑO DE PUBLICACIÓN ORIGINAL	**2021**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 JAY 21

OpenStax

OpenStax ofrece libros de texto gratuitos, revisados por expertos y con licencia abierta para cursos de introducción a la universidad y del programa Advanced Placement®, así como software didáctico personalizado de bajo costo que apoyan el aprendizaje de los estudiantes. Es una iniciativa de tecnología educativa sin fines de lucro con sede en Rice University (Universidad Rice), que se compromete a brindarle acceso a los estudiantes a las herramientas que necesitan para terminar sus cursos y alcanzar sus objetivos educativos.

Rice University

OpenStax, OpenStax CNX, and OpenStax Tutor son iniciativas de Rice University. Como universidad líder en investigación con un compromiso particular con la educación de pregrado, Rice University aspira a una investigación pionera, una enseñanza insuperable y contribuciones para mejorar nuestro mundo. Su objetivo es cumplir esta misión y cultivar una comunidad diversa de aprendizaje y descubrimiento que forme líderes en todo el ámbito del esfuerzo humano.



Apoyo Filantrópico

OpenStax agradece a nuestros generosos socios filantrópicos, que apoyan nuestra visión de mejorar las oportunidades educativas para todos los estudiantes.

Arnold Ventures
Chan Zuckerberg Initiative
Chegg, Inc.
Arthur and Carlyse Ciocca Charitable Foundation
Digital Promise
Ann and John Doerr
Bill & Melinda Gates Foundation
Girard Foundation
Google Inc.
The William and Flora Hewlett Foundation
The Hewlett-Packard Company
Intel Inc.
Rusty and John Jaggers
The Calvin K. Kazanjian Economics Foundation
Charles Koch Foundation
Leon Lowenstein Foundation, Inc.
The Maxfield Foundation
Burt and Deedee McMurtry
Michelson 20MM Foundation
National Science Foundation
The Open Society Foundations
Jumee Yhu and David E. Park III
Brian D. Patterson USA-International Foundation
The Bill and Stephanie Sick Fund
Steven L. Smith & Diana T. Go
Stand Together
Robin and Sandy Stuart Foundation
The Stuart Family Foundation
Tammy and Guillermo Treviño
Valhalla Charitable Foundation
White Star Education Foundation
Schmidt Futures
William Marsh Rice University

Contenido

Prefacio 1

UNIDAD 1 MECÁNICA

CAPÍTULO 1
Unidades y medidas 7

Introducción 7
1.1 El alcance y la escala de la Física 8
1.2 Unidades y estándares 15
1.3 Conversión de unidades 21
1.4 Análisis dimensional 24
1.5 Estimaciones y cálculos de Fermi 27
1.6 Cifras significativas 30
1.7 Resolver problemas de física 35
Revisión Del Capítulo 38

CAPÍTULO 2
Vectores 47

Introducción 47
2.1 Escalares y vectores 48
2.2 Sistemas de coordenadas y componentes de un vector 60
2.3 Álgebra de vectores 70
2.4 Productos de los vectores 79
Revisión Del Capítulo 91

CAPÍTULO 3
Movimiento rectilíneo 105

Introducción 105
3.1 Posición, desplazamiento y velocidad media 106
3.2 Velocidad y rapidez instantáneas 110
3.3 Aceleración media e instantánea 116
3.4 Movimiento con aceleración constante 123
3.5 Caída libre 135
3.6 Calcular la velocidad y el desplazamiento a partir de la aceleración 141
Revisión Del Capítulo 145

CAPÍTULO 4
Movimiento en dos y tres dimensiones 157

Introducción 157
4.1 Vectores de desplazamiento y velocidad 158
4.2 Vector de aceleración 165
4.3 Movimiento de proyectil 170
4.4 Movimiento circular uniforme 182
4.5 Movimiento relativo en una y dos dimensiones 189

Revisión Del Capítulo 195

CAPÍTULO 5
Leyes del movimiento de Newton 207
Introducción 207
5.1 Fuerzas 208
5.2 Primera ley de Newton 213
5.3 Segunda ley de Newton 217
5.4 Masa y peso 228
5.5 Tercera ley de Newton 230
5.6 Fuerzas comunes 237
5.7 Dibujar diagramas de cuerpo libre 248
Revisión Del Capítulo 253

CAPÍTULO 6
Aplicaciones de las leyes de Newton 267
Introducción 267
6.1 Resolución de problemas con las leyes de Newton 268
6.2 Fricción 284
6.3 Fuerza centrípeta 297
6.4 Fuerza de arrastre y velocidad límite 306
Revisión Del Capítulo 315

CAPÍTULO 7
Trabajo y energía cinética 333
Introducción 333
7.1 Trabajo 334
7.2 Energía cinética 344
7.3 Teorema de trabajo-energía 347
7.4 Potencia 352
Revisión Del Capítulo 355

CAPÍTULO 8
Energía potencial y conservación de la energía 367
Introducción 367
8.1 Energía potencial de un sistema 368
8.2 Fuerzas conservativas y no conservativas 376
8.3 Conservación de la energía 380
8.4 Diagramas de energía potencial y estabilidad 386
8.5 Fuentes de energía 391
Revisión Del Capítulo 396

CAPÍTULO 9
Momento lineal y colisiones 407
Introducción 407
9.1 Momento lineal 408
9.2 Impulso y colisiones 410
9.3 Conservación del momento lineal 424
9.4 Tipos de colisiones 434

9.5 Colisiones en varias dimensiones 441
9.6 Centro de masa 449
9.7 Propulsión de cohetes 463
Revisión Del Capítulo 469

CAPÍTULO 10
Rotación de un eje fijo 483
Introducción 483
10.1 Variables rotacionales 484
10.2 Rotación con aceleración angular constante 493
10.3 Relacionar cantidades angulares y traslacionales 498
10.4 Momento de inercia y energía cinética rotacional 503
10.5 Calcular momentos de inercia 511
10.6 Torque 520
10.7 Segunda ley de Newton para la rotación 526
10.8 Trabajo y potencia en el movimiento rotacional 530
Revisión Del Capítulo 536

CAPÍTULO 11
Momento angular 551
Introducción 551
11.1 Movimiento rodadura 552
11.2 Momento angular 560
11.3 Conservación del momento angular 569
11.4 Precesión de un giroscopio 575
Revisión Del Capítulo 580

CAPÍTULO 12
Equilibrio estático y elasticidad 591
Introducción 591
12.1 Condiciones para el equilibrio estático 592
12.2 Ejemplos de equilibrio estático 601
12.3 Estrés, tensión y módulo elástico 614
12.4 Elasticidad y plasticidad 624
Revisión Del Capítulo 627

CAPÍTULO 13
Gravitación 639
Introducción 639
13.1 Ley de la gravitación universal de Newton 640
13.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre 645
13.3 Energía potencial gravitacional y energía total 652
13.4 Órbita satelital y energía 658
13.5 Leyes del movimiento planetario de Kepler 665
13.6 Fuerzas de marea 672
13.7 La teoría de la gravedad de Einstein 679
Revisión Del Capítulo 687

CAPÍTULO 14
Mecánica de fluidos 697
Introducción 697
14.1 Fluidos, densidad y presión 698
14.2 Medir la presión 710
14.3 Principio de Pascal y la hidráulica 715
14.4 Principio de Arquímedes y flotabilidad 720
14.5 Dinámicas de fluidos 724
14.6 Ecuación de Bernoulli 729
14.7 Viscosidad y turbulencia 735
Revisión Del Capítulo 745

UNIDAD 2 ONDAS Y ACÚSTICA

CAPÍTULO 15
Oscilaciones 759
Introducción 759
15.1 Movimiento armónico simple 760
15.2 Energía en el movimiento armónico simple 769
15.3 Comparación de movimiento armónico simple y movimiento circular 776
15.4 Péndulos 780
15.5 Oscilaciones amortiguadas 786
15.6 Oscilaciones forzadas 789
Revisión Del Capítulo 795

CAPÍTULO 16
Ondas 805
Introducción 805
16.1 Ondas en desplazamiento 806
16.2 Matemáticas de las ondas 812
16.3 Rapidez de onda en una cuerda estirada 820
16.4 La energía y la potencia de una onda 824
16.5 Interferencia de ondas 829
16.6 Ondas estacionarias y resonancia 838
Revisión Del Capítulo 847

CAPÍTULO 17
Sonido 863
Introducción 863
17.1 Ondas sonoras 864
17.2 Velocidad del sonido 866
17.3 Intensidad del sonido 875
17.4 Modos normales de una onda sonora estacionaria 884
17.5 Fuentes de sonido musical 893
17.6 Batimientos 898
17.7 El Efecto Doppler 900
17.8 Ondas expansivas 906
Revisión Del Capítulo 911

Apéndice A Unidades 925

Apéndice B Factores de conversión 929

Apéndice C Constantes fundamentales 933

Apéndice D Datos astronómicos 935

Apéndice E Fórmulas matemáticas 937

Apéndice F Química 941

Apéndice G El alfabeto griego 943

Clave de Respuestas 945

Índice 1007

PREFACIO

Bienvenido a *Física Universitaria*, un recurso de OpenStax. Este libro de texto fue escrito para aumentar el acceso de los estudiantes a material de aprendizaje de alta calidad, a la vez que se mantienen los más altos estándares de rigor académico a bajo o ningún costo.

Acerca de OpenStax

OpenStax es una organización sin ánimo de lucro con sede en la Universidad Rice. Nuestra misión es brindar a los estudiantes mayor acceso a la educación. Nuestro primer libro de texto universitario con licencia abierta se publicó en 2012. Desde entonces nuestra biblioteca se ha ampliado a más de 25 libros que consultan cientos de miles de estudiantes en todo el mundo. OpenStax Tutor, nuestra herramienta de aprendizaje personalizado de bajo costo, se utiliza en cursos universitarios de todo el país. La misión de OpenStax es posible gracias al generoso apoyo de fundaciones filantrópicas. A través de estas asociaciones y con la ayuda de recursos adicionales de bajo costo de nuestros socios de OpenStax, OpenStax rompe las barreras más comunes para el aprendizaje y otorga poder a los estudiantes e instructores para que triunfen.

Sobre los recursos de OpenStax

Personalización

Física Universitaria está autorizado conforme a la licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0), lo que significa que puede distribuir, mezclar y construir sobre el contenido, siempre y cuando proporcione la atribución a OpenStax y sus colaboradores de contenido.

Dado que nuestros libros tienen licencia abierta, usted es libre de utilizar todo el libro o de elegir las secciones que sean más relevantes para las necesidades de su curso. Puede mezclar el contenido en la asignación a sus estudiantes de ciertos capítulos y secciones en su programa de estudios en el orden que usted prefiera. Incluso puede proporcionar un enlace directo en su programa de estudios a las secciones en la vista web de su libro.

Errata

Todos los libros de texto de OpenStax se someten a un riguroso proceso de revisión. Sin embargo, al igual que cualquier libro de texto de nivel profesional, a veces se producen errores. Dado que nuestros libros se basan en la web, podemos realizar actualizaciones periódicas cuando se considere pedagógicamente necesario. Si tiene una corrección que sugerir, envíela a través del enlace de la página de su libro en OpenStax.org. Los expertos en la materia revisan todas las sugerencias de erratas. OpenStax se compromete a ser transparente en todas las actualizaciones, por lo que usted también encontrará una lista de los cambios de erratas anteriores en la página de su libro en OpenStax.org.

Formato

Puede acceder a este libro de texto de forma gratuita en vista web o en PDF a través de OpenStax.org, y por un bajo costo en versión impresa.

Acerca de *Física Universitaria*

Física Universitaria está diseñado para el curso de física de dos o tres semestres con base en cálculo. El texto ha sido desarrollado para cumplir con el alcance y la secuencia de la mayoría de los cursos universitarios de física y proporciona una base para una carrera en matemáticas, ciencias o ingeniería. El libro ofrece una importante oportunidad para que los estudiantes aprendan los conceptos básicos de la física y comprendan cómo esos conceptos se aplican a sus vidas y al mundo que los rodea.

Debido al carácter exhaustivo del material, ofrecemos el libro en tres volúmenes para mayor flexibilidad y eficacia.

Cobertura y alcance

Nuestro libro de texto de *Física Universitaria* se adhiere al alcance y la secuencia de la mayoría de los cursos de física de dos y tres semestres de todo el país. Hemos trabajado para que la física sea interesante y accesible para los estudiantes, a la vez que se mantiene el rigor matemático inherente a la asignatura. Con este objetivo en mente, el contenido de este libro de texto se ha desarrollado y organizado para proporcionar una progresión lógica desde los conceptos fundamentales hasta los más avanzados, con base en lo que los estudiantes ya han aprendido y haciendo hincapié en las conexiones entre los temas y entre la teoría y las aplicaciones.

La meta de cada sección es que los estudiantes no solo reconozcan los conceptos, sino que trabajen con estos de forma que les resulten útiles en cursos posteriores y en sus futuras carreras. La organización y las características pedagógicas se desarrollaron y examinaron con los aportes de educadores científicos dedicados al proyecto.

VOLUMEN I

Unidad 1: Mecánica

- Capítulo 1: Unidades y medidas
- Capítulo 2: Vectores
- Capítulo 3: Movimiento rectilíneo
- Capítulo 4: Movimiento en dos y tres dimensiones
- Capítulo 5: Leyes del movimiento de Newton
- Capítulo 6: Aplicaciones de las leyes de Newton
- Capítulo 7: Trabajo y energía cinética
- Capítulo 8: Energía potencial y conservación de la energía
- Capítulo 9: Momento lineal y colisiones
- Capítulo 10: Rotación de eje fijo
- Capítulo 11: Momento angular
- Capítulo 12: Equilibrio estático y elasticidad
- Capítulo 13: Gravitación
- Capítulo 14: Mecánica de fluidos

Unidad 2: Ondas y acústica

- Capítulo 15: Oscilaciones
- Capítulo 16: Ondas
- Capítulo 17: Sonido

VOLUMEN II

Unidad 1: Termodinámica

- Capítulo 1: Temperatura y calor
- Capítulo 2: La teoría cinética de los gases
- Capítulo 3: La primera ley de termodinámica
- Capítulo 4: La segunda ley de la termodinámica

Unidad 2: Electricidad y magnetismo

- Capítulo 5: Cargas y campos eléctricos
- Capítulo 6: Ley de Gauss
- Capítulo 7: Potencial eléctrico
- Capítulo 8: Capacidad
- Capítulo 9: Corriente y resistencia
- Capítulo 10: Circuitos de corriente continua
- Capítulo 11: Fuerzas y campos magnéticos
- Capítulo 12: Fuentes de campos magnéticos
- Capítulo 13: Inducción electromagnética
- Capítulo 14: Inductancia
- Capítulo 15: Circuitos de corriente alterna
- Capítulo 16: Ondas electromagnéticas

VOLUMEN III

Unidad 1: Óptica

- Capítulo 1: La naturaleza de la luz
- Capítulo 2: Óptica geométrica y formación de imágenes
- Capítulo 3: Interferencia
- Capítulo 4: Difracción

Unidad 2: Física moderna

- Capítulo 5: Relatividad
- Capítulo 6: Fotones y ondas de materia
- Capítulo 7: Mecánica cuántica
- Capítulo 8: Estructura atómica
- Capítulo 9: Física de la materia condensada
- Capítulo 10: Física nuclear
- Capítulo 11: Física de partículas y cosmología

Fundamentos pedagógicos

En *Física Universitaria* encontrará derivaciones de conceptos que presentan ideas y técnicas clásicas, así como aplicaciones y métodos modernos. La mayoría de los capítulos comienzan con observaciones o experimentos que sitúan el material en un contexto de experiencia física. Las presentaciones y explicaciones se basan en años de experiencia en el aula por parte de profesores de física de larga trayectoria, que se esfuerzan por lograr un equilibrio de claridad y rigor que ha demostrado ser exitoso con sus estudiantes. En el texto, los enlaces permiten a los estudiantes repasar el material anterior y volver al planteamiento actual para reforzar las conexiones entre los temas. Las figuras históricas y los experimentos más importantes se analizan en el texto principal (en lugar de en recuadros o barras laterales), a la vez que se mantiene el enfoque en el desarrollo de la intuición física. Las ideas clave, las definiciones y las ecuaciones se destacan en el texto y se enumeran en forma de resumen al final de cada capítulo. Los ejemplos y las imágenes que abren los capítulos suelen incluir aplicaciones contemporáneas de la vida cotidiana o de la ciencia y la ingeniería modernas con las que los estudiantes pueden relacionarse: desde los teléfonos inteligentes hasta Internet o los dispositivos GPS.

Evaluaciones que refuerzan los conceptos clave

Los **Ejemplos** que se encuentran en los capítulos siguen un formato de tres partes: de estrategia, solución e importancia, para enfatizar cómo abordar un problema, cómo trabajar con las ecuaciones y cómo comprobar y generalizar el resultado. Los ejemplos van seguidos de preguntas y respuestas de

Compruebe lo aprendido para que los estudiantes refuercen las ideas importantes de los ejemplos. Las **Estrategias de resolución de problemas** de cada capítulo desglosan los métodos para abordar diversos tipos de problemas en pasos, que los estudiantes pueden seguir para orientarse. El libro también incluye ejercicios al final de cada capítulo, para que los estudiantes practiquen lo que han aprendido.

- Las **Preguntas conceptuales** no requieren cálculos, sino que ponen a prueba el aprendizaje de los conceptos clave por parte del estudiante.
- Los **Problemas** clasificados por secciones ponen a prueba las habilidades de los estudiantes para resolver problemas y la capacidad para aplicar las ideas a situaciones prácticas.
- Los **Problemas adicionales** aplican los conocimientos de todo el capítulo, lo cual obliga a los estudiantes a identificar qué conceptos y ecuaciones son apropiados para resolver determinados problemas. Al azar, en los problemas, hay ejercicios de **Resultados poco razonables.** Allí se pide a los estudiantes que evalúen la respuesta a un problema y expliquen por qué no es razonable y cuáles de las suposiciones que se hacen serían incorrectas.
- Los **Problemas de desafío** amplían las ideas del texto a situaciones interesantes, pero difíciles.

Las respuestas a los ejercicios seleccionados están disponibles en una **Clave de respuestas** al final del libro.

Recursos adicionales

Recursos para estudiantes e instructores

Hemos recopilado guías de respuestas y soluciones para instructores y estudiantes. Los recursos para instructores requieren una cuenta de instructor verificada, que puede solicitar al iniciar sesión o crear su cuenta en OpenStax.org. Aproveche estos recursos para complementar su libro de OpenStax.

Centros comunitarios

OpenStax se asocia al Instituto para el Estudio de la Administración del Conocimiento en la Educación (Institute for the Study of Knowledge Management in Education, ISKME) para ofrecer centros comunitarios en OER Commons. Esta plataforma es para que los instructores compartan los recursos creados por la comunidad en apoyo de los libros de OpenStax, de forma gratuita. A través de nuestros centros comunitarios, los instructores pueden cargar sus propios materiales o descargar recursos para utilizarlos en sus propios cursos. Esto abarca anexos adicionales, material didáctico, multimedia y contenido relevante del curso. Animamos a los profesores a que se unan a los centros de los temas más relevantes para su docencia e investigación como una oportunidad, tanto para enriquecer sus cursos como para relacionarse con otros profesores.

Para ponerse en contacto con los centros comunitarios, visite www.oercommons.org/hubs/OpenStax (https://www.oercommons.org/hubs/OpenStax).

Recursos asociados

Los socios de OpenStax son nuestros aliados en la misión de hacer asequible y accesible el material de aprendizaje de alta calidad a los estudiantes e instructores de todo el mundo. Sus herramientas se integran perfectamente con nuestros títulos de OpenStax a un bajo costo. Para acceder a los recursos asociados a su texto, visite la página de su libro en OpenStax.org.

Sobre los autores

Autores principales

Samuel J. Ling, Universidad Estatal de Truman
El Dr. Samuel Ling ha enseñado física introductoria y avanzada durante más de 25 años en la Universidad Estatal de Truman, donde actualmente es profesor de física y jefe del departamento. El Dr. Ling tiene dos doctorados por la Universidad de Boston, uno en Química y otro en Física, y fue becario de investigación en el Instituto Indio de Ciencias de Bangalore antes de incorporarse a Truman. El Dr. Ling también es autor de *Primer Curso en Vibraciones y Ondas (A First Course in Vibrations and Waves)*, publicado por Oxford University Press. El Dr. Ling tiene vasta experiencia en investigación en el campo de la educación en física y ha publicado investigaciones sobre métodos de aprendizaje colaborativo en la enseñanza de la física. Recibió una beca Truman y una beca Jepson en reconocimiento a sus innovadores métodos de enseñanza. Las publicaciones de investigación del Dr. Ling abarcan la cosmología, la física del estado sólido y la óptica no lineal.

Jeff Sanny, Universidad Loyola Marymount
El Dr. Jeff Sanny se licenció en Física en el Colegio Universitario Harvey Mudd en 1974 y se doctoró en física del estado sólido en la Universidad de California, Los Ángeles, en 1980. Se incorporó al cuerpo docente de la Universidad Loyola Marymount en otoño de 1980. Durante su

permanencia, ha desempeñado el cargo de jefe de departamento, así como el de decano asociado. El Dr. Sanny disfruta enseñando física introductoria en particular. También le apasiona proporcionar a los estudiantes experiencia en investigación y ha dirigido durante muchos años un activo grupo de investigación en física espacial, conformado por estudiantes universitarios.

William Moebs, anteriormente de la Universidad Loyola Marymount
El Dr. William Moebs se licenció y doctoró (1959 y 1965) en la Universidad de Michigan. Después se incorporó al personal como investigador asociado durante un año, donde continuó su investigación doctoral en física de partículas. En 1966, aceptó un nombramiento en el departamento de física de Indiana Purdue Fort Wayne (IPFW), donde ejerció como jefe de departamento de 1971 a 1979. En 1979 se trasladó a la Universidad Loyola Marymount (Loyola Marymount University, LMU), donde fue jefe del departamento de física de 1979 a 1986. Se retiró de la LMU en el 2000. Ha publicado investigaciones sobre física de partículas, cinética química, división celular, física atómica y enseñanza de la física.

Autores colaboradores

Stephen D. Druger
Alice Kolakowska, Universidad de Memphis
David Anderson, Colegio Universitario Albion
Daniel Bowman, Colegio Universitario Ferrum
Dedra Demaree, Universidad de Georgetown
Edw. S. Ginsberg, Universidad de Massachusetts
Joseph Trout, Colegio Universitario Richard Stockton
Kevin Wheelock, Colegio Universitario Bellevue
David Smith, Universidad de las Islas Vírgenes
Takashi Sato, Universidad Politécnica de Kwantlen
Gerald Friedman, Colegio Universitario Comunitario Santa Fe
Lev Gasparov, Universidad del Norte de Florida
Lee LaRue, Colegio Universitario Paris Junior
Mark Lattery, Universidad de Wisconsin
Richard Ludlow, Colegio Universitario Daniel Webster
Patrick Motl, Universidad Kokomo de Indiana
Tao Pang, Universidad de Nevada, Las Vegas
Kenneth Podolak, Universidad Estatal de Plattsburgh

Revisores

Salameh Ahmad, Instituto de Tecnología Rochester, Dubai
John Aiken, Universidad de Colorado, Boulder
Raymond Benge, Colegio Universitario del condado Terrant
Gavin Buxton, Universidad Robert Morris
Erik Christensen, Colegio Universitario Estatal del Sur de Florida
Clifton Clark, Universidad Estatal Fort Hays
Nelson Coates, Academia Marítima de California
Herve Collin, Colegio Universitario Comunitario Kapi'olani
Carl Covatto, Universidad Estatal de Arizona
Alejandro Cozzani, Colegio Universitario Imperial Valley
Danielle Dalafave, Colegio Universitario de Nueva Jersey
Nicholas Darnton, Instituto de Tecnología de Georgia
Ethan Deneault, Universidad de Tampa
Kenneth DeNisco, Colegio Universitario Comunitario del Área de Harrisburg
Robert Edmonds, Colegio Universitario del condado de Tarrant
William Falls, Colegio Universitario Comunitario Erie
Stanley Forrester, Colegio Universitario Broward
Umesh Garg, Universidad de Notre Dame
Maurizio Giannotti, Universidad Barry
Bryan Gibbs, Colegio Universitario Comunitario del condado de Dallas
Lynn Gillette, Colegio Universitario Comunitario Pima, Campus Oeste
Mark Giroux, Universidad Estatal del Este de Tennessee
Matthew Griffiths, Universidad de New Haven
Alfonso Hinojosa, Universidad de Texas, Arlington
Steuard Jensen, Colegio Universitario Alma
David Kagan, Universidad de Massachusetts
Sergei Katsev, Universidad de Minnesota, Duluth
Gregory Lapicki, Universidad del Este de Carolina
Jill Leggett, Colegio Universitario Comunitario Estatal de Florida, Jacksonville
Alfredo Louro, Universidad de Calgary
James Maclaren, Universidad Tulane
Ponn Maheswaranathan, Universidad Winthrop
Seth Major, Colegio Universitario Hamilton
Oleg Maksimov, Colegio Universitario Excelsior
Aristides Marcano, Universidad Estatal de Delaware
James McDonald, Universidad de Hartford
Ralph McGrew, Colegio Universitario Comunitario SUNY–Broome
Paul Miller, Universidad del Oeste de Virginia
Tamar More, Universidad de Portland
Farzaneh Najmabadi, Universidad de Phoenix
Richard Olenick, Universidad de Dallas
Christopher Porter, Universidad Estatal de Ohio

Liza Pujji, Instituto de Tecnología Manakau
Baishali Ray, Universidad Young Harris
Andrew Robinson, Universidad Carleton
Aruvana Roy, Universidad Young Harris
Gajendra Tulsian, Colegio Universitario Estatal de Daytona
Adria Updike, Universidad Roger Williams
Clark Vangilder, Universidad de Arizona Central
Steven Wolf, Universidad Estatal de Texas
Alexander Wurm, Universidad de Western New England
Lei Zhang, Universidad Estatal Winston Salem
Ulrich Zurcher, Universidad Estatal de Cleveland.

CAPÍTULO 1
Unidades y medidas



Figura 1.1 Esta imagen podría estar mostrando cualquier cantidad de cosas. Puede ser un remolino en un tanque de agua o quizás un *collage* de pintura y cuentas brillantes hecho para la clase de arte. Sin conocer el tamaño del objeto en unidades que todos reconocemos, como los metros o las pulgadas, es difícil saber qué estamos viendo. De hecho, esta imagen muestra la galaxia Remolino (y su galaxia compañera), que tiene aproximadamente 60.000 años luz de diámetro (unos $6 \times 10^{17}\text{km}$ de un lado a otro) (créditos: modificación del trabajo de S. Beckwith (Instituto de Ciencias del Telescopio Espacial [Space Telescope Science Institute, STScI]), Equipo Hubble Heritage (STScI/Asociación de Universidades para la Investigación en Astronomía [Association of Universities for Research in Astronomy, AURA]), Agencia Espacial Europea [European Space Agency, ESA] y Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio [National Aeronautics and Space Administration, NASA]).

ESQUEMA DEL CAPITULO

1.1 El alcance y la escala de la Física
1.2 Unidades y estándares
1.3 Conversión de unidades
1.4 Análisis dimensional
1.5 Estimaciones y cálculos de Fermi
1.6 Cifras significativas
1.7 Resolver problemas de física

INTRODUCCIÓN Como se indica en la leyenda de la figura, la imagen que abre el capítulo es la de la galaxia Remolino, que examinamos en la primera sección de este capítulo. Las galaxias son tan inmensas como los

átomos son pequeños y, sin embargo, las mismas leyes físicas describen a ambos, junto con todo el resto de la naturaleza, lo cual es una indicación de la unidad subyacente en el universo. Las leyes de la física son sorprendentemente pocas, lo que implica una simplicidad subyacente a la aparente complejidad de la naturaleza. En este texto, aprenderá sobre las leyes de la física. Las galaxias y los átomos pueden parecer muy alejados de su vida cotidiana; sin embargo, cuando empiece a explorar este amplio tema, pronto se dará cuenta de que la física desempeña un papel mucho más importante en su vida de lo que pensaba al principio, independientemente de las metas en su vida o de su elección profesional.

1.1 El alcance y la escala de la Física

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el alcance de la física.
- Calcular el orden de magnitud de una cantidad.
- Comparar cuantitativamente longitudes, masas y tiempos medibles.
- Describir las relaciones entre modelos, teorías y leyes.

La física se dedica a la comprensión de todos los fenómenos naturales. En física, intentamos comprender los fenómenos físicos a todas las escalas, desde el mundo de las partículas subatómicas hasta el universo entero. A pesar de la amplitud de la materia, los distintos subcampos de la física comparten un núcleo común. La misma formación básica en física lo preparará para trabajar en cualquier área de la física y las áreas afines de la ciencia y la ingeniería. En esta sección, investigamos el alcance de la física, las escalas de longitud, masa y tiempo en las que se ha demostrado que las leyes de la física son aplicables, y el proceso por el que opera la ciencia en general, y la física en particular.

El alcance de la física

Vuelva a mirar la imagen con la que se inicia el capítulo. La galaxia Remolino contiene miles de millones de estrellas individuales, así como enormes nubes de gas y polvo. Su galaxia compañera también es visible a la derecha. Este par de galaxias se encuentra a una asombrosa cantidad de mil millones de billones de millas ($1{,}4 \times 10^{21}$ mi) de nuestra propia galaxia (que se llama la *Vía Láctea*). Las estrellas y los planetas que componen la galaxia Remolino pueden parecer lo más alejado de la vida cotidiana de la mayoría de la gente, pero es un gran punto de partida para pensar en las fuerzas que mantienen unido el universo. Se cree que las fuerzas que hacen que la galaxia Remolino actúe como lo hace son las mismas a las que nos enfrentamos aquí en la Tierra, tanto si planeamos enviar un cohete al espacio como si simplemente planeamos erigir las paredes de una casa. Se cree que la gravedad que hace girar a las estrellas de la galaxia Remolino es la misma que hace que el agua fluya por las presas hidroeléctricas aquí en la Tierra. Cuando mire las estrellas, dese cuenta de que las fuerzas de ahí fuera son las mismas que las de aquí en la Tierra. A través del estudio de la física, puede obtener una mayor comprensión de la interconexión de todo lo que podemos ver y conocer en este universo.

Piense ahora en todos los dispositivos tecnológicos que utiliza habitualmente. Se nos ocurren las computadoras, los teléfonos inteligentes, los sistemas de posicionamiento global (Global Positioning System, GPS), los reproductores MP3 y la radio por satélite. Luego, piense en las tecnologías modernas y emocionantes de las que haya oído en las noticias, como los trenes que levitan sobre las vías, las "capas de invisibilidad" que curvan la luz a su alrededor y los robots microscópicos que combaten las células cancerosas de nuestro cuerpo. Todos estos avances innovadores, comunes o increíbles, se basan en los principios de la física. Además de desempeñar un papel importante en la tecnología, profesionales como ingenieros, pilotos, médicos, fisioterapeutas, electricistas y programadores informáticos aplican conceptos de física en su trabajo diario. Por ejemplo, un piloto debe entender cómo las fuerzas del viento inciden en la trayectoria de vuelo, un fisioterapeuta debe entender cómo los músculos del cuerpo experimentan las fuerzas al moverse y doblarse. Como aprenderá en este texto, los principios de la física impulsan nuevas y emocionantes tecnologías, y estos principios se aplican en una amplia gama de carreras.

El orden subyacente de la naturaleza hace que la ciencia en general, y la física en particular, sean interesantes y agradables de estudiar. Por ejemplo, ¿qué tienen en común una bolsa de patatas fritas y una batería de auto? Ambas contienen energía que se convierte en otras formas. La ley de la conservación de la energía (la energía

no se crea ni se destruye solo se transforma) relaciona temas como las calorías de los alimentos, las baterías, el calor, la luz y los resortes de los relojes. Comprender esta ley facilita el aprendizaje de las distintas formas que adopta la energía y su interrelación. Temas aparentemente desvinculados se conectan a través de leyes físicas ampliamente aplicables, lo que permite una comprensión más allá de la mera memorización de listas de hechos.

La ciencia consiste en teorías y leyes que son las verdades generales de la naturaleza, así como el conjunto de conocimientos que abarcan. Los científicos intentan continuamente ampliar este conjunto de conocimientos y perfeccionar la expresión de las leyes que lo describen. La **física**, cuyo término proviene del griego *phúsis*, que significa "naturaleza", se ocupa de describir las interacciones de la energía, la materia, el espacio y el tiempo para descubrir los mecanismos fundamentales que subyacen a todo fenómeno. Esta preocupación por describir los fenómenos básicos de la naturaleza define esencialmente el *alcance de la física*.

El objetivo de la física es comprender el mundo que nos rodea al nivel más básico. Para ello, hace hincapié en el uso de un pequeño número de leyes cuantitativas, lo que sirve para otros campos que empujan los límites de rendimiento de las tecnologías existentes. Piense en un teléfono inteligente (Figura 1.2). La física describe cómo la electricidad interactúa con los distintos circuitos del aparato. Este conocimiento permite a los ingenieros seleccionar el material adecuado y la disposición de los circuitos cuando construyen un teléfono inteligente. Es necesario conocer la física subyacente a estos dispositivos para reducir su tamaño o aumentar su rapidez de procesamiento. Alternativamente, piense en un GPS. La física describe la relación entre la rapidez de un objeto, la distancia que recorre y el tiempo que tarda en recorrer esa distancia. Cuando se utiliza un GPS en un vehículo, este se basa en ecuaciones físicas para determinar el tiempo de viaje de un lugar a otro.

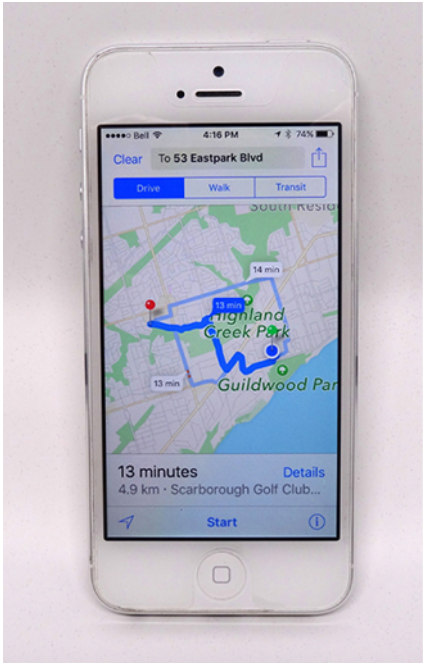


FIGURA 1.2 El iPhone de Apple es un teléfono inteligente común con función GPS. La física describe el modo en que la electricidad fluye por los circuitos de este aparato. Los ingenieros utilizan sus conocimientos de física para construir un iPhone con características que los consumidores disfrutarán. Una característica específica de un iPhone es la función GPS. El GPS utiliza ecuaciones físicas para determinar el tiempo de conducción entre dos lugares en un mapa (créditos: Jane Whitney).

El conocimiento de la física es útil tanto en situaciones cotidianas como en profesiones no científicas. Le permite entender cómo funcionan los hornos microondas, por qué no se deben introducir metales en ellos y por qué pueden afectar los marcapasos. La física le permite comprender los peligros de la radiación y evaluarlos de forma racional y más fácil. La física también explica la razón por la que el radiador de un auto negro elimina el calor en el motor, y explica por qué un techo blanco mantiene fresco el interior de una casa. Del mismo modo, el funcionamiento del sistema de encendido de un auto y la transmisión de señales

eléctricas a través del sistema nervioso de nuestro organismo son mucho más fáciles de entender cuando se piensa en ellos en términos de física básica.

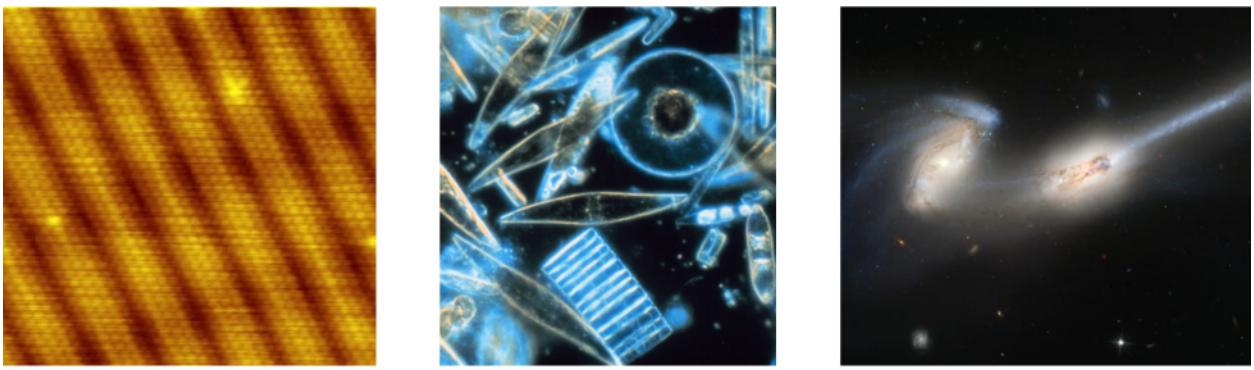
La física es un elemento clave de muchas disciplinas importantes y contribuye directamente a otras. La química, por ejemplo, al ocuparse de las interacciones entre átomos y moléculas, está estrechamente vinculada con la física atómica y molecular. La mayoría de las ramas de la ingeniería se ocupan de diseñar nuevas tecnologías, procesos o estructuras dentro de las limitaciones establecidas por las leyes de la física. En arquitectura, la física está en el centro de la estabilidad estructural y participa en la acústica, la calefacción, la iluminación y la refrigeración de los edificios. Algunas partes de la geología dependen en gran medida de la física, como la datación radiométrica de las rocas, el análisis de los terremotos y la transferencia de calor dentro de la Tierra. Algunas disciplinas, como la biofísica y la geofísica, son híbridos de la física y otras disciplinas.

La física tiene muchas aplicaciones en las ciencias biológicas. A nivel microscópico, ayuda a describir las propiedades de las células y sus ambientes. A nivel macroscópico, explica el calor, el trabajo y la potencia asociados al cuerpo humano y a sus diversos sistemas de órganos. La física interviene en los diagnósticos médicos, como las radiografías, las imágenes de resonancia magnética y las mediciones ultrasónicas del flujo sanguíneo. La terapia médica a veces implica directamente a la física; por ejemplo, la radioterapia oncológica utiliza radiación ionizante. La física también explica los fenómenos sensoriales, como la forma en que los instrumentos musicales producen el sonido, la forma en que el ojo detecta el color y la forma en que los rayos láser transmiten la información.

No es necesario estudiar formalmente todas las aplicaciones de la física. Lo más útil es conocer las leyes básicas de la física y desarrollar habilidades en los métodos analíticos para aplicarlas. El estudio de la física también puede mejorar su capacidad para resolver problemas. Además, la física conserva los aspectos más básicos de la ciencia, por lo que es utilizada por todas las ciencias, y su estudio facilita la comprensión de otras ciencias.

La escala de la física

De lo expuesto hasta ahora, debería quedar claro que, para alcanzar sus metas en cualquiera de los distintos campos de las ciencias naturales y la ingeniería, es necesario tener una base sólida en las leyes de la física. La razón de esto es simplemente que las leyes de la física gobiernan todo en el universo observable en todas las escalas medibles de longitud, masa y tiempo. Es fácil decirlo, pero para entender lo que realmente significa, tenemos que ser un poco más cuantitativos. Así pues, antes de analizar las distintas escalas que la física nos permite explorar, veamos primero el concepto de "orden de magnitud", que utilizamos para comprender los amplios rangos de longitud, masa y tiempo que consideramos en este texto (Figura 1.3).



(a) (b) (c)

FIGURA 1.3 (a) Con un microscopio de efecto túnel, los científicos pueden ver cada uno de los átomos (diámetros de unos 10^{-10} m) que componen esta lámina de oro. (b) Diminutos fitoplancton nadan entre los cristales de hielo en el océano Antártico. Su longitud oscila entre unos cuantos micrómetros (1 μm es 10^{-6} m) y hasta 2 mm (1 mm es 10^{-3} m). (c) Estas dos galaxias en colisión, conocidas como NGC 4676A (derecha) y NGC 4676B (izquierda), reciben el apodo de "Los Ratones" por la cola de gas que emana de cada una. Se encuentran a 300 millones de años luz de

la Tierra, en la constelación Coma Berenices. Con el tiempo, estas dos galaxias se fusionarán en una sola (créditos: a. modificación del trabajo de "Erwinrossen"/Wikimedia Commons; b. modificación del trabajo del Prof. Gordon T. Taylor, Universidad de Stony Brook, Colecciones de NOAA Corps; c. modificación del trabajo de la NASA, H. Ford (Universidad Johns Hopkins, [Johns Hopkins University, JHU]), G. Illingworth (Universidad de California, Santa Cruz [UCSC]/LO), M. Clampin (STScI), G. Hartig (STScI), el equipo científico de la Sociedad Estadounidense de Química [American Chemical Society, ACS] y la ESA).

Orden de magnitud

El **orden de magnitud** de un número es la potencia de 10 que más se aproxima a este. Así, el orden de magnitud se refiere a la escala (o tamaño) de un valor. Cada potencia de 10 representa un orden de magnitud diferente. Por ejemplo, $10^1, 10^2, 10^3$, etc., son todos órdenes de magnitud diferentes, al igual que $10^0 = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ y 10^{-3}. Para hallar el orden de magnitud de un número, tome el logaritmo (log) de base 10 del número y redondéelo al número entero más cercano, entonces el orden de magnitud del número es simplemente la potencia resultante de 10. Por ejemplo, el orden de magnitud de 800 es 10^3 porque $\log_{10} 800 \approx 2{,}903$, que se redondea a 3. Del mismo modo, el orden de magnitud de 450 es 10^3 porque $\log_{10} 450 \approx 2{,}653$, que redondea a 3 también. Así, decimos que los números 800 y 450 son del mismo orden de magnitud: 10^3. Sin embargo, el orden de magnitud de 250 es 10^2 porque $\log_{10} 250 \approx 2{,}397$, que se redondea a 2.

Una forma equivalente, pero más rápida de encontrar el orden de magnitud de un número, es primero escribirlo en notación científica y luego comprobar si el primer factor es mayor o menor que $\sqrt{10} = 10^{0{,}5} \approx 3$. La idea es que $\sqrt{10} = 10^{0{,}5}$ es el punto medio entre $1 = 10^0$ y $10 = 10^1$ en una escala logarítmica de base 10. Así, si el primer factor es menor que $\sqrt{10}$, entonces, lo redondeamos a 1 y el orden de magnitud es simplemente cualquier potencia de 10 que se requiera para escribir el número en notación científica. Por otro lado, si el primer factor es mayor que $\sqrt{10}$, entonces lo redondeamos a 10 y el orden de magnitud es una potencia de 10 mayor que la potencia necesaria para escribir el número en notación científica. Por ejemplo, el número 800 puede escribirse en notación científica como 8×10^2. Porque 8 es mayor que $\sqrt{10} \approx 3$, decimos que el orden de magnitud de 800 es $10^{2+1} = 10^3$. El número 450 puede escribirse como $4{,}5 \times 10^2$, por lo que su orden de magnitud también es 10^3 porque 4,5 es mayor que 3. Sin embargo, 250 escrito en notación científica es $2{,}5 \times 10^2$ y 2,5 es menor que 3, por lo que su orden de magnitud es 10^2.

El orden de magnitud de un número está destinado a ser un cálculo aproximado de la escala (o tamaño) de su valor. Es simplemente una forma de redondear los números de forma coherente a la potencia de 10 más cercana. Esto facilita los cálculos mentales aproximados con números muy grandes y muy pequeños. Por ejemplo, el diámetro de un átomo de hidrógeno es del orden de 10^{-10} m, mientras que el diámetro del Sol es del orden de 10^9 m, por lo que se necesitaría aproximadamente $10^9/10^{-10} = 10^{19}$ átomos de hidrógeno que se extenderían a lo largo del diámetro del Sol. Esto es mucho más fácil de hacer mentalmente que usar los valores más precisos de $1{,}06 \times 10^{-10}$ m para el diámetro de un átomo de hidrógeno y $1{,}39 \times 10^9$ m para el diámetro del Sol, para encontrar que se necesitaría $1{,}31 \times 10^{19}$ átomos de hidrógeno que se extenderían a lo largo del diámetro del Sol. Además de ser más fácil, el cálculo aproximado es casi tan informativo como el cálculo preciso.

Rangos conocidos de longitud, masa y tiempo

La inmensidad del universo y la amplitud en la que se aplica la física se ilustran con la amplia gama de ejemplos de longitudes, masas y tiempos conocidos (dados como órdenes de magnitud) en la Figura 1.4. Al examinar esta tabla se dará una idea de la variedad de temas posibles en física y valores numéricos. Una buena forma de comprender la amplitud de los rangos de valores en la Figura 1.4 es intentar responder a algunas preguntas comparativas sencillas, como las siguientes:

- ¿Cuántos átomos de hidrógeno se necesitan para atravesar el diámetro del Sol?
  (Respuesta: 10^9 m/10^{-10} m =10^{19} átomos de hidrógeno)
- ¿Cuántos protones hay en una bacteria?
  (Respuesta: 10^{-15} kg/10^{-27} kg = 10^{12} protones)
- ¿Cuántas operaciones en coma flotante puede hacer una supercomputadora en 1 día?

(Respuesta: 10^5 s/10^{-17} s = 10^{22} operaciones en coma flotante)

Al estudiar la Figura 1.4, tómese un tiempo para plantear preguntas similares que le interesen y luego intente responderlas. De este modo, se puede dar vida a casi cualquier tabla de números.

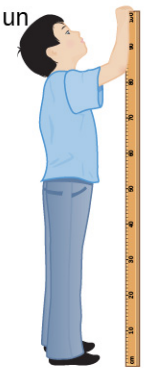
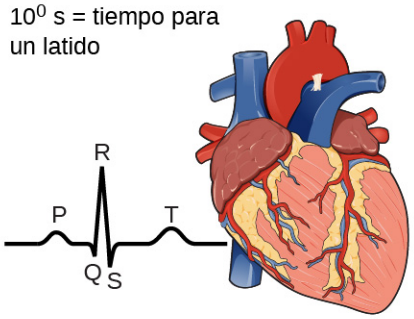
Longitud en metros (m)	Masas en kilogramos (kg)	Tiempo en segundos (s)
10^{-15} m = diámetro del protón	10^{-30} kg = masa del electrón	10^{-22} s = vida media de un núcleo muy inestable
10^{-14} m = diámetro del núcleo grande	10^{-27} kg = masa del protón	10^{-17} s = tiempo para la operación de un solo punto flotante en una supercomputadora
10^{-10} m = diámetro del átomo de hidrógeno	10^{-15} kg = masa de la bacteria	10^{-15} s = tiempo para una oscilación de luz visible
10^{-7} m = diámetro del virus típico	10^{-5} kg = masa de un mosquito	10^{-13} s = tiempo para una vibración de un átomo en un sólido
10^{-2} m = ancho de la uña del dedo meñique	10^{-2} kg = masa de un colibrí	10^{-3} s = tiempo para una vibración de un átomo en un sólido
10^{0} m = altura de un niño de 4 años 	10^{0} kg = masa de un litro de agua 1 litro 	10^{0} s = tiempo para un latido 
10^{2} m = longitud de un campo de fútbol	10^{2} kg = masa de una persona	10^{5} s = un día
10^{7} m = diámetro de la Tierra	10^{19} kg = masa de la atmósfera	10^{7} s = un año
10^{13} m = diámetro del sistema solar	10^{22} kg = masa de la Luna	10^{9} s = vida humana
10^{16} m = distancia que recorre la luz en un año (un año luz)	10^{25} kg = masa de la Tierra	10^{11} s = historia humana registrada
10^{21} m = diámetro de la Vía Láctea	10^{30} kg = masa del Sol	10^{17} s = edad de la Tierra
10^{26} m = distancia al borde del universo observable	10^{53} kg = límite superior de la masa del universo conocido	10^{18} s = edad del universo

FIGURA 1.4 Esta tabla muestra los órdenes de magnitud de la longitud, la masa y el tiempo.

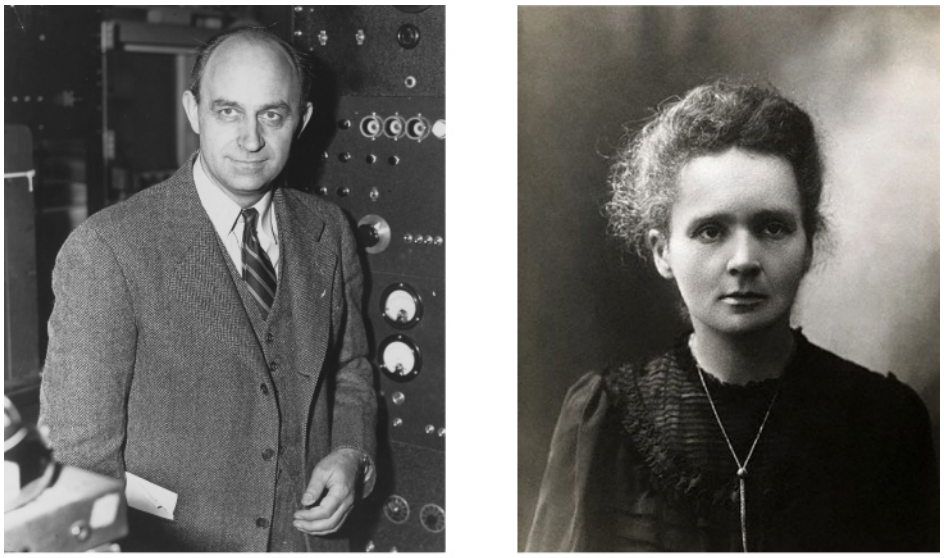
INTERACTIVO

Visite este sitio (https://openstax.org/l/21scaleuniv) para explorar de forma interactiva la amplia gama de escalas de longitud de nuestro universo. Desplácese hacia abajo y hacia arriba en la escala para ver cientos de organismos y objetos, y haga clic en cada uno de los objetos para obtener más información.

Construir modelos

¿Cómo hemos llegado a conocer las leyes que rigen los fenómenos naturales? Lo que llamamos leyes de la naturaleza son una descripción concisa del universo que nos rodea. Son declaraciones humanas de las leyes o reglas subyacentes que siguen todos los procesos naturales. Estas leyes son intrínsecas al universo; los

humanos no las crearon y no pueden cambiarlas. Solo podemos descubrirlas y comprenderlas. Su descubrimiento es un esfuerzo muy humano, con todos los elementos de misterio, imaginación, lucha, triunfo y decepción inherentes a cualquier esfuerzo creativo (Figura 1.5). El pilar del descubrimiento de las leyes naturales es la observación; los científicos deben describir el universo tal como es, no como lo imaginamos.



(a) Enrico Fermi (b) Marie Curie

FIGURA 1.5 (a) Enrico Fermi (1901 – 1954) nació en Italia. Al aceptar el Premio Nobel en Estocolmo en 1938 por sus trabajos sobre la radioactividad artificial producida por neutrones, se llevó a su familia a los Estados Unidos en lugar de volver a su país con el gobierno de entonces. Adquirió la ciudadanía estadounidense y fue uno de los principales participantes en el Proyecto Manhattan. (b) Marie Curie (1867 – 1934) sacrificó bienes monetarios para financiar sus primeras investigaciones y afectó su salud al exponerse a la radiación. Es la única persona que ha ganado los premios Nobel de Física y Química. Una de sus hijas también ganó un Premio Nobel (créditos: a. modificación del trabajo del Departamento de Energía de los Estados Unidos).

Un **modelo** es una representación de algo que a menudo es demasiado difícil (o imposible) de mostrar directamente. Aunque un modelo esté justificado por las pruebas experimentales, solo es preciso para describir ciertos aspectos de un sistema físico. Un ejemplo es el modelo de Bohr de los átomos de un solo electrón, en el que el electrón se imagina orbitando el núcleo, de forma análoga a como los planetas orbitan el Sol (Figura 1.6). No podemos observar las órbitas de los electrones directamente, pero la imagen mental sirve para explicar algunas de las observaciones que podemos hacer, como la emisión de luz de los gases calientes (espectros atómicos). Sin embargo, otras observaciones muestran que la imagen del modelo de Bohr no es realmente el aspecto de los átomos. El modelo es "erróneo", pero sigue siendo útil para algunos fines. Los físicos utilizan los modelos para diversos fines. Por ejemplo, los modelos permiten a los físicos analizar un escenario y realizar un cálculo, o bien pueden utilizarse para representar una situación en forma de simulación informática. Sin embargo, en última instancia, los resultados de estos cálculos y simulaciones deben comprobarse por otros medios, es decir, por la observación y la experimentación.

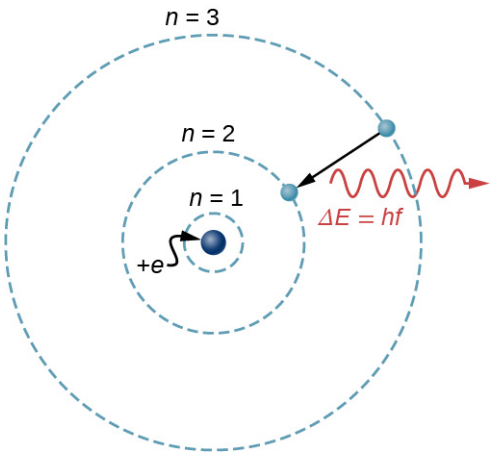


FIGURA 1.6 ¿Qué es un modelo? El modelo de Bohr de un átomo de un solo electrón muestra al electrón que orbita alrededor del núcleo en una de varias órbitas circulares posibles. Como todos los modelos, capta algunos aspectos del sistema físico, pero no todos.

La palabra *teoría* tiene un significado diferente para los científicos que el que suele tener en la conversación cotidiana. En particular, para un científico, una teoría no es lo mismo que una "conjetura" o una "idea" o incluso una "hipótesis". La frase "es solo una teoría" podría carecer de sentido y ser una tontería para los científicos, porque la ciencia se basa en la noción de teorías. Para un científico, una **teoría** es una explicación comprobable de los patrones de la naturaleza apoyada en pruebas científicas y verificada en múltiples ocasiones por varios grupos de investigadores. Algunas teorías incluyen modelos que permiten visualizar los fenómenos, mientras que otras no. La teoría de la gravedad de Newton, por ejemplo, no requiere ningún modelo o imagen mental, porque podemos observar los objetos directamente con nuestros propios sentidos. La teoría cinética de los gases, en cambio, es un modelo en el que se considera que un gas está compuesto por átomos y moléculas. Los átomos y las moléculas son demasiado pequeños para ser observados directamente con nuestros sentidos, por lo que los imaginamos mentalmente para entender lo que los instrumentos nos dicen sobre el comportamiento de los gases. Aunque los modelos solo pretenden describir con precisión ciertos aspectos de un sistema físico, una teoría debe describir todos los aspectos de cualquier sistema que entre en su ámbito de aplicación. En particular, cualquier consecuencia comprobable de una teoría debería verificarse experimentalmente. Si un experimento demuestra que una consecuencia de una teoría es falsa, entonces la teoría se descarta o se modifica convenientemente (por ejemplo, limitando su ámbito de aplicación).

Una **ley** utiliza un lenguaje conciso para describir un patrón generalizado en la naturaleza apoyado por pruebas científicas y experimentos repetidos. A menudo, una ley puede expresarse en forma de una única ecuación matemática. Las leyes y las teorías son similares en el sentido de que ambas son afirmaciones científicas que resultan de una hipótesis probada y están respaldadas por pruebas científicas. Sin embargo, la designación de *ley* suele reservarse para un enunciado conciso y muy general que describe fenómenos de la naturaleza, como la ley de que la energía se conserva durante cualquier proceso, o la segunda ley del movimiento de Newton, que relaciona la fuerza (F), la masa (m) y la aceleración (a) mediante la sencilla ecuación $F = ma$. Una teoría, en cambio, es una declaración menos concisa del comportamiento observado. Por ejemplo, la teoría de la evolución y la teoría de la relatividad no pueden expresarse de forma suficientemente concisa para ser consideradas leyes. La mayor diferencia entre una ley y una teoría es que una teoría es mucho más compleja y dinámica. Una ley describe una sola acción, mientras que una teoría explica todo un grupo de fenómenos relacionados. Los enunciados de aplicación menos amplia suelen llamarse principios (como el principio de Pascal, que solo se aplica a los fluidos), se hace poca distinción entre leyes y principios.

Los modelos, las teorías y las leyes que elaboramos implican a veces la existencia de objetos o fenómenos que aún no se han observado. Estas predicciones son triunfos notables y tributos al poder de la ciencia. Es el orden subyacente en el universo lo que permite a los científicos hacer predicciones tan espectaculares. Sin embargo, si la experimentación no verifica nuestras predicciones, entonces la teoría o ley es errónea, por muy elegante o

conveniente que sea. Las leyes nunca pueden conocerse con absoluta certeza porque es imposible realizar todos los experimentos imaginables para confirmar una ley para todos los escenarios posibles. Los físicos parten de la premisa de que todas las leyes y teorías científicas son válidas hasta que se observa un contraejemplo. Si un experimento de buena calidad y verificable contradice una ley o teoría bien establecida, entonces la ley o teoría debe modificarse o descartarse por completo.

El estudio de la ciencia en general, y de la física en particular, es una aventura muy parecida a la exploración de un océano inexplorado. Se hacen descubrimientos, se formulan modelos, teorías y leyes, y la belleza del universo físico se hace más sublime por los conocimientos adquiridos.

1.2 Unidades y estándares

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir cómo se definen las unidades básicas del Sistema Internacional (SI).
- Describir cómo se crean las unidades derivadas a partir de las unidades base.
- Expresar cantidades dadas en unidades del SI con prefijos métricos.

Como hemos visto anteriormente, la gama de objetos y fenómenos que estudia la física es inmensa. Desde la vida increíblemente corta de un núcleo hasta la edad de la Tierra, desde los minúsculos tamaños de las partículas subnucleares hasta la enorme distancia de los extremos del universo conocido, desde la fuerza ejercida por una pulga que salta hasta la fuerza entre la Tierra y el Sol, hay suficientes factores de 10 para desafiar la imaginación incluso del científico más experimentado. Dar valores numéricos a las cantidades físicas y ecuaciones a los principios físicos nos permite comprender la naturaleza de una manera mucho más profunda que las descripciones cualitativas por sí solas. Para comprender esta amplia gama, también debemos disponer de unidades adaptadas para expresarlas. Descubriremos que, incluso en la discusión potencialmente mundana de los metros, los kilogramos y los segundos, aparece una profunda simplicidad de la naturaleza: todas las cantidades físicas pueden expresarse como combinaciones de solo siete cantidades físicas básicas.

Definimos la **cantidad física** bien sea al especificar cómo se mide o al indicar cómo se calcula a partir de otras mediciones. Por ejemplo, podemos definir la distancia y el tiempo al especificar los métodos para medirlos, como el uso de un metro y de un cronómetro. Entonces, podríamos definir la *rapidez media* al expresar que se calcula como la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo de viaje.

Las medidas de las magnitudes físicas se expresan en términos de **unidades**, que son valores estandarizados. Por ejemplo, la duración de una carrera, que es una cantidad física, puede expresarse en unidades de metros (para los velocistas) o de kilómetros (para los fondistas). Sin unidades estandarizadas, sería extremadamente difícil para los científicos expresar y comparar de forma significativa los valores medidos (Figura 1.7).

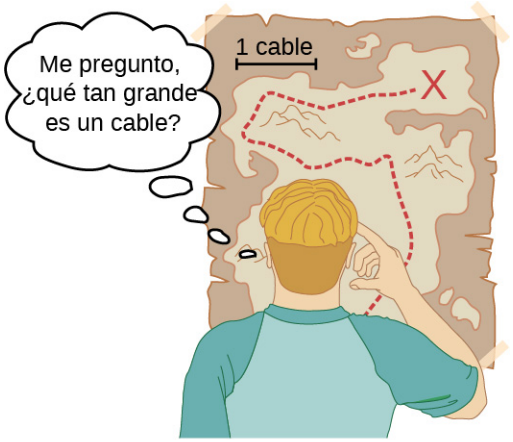


FIGURA 1.7 Las distancias que se dan en unidades desconocidas son extremadamente inútiles, lo cual es exasperante.

En el mundo se utilizan dos grandes sistemas de unidades: **unidades del SI** (por el *Système International d'Unités* del francés), también conocido como *sistema métrico internacional*, y **unidades inglesas** (también conocidas como *sistema tradicional* o *imperial*). Las unidades inglesas se utilizaban históricamente en las naciones que gobernaba el Imperio británico y siguen siendo muy utilizadas en los Estados Unidos. Las unidades inglesas también pueden denominarse sistema *pie, libra, segundo* (foot-pound-second, fps), en contraposición al sistema *centímetro, gramo, segundo* (centimeter, gram, second, cgs). También puede encontrar el término *unidades SAE*, que recibe su nombre de la Sociedad de Ingenieros de Automoción (Society of Automotive Engineers, SAE). Los productos como los elementos de fijación y las herramientas de automoción (por ejemplo, las llaves) que se miden en pulgadas y no en unidades métricas se denominan *elementos de fijación SAE* o *llaves SAE*.

Prácticamente todos los países del mundo (excepto los Estados Unidos) utilizan ahora las unidades del SI como estándar. El sistema métrico también es el sistema estándar acordado por los científicos y los matemáticos.

Unidades del SI: unidades básicas y derivadas

En cualquier sistema, las unidades de algunas cantidades físicas deben definirse mediante un proceso de medición. Se denominan **cantidades base** de ese sistema y sus unidades son las **unidades base** del sistema. Todas las demás cantidades físicas pueden expresarse entonces como combinaciones algebraicas de las cantidades base. Luego, cada una de estas cantidades físicas se conoce como **cantidad derivada**, y cada unidad se denomina **unidad derivada**. La elección de las cantidades base es un tanto arbitraria, siempre y cuando sean independientes entre sí y todas las demás cantidades puedan derivarse de ellas. Por lo general, la meta es elegir como cantidades base las cantidades físicas que puedan medirse con gran precisión. La razón es sencilla. Dado que las unidades derivadas pueden expresarse como combinaciones algebraicas de las unidades base, solo pueden ser tan exactas y precisas como las unidades base de las que se derivan.

Con base en estas consideraciones, la Organización Internacional de Estándares recomienda el empleo de siete cantidades base, que forman el Sistema Internacional de Cantidades (International System of Quantities, ISQ). Estas son las cantidades base que se utilizan para definir las unidades base del SI. La Tabla 1.1 enumera estas siete cantidades base del ISQ y las correspondientes unidades base del SI.

Cantidad base del ISQ	Unidad base del SI
Longitud	metro (m)
Masa	kilogramo (kg)
Tiempo	segundo (s)
Corriente eléctrica	amperios (A)
Temperatura termodinámica	kelvin (K)
Cantidad de sustancia	mol (mol)
Intensidad luminosa	candela (cd)

TABLA 1.1 Cantidades base del ISQ y sus unidades del SI

Probablemente ya conozca algunas cantidades derivadas que pueden formarse a partir de las cantidades base en la Tabla 1.1. Por ejemplo, el concepto geométrico de área se calcula siempre como el producto de dos longitudes. Por lo tanto, el área es una cantidad derivada que puede expresarse en términos de unidades de base del SI mediante el empleo de metros cuadrados ($\mathrm{m} \times \mathrm{m} = \mathrm{m}^2$). Del mismo modo, el volumen es una cantidad derivada que puede expresarse en metros cúbicos (m^3). La rapidez es la longitud por el tiempo; así que en términos de unidades base del SI, podríamos medirla en metros por segundo (m/s). La densidad

volumen-masa (o simplemente densidad) es la masa por volumen, que se expresa en términos de unidades básicas del SI, como kilogramos por metro cúbico (kg/m^3). Los ángulos también pueden considerarse cantidades derivadas porque pueden definirse como el cociente de la longitud de arco subtendida por dos radios de un círculo al radio del círculo. Así se define el radián. Dependiendo de su formación y sus intereses, podrá llegar a otras cantidades derivadas, como la tasa de flujo de masa (kg/s) o la tasa de flujo volumétrico (m^3/s) de un fluido, la carga eléctrica ($A \cdot s$), densidad de flujo de masa [$kg/(m^2 \cdot s)$], y así sucesivamente. Veremos muchos más ejemplos a lo largo de este texto. Por ahora, la cuestión es que toda cantidad física puede derivarse de las siete cantidades base en la Tabla 1.1, y las unidades de toda cantidad física pueden derivarse de las siete unidades base del SI.

En la mayoría de los casos, utilizamos unidades del SI en este texto. Varias unidades que no son del SI se utilizan en unas cuantas aplicaciones en las que son muy comunes, como la medición de la temperatura en grados Celsius (°C), la medición del volumen de los fluidos en litros (L), y la medición de las energías de las partículas elementales en electronvoltios (eV). Siempre que se habla de unidades que no son del SI, se vinculan a las unidades del SI mediante conversiones. Por ejemplo, 1 L es $10^{-3}\ m^3$.

INTERACTIVO

Consulte una fuente completa de información sobre las unidades del SI (https://openstax.org/l/21SIUnits) en la Referencia sobre Constantes, Unidades e Incertidumbre del Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (National Institute of Standards and Technology, NIST).

Unidades de tiempo, longitud y masa: el segundo, el metro y el kilogramo

Los primeros capítulos de este libro de texto se refieren a la mecánica, los fluidos y las ondas. En estos temas, todas las cantidades físicas pertinentes pueden expresarse en términos de las unidades base de longitud, masa y tiempo. Por lo tanto, ahora pasamos a explorar estas tres unidades base; dejaremos el análisis de las otras hasta que sean necesarias más adelante.

El segundo

La unidad de tiempo del SI, el **segundo** (abreviado s), tiene una larga historia. Durante muchos años se definió como 1/86.400 de un día solar medio. De más reciente data, se adoptó un nuevo estándar para ganar mayor exactitud y definir el segundo en términos de un fenómeno físico no variable o constante (porque el día solar se alarga como resultado de la desaceleración paulatina de la rotación de la Tierra). Los átomos de cesio pueden hacerse vibrar de forma muy constante, y estas vibraciones pueden observarse y contarse fácilmente. En 1967 se redefinió el segundo como el tiempo necesario para que se produzcan 9.192.631.770 de estas vibraciones (Figura 1.8). Tenga en cuenta que esto puede parecer más precisión de la que necesitaría, pero no lo es. Los GPS se basan en la precisión de los relojes atómicos para poder darle indicaciones giro a giro en la superficie de la Tierra, lejos de los satélites que transmiten su ubicación.

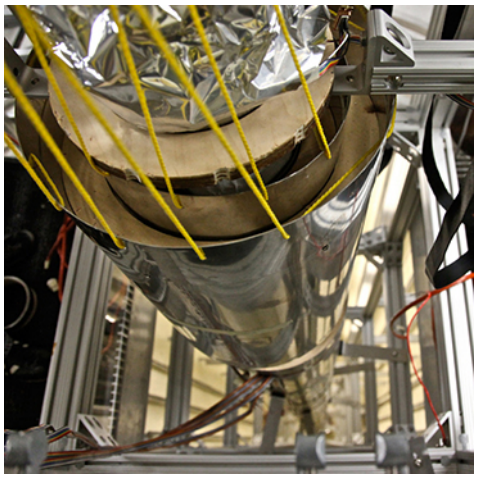


FIGURA 1.8 Un reloj atómico como este utiliza las vibraciones de los átomos de cesio para mantener el tiempo

con una precisión superior a un microsegundo por año. La unidad de tiempo fundamental, el segundo, se basa en estos relojes. Esta imagen se ve desde lo alto de una fuente atómica de casi 30 pies de altura (créditos: Steve Jurvetson).

El metro

La unidad del SI para la longitud es el **metro** (abreviado m); su definición también ha cambiado con el tiempo para mayor precisión. El metro se definió por primera vez en 1791 como 1/10.000.000 de la distancia del ecuador al Polo Norte. Esta medida se mejoró en 1889 al redefinir el metro como la distancia entre dos líneas grabadas en una barra de platino-iridio que se conserva cerca de París. En 1960, ya era posible definir el metro con mayor precisión en términos de longitud de onda de la luz, por lo que se redefinió como 1.650.763,73 longitudes de onda de la luz naranja emitida por los átomos de criptón. En 1983, el metro recibió su definición actual (en parte para mayor exactitud) como la distancia que recorre la luz en el vacío en 1/299.792.458 de segundo (Figura 1.9). Este cambio se produjo tras conocer que la velocidad de la luz es exactamente 299.792.458 m/s. La longitud del metro cambiará si algún día se mide la velocidad de la luz con mayor exactitud.

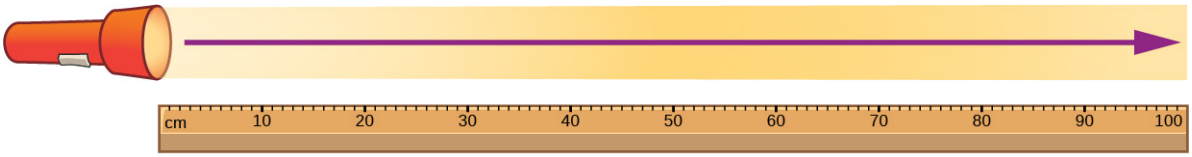


FIGURA 1.9 El metro se define como la distancia que recorre la luz en 1/299.792.458 de segundo en el vacío. La distancia recorrida es la rapidez multiplicada por el tiempo.

El kilo

La unidad del SI para la masa es el **kilogramo** (abreviado kg); desde 1795 hasta 2018 se definió como la masa de un cilindro de platino-iridio conservado con el antiguo patrón de metros en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, cerca de París. Sin embargo, este cilindro ha perdido aproximadamente 50 microgramos desde su creación. Como este es el estándar, esto ha cambiado la forma de definir un kilogramo. Por ello, en mayo de 2019 se adoptó una nueva definición basada en la constante de Planck y otras constantes cuyo valor nunca cambiará. Estudiaremos la constante de Planck en la mecánica cuántica, que es un área de la física que describe cómo funcionan las piezas más pequeñas del universo. El kilogramo se mide en una balanza Kibble (vea la Figura 1.10). Cuando se coloca un peso en una balanza Kibble, se produce una corriente eléctrica proporcional a la constante de Planck. Dado que la constante de Planck está definida, las medidas exactas de la corriente en la balanza definen el kilogramo.

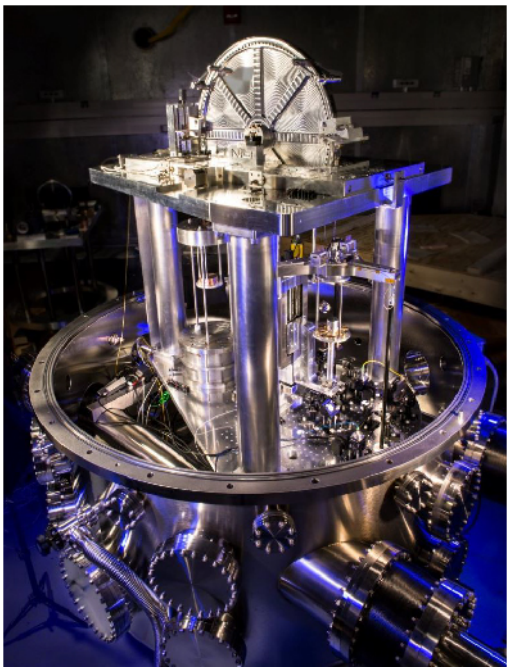


FIGURA 1.10 Redefinición de la unidad de masa del SI. La balanza Kibble del Instituto Nacional de Estándares y Tecnología de los EE. UU. es una máquina que equilibra el peso de una masa de prueba con la corriente eléctrica resultante necesaria para una fuerza que la equilibre.

Prefijos métricos

Las unidades del SI forman parte del **sistema métrico**, que es conveniente para los cálculos científicos y de ingeniería porque las unidades se clasifican por factores de 10. En la Tabla 1.2 se enumeran los prefijos y símbolos métricos utilizados que denotan diversos factores de 10 en las unidades del SI. Por ejemplo, un centímetro es la centésima parte de un metro (en símbolos, 1 cm = 10^{-2} m) y un kilómetro son mil metros (1 km = 10^{3} m). Del mismo modo, un megagramo es un millón de gramos (1 Mg = 10^{6} g), un nanosegundo es la milmillonésima parte de un segundo (1 ns = 10^{-9} s) y un terámetro es un billón de metros (1 Tm = 10^{12} m).

Prefijo	Símbolo	Significado	Prefijo	Símbolo	Significado
yotta-	Y	10^{24}	yocto-	y	10^{-24}
zetta-	Z	10^{21}	zepto-	z	10^{-21}
exa-	E	10^{18}	atto-	a	10^{-18}
peta-	P	10^{15}	femto-	f	10^{-15}
tera-	T	10^{12}	pico-	p	10^{-12}
giga-	G	10^{9}	nano-	n	10^{-9}
mega-	M	10^{6}	micro-	μ	10^{-6}
kilo-	k	10^{3}	mili-	m	10^{-3}
hecto-	h	10^{2}	centi-	c	10^{-2}

Prefijo	Símbolo	Significado	Prefijo	Símbolo	Significado
deca-	da	10^1	deci-	d	10^{-1}

TABLA 1.2 Prefijos métricos para potencias de 10 y sus símbolos

La única regla al utilizar prefijos métricos es que no se pueden “duplicar". Por ejemplo, si se tienen medidas en petámetros (1 Pm = 10^{15} m), no es propio hablar de megagigámetros, aunque $10^6 \times 10^9 = 10^{15}$. En la práctica, el único momento en que esto se vuelve un poco confuso es cuando se habla de masas. Como hemos visto, la unidad de masa básica del SI es el kilogramo (kg), pero hay que aplicar prefijos métricos al gramo (g), porque no se nos permite “duplicar" los prefijos. Así, mil kilogramos (10^3 kg) se escriben como un megagramo (1 Mg) ya que

$$10^3\text{kg} = 10^3 \times 10^3\text{g} = 10^6\text{g} = 1\text{ Mg}.$$

Por cierto, 10^3 kg también recibe el nombre de *tonelada métrica*, abreviada t. Se trata de una de las unidades ajenas al sistema SI que se consideran aceptables para su uso con las unidades del SI.

Como veremos en el siguiente apartado, los sistemas métricos tienen la ventaja de que las conversiones de unidades solo implican potencias de 10. Hay 100 cm en 1 m, 1000 m en 1 km, etc. En los sistemas no métricos, como el sistema inglés de unidades, las relaciones no son tan sencillas: hay 12 pulgadas (in) en 1 pie, 5280 pies en 1 milla, etc.

Otra ventaja de los sistemas métricos es que la misma unidad puede utilizarse en rangos de valores muy amplios, simplemente al escalarla con un prefijo métrico adecuado. El prefijo se elige por el orden de magnitud de las cantidades físicas que se encuentran habitualmente en la tarea en cuestión. Por ejemplo, las distancias en metros son adecuadas en la construcción, mientras que las distancias en kilómetros son apropiadas para el transporte aéreo, y los nanómetros son convenientes en el diseño óptico. Con el sistema métrico no es necesario inventar unidades para aplicaciones concretas. En su lugar, replanteamos las unidades con las que ya estamos familiarizados.

EJEMPLO 1.1

Uso de prefijos métricos

Replantee la masa $1{,}93 \times 10^{13}\text{kg}$ mediante el empleo de un prefijo métrico tal que el valor numérico resultante sea mayor que uno, pero menor que 1000.

Estrategia

Dado que no se nos permite “duplicar" los prefijos, primero tenemos que replantear la masa en gramos al sustituir el símbolo del prefijo k por un factor de 10^3 (vea la Tabla 1.2). A continuación, debemos ver cuáles dos prefijos en la Tabla 1.2 se acercan más a la potencia resultante de 10 cuando el número se escribe en notación científica. Utilizamos cualquiera de estos dos prefijos que nos dé un número entre uno y 1000.

Solución

Al sustituir la k del kilogramo por un factor de 10^3, encontramos que

$$1{,}93 \times 10^{13}\text{kg} = 1{,}93 \times 10^{13} \times 10^3\text{g} = 1{,}93 \times 10^{16}\text{g}.$$

En la Tabla 1.2, vemos que 10^{16} está entre "peta" (10^{15}) y "exa" (10^{18}). Si utilizamos el prefijo "peta", encontramos que $1{,}93 \times 10^{16}\text{g} = 1{,}93 \times 10^1\text{Pg}$, dado que $16 = 1 + 15$. Alternativamente, si utilizamos el prefijo "exa" encontramos que $1{,}93 \times 10^{16}\text{g} = 1{,}93 \times 10^{-2}\text{Eg}$, dado que $16 = -2 + 18$. Dado que el problema pide el valor numérico entre uno y 1000, utilizamos el prefijo "peta" y la respuesta es 19,3 petagramos (Pg).

Importancia

Es fácil cometer errores aritméticos tontos al pasar de un prefijo a otro, por lo que siempre es buena idea comprobar que nuestra respuesta final coincide con el número con el que empezamos. Una forma fácil de hacerlo es poner los dos números en notación científica y contar las potencias de 10, incluidas las ocultas en los prefijos. Si no nos equivocamos, las potencias de 10 deberían coincidir. En este problema, comenzamos con $1{,}93 \times 10^{13}\text{kg}$, por lo que tenemos 13 + 3 = 16 potencias de 10. Nuestra respuesta final en notación científica es $1{,}93 \times 10^{1}$ Pg, por lo que tenemos 1 + 15 = 16 potencias de 10. Así que, todo está bien.

Si esta masa surgió de un cálculo, también querríamos comprobar si una masa tan grande tiene algún sentido en el contexto del problema. Para esto, la Figura 1.4 podría servir.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.1

Replantee $4{,}79 \times 10^{5}\text{kg}$ utilizando un prefijo métrico tal que el número resultante sea mayor que uno, pero menor que 1000.

1.3 Conversión de unidades

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Utilizar los factores de conversión para expresar el valor de una cantidad dada en diferentes unidades.

A menudo es necesario convertir de una unidad a otra. Por ejemplo, si está leyendo un libro de cocina europeo, es posible que algunas cantidades estén expresadas en unidades de litros y tenga que convertirlas a tazas. Alternativamente, quizá esté leyendo las indicaciones para ir a pie de un lugar a otro y le interese saber cuántas millas va a recorrer. En este caso, es posible que tenga que convertir las unidades de pies o metros a millas.

Veamos un ejemplo sencillo de cómo convertir unidades. Supongamos que queremos convertir 80 metros (m) en kilómetros (km). Lo primero que hay que hacer es enumerar las unidades que tenemos y las unidades a las que queremos convertir. En este caso, tenemos unidades en *metros* y queremos convertir a *kilómetros*. A continuación, tenemos que determinar un factor de conversión que relacione los metros con los kilómetros. Un **factor de conversión** es una relación que expresa cuántas cantidades de una unidad son iguales a otra unidad. Por ejemplo, hay 12 pulgadas (in) en 1 pie, 1609 m en 1 milla (mi), 100 centímetros (cm) en 1 m, 60 segundos (s) en 1 minuto (min), etc. Consulte el Apéndice B para obtener una lista más completa de los factores de conversión. En este caso, sabemos que hay 1000 m en 1 km. Ahora podemos configurar nuestra conversión de unidades. Escribimos las unidades que tenemos y luego las multiplicamos por el factor de conversión para que se anulen, como se indica:

$$80\ \cancel{\text{m}} \times \frac{1\ \text{km}}{1.000\ \cancel{\text{m}}} = 0{,}080\ \text{km}.$$

Observe que la unidad de metro no deseada se anula, lo que deja solamente la unidad de kilómetro deseada. Puede utilizar este método para convertir entre cualquier tipo de unidad. Ahora, la conversión de 80 m a kilómetros es simplemente el uso de un prefijo métrico, como vimos en la sección anterior, por lo que podemos obtener la misma respuesta con la misma facilidad al observar que

$$80\ \text{m} = 8{,}0 \times 10^{1}\ \text{m} = 8{,}0 \times 10^{-2}\text{km} = 0{,}080\ \text{km},$$

ya que "kilo" significa 10^{3} (vea la Tabla 1.2) y $1 = -2 + 3$. Sin embargo, el uso de factores de conversión es útil cuando se convierte entre unidades que no son métricas o cuando se convierte entre unidades derivadas, como ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.2

Conversión de unidades no métricas a métricas

La distancia de la universidad a casa es de 10 mi y normalmente tarda 20 minutos en conducir esta distancia. Calcule la rapidez media en metros por segundo (m/s). (*Nota:* La rapidez media es la distancia recorrida, dividida entre el tiempo de viaje).

Estrategia

Primero, calculamos la rapidez media con las unidades dadas, luego podemos obtener la rapidez media en las unidades deseadas, al elegir los factores de conversión correctos y multiplicar por estos. Los factores de conversión correctos son los que anulan las unidades no deseadas y dejan en su lugar las unidades deseadas. En este caso, queremos convertir millas a metros, por lo que necesitamos saber que hay 1609 m en 1 mi. También queremos convertir minutos a segundos, por lo que utilizamos la conversión de 60 s en 1 min.

Solución

1. Calcule la rapidez media. La rapidez media es la distancia recorrida, dividida entre el tiempo de viaje. (Por el momento, tome esta definición como un hecho. La rapidez media y otros conceptos de movimiento se tratan en capítulos posteriores). En forma de ecuación,
$$\text{Rapidez media} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}.$$
2. Sustituya los valores dados para la distancia y el tiempo:
$$\text{Rapidez media} = \frac{10\text{ mi}}{20\text{ min}} = 0{,}50\,\frac{\text{mi}}{\text{min}}.$$
3. Convierta las millas por minuto en metros por segundo al multiplicar por el factor de conversión que anula las millas y deja los metros, y también por el factor de conversión que anula los minutos y deja los segundos:
$$0{,}50\,\frac{\cancel{\text{milla}}}{\cancel{\text{min}}} \times \frac{1.609\text{ m}}{1\ \cancel{\text{milla}}} \times \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} = \frac{(0{,}50)(1.609)}{60}\text{ m/s} = 13\text{ m/s}.$$

Importancia

Compruebe la respuesta de las siguientes maneras:

1. Asegúrese de que las unidades en la conversión de unidades se anulen correctamente. Si el factor de conversión de unidades se ha escrito al revés, las unidades no se anulan correctamente en la ecuación. Vemos que la "milla" en el numerador en 0,50 mi/min anula la "milla" en el denominador en el primer factor de conversión. Además, el "min" del denominador en 0,50 mi/min anula el "min" del numerador en el segundo factor de conversión.
2. Compruebe que las unidades de la respuesta final son las deseadas. El problema nos pedía resolver la rapidez media en unidades de metros por segundo y, tras las anulaciones, las únicas unidades que quedan son un metro (m) en el numerador y un segundo (s) en el denominador, por lo que efectivamente hemos obtenido estas unidades.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.2

La luz viaja alrededor de 9 petámetros (Pm) en un año. Dado que un año es aproximadamente 3×10^7 s, ¿cuál es la velocidad de la luz en metros por segundo?

EJEMPLO 1.3

Conversión entre unidades métricas

La densidad del hierro es $7{,}86\ \text{g/cm}^3$ en condiciones normales. Convierta esto a kg/m^3.

Estrategia

Necesitamos convertir los gramos en kilogramos y los centímetros cúbicos en metros cúbicos. Los factores de conversión que necesitamos son $1\ \text{kg} = 10^3\,\text{g}$ y $1\ \text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$. Sin embargo, estamos tratando con centímetros cúbicos ($\text{cm}^3 = \text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm}$), por lo que tenemos que utilizar el segundo factor de conversión tres veces (es decir, tenemos que elevarlo al cubo). La idea sigue siendo multiplicar por los factores de conversión de forma que se anulen las unidades que queremos eliminar y se introduzcan las que queremos mantener.

Solución

$$7{,}86\,\frac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{cm}}^{\,3}} \times \frac{\text{kg}}{10^3\,\cancel{\text{g}}} \times \left(\frac{\cancel{\text{cm}}}{10^{-2}\,\text{m}}\right)^3 = \frac{7{,}86}{(10^3)(10^{-6})}\,\text{kg/m}^3 = 7{,}86 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

Importancia

Recuerde que siempre es importante comprobar la respuesta.

1. Asegúrese de anular correctamente las unidades en la conversión de unidades. Vemos que el gramo ("g") en el numerador en $7{,}86\ \text{g/cm}^3$ anula el "g" en el denominador en el primer factor de conversión. Además, los tres factores de "cm" en el denominador en $7{,}86\ \text{g/cm}^3$ se anulan con los tres factores de "cm" en el numerador que obtenemos al elevar al cubo el segundo factor de conversión.
2. Compruebe que las unidades de la respuesta final son las deseadas. El problema nos pedía la conversión a kilogramos por metro cúbico. Tras las anulaciones que acabamos de describir, vemos que las únicas unidades que nos quedan son "kg" en el numerador y tres factores de "m" en el denominador (es decir, un factor de "m" al cubo, o "m^3"). Por lo tanto, las unidades de la respuesta final son correctas.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.3

Sabemos por la Figura 1.4 que el diámetro de la Tierra es del orden de 10^7 m, por lo que el orden de magnitud de su área de superficie es de $10^{14}\ \text{m}^2$. ¿Cuánto es eso en kilómetros cuadrados (es decir, km^2)? (Intente hacerlo tanto al convertir 10^7 m a km y luego elevar al cuadrado como al convertir $10^{14}\ \text{m}^2$ directamente a kilómetros cuadrados. Debería obtener la misma respuesta en ambos casos).

Puede que las conversiones de unidades no parezcan muy interesantes, pero no hacerlas quizá resulte costoso. Un ejemplo famoso de esta situación se vio con el *orbitador climático de Marte*. Esta sonda fue lanzada por la NASA el 11 de diciembre de 1998. El 23 de septiembre de 1999, mientras intentaba guiar la sonda hacia su órbita prevista alrededor de Marte, la NASA perdió el contacto con la sonda. Las investigaciones posteriores demostraron que un programa informático denominado SM_FORCES (o "small forces" [pequeñas fuerzas]) registraba los datos de rendimiento de los propulsores en las unidades inglesas de libra-segundo (lb-s). Sin embargo, otros programas informáticos que utilizaban estos valores para las correcciones de rumbo esperaban que se registraran en las unidades del sistema internacional de newton-segundos (N-s), tal y como dictaban los protocolos de la interfaz del software. A causa de este error, la sonda siguió una trayectoria muy distinta a la que la NASA pensaba que estaba siguiendo, lo que probablemente hizo que la sonda se quemara en la atmósfera de Marte o saliera disparada al espacio. Esta falta de atención a las conversiones de unidades costó cientos de millones de dólares, por no mencionar todo el tiempo invertido por los científicos e ingenieros que trabajaron en el proyecto.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.4

Dado que 1 lb (libra) equivale a 4,45 newton (N), ¿los números emitidos por SM_FORCES eran demasiado grandes o demasiado pequeños?

1.4 Análisis dimensional

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Hallar las dimensiones de una expresión matemática que implique cantidades físicas.
- Determinar si una ecuación que involucre cantidades físicas es dimensionalmente coherente.

La **dimensión** de cualquier cantidad física expresa su dependencia de las cantidades base como un producto de símbolos (o potencias de símbolos) que representan las cantidades base. La Tabla 1.3 enumera las cantidades base y los símbolos utilizados para su dimensión. Por ejemplo, se dice que una medida de longitud tiene la dimensión L o L^1, una medida de masa tiene la dimensión M o M^1, y una medida de tiempo tiene la dimensión T o T^1. Al igual que las unidades, las dimensiones obedecen a las reglas de álgebra. Así pues, el área es el producto de dos longitudes y, por tanto, tiene la dimensión L^2, o sea, la longitud al cuadrado. Del mismo modo, el volumen es el producto de tres longitudes y tiene la dimensión L^3, o longitud al cubo. La rapidez tiene una dimensión de longitud en el tiempo, L/T o LT^{-1}. La densidad volumétrica de la masa tiene la dimensión M/L^3 o ML^{-3}, o masa sobre longitud al cubo. En general, la dimensión de cualquier cantidad física puede escribirse como $\mathrm{L}^a\mathrm{M}^b\mathrm{T}^c\mathrm{I}^d\Theta^e\mathrm{N}^f\mathrm{J}^g$ para algunas potencias a, b, c, d, e, f, y g. Podemos escribir las dimensiones de una longitud en esta forma con $a = 1$ y las seis potencias restantes, todas iguales a cero: $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^0\mathrm{I}^0\Theta^0\mathrm{N}^0\mathrm{J}^0$. Cualquier cantidad con una dimensión que pueda escribirse de forma que las siete potencias sean cero (es decir, su dimensión es $\mathrm{L}^0\mathrm{M}^0\mathrm{T}^0\mathrm{I}^0\Theta^0\mathrm{N}^0\mathrm{J}^0$) se denomina **adimensional** (o a veces "de dimensión 1", porque cualquier cosa elevada a la potencia cero es uno). Los físicos suelen llamar a las cantidades adimensionales *números puros*.

Cantidad base	Símbolo de la dimensión
Longitud	L
Masa	M
Tiempo	T
Corriente	I
Temperatura termodinámica	Θ
Cantidad de sustancia	N
Intensidad luminosa	J

TABLA 1.3 Cantidades base y sus dimensiones

Los físicos suelen utilizar corchetes alrededor del símbolo de una cantidad física para representar las dimensiones de dicha magnitud. Por ejemplo, si r es el radio de un cilindro y h es su altura, entonces escribimos $[r] = \mathrm{L}$ y $[h] = \mathrm{L}$ para indicar que las dimensiones del radio y de la altura son las de la longitud, o L. Del mismo modo, si utilizamos el símbolo A para el área de la superficie de un cilindro y V para su volumen, entonces $[A] = \mathrm{L}^2$ y $[V] = \mathrm{L}^3$. Si utilizamos el símbolo m para la masa del cilindro y ρ para la densidad del material del que está hecho el cilindro, entonces $[m] = \mathrm{M}$ y $[\rho] = \mathrm{ML}^{-3}$.

La importancia del concepto de dimensión surge del hecho de que cualquier ecuación matemática que

relacione cantidades físicas debe ser **dimensionalmente coherente**, lo que significa que la ecuación debe obedecer las siguientes reglas:

- Todos los términos de una expresión deben tener las mismas dimensiones; no tiene sentido sumar o restar cantidades de distinta dimensión (piense en el viejo dicho: "No se pueden sumar manzanas y naranjas"). En particular, las expresiones de cada lado de la igualdad en una ecuación deben tener las mismas dimensiones.
- Los argumentos de cualquiera de las funciones matemáticas estándar como las funciones trigonométricas (como el seno y el coseno), los logaritmos o las funciones exponenciales que aparecen en la ecuación deben ser adimensionales. Estas funciones requieren números puros como entradas y dan números puros como salidas.

Si se viola alguna de estas reglas, una ecuación no es dimensionalmente coherente y no puede ser un enunciado correcto de la ley física. Este simple hecho sirve para comprobar si hay errores tipográficos o de álgebra, recordar las distintas leyes de la física e incluso sugerir la forma que podrían adoptar las nuevas leyes de la física. Este último uso de las dimensiones no se contempla en este texto, pero es algo que sin duda aprenderá más adelante en su carrera académica.

EJEMPLO 1.4

Usar las dimensiones para recordar una ecuación

Supongamos que necesitamos la fórmula del área de un círculo para algún cálculo. Al igual que muchas personas que aprendieron geometría hace demasiado tiempo como para recordarlo con certeza, hay dos expresiones que nos vienen a la mente cuando pensamos en círculos: πr^2 y $2\pi r$. Una expresión es la circunferencia de un círculo de radio r y la otra es su área. Pero ¿cuál es cuál?

Estrategia

Una estrategia natural es buscarla, pero puede llevar tiempo encontrar información de una fuente fiable. Además, aunque creamos que la fuente es fiable, no debemos confiar en todo lo que leemos. Es bueno tener una forma de comprobarlo dos veces con solo pensarlo. Además, es posible que nos encontremos en una situación en la que no podamos consultar estos aspectos (por ejemplo, durante un examen). Por lo tanto, la estrategia es encontrar las dimensiones de ambas expresiones por el hecho de que dichas dimensiones siguen las reglas de álgebra. Si una de las expresiones no tiene las mismas dimensiones que el área, entonces no puede ser la ecuación correcta para el área de un círculo.

Solución

Sabemos que la dimensión del área es L^2. Ahora, la dimensión de la expresión πr^2 es

$$[\pi r^2] = [\pi] \cdot [r]^2 = 1 \cdot \mathrm{L}^2 = \mathrm{L}^2,$$

ya que la constante π es un número puro y el radio r es una longitud. Por lo tanto, πr^2 tiene la dimensión de área. Del mismo modo, la dimensión de la expresión $2\pi r$ es

$$[2\pi r] = [2] \cdot [\pi] \cdot [r] = 1 \cdot 1 \cdot \mathrm{L} = \mathrm{L},$$

ya que las constantes 2 y π son adimensionales y el radio r es una longitud. Vemos que $2\pi r$ tiene la dimensión de la longitud, lo que significa que no puede ser un área.

Descartamos $2\pi r$ porque no es dimensionalmente coherente con ser un área. Vemos que πr^2 es dimensionalmente coherente con ser un área, así que si tenemos que elegir entre estas dos expresiones, πr^2 es la que hay que elegir.

Importancia

Esto puede parecer un ejemplo tonto, pero las ideas son muy generales. Siempre que conozcamos las dimensiones de cada una de las magnitudes físicas que aparecen en una ecuación, podremos comprobar si la ecuación es dimensionalmente coherente. Por otro lado, al saber que las ecuaciones verdaderas son dimensionalmente coherentes, podemos hacer coincidir las expresiones de nuestra memoria imperfecta con

las cantidades para las que podrían ser expresiones. Hacer esto no nos ayudará a recordar los factores adimensionales que aparecen en las ecuaciones (por ejemplo, si accidentalmente hubiera confundido las dos expresiones del ejemplo en $2\pi r^2$, entonces el análisis dimensional no ayuda), aunque sí nos permite recordar la forma básica correcta de las ecuaciones.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.5

Supongamos que queremos la fórmula del volumen de una esfera. Las dos expresiones que suelen mencionarse en los análisis elementales de las esferas son $4\pi r^2$ y $4\pi r^3/3$. Una es el volumen de una esfera de radio r y la otra es su superficie. ¿Cuál es el volumen?

EJEMPLO 1.5

Comprobación de la coherencia dimensional de las ecuaciones

Considere las cantidades físicas s, v, a, y t con dimensiones $[s] = \mathrm{L}$, $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$, $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$, y $[t] = \mathrm{T}$. Determine si cada una de las siguientes ecuaciones es dimensionalmente coherente: (a) $s = vt + 0{,}5at^2$; (b) $s = vt^2 + 0{,}5at$; y (c) $v = \mathrm{sen}(at^2/s)$.

Estrategia

Según la definición de coherencia dimensional, tenemos que comprobar que cada término de una ecuación dada tiene las mismas dimensiones que los demás términos de esa ecuación y que los argumentos de cualquier función matemática estándar son adimensionales.

Solución

a. No hay funciones trigonométricas, logarítmicas ni exponenciales de las que preocuparse en esta ecuación, por lo que solo tenemos que fijarnos en las dimensiones de cada término que aparece en la ecuación. Hay tres términos, uno en la expresión de la izquierda y dos en la expresión de la derecha, así que los examinaremos uno por uno:

$$[s] = \mathrm{L}$$
$$[vt] = [v] \cdot [t] = \mathrm{LT}^{-1} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{LT}^0 = \mathrm{L}$$
$$[0{,}5at^2] = [a] \cdot [t]^2 = \mathrm{LT}^{-2} \cdot \mathrm{T}^2 = \mathrm{LT}^0 = \mathrm{L}.$$

Los tres términos tienen la misma dimensión, por lo que esta ecuación es dimensionalmente coherente.

b. De nuevo, no hay funciones trigonométricas, exponenciales ni logarítmicas, por lo que solo tenemos que mirar las dimensiones de cada uno de los tres términos que aparecen en la ecuación:

$$[s] = \mathrm{L}$$
$$[vt^2] = [v] \cdot [t]^2 = \mathrm{LT}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2 = \mathrm{LT}$$
$$[at] = [a] \cdot [t] = \mathrm{LT}^{-2} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{LT}^{-1}.$$

Ninguno de los tres términos tiene la misma dimensión que otro, así que esto es lo incompatible con la coherencia dimensional. El término técnico para una ecuación como esta es *sin sentido*.

c. Esta ecuación contiene una función trigonométrica, por lo que primero debemos comprobar que el argumento de la función seno es adimensional:

$$\left[\frac{at^2}{s}\right] = \frac{[a]\cdot[t]^2}{[s]} = \frac{\mathrm{LT}^{-2}\cdot\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = 1.$$

El argumento es adimensional. Hasta ahora, todo va bien. Ahora tenemos que comprobar las dimensiones de cada uno de los dos términos (es decir, la expresión de la izquierda y la de la derecha) de la ecuación:

$$[v] = \mathrm{LT}^{-1}$$
$$\left[\mathrm{sen}\left(\frac{at^2}{s}\right)\right] = 1.$$

Los dos términos tienen dimensiones diferentes, es decir, la ecuación no es dimensionalmente coherente. Esta ecuación es otro ejemplo de "sin sentido".

Importancia

Si confiamos en las personas, este tipo de comprobaciones dimensionales pueden parecer innecesarias. Sin embargo, tranquilo, cualquier libro de texto sobre una materia cuantitativa como la física (incluido este) contiene casi con toda seguridad algunas ecuaciones con errores tipográficos. La comprobación rutinaria de las ecuaciones mediante el análisis dimensional nos ahorra la vergüenza de utilizar una ecuación incorrecta. Además, comprobar las dimensiones de una ecuación que obtenemos a través de la manipulación algebraica es una buena manera de asegurarnos de que no nos hemos equivocado (o de detectar un error, si lo hemos hecho).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.6

¿La ecuación $v = at$ es dimensionalmente coherente?

Otro punto que hay que mencionar es el efecto de las operaciones de cálculo sobre las dimensiones. Hemos visto que las dimensiones obedecen a las reglas de álgebra, al igual que las unidades, pero ¿qué ocurre cuando tomamos la derivada de una cantidad física con respecto a otra o integramos una cantidad física sobre otra? La derivada de una función no es más que la pendiente de la recta tangente a su gráfico y las pendientes son proporciones, por lo que, para las cantidades físicas v y t, tenemos que la dimensión de la derivada de v respecto a t no es más que la proporción de la dimensión de v sobre la de t:

$$\left[\frac{dv}{dt}\right] = \frac{[v]}{[t]}.$$

Del mismo modo, dado que las integrales son solo sumas de productos, la dimensión de la integral de v con respecto a t es simplemente la dimensión de v por la dimensión de t:

$$\left[\int v dt\right] = [v] \cdot [t].$$

Por el mismo razonamiento, las reglas análogas son válidas para las unidades de las cantidades físicas derivadas de otras cantidades por integración o diferenciación.

1.5 Estimaciones y cálculos de Fermi

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Estimar los valores de las cantidades físicas.

En muchas ocasiones, los físicos, otros científicos e ingenieros necesitan hacer *estimaciones* de una cantidad determinada. Otros términos que se emplean a veces son *estimaciones a partir de conjeturas*, *aproximaciones de orden de magnitud*, *cálculos de servilleta* o *cálculos de Fermi*. (El físico Enrico Fermi, mencionado anteriormente, era famoso por su capacidad para estimar diversos tipos de datos con una precisión sorprendente). ¿Cabrá ese equipo en la parte trasera del auto o tendremos que alquilar un camión? ¿Cuánto tiempo durará esta descarga? ¿Qué tanta corriente habrá en este circuito cuando se encienda? ¿Cuántas casas podría alimentar realmente una central eléctrica propuesta si se construye? Tenga en cuenta que estimar no significa adivinar un número o una fórmula al azar. Mejor dicho, la **estimación** significa utilizar la experiencia previa y el razonamiento físico sólido para llegar a una idea aproximada del valor de una cantidad. Dado que el proceso para determinar una aproximación fiable implica la identificación de principios físicos correctos y una conjetura apropiada acerca de las variables pertinentes, la estimación es muy útil para desarrollar la intuición física. Las estimaciones también nos permiten realizar "comprobaciones de cordura" en los cálculos o las propuestas políticas, ya que nos ayudan a descartar determinados escenarios o cifras poco realistas. Nos permiten desafiar a los demás (y a nosotros mismos) en nuestros esfuerzos por aprender verdades sobre el mundo.

Muchas estimaciones se basan en fórmulas en las que las cantidades de entrada solo se conocen con una precisión limitada. A medida que desarrolle sus habilidades para resolver problemas de física (que se aplican a una amplia variedad de campos), también desarrollará sus habilidades para estimar. Estas habilidades se desarrollan pensando de forma más cuantitativa y estando dispuesto a asumir riesgos. Como con cualquier habilidad, la experiencia ayuda. También ayuda la familiaridad con las dimensiones (vea la Tabla 1.3) y las unidades (vea la Tabla 1.1 y la Tabla 1.2), así como las escalas de las cantidades base (vea la Figura 1.4).

Para progresar en la estimación, es necesario tener algunas ideas definidas sobre cómo pueden estar relacionadas las variables. Las siguientes estrategias sirven para practicar el arte de la estimación:

- *Obtener grandes longitudes a partir de longitudes más pequeñas.* Al estimar las longitudes, recuerde que cualquier cosa puede ser una regla. Así, imagine que divide una cosa grande en cosas más pequeñas, estime la longitud de una de las cosas más pequeñas y multiplique para obtener la longitud de la cosa grande. Por ejemplo, para estimar la altura de un edificio, primero cuente cuántos pisos tiene. Luego, estime el tamaño de un solo piso; imagine cuántas personas tendrían que subirse a los hombros de otras para alcanzar el techo. Por último, estime la altura de una persona. El producto de estas tres estimaciones es su estimación de la altura del edificio. Resulta útil haber memorizado algunas escalas pertinentes de longitud para el tipo de problemas que estará resolviendo. Por ejemplo, conocer algunas de las escalas de longitud en la Figura 1.4 sería práctico. A veces también ayuda hacer esto a la inversa, es decir, para estimar la longitud de una cosa pequeña, imagine un montón de ellas formando una cosa más grande. Por ejemplo, para estimar el grosor de una hoja de papel, calcule el grosor de una pila de papel y luego divídala entre el número de páginas de la pila. Estas mismas estrategias de dividir las cosas grandes en cosas más pequeñas o de sumar las cosas más pequeñas para dar una cosa más grande pueden utilizarse a veces para estimar otras cantidades físicas, como las masas y los tiempos.
- *Obtener áreas y volúmenes a partir de longitudes.* Cuando se trate de un área o un volumen de un objeto complejo, introduzca un modelo sencillo del objeto, como una esfera o una caja. A continuación, estime primero las dimensiones lineales (como el radio de la esfera o la longitud, ancho y altura de la caja) y utilice sus estimaciones para obtener el volumen o el área a partir de fórmulas geométricas estándar. Si tiene una estimación del área o del volumen de un objeto, también puede hacer lo contrario, es decir, utilizar fórmulas geométricas estándar para obtener una estimación de sus dimensiones lineales.
- *Obtener masas a partir de volúmenes y densidades.* Al estimar las masas de los objetos, serviría primero estimar su volumen y luego estimar su masa a partir de una estimación aproximada de su densidad media (recordemos que la densidad tiene la dimensión de la masa sobre longitud al cubo, por lo que la masa es densidad por volumen). Para ello, conviene recordar que la densidad del aire es de aproximadamente 1 kg/m^3, la del agua es de 10^3 kg/m^3 y los sólidos más densos de la vida cotidiana alcanzan un máximo de 10^4 kg/m^3. Preguntarse si un objeto flota o se hunde en el aire o en el agua le da una estimación aproximada de su densidad. También se puede hacer a la inversa; si tiene una estimación de la masa de un objeto y su densidad, puede utilizar esto para obtener una estimación de su volumen.
- *Si todo lo demás falla, limítelo.* En cuanto a las cantidades físicas para las que no tiene mucha intuición, a veces lo mejor que puede hacer es pensar algo así: debe ser más grande que esto y más pequeño que aquello. Por ejemplo, supongamos que hay que calcular la masa de un alce. Tal vez tenga mucha experiencia con los alces y conozca de memoria su masa media. Si es así, genial. Pero para la mayoría de la gente, lo mejor que pueden hacer es pensar algo así: debe ser mayor que una persona (del orden de 10^2 kg) y menor que un auto (del orden de 10^3 kg). Si necesita un solo número para un cálculo posterior, puede tomar la media geométrica del límite superior y del inferior, es decir, los multiplica y luego saca la raíz cuadrada. Para el ejemplo de la masa del alce, esto sería

  $$\left(10^2 \times 10^3\right)^{0,5} = 10^{2,5} = 10^{0,5} \times 10^2 \approx 3 \times 10^2 \text{kg}.$$

  Cuanto más estrechos sean los límites, mejor. Además, no hay reglas inquebrantables cuando se trata de la estimación. Si cree que el valor de la cantidad puede estar más cerca del límite superior que del inferior, puede aumentar su estimación de la media geométrica en un orden o dos de magnitud.
- *Una cifra significativa está bien.* No es necesario ir más allá de una cifra significativa (significant figure, sig. fig.) cuando se hacen cálculos para obtener una estimación. En la mayoría de los casos, el orden de magnitud es suficiente. La meta es solo obtener una cifra aproximada, así que mantenga la aritmética lo

más sencilla posible.

- *Pregúntese: ¿tiene esto algún sentido?* Por último, compruebe si su respuesta es razonable. ¿Cómo se compara con los valores de otras cantidades con las mismas dimensiones que ya conoce o que puede buscar fácilmente? Si obtiene alguna respuesta descabellada (por ejemplo, si estima que la masa del océano Atlántico es mayor que la masa de la Tierra, o que algún lapso es mayor que la edad del universo), compruebe primero si sus unidades son correctas. A continuación, compruebe si hay errores aritméticos. Luego, replantee la lógica que ha utilizado para llegar a su respuesta. Si todo está bien, es posible que acabe por demostrar que alguna nueva idea ingeniosa es realmente falsa.

EJEMPLO 1.6

Masa de los océanos de la Tierra

Estime la masa total de los océanos de la Tierra.

Estrategia

Sabemos que la densidad del agua es de unos 10^3 kg/m^3, así que partimos del consejo de "obtener masas a partir de densidades y volúmenes". Por lo tanto, necesitamos estimar el volumen de los océanos del planeta. Siguiendo el consejo de "obtener áreas y volúmenes a partir de las longitudes", podemos estimar el volumen de los océanos como área de superficie por profundidad media, o $V = AD$. Conocemos el diámetro de la Tierra por la Figura 1.4 y sabemos que la mayor parte de la superficie terrestre está cubierta de agua, por lo que podemos estimar que la superficie de los océanos es aproximadamente igual a la superficie del planeta. Siguiendo el consejo de "obtener áreas y volúmenes a partir de longitudes" de nuevo, podemos aproximar la Tierra como una esfera y utilizar la fórmula del área de superficie de una esfera de diámetro d, es decir, $A = \pi d^2$, para estimar el área de superficie de los océanos. Ahora solo tenemos que calcular la profundidad media de los océanos. Para ello, utilizamos el consejo: "Si todo lo demás falla, limítelo". Resulta que sabemos que los puntos más profundos del océano están en torno a los 10 km y que no es raro que el océano tenga más de 1 km de profundidad, así que tomamos la profundidad media alrededor de $(10^3 \times 10^4)^{0,5} \approx 3 \times 10^3$ m. Ahora solo hay que unirlo todo, atendiendo al consejo de que "una 'cifra significativa' está bien".

Solución

Estimamos que la superficie de la Tierra (y por lo tanto la superficie de los océanos de la Tierra) es aproximadamente

$$A = \pi d^2 = \pi(10^7\,\text{m})^2 \approx 3 \times 10^{14}\,\text{m}^2.$$

A continuación, con nuestra estimación de profundidad media de $D = 3 \times 10^3$ m, que se obtuvo por limitación, estimamos que el volumen de los océanos de la Tierra es

$$V = AD = (3 \times 10^{14}\,\text{m}^2)(3 \times 10^3\,\text{m}) = 9 \times 10^{17}\,\text{m}^3.$$

Por último, estimamos que la masa de los océanos del mundo es

$$M = \rho V = (10^3\ \text{kg/m}^3)(9 \times 10^{17}\,\text{m}^3) = 9 \times 10^{20}\,\text{kg}.$$

Así, estimamos que el orden de magnitud de la masa de los océanos del planeta es de 10^{21} kg.

Importancia

Para verificar nuestra respuesta de la mejor manera posible, primero tenemos que responder la pregunta: ¿tiene esto algún sentido? En la Figura 1.4, vemos que la masa de la atmósfera terrestre es del orden de 10^{19} kg y la masa de la Tierra es del orden de 10^{25} kg. Resulta tranquilizador que nuestra estimación de 10^{21} kg para la masa de los océanos de la Tierra se sitúe entre estos dos valores. Así que, sí, parece tener sentido. Resulta que hicimos una búsqueda en la web de "masa de los océanos" y los primeros resultados decían todos $1{,}4 \times 10^{21}$ kg, que es el mismo orden de magnitud que nuestra estimación. Ahora, en lugar de tener que confiar ciegamente en quién publicó por primera vez esa cifra en un sitio web (al fin y al cabo, la mayoría de los demás sitios probablemente se limitaron a copiarla), podemos tener un poco más de confianza en dicha cifra.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.7

La Figura 1.4 dice que la masa de la atmósfera es de 10^{19} kg. Suponiendo que la densidad de la atmósfera es de 1 kg/m^3, estime la altura de la atmósfera terrestre. ¿Cree que su respuesta es una subestimación o una sobreestimación? Explique por qué.

¿Cuántos afinadores de piano hay en Nueva York? ¿Cuántas hojas tiene ese árbol? Si está estudiando la fotosíntesis o está pensando en escribir una aplicación para teléfonos inteligentes destinada a los afinadores de pianos, las respuestas a estas preguntas pueden ser de gran interés para usted. Si no, probablemente no le importen las respuestas. Sin embargo, estos son exactamente los tipos de problemas de estimación que la gente de varias industrias tecnológicas ha estado pidiendo a los empleados potenciales para evaluar sus habilidades de razonamiento cuantitativo. Si la construcción de la intuición física y la evaluación de las afirmaciones cuantitativas no parecen razones suficientes para que practique los problemas de estimación, ¿qué le parece el hecho de que ser bueno en ellos podría conseguirle un trabajo bien remunerado?

INTERACTIVO

Para practicar la estimación de longitudes, áreas y volúmenes relativos, consulte esta simulación de PhET (https://openstax.org/l/21lengthgame), titulada "Estimación".

1.6 Cifras significativas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Determinar el número correcto de cifras significativas para el resultado de un cálculo.
- Describir la relación entre los conceptos de exactitud, precisión, incertidumbre y discrepancia.
- Calcular el porcentaje de incertidumbre de una medición, dado su valor y su incertidumbre.
- Determinar la incertidumbre del resultado de un cálculo en el que intervienen cantidades con incertidumbres dadas.

La Figura 1.11 muestra dos instrumentos utilizados para medir la masa de un objeto. La báscula digital ha sustituido en su mayor parte a la báscula de doble plato en los laboratorios de física, ya que proporciona mediciones más exactas y precisas. Pero, ¿qué entendemos exactamente por *exacto* y *preciso*? ¿No son lo mismo? En esta sección examinamos en detalle el proceso de realización y notificación de una medición.



(a) (b)

FIGURA 1.11 (a) Se utiliza una balanza mecánica de doble plato para comparar diferentes masas. Normalmente se coloca un objeto de masa desconocida en un plato y objetos de masa conocida en el otro plato. Cuando la barra que une los dos platos es horizontal, entonces las masas en ambos platos son iguales. Las "masas conocidas" suelen ser cilindros metálicos de masa estándar, como 1 g, 10 g y 100 g. (b) Muchas básculas mecánicas, como las de doble plato, han sido sustituidas por balanzas digitales, que miden la masa de un objeto con mayor precisión. La

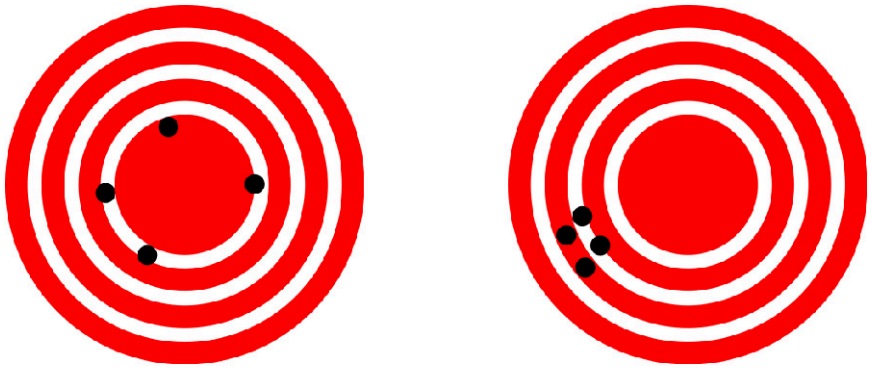
báscula mecánica puede leer solamente la masa de un objeto hasta la décima de gramo más cercana. Sin embargo, muchas básculas digitales pueden medir la masa de un objeto hasta la milésima de gramo más cercana (créditos: a. modificación del trabajo de Serge Melki; b. modificación del trabajo de Karel Jakubec).

Exactitud y precisión de una medida

La ciencia se basa en la observación y la experimentación, es decir, en las mediciones. La **exactitud** es la proximidad de una medición al valor de referencia aceptado para esa medición. Por ejemplo, digamos que queremos medir la longitud de un papel de impresora estándar. El embalaje en el que compramos el papel indica que tiene una longitud de 11,0 in. A continuación, medimos la longitud del papel tres veces y obtenemos las siguientes medidas: 11,1 in, 11,2 in y 10,9 in. Estas mediciones son bastante exactas porque se acercan mucho al valor de referencia de 11,0 in. Por el contrario, si hubiéramos obtenido una medida de 12 in, nuestra medición no sería muy exacta. Observe que el concepto de exactitud requiere que se dé un valor de referencia aceptado.

La **precisión** de las mediciones se refiere a la concordancia entre mediciones repetidas e independientes (que se repiten en las mismas condiciones). Consideremos el ejemplo de las medidas del papel. La precisión de las mediciones se refiere a la dispersión de los valores medidos. Una forma de analizar la precisión de las mediciones es determinar el rango, o la diferencia, entre los valores medidos más bajos y los más altos. En este caso, el valor más bajo fue de 10,9 in y el más alto de 11,2 in. Así, los valores medidos se desviaron entre sí, como máximo, en 0,3 in. Estas mediciones eran relativamente precisas porque no variaban demasiado en valor. Sin embargo, si los valores medidos hubieran sido 10,9 in, 11,1 in y 11,9 in, las mediciones no serían muy precisas porque habría una variación significativa de una medición a otra. Observe que el concepto de precisión depende únicamente de las mediciones reales adquiridas y no depende de un valor de referencia aceptado.

Las mediciones del ejemplo del papel son exactas y precisas, pero en algunos casos, las mediciones son exactas, pero no precisas, o son precisas, pero no exactas. Consideremos un ejemplo de un GPS que intenta localizar la posición de un restaurante en una ciudad. Piense en la ubicación del restaurante como si existiera en el centro de una diana y piense en cada intento del GPS por localizar el restaurante como un punto negro. En la Figura 1.12(a), vemos que las mediciones del GPS están muy separadas entre sí, pero todas están relativamente cerca de la ubicación real del restaurante en el centro del objetivo. Esto indica un sistema de medición de baja precisión y alta exactitud. Sin embargo, en la Figura 1.12(b), las mediciones del GPS se concentran bastante cerca unas de otras, pero están lejos de la ubicación del objetivo. Esto indica un sistema de medición de alta precisión y baja exactitud.



(a) Alta exactitud, baja precisión (b) Baja exactitud, alta precisión

FIGURA 1.12 Un GPS intenta localizar un restaurante en el centro de la diana. Los puntos negros representan cada uno de los intentos por localizar el restaurante. (a) Los puntos están bastante separados entre sí, lo que indica una baja precisión, pero están bastante cerca de la ubicación real del restaurante, lo que indica una alta exactitud. (b) Los puntos están concentrados bastante cerca entre sí, lo que indica una alta precisión, pero están bastante lejos de la ubicación real del restaurante, lo que indica una baja exactitud (créditos a y b: modificación de obras de "DarkEvil"/Wikimedia Commons).

Exactitud, precisión, incertidumbre y discrepancia

La precisión de un sistema de medición se relaciona con la **incertidumbre** en las mediciones, mientras que la exactitud se relaciona con la **discrepancia** con respecto al valor de referencia aceptado. La incertidumbre es una medida cuantitativa de la desviación de los valores medidos. Hay muchos métodos diferentes para calcular la incertidumbre, cada uno de los cuales es apropiado para diferentes situaciones. Algunos ejemplos son tomar el rango (es decir, el mayor menos el menor) o encontrar la desviación estándar de las medidas. La discrepancia (o "error de medición") es la diferencia entre el valor medido y un determinado valor estándar o previsto. Si las mediciones no son muy precisas, la incertidumbre de los valores es alta. Si las mediciones no son muy exactas, la discrepancia de los valores es alta.

Recordemos nuestro ejemplo de la medición de la longitud del papel; obtuvimos mediciones de 11,1, 11,2 y 10,9 pulgadas, y el valor aceptado fue de 11,0 pulgadas. Podríamos promediar las tres mediciones para concluir que nuestro mejor cálculo es de 11,1 pulgadas; en este caso, nuestra discrepancia es de 11,1 - 11,0 = 0,1 pulgadas, lo que proporciona una medida cuantitativa de la exactitud. Podríamos calcular la incertidumbre de nuestra mejor estimación con la mitad del rango de nuestros valores medidos: 0,15 pulgadas. Entonces diríamos que la longitud del papel es de 11,1 pulgadas más o menos 0,15 pulgadas. La incertidumbre en una medición, A, que se indica como δA (leer como "delta A"), por lo que el resultado de la medición se registraría como $A \pm \delta A$. Volviendo a nuestro ejemplo del papel, la longitud medida del papel podría expresarse como 11,1 ± 0,15 pulgadas. Dado que la discrepancia de 0,1 pulgadas es menor que la incertidumbre de 0,15 pulgadas, podríamos decir que el valor medido coincide con el valor de referencia aceptado dentro de la incertidumbre experimental.

Algunos factores que contribuyen a la incertidumbre en una medición son los siguientes:

- Limitaciones del dispositivo de medición.
- La habilidad de la persona que realiza la medición.
- Irregularidades en el objeto que se mide.
- Cualquier otro factor que afecte el resultado (depende mucho de la situación).

En nuestro ejemplo, los factores que contribuyen a la incertidumbre podrían ser que la división más pequeña de la regla sea de 1/16 pulgadas, que la persona que utiliza la regla tenga problemas de visión, que la regla esté desgastada en un extremo o que un lado del papel sea ligeramente más largo que el otro. En cualquier caso, deberá calcularse la incertidumbre de una medición para cuantificar su precisión. Si se conoce un valor de referencia, tiene sentido calcular también la discrepancia para cuantificar su exactitud.

Porcentaje de incertidumbre

Otro método de expresar la incertidumbre es como porcentaje del valor medido. Si una medición A se expresa con una incertidumbre δA, el **porcentaje de incertidumbre** se define como

$$\text{Porcentaje de incertidumbre} = \frac{\delta A}{A} \times 100\%.$$

EJEMPLO 1.7

Calcular el porcentaje de incertidumbre: una bolsa de manzanas

Una tienda de comestibles vende bolsas de 5 lb de manzanas. Supongamos que compramos cuatro bolsas durante el transcurso de un mes y las pesamos cada vez. Obtenemos las siguientes medidas:

- Peso de la semana 1: 4,8 lb
- Peso de la semana 2: 5,3 lb
- Peso de la semana 3: 4,9 lb
- Peso de la semana 4: 5,4 lb

A continuación, determinamos que el peso medio de la bolsa de 5 libras de manzanas es de 5,1 ± 0,3 lb al utilizar la mitad del rango. ¿Cuál es el porcentaje de incertidumbre del peso de la bolsa?

Estrategia

En primer lugar, observe que el valor promedio del peso de la bolsa, A, es de 5,1 lb. La incertidumbre en este valor, δA, es 0,3 lb. Podemos utilizar la siguiente ecuación para determinar el porcentaje de incertidumbre del peso:

$$\text{Porcentaje de incertidumbre} = \frac{\delta A}{A} \times 100\%. \quad \textbf{1.1}$$

Solución

Sustituya los valores en la ecuación:

$$\text{Porcentaje de incertidumbre} = \frac{\delta A}{A} \times 100\% = \frac{0{,}3 \text{ lb}}{5{,}1 \text{ lb}} \times 100\% = 5{,}9\% \approx 6\%.$$

Importancia

Podemos concluir que el peso promedio de una bolsa de manzanas de esta tienda es de 5,1 libras ± 6 %. Observe que el porcentaje de incertidumbre es adimensional porque las unidades de peso en $\delta A = 0{,}2$ lb anularon las de A = 5,1 lb cuando tomamos la proporción.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 1.8

Un entrenador de atletismo de preparatoria acaba de comprar un nuevo cronómetro. El manual del cronómetro indica que tiene una incertidumbre de ±0,05 s. Los corredores del equipo del entrenador de atletismo realizan regularmente carreras de 100 metros en 11,49 s a 15,01 s. En el último encuentro de atletismo de la escuela, el primer clasificado llegó a 12,04 s y el segundo a 12,07 s. ¿Acaso servirá el nuevo cronómetro del entrenador para cronometrar al equipo de corredores? ¿Por qué sí por qué no?

Incertidumbre en los cálculos

La incertidumbre existe en cualquier cosa calculada a partir de cantidades medidas. Por ejemplo, el área de un suelo calculada a partir de las mediciones de su longitud y anchura tiene una incertidumbre porque la longitud y la anchura tienen incertidumbres. ¿Cuán grande es la incertidumbre en algo que se calcula por multiplicación o división? Si las mediciones que entran en el cálculo tienen poca incertidumbre (unos cuantos porcentajes o menos), se puede utilizar el **método de suma de porcentajes** para la multiplicación o la división. Este método establece que *el porcentaje de incertidumbre de una cantidad calculada por multiplicación o división es la suma de las incertidumbres porcentuales de los elementos utilizados para realizar el cálculo.* Por ejemplo, si un suelo tiene una longitud de 4,00 m y una anchura de 3,00 m, con incertidumbre del 2 % y el 1 %, respectivamente, entonces el área del suelo es de 12,0 m^2 y tiene una incertidumbre del 3 %. (Expresado en forma de área es de 0,36 m^2 [12,0 m^2 × 0,03], que redondeamos a 0,4 m^2 ya que el área del suelo viene dada a una décima de metro cuadrado).

Precisión de las herramientas de medición y cifras significativas

Un factor importante en la precisión de las mediciones es la precisión de la herramienta de medición. En general, una herramienta de medición precisa es aquella que mide valores en incrementos muy pequeños. Por ejemplo, una regla estándar mide la longitud con una precisión de un milímetro, mientras que un calibre mide la longitud con una precisión de 0,01 mm. El calibre es una herramienta de medición más precisa porque mide diferencias de longitud extremadamente pequeñas. Cuanto más precisa sea la herramienta de medición, más precisas serán las medidas.

Cuando expresamos valores medidos, solo podemos enumerar tantos dígitos como hayamos medido inicialmente con nuestra herramienta de medición. Por ejemplo, si utilizamos una regla estándar para medir la longitud de un palo, podemos medirla como 36,7 cm. No podemos expresar este valor como 36,71 cm porque nuestra herramienta de medición no es lo suficientemente precisa para medir una centésima de centímetro. Hay que tener en cuenta que el último dígito de un valor medido ha sido estimado de alguna

manera por la persona que realiza la medición. Por ejemplo, la persona que mide la longitud de un palo con una regla se da cuenta de que la longitud del palo parece estar entre 36,6 cm y 36,7 cm, y debe estimar el valor del último dígito. Utilizando el método de las **cifras significativas**, por regla, *el último dígito anotado en una medición es el primer dígito con cierta incertidumbre*. Para determinar el número de dígitos significativos de un valor, comience con el primer valor medido a la izquierda y cuente el número de dígitos hasta el último dígito escrito a la derecha. Por ejemplo, el valor medido 36,7 cm tiene tres dígitos, o tres cifras significativas. Las cifras significativas indican la precisión de la herramienta de medición utilizada para medir un valor.

Ceros

En el recuento de cifras significativas se tienen en cuenta especialmente los ceros. Los ceros de 0,053 no son significativos, porque son marcadores de posición que localizan el punto decimal. Hay dos cifras significativas en 0,053. Los ceros de 10,053 no son marcadores de posición; son significativos. Este número tiene cinco cifras significativas. Los ceros de 1300 pueden ser significativos o no, dependiendo del estilo de escritura de los números. Pueden significar que se conoce el número hasta el último dígito o pueden ser marcadores de posición. Así que 1300 puede tener dos, tres o cuatro cifras significativas. Para evitar esta ambigüedad, debemos escribir 1300 en notación científica como $1{,}3 \times 10^3$, $1{,}30 \times 10^3$, o $1{,}300 \times 10^3$, dependiendo de si tiene dos, tres o cuatro cifras significativas. *Los ceros son significativos, excepto cuando sirven solo como marcadores de posición*.

Cifras significativas en los cálculos

Cuando se combinan mediciones con diferentes grados de precisión, *el número de dígitos significativos en la respuesta final no puede ser mayor que el número de dígitos significativos en el valor medido menos preciso*. Hay dos reglas diferentes, una para la multiplicación y la división y otra para la suma y la resta.

1. *Para la multiplicación y la división, el resultado debería tener el mismo número de cifras significativas que la cantidad con el menor número de cifras significativas que entra en el cálculo*. Por ejemplo, el área de un círculo puede calcularse a partir de su radio mediante $A = \pi r^2$. Veamos cuántas cifras significativas tiene el área si el radio tiene solo dos, es decir, $r = 1{,}2$ m. Utilizando una calculadora con una salida de ocho dígitos, calcularíamos

   $$A = \pi r^2 = (3{,}1415927\ldots) \times (1{,}2\ \text{m})^2 = 4{,}5238934\ \text{m}^2.$$

   No obstante, dado que el radio tiene solamente dos cifras significativas, limita la cantidad calculada a dos cifras significativas, o sea

   $$A = 4{,}5\ \text{m}^2,$$

   aunque π es apropiado hasta al menos ocho dígitos.
2. *En las sumas y restas, la respuesta no puede contener más decimales que la medida menos precisa*. Supongamos que compramos 7,56 kg de papas en una tienda de comestibles, pesados con una báscula con precisión de 0,01 kg, y luego dejamos 6,052 kg de papas en su laboratorio, pesados con una báscula con precisión de 0,001 kg. Luego, vamos a casa y añadimos 13,7 kg de papas, pesados con una báscula de baño con precisión de 0,1 kg. ¿Cuántos kilogramos de papas tenemos ahora y cuántas cifras significativas corresponden a la respuesta? La masa se encuentra por simple suma y resta:

   $$\begin{array}{r} 7{,}56\ \text{kg} \\ -6{,}052\ \text{kg} \end{array}$$

   $$\frac{+13{,}7\ \text{kg}}{15{,}208\ \text{kg}} = 15{,}2\ \text{kg}.$$

   A continuación, identificamos la medida menos precisa: 13,7 kg. Esta medida se expresa con 0,1 decimales, por lo que nuestra respuesta final también debe expresarse con 0,1 decimales. Por lo tanto, la respuesta se redondea a la décima, lo que nos da 15,2 kg.

Cifras significativas en este texto

En este texto, se supone que la mayoría de los números tienen tres cifras significativas. Además, en todos los ejemplos trabajados se utilizan números de cifras significativas coherentes. Una respuesta dada a tres dígitos se basa en una entrada apropiada de al menos tres dígitos, por ejemplo. Si la entrada tiene menos cifras significativas, la respuesta también tendrá menos cifras significativas. También se procura que el número de cifras significativas sea razonable para la situación planteada. En algunos temas, sobre todo en óptica, se necesitan números más precisos y utilizamos más de tres cifras significativas. Por último, si un número es *exacto*, como el dos de la fórmula de la circunferencia de un círculo, $C = 2\pi r$, no afecta el número de cifras significativas de un cálculo. Asimismo, los factores de conversión como 100 cm/1 m se consideran exactos y no afectan el número de cifras significativas de un cálculo.

1.7 Resolver problemas de física

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el proceso de desarrollo de una estrategia de resolución de problemas.
- Explicar cómo encontrar la solución numérica de un problema.
- Resumir el proceso para evaluar la importancia de la solución numérica de un problema.



FIGURA 1.13 Las habilidades de resolución de problemas son esenciales para su éxito en física (créditos: "scui3asteveo"/Flickr).

Las habilidades de resolución de problemas son claramente esenciales para el éxito en un curso cuantitativo de física. Lo que es más importante, la capacidad de aplicar amplios principios físicos, normalmente representados por ecuaciones, a situaciones concretas es una forma muy poderosa de conocimiento. Es mucho más potente que memorizar una lista de hechos. La capacidad de análisis y de resolución de problemas puede aplicarse a nuevas situaciones, mientras que una lista de hechos no puede ser lo suficientemente larga como para contener todas las circunstancias posibles. Esta capacidad de análisis es útil tanto para resolver los problemas de este texto como para aplicar la física en la vida cotidiana.

Como probablemente sepa, se necesita cierta dosis de creatividad y perspicacia para resolver los problemas. Ningún procedimiento rígido funciona siempre. La creatividad y la perspicacia crecen con la experiencia. Con la práctica, los fundamentos de la resolución de problemas se vuelven casi automáticos. Una forma de practicar es resolver los ejemplos del texto mientras se lee. Otra es trabajar tantos problemas de final de sección como sea posible, empezando por los más fáciles para ganar confianza y luego progresando hacia los más difíciles. Después de involucrarse en la física, la verá a su alrededor, y podrá empezar a aplicarla a

situaciones que encuentre fuera del aula, tal y como se hace en muchas de las aplicaciones de este texto.

Aunque no existe un método sencillo paso a paso que funcione para todos los problemas, el siguiente proceso de tres etapas facilita la resolución de problemas y le da más sentido. Las tres etapas son estrategia, solución e importancia. Este proceso se utiliza en ejemplos a lo largo del libro. A continuación, examinaremos cada una de las etapas del proceso.

Estrategia

La estrategia es la etapa inicial de la resolución de un problema. La idea es averiguar exactamente cuál es el problema y luego desarrollar una estrategia para resolverlo. Algunos consejos generales para esta etapa son los siguientes:

- *Examine la situación para determinar qué principios físicos están implicados*. A menudo ayuda *dibujar un simple esquema* al principio. Generalmente, hay que decidir qué dirección es positiva y anotarla en el esquema. Cuando se han identificado los principios físicos, es mucho más fácil encontrar y aplicar las ecuaciones que los representan. Aunque encontrar la ecuación correcta es esencial, hay que tener en cuenta que las ecuaciones representan principios físicos, leyes de la naturaleza y relaciones entre cantidades físicas. Sin una comprensión conceptual de un problema, una solución numérica no tiene sentido.
- *Haga una lista de lo que se da o puede deducirse del problema tal y como está planteado (identifique los "valores conocidos")*. Muchos problemas se plantean de forma muy sucinta y requieren cierta inspección para determinar lo que se conoce. Dibujar un esquema también sirve en este punto. Identificar formalmente los valores conocidos es de especial importancia en la aplicación de la física a situaciones del mundo real. Por ejemplo, la palabra *detenido* significa que la velocidad es cero en ese instante. Además, a menudo podemos tomar el tiempo y la posición iniciales como cero mediante la elección adecuada del sistema de coordenadas.
- *Identificar exactamente lo que hay que determinar en el problema (identificar las incógnitas)*. Especialmente en los problemas complejos, no siempre es obvio lo que hay que encontrar o en qué secuencia. Hacer una lista sirve para identificar las incógnitas.
- *Determine qué principios físicos le sirven para resolver el problema*. Dado que los principios físicos tienden a expresarse en forma de ecuaciones matemáticas, una lista de valores conocidos e incógnitas serviría en este caso. Lo más fácil es encontrar ecuaciones que contengan solo una incógnita, es decir, que se conozcan todas las demás variables, para poder resolver la incógnita fácilmente. Si la ecuación contiene más de una incógnita, se necesitan más ecuaciones para resolver el problema. En algunos problemas, hay que determinar varias incógnitas para llegar a la más necesaria. En este tipo de problemas es especialmente importante tener en cuenta los principios físicos para no extraviarse en un mar de ecuaciones. Es posible que tenga que utilizar dos (o más) ecuaciones diferentes para obtener la respuesta final.

Solución

La etapa de la solución es cuando se hacen los cálculos. *Sustituya los valores conocidos (junto con sus unidades) en la ecuación correspondiente y obtenga soluciones numéricas completas con unidades*. Es decir, efectuar el álgebra, el cálculo, la geometría o la aritmética necesarios para encontrar la incógnita a partir de los valores conocidos, y llevar las unidades a través de los cálculos. Este paso es claramente importante porque produce la respuesta numérica, junto con sus unidades. Sin embargo, hay que tener en cuenta que esta etapa es solo un tercio del proceso general de resolución de problemas.

Importancia

Después de haber hecho los cálculos en la fase de resolución del problema, es tentador pensar que ya ha terminado. Pero recuerde siempre que la física no es matemática. Mejor dicho, con la física utilizamos las matemáticas para entender la naturaleza. Por lo tanto, después de obtener una respuesta numérica, siempre hay que evaluar su significado:

- *Compruebe sus unidades.* Si las unidades de la respuesta son incorrectas, entonces se ha cometido un error y debe volver a los pasos anteriores para encontrarlo. Una forma de encontrar el error es comprobar

la coherencia dimensional de todas las ecuaciones que ha derivado. Sin embargo, se advierte que las unidades correctas no garantizan que la parte numérica de la respuesta sea también correcta.

- *Compruebe si la respuesta es razonable. ¿Tiene sentido?* Este paso es extremadamente importante: la meta de la física es describir la naturaleza con precisión. Para determinar si la respuesta es razonable, compruebe tanto su magnitud como su signo, además de sus unidades. La magnitud debería ser coherente con una estimación aproximada de lo que debería ser. También debería compararse razonablemente con las magnitudes de otras cantidades del mismo tipo. El signo indica la dirección y debería ser coherente con sus expectativas. Su discernimiento mejorará a medida que resuelva más problemas de física, y le será posible discernir mejor sobre si la respuesta a un problema describe adecuadamente la naturaleza. Este paso devuelve el problema a su significado conceptual. Si es capaz de discernir si la respuesta es razonable, tiene un conocimiento más profundo de la física que el de ser capaz de resolver un problema de forma mecánica.
- *Compruebe si la respuesta le dice algo interesante. ¿Qué significa?* Esta es la otra cara de la pregunta: ¿Tiene sentido? En última instancia, la física consiste en comprender la naturaleza, y resolvemos problemas de física para aprender algo sobre el funcionamiento de la naturaleza. Por lo tanto, suponiendo que la respuesta tenga sentido, siempre debe tomarse un momento para ver si le dice algo sobre el mundo que le resulte interesante. Aunque la respuesta a este problema en particular no le interese mucho, ¿qué hay del método que utilizó para resolverlo? ¿Podría adaptarse el método para responder a una pregunta que sí le parezca interesante? En muchos sentidos, en la respuesta a preguntas como estas es donde la ciencia progresa.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

adimensional cantidad con una dimensión de $L^0M^0T^0I^0\Theta^0N^0J^0 = 1$; también llamada cantidad de dimensión 1 o número puro

cantidad base cantidad física elegida por convención y por consideraciones prácticas, de manera que todas las demás cantidades físicas puedan expresarse como combinaciones algebraicas de estas

cantidad derivada cantidad física definida mediante combinaciones algebraicas de cantidades base

cantidad física característica o propiedad de un objeto que puede medirse o calcularse a partir de otras mediciones

cifras significativas se utilizan para expresar la precisión de una herramienta de medición utilizada para medir un valor

dimensión expresión de la dependencia de una cantidad física de las cantidades base como producto de potencias de símbolos que representan las cantidades base; en general, la dimensión de una cantidad tiene la forma $L^aM^bT^cI^d\Theta^eN^fJ^g$ para algunas potencias a, b, c, d, e, f y g.

dimensionalmente coherente ecuación en la que cada término tiene las mismas dimensiones y los argumentos de las funciones matemáticas que aparecen en la ecuación son adimensionales

discrepancia la diferencia entre el valor medido y un determinado valor estándar o esperado

estimación utilizar la experiencia previa y el razonamiento físico sólido para llegar a una idea aproximada del valor de una cantidad; a veces se denomina "aproximación del orden de magnitud", "estimación a partir de conjetura", "cálculo de servilleta" o "cálculo de Fermi"

exactitud el grado de concordancia de un valor medido con un valor de referencia aceptado para esa medición

factor de conversión la proporción que expresa cuántas cantidades de una unidad son iguales a otra unidad

física ciencia que se ocupa de describir las interacciones de la energía, la materia, el espacio y el tiempo; se interesa especialmente por los mecanismos fundamentales que subyacen a cada fenómeno

incertidumbre medida cuantitativa de la desviación de los valores medidos

kilogramo unidad del SI para la masa, abreviada kg

ley descripción, mediante un lenguaje conciso o una fórmula matemática, de un patrón generalizado en la naturaleza apoyado por pruebas científicas y experimentos repetidos

método de suma de porcentajes el porcentaje de incertidumbre de una cantidad calculada por multiplicación o división es la suma de los porcentajes de incertidumbre de los elementos utilizados para realizar el cálculo

metro unidad del SI para la longitud, abreviada m

modelo representación de algo a menudo demasiado difícil (o imposible) de mostrar directamente

orden de magnitud el tamaño de una cantidad en relación con una potencia de 10

porcentaje de incertidumbre la proporción entre la incertidumbre de una medición y el valor medido, expresada en porcentaje

precisión el grado de concordancia de las mediciones repetidas

segundo unidad del SI para el tiempo, abreviado s

sistema métrico sistema en el que los valores se pueden calcular en factores de 10

teoría explicación comprobable de los patrones de la naturaleza, apoyada por pruebas científicas y verificada en múltiples ocasiones por varios grupos de investigadores

unidad base estándar para expresar la medida de una cantidad base dentro de un sistema particular de unidades; definido por un procedimiento particular, que se utiliza para medir la cantidad base correspondiente

unidades estándares utilizados para expresar y comparar mediciones

unidades del SI el sistema internacional de unidades que los científicos de la mayoría de los países han acordado utilizar; incluye unidades como el metro, el litro y el gramo

unidades derivadas unidades que pueden calcularse mediante combinaciones algebraicas de las unidades fundamentales

unidades inglesas sistema de medida utilizado en los Estados Unidos; incluye unidades de medida como pies, galones y libras

Ecuaciones Clave

Porcentaje de incertidumbre $\text{Porcentaje de incertidumbre} = \frac{\delta A}{A} \times 100\%$

Resumen

1.1 El alcance y la escala de la Física

- La física trata de encontrar las leyes simples que describen todos los fenómenos naturales.
- La física opera en una amplia gama de escalas de longitud, masa y tiempo. Los científicos utilizan el concepto de orden de magnitud de un número para rastrear qué fenómenos ocurren en qué escalas. También utilizan órdenes de magnitud para comparar las distintas escalas.
- Los científicos intentan describir el mundo mediante la formulación de modelos, teorías y leyes.

1.2 Unidades y estándares

- Los sistemas de unidades se construyen a partir de un número reducido de unidades base, que se definen mediante mediciones exactas y precisas de cantidades base elegidas convencionalmente. Las demás unidades se derivan como combinaciones algebraicas de las unidades base.
- Dos sistemas de uso frecuente son las unidades inglesas y las unidades del SI. Todos los científicos y la mayoría del resto de personas del mundo utilizan el SI, mientras que los no científicos de los Estados Unidos todavía tienden a utilizar las unidades inglesas.
- Las unidades básicas del SI de longitud, masa y tiempo son el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s), respectivamente.
- Las unidades del SI son un sistema métrico de unidades, lo que significa que los valores pueden calcularse por factores de 10. Los prefijos métricos pueden utilizarse con las unidades métricas para escalar las unidades base a tamaños apropiados para casi cualquier aplicación.

1.3 Conversión de unidades

- Para convertir una cantidad de una unidad a otra, multiplique por los factores de conversión de forma que anule las unidades de las que quiere deshacerse e introduzca las unidades con las que quiere acabar.
- Tenga cuidado con las áreas y los volúmenes. Las unidades obedecen a las reglas de álgebra, motivo por el cual, por ejemplo, si una unidad se eleva al cuadrado, necesitamos dos factores para anularla.

1.4 Análisis dimensional

- La dimensión de una cantidad física no es más que la expresión de las magnitudes de base de las que se deriva.
- Todas las ecuaciones que expresen leyes o principios físicos deberán ser dimensionalmente coherentes. Este hecho puede utilizarse como ayuda para recordar las leyes físicas, como forma de comprobar si son posibles las relaciones entre cantidades físicas que se afirman, e incluso para derivar nuevas leyes físicas.

1.5 Estimaciones y cálculos de Fermi

- Una estimación es una conjetura aproximada del valor de una cantidad física basada en la experiencia previa y en un razonamiento físico sólido. Algunas estrategias que pueden ayudar a la hora de hacer una estimación son las siguientes:
  - Obtener grandes longitudes a partir de longitudes más pequeñas.
  - Obtener áreas y volúmenes a partir de longitudes.
  - Obtener masas a partir de volúmenes y densidades.
  - Si todo lo demás falla, limítelo.
  - Una “cifra significativa" está bien.
  - Pregúntese: ¿tiene esto algún sentido?

1.6 Cifras significativas

- La exactitud de un valor medido se refiere a la proximidad de una medición a un valor de referencia aceptado. La discrepancia en una medición es la cantidad en la que el resultado de la medición difiere de este valor.
- La precisión de los valores medidos se refiere a la concordancia entre las mediciones repetidas. La incertidumbre de una medición es una cuantificación de esto.
- La precisión de una herramienta de medición se relaciona con el tamaño de sus incrementos de

medición. Cuanto más pequeño sea el incremento de medición, más precisa será la herramienta.
- Las cifras significativas expresan la precisión de una herramienta de medición.
- Al multiplicar o dividir valores medidos, la respuesta final puede contener únicamente tantas cifras significativas como el valor con el menor número de cifras significativas.
- Al sumar o restar valores medidos, la respuesta final no puede contener más decimales que el valor menos preciso.

1.7 Resolver problemas de física

Las tres etapas del proceso de resolución de problemas de física que se utilizan en este libro son las siguientes:

- *Estrategia*: determine qué principios físicos están implicados y desarrolle una estrategia para utilizarlos para resolver el problema.
- *Solución*: haga los cálculos necesarios para obtener una solución numérica completa con unidades.
- *Importancia*: compruebe que la solución tiene sentido (unidades correctas, magnitud y signo razonables) y evalúe su importancia.

Preguntas Conceptuales

1.1 El alcance y la escala de la Física

1. ¿Qué es la física?
2. Algunos han descrito la física como la "búsqueda de la simplicidad". Explique por qué esta podría ser una descripción apropiada.
3. Si dos teorías diferentes describen igual de bien las observaciones experimentales, ¿puede decirse que una es más válida que la otra (suponiendo que ambas utilicen reglas lógicas aceptadas)?
4. ¿Qué determina la validez de una teoría?
5. Para que una medición u observación sea creíble, deben cumplirse ciertos criterios. ¿Los criterios serán necesariamente tan estrictos para un resultado esperado como para un resultado inesperado?
6. ¿Puede limitarse la validez de un modelo o debe ser universalmente válido? ¿Cómo se compara esto con la validez requerida de una teoría o una ley?

1.2 Unidades y estándares

7. Identifique algunas ventajas de las unidades métricas.
8. ¿Cuáles son las unidades base del SI de longitud, masa y tiempo?
9. ¿Cuál es la diferencia entre una unidad base y una unidad derivada? b) ¿Cuál es la diferencia entre una cantidad base y una cantidad derivada? c) ¿Cuál es la diferencia entre una cantidad base y una unidad base?
10. Para cada uno de los siguientes escenarios, consulte la Figura 1.4 y la Tabla 1.2 para determinar qué prefijo métrico del metro es el más apropiado para cada uno de los siguientes escenarios. (a) Quiere tabular la distancia media al Sol para cada planeta del sistema solar. (b) Quiere comparar los tamaños de algunos virus comunes para diseñar un filtro mecánico capaz de bloquear los patógenos. (c) Quiere enumerar los diámetros de todos los elementos de la tabla periódica. (d) Quiere enumerar las distancias a todas las estrellas que han recibido ahora alguna emisión de radio enviada desde la Tierra hace 10 años.

1.6 Cifras significativas

11. (a) ¿Cuál es la relación entre la precisión y la incertidumbre de una medición? (b) ¿Cuál es la relación entre la exactitud y la discrepancia de una medición?

1.7 Resolver problemas de física

12. ¿Qué información necesita para elegir qué ecuación o ecuaciones utilizar para resolver un problema?
13. ¿Qué hay que hacer después de obtener una respuesta numérica al resolver un problema?

Problemas

1.1 El alcance y la escala de la Física

14. Halle el orden de magnitud de las siguientes cantidades físicas: (a) La masa de la atmósfera de la Tierra: $5{,}1 \times 10^{18}\,\text{kg}$; (b) La masa de la atmósfera de la Luna: 25.000 kg; (c) La masa de la hidrosfera de la Tierra: $1{,}4 \times 10^{21}\,\text{kg}$; (d) La masa de la Tierra: $5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$; (e) La masa

de la Luna: $7{,}34 \times 10^{22}$ kg; (f) La distancia entre la Tierra y la Luna (eje semimayor): $3{,}84 \times 10^{8}$ m; (g) La distancia media entre la Tierra y el Sol: $1{,}5 \times 10^{11}$ m; (h) El radio ecuatorial de la Tierra: $6{,}38 \times 10^{6}$ m; (i) La masa de un electrón: $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg; (j) La masa de un protón: $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg; (k) La masa del Sol: $1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

15. Utilice los órdenes de magnitud que ha encontrado en el problema anterior para responder las siguientes preguntas con una precisión de un orden de magnitud. (a) ¿Cuántos electrones harían falta para igualar la masa de un protón? (b) ¿Cuántos planetas Tierra harían falta para igualar la masa del Sol? (c) ¿Cuántas distancias de la Tierra a la Luna harían falta para cubrir la distancia de la Tierra al Sol? (d) ¿Cuántas atmósferas de la Luna harían falta para igualar la masa de la atmósfera de la Tierra? (e) ¿Cuántas lunas harían falta para igualar la masa de la Tierra? (f) ¿Cuántos protones harían falta para igualar la masa del Sol?

Para el resto de las preguntas, debe utilizar la Figura 1.4 para obtener los órdenes de magnitud necesarios de longitudes, masas y tiempos.

16. ¿Aproximadamente cuántos latidos se tienen en la vida?

17. Una generación es aproximadamente un tercio de la vida. ¿Cuántas generaciones han pasado aproximadamente desde el año 0?

18. ¿Aproximadamente cuánto tiempo más que la vida media de un núcleo atómico extremadamente inestable es la vida de un ser humano?

19. Calcule el número aproximado de átomos de una bacteria. Supongamos que la masa media de un átomo en la bacteria es 10 veces la masa de un protón.

20. (a) Calcule el número de células de un colibrí, suponiendo que la masa de una célula media es 10 veces la masa de una bacteria. (b) Haciendo la misma suposición, ¿cuántas células hay en un ser humano?

21. Suponiendo que un impulso nervioso debe terminar antes de que comience otro, ¿cuál es la velocidad máxima de disparo de un nervio en impulsos por segundo?

22. Aproximadamente, ¿cuántas operaciones en coma flotante puede realizar una supercomputadora al año?

23. Aproximadamente, ¿cuántas operaciones en coma flotante puede realizar una supercomputadora en la vida de un ser humano?

1.2 Unidades y estándares

24. Los siguientes tiempos se indican con prefijos métricos sobre la unidad de tiempo base del SI: el segundo. Reescríbalos en notación científica sin el prefijo. Por ejemplo, 47 terasegundos (Ts) se reescribiría como $4{,}7 \times 10^{13}$ s. (a) 980 petasegundos (Ps); (b) 980 femtosegundos (fs); (c) 17 nanosegundos (ns); (d) 577 μs.

25. Los siguientes tiempos se indican en segundos. Utilice los prefijos métricos para reescribirlos de manera que el valor numérico sea mayor que uno, pero menor que 1000. Por ejemplo, $7{,}9 \times 10^{-2}$ s podría escribirse como 7,9 centisegundos (cs) o 79 milisegundos (ms). (a) $9{,}57 \times 10^{5}$ s; (b) 0,045 s; (c) $5{,}5 \times 10^{-7}$ s; (d) $3{,}16 \times 10^{7}$ s.

26. Las siguientes longitudes se indican con prefijos métricos sobre la unidad de longitud base del SI: el metro. Reescríbalos en notación científica sin el prefijo. Por ejemplo, 4,2 petámetros (Pm) se reescribiría como $4{,}2 \times 10^{15}$ m. (a) 89 terámetros (Tm); (b) 89 picómetros (pm); (c) 711 milímetros (mm); (d) 0,45 μm.

27. Las siguientes longitudes se indican en metros. Utilice los prefijos métricos para reescribirlas de manera que el valor numérico sea mayor que uno, pero menor que 1000. Por ejemplo, $7{,}9 \times 10^{-2}$ m podría escribirse como 7,9 centímetros (cm) o 79 mm. (a) $7{,}59 \times 10^{7}$ m; (b) 0,0074 m; (c) $8{,}8 \times 10^{-11}$ m; (d) $1{,}63 \times 10^{13}$ m.

28. Las siguientes masas se escriben con prefijos métricos en gramos. Reescríbalas en notación científica en términos de la unidad de masa base del SI: el kilogramo. Por ejemplo, 40 megagramos (Mg) se escribiría como 4×10^{4} kg. (a) 23 miligramos (mg); (b) 320 teragramos (Tg); (c) 42 nanogramos (ng); (d) 7 g; (e) 9 petagramos (Pg).

29. Las siguientes masas se indican en kilogramos. Utilice los prefijos métricos del gramo para reescribirlas de manera que el valor numérico sea mayor que uno, pero menor que 1000. Por ejemplo, 7×10^{-4} kg podría escribirse como 70 centigramos (cg) o 700 mg. (a) $3{,}8 \times 10^{-5}$ kg; (b) $2{,}3 \times 10^{17}$ kg; (c) $2{,}4 \times 10^{-11}$ kg; (d) 8×10^{15} kg; (e) $4{,}2 \times 10^{-3}$ kg.

1.3 Conversión de unidades

30. El volumen de la Tierra es del orden de 10^{21} m^3. (a) ¿Cuánto es esto en kilómetros cúbicos (km^3)? (b) ¿Cuánto es en millas cúbicas (mi^3)? (c) ¿Cuánto es en centímetros cúbicos (cm^3)?

31. El límite de velocidad en algunas autopistas interestatales es de aproximadamente 100 km/h. (a) ¿Cuánto es esto en metros por segundo? (b) ¿Cuántas millas por hora es esto?

32. Un auto viaja a una rapidez de 33 m/s. (a) ¿Cuál es su rapidez en kilómetros por hora? (b) ¿Está superando el límite de velocidad de 90 km/h?

33. En las unidades del SI, los valores de rapidez se miden en metros por segundo (m/s). Sin embargo, dependiendo de dónde viva usted, probablemente se sienta más cómodo pensando en rapidez en términos de kilómetros por hora (km/h) o millas por hora (mi/h). En este problema, verá que 1 m/s es aproximadamente 4 km/h o 2 mi/h, lo cual sirve para afinar su intuición física. Más concretamente, demuestre que (a) $1{,}0\ \text{m/s} = 3{,}6\ \text{km/h}$ y (b) $1{,}0\ \text{m/s} = 2{,}2\ \text{mi/h}$.

34. El fútbol americano se juega en un campo de 100 yardas de largo, excluyendo las zonas de anotación. ¿Qué longitud tiene el campo en metros? (Supongamos que 1 m = 3,281 pies)

35. Los campos de fútbol varían en tamaño. Un campo grande de fútbol tiene 115 m de largo y 85,0 m de ancho. ¿Cuál es su área en pies cuadrados? (Supongamos que 1 m = 3,281 pies)

36. ¿Cuál es la estatura en metros de una persona que mide 6 pies y 1,0 pulgadas?

37. El Monte Everest, con 29.028 pies, es la montaña más alta de la Tierra. ¿Cuál es su altura en kilómetros? (Supongamos que 1 m = 3,281 pies)

38. La velocidad del sonido se mide en 342 m/s en un día determinado. ¿Cuál es esta medida en kilómetros por hora?

39. Las placas tectónicas son grandes segmentos de la corteza terrestre que se desplazan lentamente. Supongamos que una de estas placas tiene una rapidez media de 4,0 cm/año. (a) ¿Qué distancia recorre en 1,0 s a esta rapidez? (b) ¿Cuál es su rapidez en kilómetros por millón de años (Million Years, My)?

40. La distancia media entre la Tierra y el Sol es $1{,}5 \times 10^{11}$ m. (a) Calcule la rapidez media de la Tierra en su órbita (que se supone que es circular) en metros por segundo. (b) ¿Cuál es esta rapidez en kilómetros por hora?

41. La densidad de la materia nuclear es de unos 10^{18} kg/m^3. Dado que 1 mL es igual en volumen a cm^3, ¿cuál es la densidad de la materia nuclear en megagramos por microlitro (es decir, $Mg/\mu L$)?

42. La densidad del aluminio es de 2,7 g/cm^3. ¿Cuál es la densidad en kilogramos por metro cúbico?

43. Una unidad de masa que más se utiliza en el sistema inglés es la libra-masa, abreviada lbm, donde 1 lbm = 0,454 kg. ¿Cuál es la densidad del agua en libras-masa por pie cúbico?

44. Un furlong son 220 yardas (yd). Una quincena son 2 semanas. Convierta una rapidez de un furlong por quincena en milímetros por segundo.

45. Se necesitan 2π radianes (rad) para dar la vuelta a un círculo, que es lo mismo que 360°. ¿Cuántos radianes hay en 1°?

46. La luz recorre una distancia de aproximadamente 3×10^8 m/s. Un minuto-luz es la distancia que recorre la luz en 1 minuto. Si el Sol está a $1{,}5 \times 10^{11}$ m de la Tierra, ¿a qué distancia está en minutos-luz?

47. Un nanosegundo de luz es la distancia que recorre la luz en 1 nanosegundo (ns). Convierta 1 pie a nanosegundos de luz.

48. Un electrón tiene una masa de $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg. Un protón tiene una masa de $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg. ¿Cuál es la masa de un protón en masas de electrones?

49. Una onza líquida (fluid ounce, fl-oz) equivale a unos 30 mL. ¿Cuál es el volumen de una lata de refresco de 12 fl-oz en metros cúbicos?

1.4 Análisis dimensional

50. Un estudiante intenta recordar algunas fórmulas de geometría. En consecuencia, supongamos que A es área, V es volumen, y todas las demás variables son longitudes. Determine qué fórmulas son dimensionalmente coherentes. (a) $V = \pi r^2 h$; (b) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$; (c) $V = 0{,}5bh$; (d) $V = \pi d^2$; (e) $V = \pi d^3/6$.

51. Considere las cantidades físicas *s, v, a* y *t* con dimensiones $[s] = \text{L}$, $[v] = \text{LT}^{-1}$, $[a] = \text{LT}^{-2}$, y $[t] = \text{T}$. Determine si cada una de las siguientes ecuaciones es dimensionalmente coherente. (a) $v^2 = 2as$; (b) $s = vt^2 + 0{,}5at^2$; (c) $v = s/t$; (d) $a = v/t$.

52. Considere las cantidades físicas m, s, v, a, y t con dimensiones $[m] = \text{M}$, $[s] = \text{L}$, $[v] = \text{LT}^{-1}$, $[a] = \text{LT}^{-2}$, y $[t] = \text{T}$. Suponiendo que cada una de las siguientes ecuaciones es dimensionalmente coherente, halle la dimensión de la cantidad en

el lado izquierdo de la ecuación: (a) $F = ma$; (b) $K = 0{,}5mv^2$; (c) $p = mv$; (d) $W = mas$; (e) $L = mvr$.

53. Supongamos que la cantidad s es la longitud y la cantidad t el tiempo. Supongamos que las cantidades v y a están definidas por $v = ds/dt$ y $a = dv/dt$. (a) ¿Cuál es la dimensión de v? (b) ¿Cuál es la dimensión de la cantidad a? ¿Cuáles son las dimensiones de (c) $\int v dt$, (d) $\int a dt$, y (e) da/dt?

54. Supongamos que [V] = L^3, $[\rho] = ML^{-3}$, y [t] = T. (a) ¿Cuál es la dimensión de $\int \rho dV$? (b) ¿Cuál es la dimensión de dV/dt? (c) ¿Cuál es la dimensión de $\rho(dV/dt)$?

55. La fórmula de la longitud de arco señala que la longitud s de arco subtendido por el ángulo θ en un círculo de radio r viene dada por la ecuación $s = r\theta$. ¿Cuáles son las dimensiones de (a) s, (b) r, y (c) θ?

1.5 Estimaciones y cálculos de Fermi

56. Suponiendo que el cuerpo humano está formado principalmente por agua, estime el volumen de una persona.

57. Suponiendo que el cuerpo humano está formado principalmente por agua, estime el número de moléculas que contiene. (Tenga en cuenta que el agua tiene una masa molecular de 18 g/mol y que hay aproximadamente 10^{24} átomos en un mol).

58. Estime la masa del aire en un aula.

59. Estime el número de moléculas que componen la Tierra, suponiendo una masa molecular media de 30 g/mol. (Tenga en cuenta que están en el orden de 10^{24} objetos por mol).

60. Estime el área de superficie de una persona.

61. Aproximadamente, ¿cuántos sistemas solares harían falta para embaldosar el disco de la Vía Láctea?

62. (a) Estime la densidad de la Luna. (b) Estime el diámetro de la Luna. (c) Dado que la Luna subtiende en un ángulo de aproximadamente medio grado en el cielo, estime su distancia a la Tierra.

63. La densidad media del Sol es del orden de 10^3 kg/m^3. (a) Estime el diámetro del Sol. (b) Dado que el Sol subtiende en un ángulo de aproximadamente medio grado en el cielo, estime su distancia a la Tierra.

64. Estime la masa de un virus.

65. Una operación en coma flotante es una única operación aritmética como la suma, la resta, la multiplicación o la división. (a) Estime el número máximo de operaciones en coma flotante que un ser humano podría realizar en toda su vida. (b) ¿Cuánto tiempo tardaría una supercomputadora en realizar esa cantidad de operaciones en coma flotante?

1.6 Cifras significativas

66. Considere la ecuación 4000/400 = 10,0. Suponiendo que el número de cifras significativas de la respuesta es correcto, ¿qué puede decir sobre el número de cifras significativas de 4000 y 400?

67. Supongamos que la báscula de baño indica que su masa es de 65 kg con una incertidumbre del 3 %. ¿Cuál es la incertidumbre de su masa (en kilogramos)?

68. Una cinta métrica de buena calidad puede tener un error de 0,50 cm en una distancia de 20 m. ¿Cuál es su porcentaje de incertidumbre?

69. La frecuencia del pulso de un bebé se mide en 130 ± 5 latidos/min. ¿Cuál es el porcentaje de incertidumbre en esta medición?

70. (a) Supongamos que una persona tiene una frecuencia cardíaca media de 72,0 latidos/min. ¿Cuántos latidos tiene en 2,0 años? (b) ¿En 2,00 años? (c) ¿En 2.000 años?

71. Una lata contiene 375 mL de refresco. ¿Cuánto queda después de extraer 308 mL?

72. Indique cuántas cifras significativas son adecuadas en los resultados de los siguientes cálculos: (a) $(106{,}7)(98{,}2)/(46{,}210)(1{,}01)$; (b) $(18{,}7)^2$; (c) $\left(1{,}60 \times 10^{-19}\right)(3.712)$

73. (a) ¿Cuántas cifras significativas tienen los números 99 y 100.? (b) Si la incertidumbre de cada número es 1, ¿cuál es el porcentaje de incertidumbre de cada uno? (c) ¿Cuál es una forma más significativa de expresar la exactitud de estos dos números: las cifras significativas o los porcentajes de incertidumbre?

74. (a) Si su velocímetro tiene una incertidumbre de 2,0 km/h a una rapidez de 90 km/h, ¿cuál es el porcentaje de incertidumbre? (b) Si tiene el mismo porcentaje de incertidumbre cuando marca 60 km/h, ¿cuál es el rango de los valores de rapidez al que podría ir?

75. (a) La presión arterial de una persona se mide como 120 ± 2 mm Hg. ¿Cuál es su porcentaje de incertidumbre? (b) Suponiendo el mismo porcentaje de incertidumbre, ¿cuál es la

incertidumbre en una medición de la presión arterial de 80 mm Hg?

76. Una persona mide su frecuencia cardíaca contando el número de latidos en 30 s. Si se cuentan 40 ± 1 latidos en 30,0 ± 0,5 s, ¿cuál es la frecuencia cardíaca y su incertidumbre en latidos por minuto?

77. ¿Cuál es el área de un círculo de 3,102 cm de diámetro?

78. Determine el número de cifras significativas de las siguientes medidas: (a) 0,0009, (b) 15.450,0, (c) 6×10^3, (d) 87,990 y (e) 30,42.

79. Realice los siguientes cálculos y exprese su respuesta con el número correcto de dígitos significativos. (a) Una mujer tiene dos bolsas que pesan 13,5 lb y una bolsa con un peso de 10,2 lb. ¿Cuál es el peso total de las bolsas? (b) La fuerza F sobre un objeto es igual a su masa m multiplicada por su aceleración a. Si un vagón de mercancía con una masa de 55 kg acelera a una tasa de 0,0255 m/s^2, ¿cuál es la fuerza sobre el vagón? (La unidad de fuerza se llama *newton* y se expresa con el símbolo N).

Problemas Adicionales

80. Consideremos la ecuación $y = mt + b$, donde la dimensión de y es la longitud y la dimensión de t es el tiempo, y m y b son constantes. ¿Cuáles son las dimensiones y unidades del SI de (a) m y (b) b?

81. Considere la ecuación $s = s_0 + v_0 t + a_0 t^2/2 + j_0 t^3/6 + S_0 t^4/24 + ct^5/120$, donde s es longitud y t es tiempo. ¿Cuáles son las dimensiones y las unidades del SI de (a) s_0, (b) v_0, (c) a_0, (d) j_0, (e) S_0, y (f) c?

82. (a) El velocímetro de un auto tiene una incertidumbre del 5 %. ¿Cuál es el rango de rapidez posible cuando marca 90 km/h? (b) Convierta este rango a millas por hora. Tenga en cuenta que 1 km = 0,6214 mi.

83. Un corredor de maratón completa un recorrido de 42,188 km en 2 h, 30 min y 12 s. Hay una incertidumbre de 25 m en la distancia recorrida y una incertidumbre de 1 s en el tiempo transcurrido. (a) Calcule el porcentaje de incertidumbre en la distancia. (b) Calcule el porcentaje de incertidumbre en el tiempo transcurrido. (c) ¿Cuál es la rapidez media en metros por segundo? (d) ¿Cuál es la incertidumbre en la rapidez media?

84. Los lados de una pequeña caja rectangular se miden como 1,80 ± 0,1 cm, 2,05 ± 0,02 cm y 3,1 ± 0,1 cm de longitud. Calcule su volumen e incertidumbre en centímetros cúbicos.

85. Cuando no se usaba el sistema métrico decimal en el Reino Unido, se utilizaba una unidad de masa llamada libra-masa (lbm), donde 1 lbm = 0,4539 kg. (a) Si hay una incertidumbre de 0,0001 kg en la unidad libra-masa, ¿cuál es su porcentaje de incertidumbre? (b) Con base en esa incertidumbre porcentual, ¿qué masa en libra-masa tiene una incertidumbre de 1 kg cuando se convierte a kilogramos?

86. La longitud y la anchura de una habitación rectangular se miden como 3,955 ± 0,005 m y 3,050 ± 0,005 m. Calcule el área de la habitación y su incertidumbre en metros cuadrados.

87. Un motor de automóvil mueve un pistón de sección circular de 7,500 ± 0,002 cm de diámetro una distancia de 3,250 ± 0,001 cm para comprimir el gas en el cilindro. (a) ¿En qué cantidad disminuye el volumen del gas en centímetros cúbicos? (b) Halle la incertidumbre en este volumen.

Problemas De Desafío

88. La primera bomba atómica se detonó el 16 de julio de 1945 en el sitio de pruebas de Trinity, a unas 200 mi al sur de Los Álamos. En 1947, el gobierno estadounidense desclasificó un rollo de película de la explosión. A partir del mismo, el físico británico G. I. Taylor pudo determinar la tasa a la que crecía el radio de la bola de fuego de la explosión. Gracias al análisis dimensional, pudo deducir la cantidad de energía liberada en la explosión, que era un secreto muy bien guardado en aquella época. Por ello, Taylor no publicó sus resultados sino hasta 1950. Este problema le reta a recrear este famoso cálculo. (a) Con su aguda perspicacia desarrollada a partir de años de experiencia, Taylor decidió que el radio r de la bola de fuego debía depender solo del tiempo transcurrido desde la explosión, t, de la densidad del aire, ρ, y de la energía de la explosión inicial, E. Así, conjeturó que $r = kE^a \rho^b t^c$ para alguna constante adimensional k y algunos exponentes desconocidos a, b y c. Dado que [E] = ML^{2}T^{-2},

determine los valores de los exponentes necesarios para que esta ecuación sea dimensionalmente coherente. (*Pista*: Observe que la ecuación implica que $k = rE^{-a}\rho^{-b}t^{-c}$ y que $[k] = 1$). (b) Tras analizar los datos de los explosivos convencionales de alta energía, Taylor encontró que la fórmula que derivó parecía ser válida siempre que la constante k tuviera el valor de 1,03. A partir del rollo de película, pudo determinar muchos valores de r y los correspondientes valores de t. Por ejemplo, descubrió que tras 25,0 ms, la bola de fuego tenía un radio de 130,0 m. Utilice estos valores, junto con una densidad media del aire de 1,25 kg/m^3, para calcular la liberación de energía inicial de la detonación de Trinity en julios (J). (*Pista*: Para obtener la energía en julios, hay que comprobar que todos los números que se sustituyen se expresen en términos de unidades básicas del SI). (c) La energía liberada en las grandes explosiones se cita a menudo en unidades de "toneladas de TNT" (abreviado "t TNT"), donde 1 t TNT es aproximadamente 4,2 gigajulios (GJ). Convierta su respuesta de (b) a kilotones de TNT (es decir, kt TNT). Compare su respuesta con el cálculo rápido de 10 kt de TNT, que realizó el físico Enrico Fermi poco después de presenciar la explosión desde una distancia supuestamente segura. (Según se dice, Fermi realizó su cálculo dejando caer algunos trozos de papel triturados justo antes de que los restos de la onda expansiva le golpearan y miró para ver hasta dónde la onda los arrastraba).

89. El propósito de este problema es demostrar que todo el concepto de coherencia dimensional se resume con el viejo dicho "no se pueden sumar manzanas y naranjas". Si ha estudiado las expansiones de las series de potencias en un curso de cálculo, sabe que las funciones matemáticas estándar, como las funciones trigonométricas, los logaritmos y las funciones exponenciales, pueden expresarse como sumas infinitas de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

donde a_n son constantes adimensionales para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$ y x es el argumento de la función. (Si aún no ha estudiado las series de potencias en cálculo, confíe en nosotros). Utilice este hecho para explicar por qué el requisito de que todos los términos de una ecuación tengan las mismas dimensiones es suficiente como definición de coherencia dimensional. Es decir, en realidad implica que los argumentos de las funciones matemáticas estándar deben ser adimensionales, por lo que no es realmente necesario hacer de esta última condición un requisito aparte de la definición de coherencia dimensional, como hemos hecho en esta sección.

CAPÍTULO 2
Vectores



Figura 2.1 El poste indicador da información sobre las distancias y direcciones a las ciudades o a otros lugares en relación con la ubicación del poste. La distancia es una cantidad escalar. Para llegar a la ciudad no basta con conocer la distancia, sino que también hay que saber la dirección desde el poste indicador hasta la ciudad. La dirección, junto con la distancia, es una cantidad vectorial comúnmente llamada vector de desplazamiento. Por lo tanto, el poste indicador da información sobre los vectores de desplazamiento desde el poste hasta las ciudades (créditos: modificación de la obra de "studio tdes"/Flickr, thedailyenglishshow.com).

ESQUEMA DEL CAPITULO

2.1 Escalares y vectores
2.2 Sistemas de coordenadas y componentes de un vector
2.3 Álgebra de vectores
2.4 Productos de los vectores

INTRODUCCIÓN Los vectores son esenciales para la física y la ingeniería. Muchas magnitudes físicas fundamentales son vectores, como el desplazamiento, la velocidad, la fuerza y los campos vectoriales eléctricos y magnéticos. Los productos escalares de los vectores definen otras magnitudes físicas escalares fundamentales, como la energía. Los productos vectoriales de los vectores definen otras magnitudes físicas vectoriales fundamentales, como el torque y el momento angular. En otras palabras, los vectores son un componente de la física del mismo modo que las frases son un componente de la literatura.

En la física introductoria, los vectores son cantidades euclidianas, que tienen representaciones geométricas como flechas en una dimensión (en una línea), en dos dimensiones (en un plano) o en tres dimensiones (en el espacio). Se pueden sumar, restar o multiplicar. En este capítulo, exploramos elementos del álgebra vectorial para aplicaciones en mecánica y en electricidad y magnetismo. Las operaciones vectoriales también tienen numerosas generalizaciones en otras ramas de la física.

2.1 Escalares y vectores

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la diferencia entre cantidades vectoriales y escalares.
- Identificar la magnitud y la dirección de un vector.
- Explicar el efecto de multiplicar una cantidad vectorial por un escalar.
- Describir cómo se suman o restan cantidades vectoriales unidimensionales.
- Explicar la construcción geométrica para la suma o la resta de vectores en un plano.
- Distinguir entre una ecuación vectorial y una ecuación escalar.

Muchas magnitudes físicas conocidas pueden especificarse completamente con un solo número y la unidad apropiada. Por ejemplo, "un periodo de clase dura 50 min" o "el tanque de gasolina de mi auto tiene capacidad de 65 L" o "la distancia entre dos postes es de 100 m". La cantidad física que puede especificarse completamente de esta manera se denomina **cantidad escalar**. Escalar es sinónimo de "número". El tiempo, la masa, la distancia, la longitud, el volumen, la temperatura y la energía son ejemplos de cantidades **escalares**.

Las cantidades escalares que tienen las mismas unidades físicas pueden sumarse o restarse según las reglas habituales del álgebra de los números. Por ejemplo, una clase que termina 10 min antes de los 50 min dura $50\text{ min} - 10\text{ min} = 40\text{ min}$. Del mismo modo, una porción de 60 calorías (cal) de maíz seguida de una porción de 200 calorías de donas da $60\text{ cal} + 200\text{ cal} = 260\text{ cal}$ de energía. Cuando multiplicamos una cantidad escalar por un número, obtenemos la misma cantidad escalar, pero con un valor mayor (o menor). Por ejemplo, si el desayuno de ayer tenía 200 cal de energía y el de hoy tiene cuatro veces más energía que ayer, entonces el desayuno de hoy tiene $4(200\text{ cal}) = 800\text{ cal}$ de energía. Dos cantidades escalares también pueden multiplicarse o dividirse entre sí para formar una cantidad escalar derivada. Por ejemplo, si un tren recorre una distancia de 100 km en 1,0 h, su rapidez es de 100,0 km/1,0 h = 27,8 m/s, donde la rapidez es una cantidad escalar derivada que se obtiene al dividir la distancia entre el tiempo.

Sin embargo, muchas cantidades físicas no pueden describirse completamente con un solo número de unidades físicas. Por ejemplo, cuando los guardacostas estadounidenses envían un barco o un helicóptero para una misión de rescate, el equipo de rescate debe conocer, no solo la distancia a la que se encuentra la señal de socorro, sino también la dirección de la que procede esta para poder llegar a su origen lo antes posible. Las cantidades físicas que se especifican completamente con un número de unidades (magnitud) y una dirección se llaman **cantidades vectoriales**. Algunos ejemplos de cantidades vectoriales son el desplazamiento, la velocidad, la posición, la fuerza y el torque. En el lenguaje matemático, las cantidades físicas vectoriales se representan mediante objetos matemáticos, denominados **vectores** (Figura 2.2). Podemos sumar o restar dos vectores, y podemos multiplicar un vector por un escalar o por otro vector, pero no podemos dividir por un vector. La operación de división por un vector no está definida.

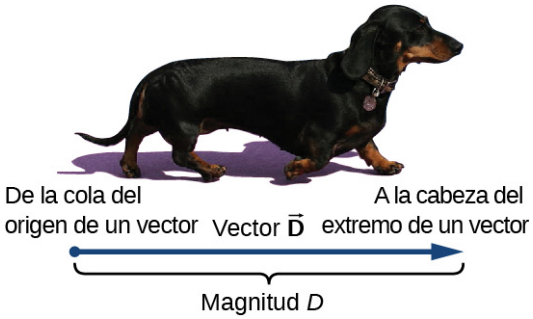


FIGURA 2.2 Dibujamos un vector desde el punto inicial u origen ("cola" de un vector) hasta el punto extremo o terminal ("cabeza" de un vector), marcado por una punta de flecha. La magnitud es la longitud de un vector y es siempre una cantidad escalar positiva (créditos de la foto: modificación del trabajo de Cate Sevilla).

Examinemos el álgebra vectorial con un método gráfico para conocer los términos básicos y desarrollar una comprensión cualitativa. En la práctica, sin embargo, cuando se trata de resolver problemas de física, utilizamos métodos analíticos, que veremos en la siguiente sección. Los métodos analíticos son más sencillos

desde el punto de vista computacional y más precisos que los métodos gráficos. A partir de ahora, para distinguir entre una cantidad vectorial y una escalar, adoptamos la convención común de que una letra en negritas con una flecha encima denota un vector, y una letra sin flecha denota un escalar. Por ejemplo, una distancia de 2,0 km, que es una cantidad escalar, se denota por $d = 2{,}0$ km, mientras que un desplazamiento de 2,0 km en alguna dirección, que es una cantidad vectorial, se denota por $\vec{\mathbf{d}}$.

Supongamos que le dice a un amigo con el que está de acampada que ha descubierto un estupendo agujero para pescar a 6 km de su carpa. Es poco probable que su amigo encuentre el agujero con facilidad, a menos que también le comunique la dirección en la que se encuentre con respecto a su campamento. Puede decir, por ejemplo, "camine unos 6 km al noreste de mi carpa". El concepto clave aquí es que hay que dar no uno, sino *dos* datos: la distancia o magnitud (6 km) *y* la dirección (noreste).

Desplazamiento es un término general que se utiliza para describir un *cambio de posición*, por ejemplo, durante un viaje desde la carpa hasta el agujero de pesca. El desplazamiento es un ejemplo de cantidad vectorial. Si se camina desde la carpa (lugar *A*) hasta el agujero (lugar *B*), como se muestra en la Figura 2.3, el vector $\vec{\mathbf{D}}$, que representa su **desplazamiento**, se dibuja como la flecha que se origina en el punto *A* y termina en el punto *B*. La punta de la flecha marca el final del vector. La dirección del vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ es la dirección de la flecha. La longitud de la flecha representa la **magnitud** *D* del vector $\vec{\mathbf{D}}$. Aquí, $D = 6$ km. Como la magnitud de un vector es su longitud, que es un número positivo, la magnitud también se indica al colocar la notación de valor absoluto alrededor del símbolo que denota el vector; por lo tanto, podemos escribir de forma equivalente que $D \equiv |\vec{\mathbf{D}}|$. Para resolver un problema vectorial gráficamente, necesitamos dibujar el vector $\vec{\mathbf{D}}$ a escala. Por ejemplo, si suponemos que 1 unidad de distancia (1 km) está representada en el dibujo por un segmento de línea de longitud $u = 2$ cm, entonces el desplazamiento total en este ejemplo está representado por un vector de longitud $d = 6u = 6(2\text{ cm}) = 12\text{ cm}$, como se muestra en la Figura 2.4. Observe que aquí, para evitar confusiones, utilizamos $D = 6$ km para denotar la magnitud del desplazamiento real y $d = 12$ cm para denotar la longitud de su representación en el dibujo.

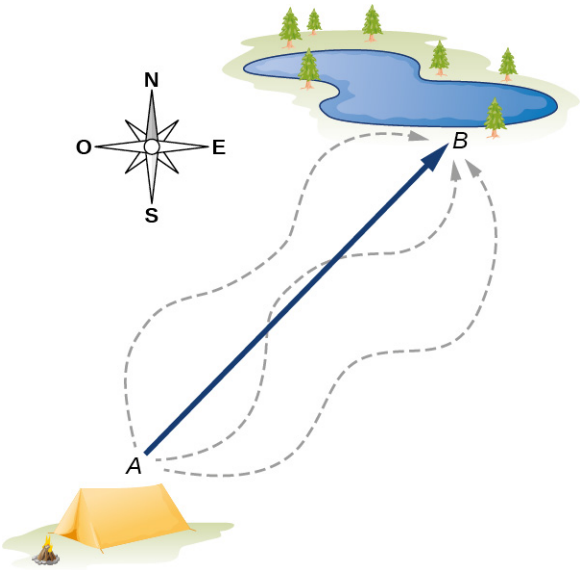


FIGURA 2.3 El vector de desplazamiento desde el punto *A* (la posición inicial en el campamento) hasta el punto *B* (la posición final en el agujero de pesca) se indica con una flecha con origen en el punto *A* y final en el punto *B*. El desplazamiento es el mismo para cualquiera de los caminos reales (curvas discontinuas) que se pueden tomar entre los puntos *A* y *B*.

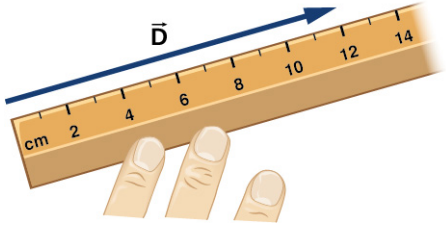


FIGURA 2.4 Un desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ de magnitud 6 km se dibuja a escala como un vector de longitud 12 cm cuando la longitud de 2 cm representa 1 unidad de desplazamiento (que en este caso es 1 km).

Supongamos que su amigo camina desde el campamento en A hasta el estanque de pesca en B y luego regresa: desde el estanque de pesca en B hasta el campamento en A. La magnitud del vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$ de A a B es igual a la magnitud del vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{BA}$ de B a A (es igual a 6 km en ambos casos), por lo que podemos escribir $D_{AB} = D_{BA}$. Sin embargo, el vector $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$ *no* es igual al vector $\vec{\mathbf{D}}_{BA}$ porque estos dos vectores tienen direcciones diferentes: $\vec{\mathbf{D}}_{AB} \neq \vec{\mathbf{D}}_{BA}$. En la Figura 2.3, el vector $\vec{\mathbf{D}}_{BA}$ se representaría mediante un vector con origen en el punto B y final en el punto A, lo cual indica que el vector $\vec{\mathbf{D}}_{BA}$ apunta al suroeste, que es exactamente $180°$ opuesto a la dirección del vector $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$. Diremos que el vector $\vec{\mathbf{D}}_{BA}$ es **antiparalelo** al vector $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$ y escribimos $\vec{\mathbf{D}}_{AB} = -\vec{\mathbf{D}}_{BA}$, donde el signo menos indica la dirección antiparalela.

Se dice que dos vectores que tienen direcciones idénticas son **vectores paralelos**, es decir, que son *paralelos* entre sí. Dos vectores paralelos $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son iguales, indicado por $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$, si y solo si tienen magnitudes iguales $|\vec{\mathbf{A}}| = |\vec{\mathbf{B}}|$. Se dice que dos vectores con direcciones perpendiculares entre sí son **vectores ortogonales**. Estas relaciones entre vectores se ilustran en la Figura 2.5.

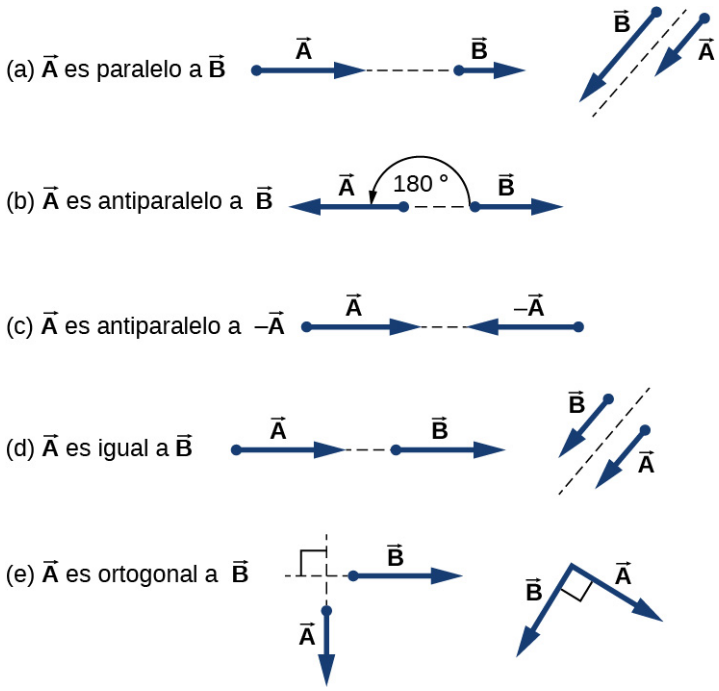


FIGURA 2.5 Diversas relaciones entre dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. (a) $\vec{\mathbf{A}} \neq \vec{\mathbf{B}}$ porque $A \neq B$. (b) $\vec{\mathbf{A}} \neq \vec{\mathbf{B}}$ porque no son paralelos y $A \neq B$. (c) $\vec{\mathbf{A}} \neq -\vec{\mathbf{A}}$ porque tienen direcciones diferentes (aunque $|\vec{\mathbf{A}}| = |-\vec{\mathbf{A}}| = A$). (d) $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ porque son paralelos *y* tienen magnitud idéntica *A* = *B*. (e) $\vec{\mathbf{A}} \neq \vec{\mathbf{B}}$ porque tienen direcciones diferentes (no son paralelos); aquí, sus direcciones difieren en $90°$, lo que significa que son ortogonales.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.1

Dos lanchas a motor llamadas *Alice* y *Bob* se desplazan por un lago. Dada la información sobre sus vectores de velocidad en cada una de las siguientes situaciones, indique si sus vectores de velocidad son iguales o no. (a) *Alice* se desplaza hacia el norte a 6 nudos y *Bob* se desplaza hacia el oeste a 6 nudos. (b) *Alice* se desplaza hacia el oeste a 6 nudos y *Bob* se desplaza hacia el oeste a 3 nudos. (c) *Alice* se desplaza hacia el noreste a 6 nudos y *Bob* se desplaza hacia el sur a 3 nudos. (d) *Alice* se desplaza hacia el noreste a 6 nudos y *Bob* se desplaza hacia el suroeste a 6 nudos. (e) *Alice* se desplaza hacia el noreste a 2 nudos y *Bob* se acerca a la costa hacia el noreste a 2 nudos.

Álgebra de vectores en una dimensión

Los vectores pueden multiplicarse por escalares, sumarse a otros vectores o restarse de otros. Podemos ilustrar estos conceptos vectoriales con un ejemplo de excursión de pesca, que se ve en la Figura 2.6.

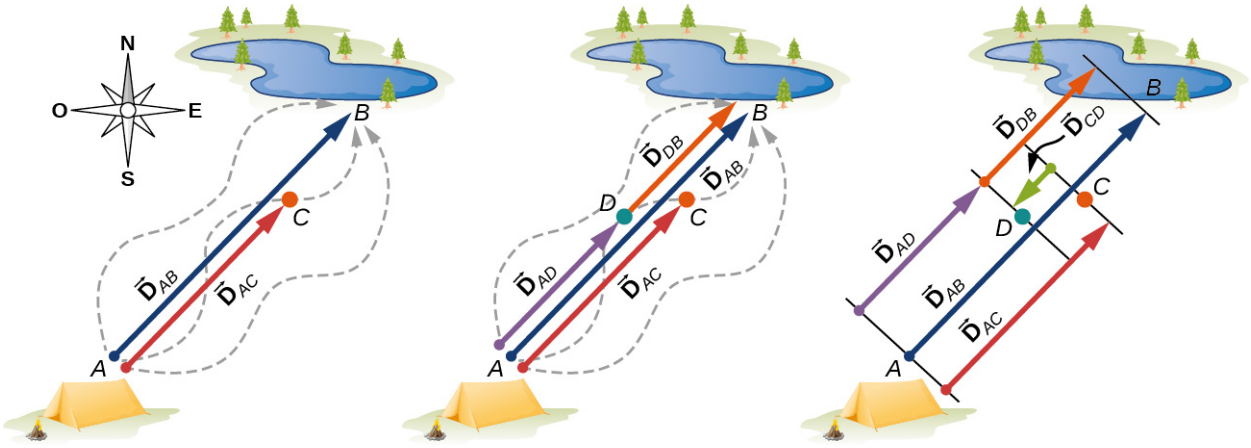


FIGURA 2.6 Vectores de desplazamiento para una excursión de pesca. (a) Parada para descansar en el punto *C* mientras se camina desde el campamento (punto *A*) hasta el estanque (punto *B*). (b) Regreso para recoger la caja de anzuelos que se cayó (punto *D*). (c) Finaliza en el estanque de pesca.

Supongamos que su amigo parte del punto *A* (el campamento) y camina en dirección al punto *B* (el estanque de pesca), pero, por el camino, se detiene a descansar en algún punto *C* situado a tres cuartas partes de la distancia entre *A* y *B*, partiendo del punto *A* (Figura 2.6(a)). ¿Cuál es su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{AC}$ cuando llega al punto *C*? Sabemos que si camina hasta *B*, su vector de desplazamiento con respecto a *A* es $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$, que tiene una magnitud $D_{AB} = 6$ km y una dirección al noreste. Si camina solo una fracción de 0,75 de la distancia total, y mantiene la dirección noreste, en el punto *C* debe estar a $0{,}75 D_{AB} = 4{,}5$ km lejos del campamento en *A*. Así, su vector de desplazamiento en el punto de reposo *C* tiene magnitud $D_{AC} = 4{,}5 \text{ km} = 0{,}75 D_{AB}$ y es paralelo al vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$. Todo esto se puede resumir en la siguiente **ecuación vectorial**:

$$\vec{\mathbf{D}}_{AC} = 0{,}75\vec{\mathbf{D}}_{AB}.$$

En una ecuación vectorial, ambos lados de la ecuación son vectores. La ecuación anterior es un ejemplo de vector multiplicado por un escalar positivo (número) $\alpha = 0{,}75$. El resultado, $\vec{\mathbf{D}}_{AC}$, de tal multiplicación es un nuevo vector con una dirección paralela a la dirección del vector original $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$.

En general, cuando un vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por un escalar *positivo* α, el resultado es un nuevo vector $\vec{\mathbf{B}}$ que es *paralelo* a $\vec{\mathbf{A}}$:

$$\vec{\mathbf{B}} = \alpha\vec{\mathbf{A}}. \qquad 2.1$$

La magnitud $|\vec{\mathbf{B}}|$ de este nuevo vector se obtiene al multiplicar la magnitud $|\vec{\mathbf{A}}|$ del vector original, expresada por la **ecuación escalar**:

$$B = |\alpha| A. \qquad 2.2$$

En una ecuación escalar, ambos lados de la ecuación son números. La Ecuación 2.2 es una ecuación escalar porque las magnitudes de los vectores son cantidades escalares (y números positivos). Si el escalar α es *negativo* en la ecuación vectorial de la Ecuación 2.1, entonces la magnitud $|\vec{\mathbf{B}}|$ del nuevo vector sigue siendo dada por la Ecuación 2.2, pero la dirección del nuevo vector $\vec{\mathbf{B}}$ es *antiparalela* a la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$. Estos principios se ilustran en la Figura 2.7(a) con dos ejemplos en los que la longitud del vector $\vec{\mathbf{A}}$ es de 1,5 unidades. Cuando $\alpha = 2$, el nuevo vector $\vec{\mathbf{B}} = 2\vec{\mathbf{A}}$ tiene longitud $B = 2A = 3{,}0$ unidades (el doble de largo que el vector original) y es paralelo al vector original. Cuando $\alpha = -2$, el nuevo vector $\vec{\mathbf{C}} = -2\vec{\mathbf{A}}$ tiene longitud $C = |-2|A = 3{,}0$ unidades (dos veces más largo que el vector original) y es antiparalelo al vector original.

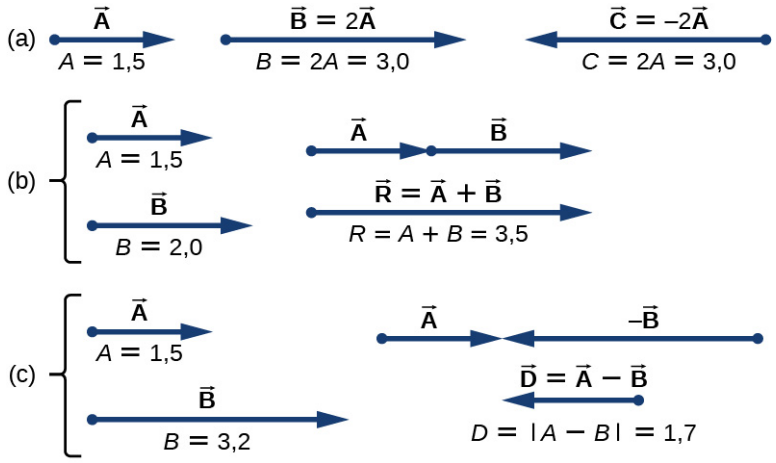


FIGURA 2.7 Álgebra de vectores en una dimensión. (a) Multiplicación por un escalar. (b) Suma de dos vectores ($\vec{\mathbf{R}}$ se llama la *resultante* de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$). (c) Sustracción de dos vectores ($\vec{\mathbf{D}}$ es la diferencia de vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$).

Supongamos ahora que su compañero de pesca parte del punto *A* (el campamento), y camina en dirección al punto *B* (el agujero de pesca), pero se da cuenta de que ha perdido su caja de anzuelos cuando se ha parado a descansar en el punto *C* (situado a tres cuartas partes de la distancia entre *A* y *B*, al partir del punto *A*). Entonces, da la vuelta y vuelve sobre sus pasos en dirección al campamento y encuentra la caja tirada en el camino en un punto *D* a solo 1,2 km del punto *C* (vea la Figura 2.6(b)). ¿Cuál es su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{AD}$ cuando encuentra la caja en el punto *D*? ¿Cuál es su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{DB}$ desde el punto *D* hasta el agujero? Ya hemos establecido que en el punto de reposo *C* su vector de desplazamiento es $\vec{\mathbf{D}}_{AC} = 0{,}75\vec{\mathbf{D}}_{AB}$. Partiendo del punto *C*, camina hacia el suroeste (hacia el campamento), lo que significa que su nuevo vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{CD}$ del punto *C* al punto *D* es antiparalelo a $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$. Su magnitud $|\vec{\mathbf{D}}_{CD}|$ es $D_{CD} = 1{,}2\ \text{km} = 0{,}2D_{AB}$, por lo que su segundo vector de desplazamiento es $\vec{\mathbf{D}}_{CD} = -0{,}2\vec{\mathbf{D}}_{AB}$. Su desplazamiento total $\vec{\mathbf{D}}_{AD}$ con respecto al campamento es la **suma vectorial** de los dos vectores de desplazamiento: vector $\vec{\mathbf{D}}_{AC}$ (desde el campamento hasta el punto de descanso) y el vector $\vec{\mathbf{D}}_{CD}$ (desde el punto de descanso hasta el punto donde encuentra su caja):

$$\vec{\mathbf{D}}_{AD} = \vec{\mathbf{D}}_{AC} + \vec{\mathbf{D}}_{CD}. \qquad 2.3$$

La suma vectorial de dos (o más) vectores se denomina **vector resultante** o, para abreviar, la *resultante*. Cuando se conocen los vectores del lado derecho de la Ecuación 2.3, podemos encontrar la resultante $\vec{\mathbf{D}}_{AD}$ de la siguiente forma:

$$\vec{\mathbf{D}}_{AD} = \vec{\mathbf{D}}_{AC} + \vec{\mathbf{D}}_{CD} = 0{,}75\vec{\mathbf{D}}_{AB} - 0{,}2\,\vec{\mathbf{D}}_{AB} = (0{,}75 - 0{,}2)\vec{\mathbf{D}}_{AB} = 0{,}55\vec{\mathbf{D}}_{AB}. \quad 2.4$$

Cuando su amigo llega finalmente al estanque en *B*, su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$ desde el punto *A* es la suma vectorial de su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{AD}$ del punto *A* al punto *D* y su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{DB}$ desde el punto *D* hasta el agujero de pesca: $\vec{\mathbf{D}}_{AB} = \vec{\mathbf{D}}_{AD} + \vec{\mathbf{D}}_{DB}$ (vea la Figura 2.6(c)). Esto significa que su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{DB}$ es la **diferencia de dos vectores**:

$$\vec{\mathbf{D}}_{DB} = \vec{\mathbf{D}}_{AB} - \vec{\mathbf{D}}_{AD} = \vec{\mathbf{D}}_{AB} + (-\vec{\mathbf{D}}_{AD}). \quad 2.5$$

Observe que una diferencia de dos vectores no es más que la suma vectorial de dos vectores porque el segundo término de la Ecuación 2.5 es el vector $-\vec{\mathbf{D}}_{AD}$ (que es antiparalelo a $\vec{\mathbf{D}}_{AD}$). Cuando sustituimos la Ecuación 2.4 en la Ecuación 2.5, obtenemos el segundo vector de desplazamiento:

$$\vec{\mathbf{D}}_{DB} = \vec{\mathbf{D}}_{AB} - \vec{\mathbf{D}}_{AD} = \vec{\mathbf{D}}_{AB} - 0{,}55\vec{\mathbf{D}}_{AB} = (1{,}0 - 0{,}55)\vec{\mathbf{D}}_{AB} = 0{,}45\vec{\mathbf{D}}_{AB}. \quad 2.6$$

Este resultado significa que su amigo caminó $D_{DB} = 0{,}45\,D_{AB} = 0{,}45(6{,}0\text{ km}) = 2{,}7\text{ km}$ desde el punto donde encuentra su caja de anzuelos hasta el agujero de pesca.

Cuando los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se encuentran a lo largo de una línea (es decir, en una dimensión), como en el ejemplo del campamento, su resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y su diferencia $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ ambas se encuentran en la misma dirección. Podemos ilustrar la suma o la resta de vectores dibujando los vectores correspondientes a escala en una dimensión, como se muestra en la Figura 2.7.

Para ilustrar la resultante cuando $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son dos vectores paralelos, los dibujamos a lo largo de una línea al colocar el origen de un vector en el extremo del otro vector en forma de cabeza a cola (vea la Figura 2.7(b)). La magnitud de esta resultante es la suma de sus magnitudes: $R = A + B$. La dirección de la resultante es paralela a ambos vectores. Cuando el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es antiparalelo al vector $\vec{\mathbf{B}}$, los dibujamos a lo largo de una línea, ya sea de cabeza a cabeza (Figura 2.7(c)) o de cola a cola. La magnitud de la diferencia de vectores, entonces, es el *valor absoluto* $D = |A - B|$ de la diferencia de sus magnitudes. La dirección de la diferencia de vectores $\vec{\mathbf{D}}$ es paralela a la dirección del vector más largo.

En general, en una dimensión, así como en dimensiones superiores, como en un plano o en el espacio, podemos sumar cualquier número de vectores y podemos hacerlo en cualquier orden porque la suma de vectores es **conmutativa**,

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}, \quad 2.7$$

y **asociativa**,

$$(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}). \quad 2.8$$

Además, la multiplicación por un escalar es **distributiva**:

$$\alpha_1\vec{\mathbf{A}} + \alpha_2\vec{\mathbf{A}} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{\mathbf{A}}. \quad 2.9$$

Utilizamos la propiedad distributiva en la Ecuación 2.4 y la Ecuación 2.6.

Al sumar muchos vectores en una dimensión, es conveniente utilizar el concepto de **vector unitario**. Un vector unitario, que se denota con un símbolo de letra con acento circunflejo, como $\hat{\mathbf{u}}$, tiene una magnitud de uno y no tiene ninguna unidad física de modo que $|\hat{\mathbf{u}}| \equiv u = 1$. La única función de un vector unitario es especificar la dirección. Por ejemplo, en lugar de decir que el vector $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$ tiene una magnitud de 6,0 km y una dirección de noreste, podemos introducir un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ que apunta al noreste y decir de forma resumida que $\vec{\mathbf{D}}_{AB} = (6{,}0\text{ km})\hat{\mathbf{u}}$. Entonces la dirección suroeste viene dada simplemente por el vector unitario $-\hat{\mathbf{u}}$. De este modo, el desplazamiento de 6,0 km en dirección suroeste se expresa mediante el vector

$$\vec{\mathbf{D}}_{BA} = (-6{,}0\ \text{km})\hat{\mathbf{u}}.$$

EJEMPLO 2.1

Una mariquita caminante

Una larga regla para medir se apoya en la pared de un laboratorio de física con su extremo de 200 cm en el suelo. Una mariquita se posa en la marca de 100 cm y se arrastra aleatoriamente por la regla. Primero camina 15 cm hacia el suelo, luego camina 56 cm hacia la pared, y después vuelve a caminar 3 cm hacia el suelo. A continuación, tras una breve parada, continúa 25 cm hacia el suelo y luego, de nuevo, se arrastra 19 cm hacia la pared antes de detenerse por completo (Figura 2.8). Halle el vector de su desplazamiento total y su posición final de reposo en la regla.

Estrategia

Si elegimos la dirección a lo largo de la regla hacia el suelo como la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$, entonces la dirección hacia el suelo es $+\hat{\mathbf{u}}$ y la dirección hacia la pared es $-\hat{\mathbf{u}}$. La mariquita realiza un total de cinco desplazamientos:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{D}}_1 &= (15\ \text{cm})(+\hat{\mathbf{u}}),\\
\vec{\mathbf{D}}_2 &= (56\ \text{cm})(-\hat{\mathbf{u}}),\\
\vec{\mathbf{D}}_3 &= (3\ \text{cm})(+\hat{\mathbf{u}}),\\
\vec{\mathbf{D}}_4 &= (25\ \text{cm})(+\hat{\mathbf{u}}),\ \text{y}\\
\vec{\mathbf{D}}_5 &= (19\ \text{cm})(-\hat{\mathbf{u}}).
\end{aligned}$$

El desplazamiento total $\vec{\mathbf{D}}$ es la resultante de todos sus vectores de desplazamiento.

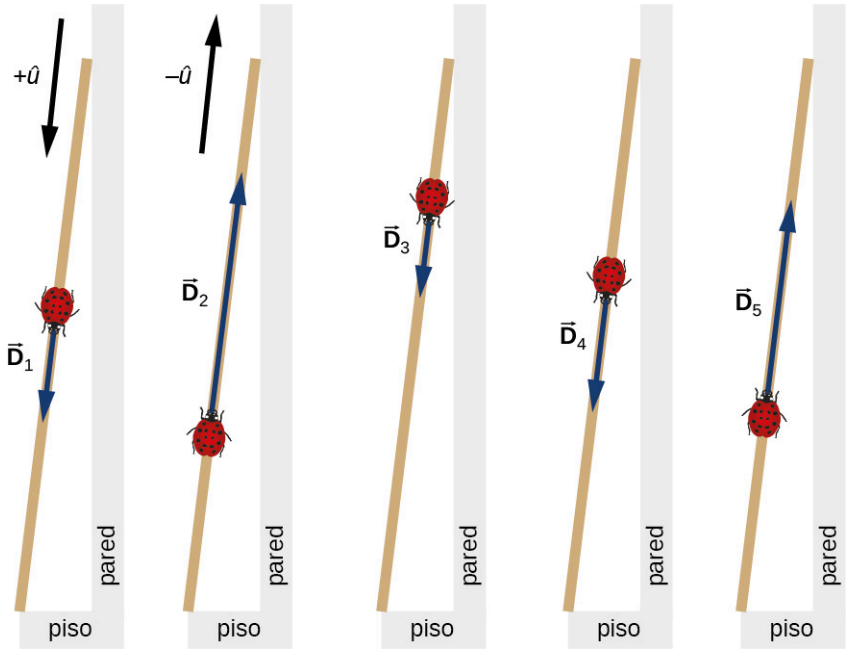


FIGURA 2.8 Cinco desplazamientos de la mariquita. Observe que en este dibujo esquemático, las magnitudes de los desplazamientos no están dibujadas a escala (créditos de "mariquita": modificación de la obra de "Persian Poet Gal"/Wikimedia Commons).

Solución

La resultante de todos los vectores de desplazamiento es

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{D}} &= \vec{\mathbf{D}}_1 + \vec{\mathbf{D}}_2 + \vec{\mathbf{D}}_3 + \vec{\mathbf{D}}_4 + \vec{\mathbf{D}}_5 \\ &= (15\text{ cm})(+\hat{\mathbf{u}}) + (56\text{ cm})(-\hat{\mathbf{u}}) + (3\text{ cm})(+\hat{\mathbf{u}}) + (25\text{ cm})(+\hat{\mathbf{u}}) + (19\text{ cm})(-\hat{\mathbf{u}}) \\ &= (15 - 56 + 3 + 25 - 19)\text{cm}\hat{\mathbf{u}} \\ &= -32\text{ cm}\hat{\mathbf{u}}.\end{aligned}$$

En este cálculo, utilizamos la ley distributiva dada por la Ecuación 2.9. El resultado es que el vector de desplazamiento total apunta lejos de la marca de 100 cm (lugar de aterrizaje inicial) hacia el extremo de la regla para medir que toca la pared. El extremo que toca la pared está marcado 0 cm, por lo que la posición final de la mariquita está en la marca (100 - 32)cm = 68 cm.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.2

Un buceador de cuevas entra en un largo túnel submarino. Cuando su desplazamiento con respecto al punto de entrada es de 20 m, se le cae accidentalmente la cámara, pero no se da cuenta de que no la tiene hasta que se adentra unos 6 m en el túnel. Vuelve a nadar 10 m pero no encuentra la cámara, así que decide terminar la inmersión. ¿A qué distancia está del punto de entrada? Tomando la dirección positiva de salida del túnel, ¿cuál es su vector de desplazamiento con respecto al punto de entrada?

Álgebra de vectores en dos dimensiones

Cuando los vectores se encuentran en un plano, es decir, cuando están en dos dimensiones, pueden multiplicarse por escalares, sumarse a otros vectores o restarse de otros de acuerdo con las leyes generales expresadas por la Ecuación 2.1, la Ecuación 2.2, la Ecuación 2.7 y la Ecuación 2.8. Sin embargo, la regla de adición de dos vectores en un plano se complica más que la regla de adición de vectores en una dimensión. Tenemos que utilizar las leyes de la geometría para construir vectores resultantes, seguidos de la trigonometría para encontrar las magnitudes y direcciones de los vectores. Este enfoque geométrico se utiliza habitualmente en la navegación (Figura 2.9). En este apartado, necesitamos tener a mano dos reglas, una escuadra, un transportador, un lápiz y una goma de borrar para dibujar vectores a escala mediante construcciones geométricas.



FIGURA 2.9 En la navegación, las leyes de la geometría se utilizan para dibujar los desplazamientos resultantes en los mapas náuticos.

Para una construcción geométrica de la suma de dos vectores en un plano, seguimos **la regla del**

paralelogramo. Supongamos que dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están en las posiciones arbitrarias indicadas en la Figura 2.10. Traslade cualquiera de ellos en paralelo al inicio del otro vector, de forma que, luego de la traslación, ambos vectores tengan su origen en el mismo punto. Ahora, al final del vector $\vec{\mathbf{A}}$ dibujamos una línea paralela al vector $\vec{\mathbf{B}}$ y al final del vector $\vec{\mathbf{B}}$ dibujamos una línea paralela al vector $\vec{\mathbf{A}}$ (las líneas discontinuas en la Figura 2.10). De este modo, obtenemos un paralelogramo. Desde el origen de los dos vectores dibujamos una diagonal que es la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ de los dos vectores: $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ (Figura 2.10(a)). La otra diagonal de este paralelogramo es la diferencia de los dos vectores $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, como se muestra en la Figura 2.10(b). Observe que el final de la diferencia de vectores se sitúa al final del vector $\vec{\mathbf{A}}$.

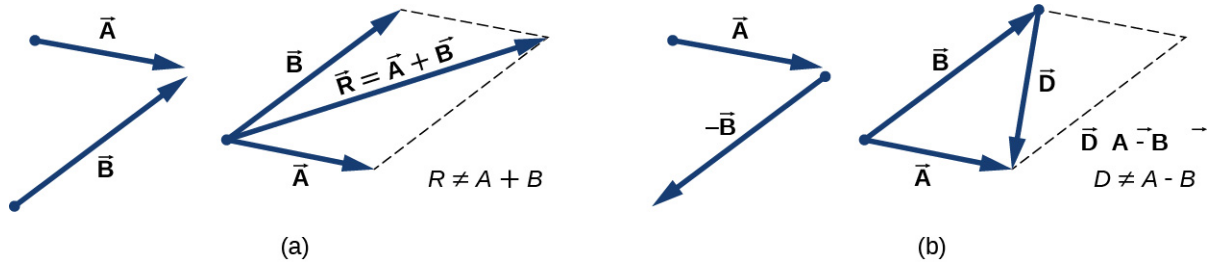


FIGURA 2.10 La regla del paralelogramo para la suma de dos vectores. Realice la traslación paralela de cada vector a un punto en el que coincidan sus orígenes (marcados por el punto) y construya un paralelogramo con dos lados sobre los vectores y los otros dos lados (indicados con líneas discontinuas) paralelos a los vectores. (a) Dibuje el vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$ a lo largo de la diagonal del paralelogramo, desde el punto común hasta la esquina opuesta. La longitud *R* del vector resultante *no* es igual a la suma de las magnitudes de los dos vectores. (b) Dibuje la diferencia de vectores $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ a lo largo de la diagonal que conecta los extremos de los vectores. Sitúe el origen del vector $\vec{\mathbf{D}}$ al final del vector $\vec{\mathbf{B}}$ y el final (cabeza de flecha) del vector $\vec{\mathbf{D}}$ al final del vector $\vec{\mathbf{A}}$. La longitud *D* de la diferencia de vectores *no* es igual a la diferencia de magnitudes de los dos vectores.

De la regla del paralelogramo se deduce que ni la magnitud del vector resultante ni la magnitud de la diferencia de vectores pueden expresarse como una simple suma o diferencia de las magnitudes *A* y *B*, porque la longitud de una diagonal no puede expresarse como una simple suma de las longitudes de los lados. Cuando se utiliza una construcción geométrica para encontrar las magnitudes $|\vec{\mathbf{R}}|$ y $|\vec{\mathbf{D}}|$, tenemos que utilizar las leyes de la trigonometría para los triángulos, lo que puede llevar a un álgebra complicada. Hay dos maneras de evitar esta complejidad algebraica. Una forma es utilizar el método de los componentes, que examinamos en la siguiente sección. La otra forma es dibujar los vectores a escala, como se hace en la navegación, y leer las longitudes y ángulos aproximados de los vectores (direcciones) a partir de los gráficos. En esta sección examinamos el segundo enfoque.

Si necesitamos sumar tres o más vectores, repetimos la regla del paralelogramo para los pares de vectores hasta encontrar la resultante de todas las resultantes. Para tres vectores, por ejemplo, primero encontramos la resultante del vector 1 y el vector 2, y luego encontramos la resultante de esta resultante y el vector 3. El orden en el que seleccionemos los pares de vectores no importa porque la operación de suma de vectores es conmutativa y asociativa (vea la Ecuación 2.7 y la Ecuación 2.8). Antes de enunciar una regla general que derive de las aplicaciones repetidas de la regla del paralelogramo, veamos el siguiente ejemplo.

Suponga que planea un viaje de vacaciones en Florida. Saliendo de Tallahassee, la capital del estado, planea visitar a su tío Joe en Jacksonville, ver a su primo Vinny en Daytona Beach, realizar una parada para divertirse un poco en Orlando, ver un espectáculo de circo en Tampa y visitar la Universidad de Florida en Gainesville. Su ruta se puede representar por cinco vectores de desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{C}}$, $\vec{\mathbf{D}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$, que se indican con los vectores rojos en la Figura 2.11. ¿Cuál es su desplazamiento total al llegar a Gainesville? El desplazamiento total es la suma vectorial de los cinco vectores de desplazamiento, que se puede encontrar con la regla del paralelogramo cuatro veces. Alternativamente, recordemos que el vector de desplazamiento tiene su comienzo en la posición inicial (Tallahassee) y su final en la posición final (Gainesville), por lo que el vector de desplazamiento total puede dibujarse directamente como una flecha que conecta Tallahassee con Gainesville

(vea el vector verde en la Figura 2.11). Cuando usamos la regla del paralelogramo cuatro veces, la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ que obtenemos es exactamente este vector verde que conecta Tallahassee con Gainesville:
$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{E}}$.

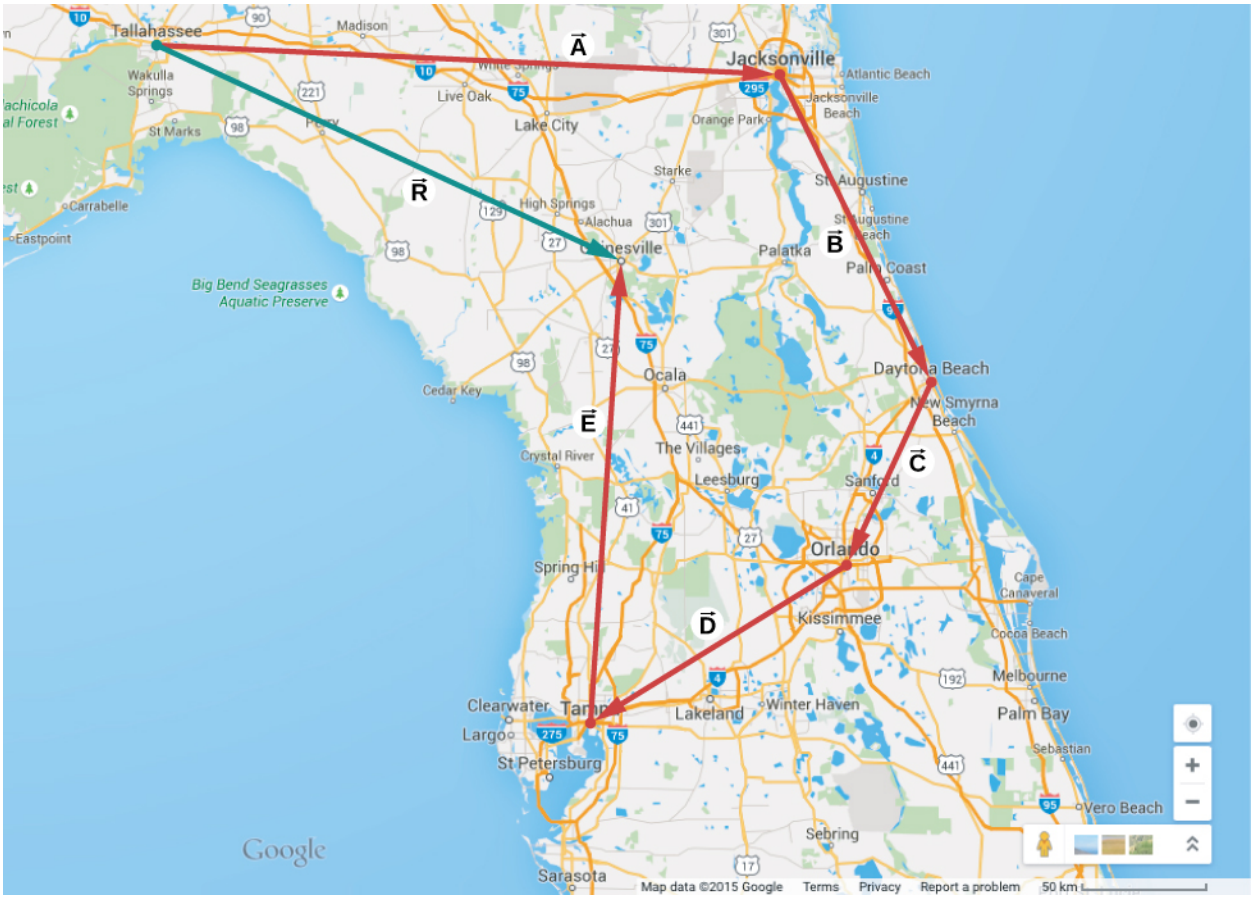


FIGURA 2.11 Cuando utilizamos la regla del paralelogramo cuatro veces, obtenemos el vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{E}}$, que es el vector verde que conecta Tallahassee con Gainesville.

El dibujo del vector resultante de muchos vectores puede generalizarse con la siguiente **construcción geométrica de cola a cabeza**. Supongamos que queremos dibujar el vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$ de cuatro vectores $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{C}}$ y $\vec{\mathbf{D}}$ (Figura 2.12(a)). Seleccionamos cualquiera de los vectores como primer vector y hacemos una traslación paralela de un segundo vector a una posición en la que el origen ("cola") del segundo vector coincide con el final ("cabeza") del primer vector. Luego, seleccionamos un tercer vector y realizamos una traslación paralela del tercer vector a una posición en la que el origen del tercer vector coincida con el final del segundo vector. Repetimos este procedimiento hasta que todos los vectores estén en una disposición de cabeza a cola como la que se muestra en la Figura 2.12. Dibujamos el vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$ conectando el origen ("cola") del primer vector con el final ("cabeza") del último vector. El final del vector resultante está en el final del último vector. Como la suma de vectores es asociativa y conmutativa, obtenemos el mismo vector resultante, independientemente del vector que elijamos como primero, segundo, tercero o cuarto en esta construcción.

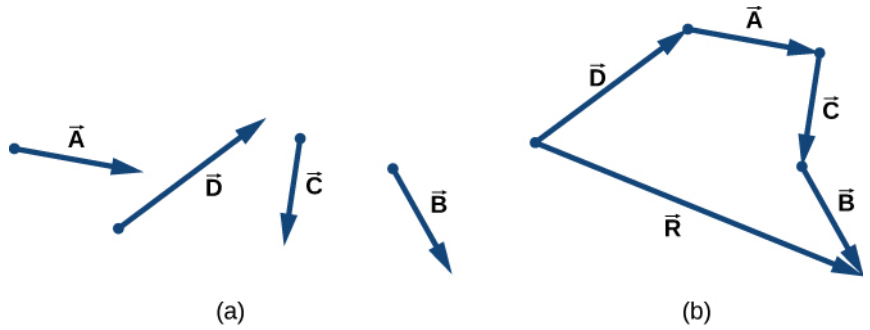


FIGURA 2.12 Método de cola a cabeza para dibujar el vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{D}}$. (a) Cuatro vectores de diferentes magnitudes y direcciones. (b) Los vectores de (a) se trasladan a nuevas posiciones en las que el origen ("cola") de un vector está en el extremo ("cabeza") de otro vector. El vector resultante se dibuja desde el origen ("cola") del primer vector hasta el final ("cabeza") del último vector en esta disposición.

EJEMPLO 2.2

Construcción geométrica de la resultante

Los tres vectores de desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$ en la Figura 2.13 se especifican por sus magnitudes $A = 10{,}0$, $B = 7{,}0$ y $C = 8{,}0$, respectivamente, y por sus respectivos ángulos direccionales con la dirección horizontal $\alpha = 35°$, $\beta = -110°$ y $\gamma = 30°$. Las unidades físicas de las magnitudes son los centímetros. Elija una escala conveniente y utilice una regla y un transportador para encontrar las siguientes sumas vectoriales: (a) $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, (b) $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, y (c) $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{A}} - 3\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$.

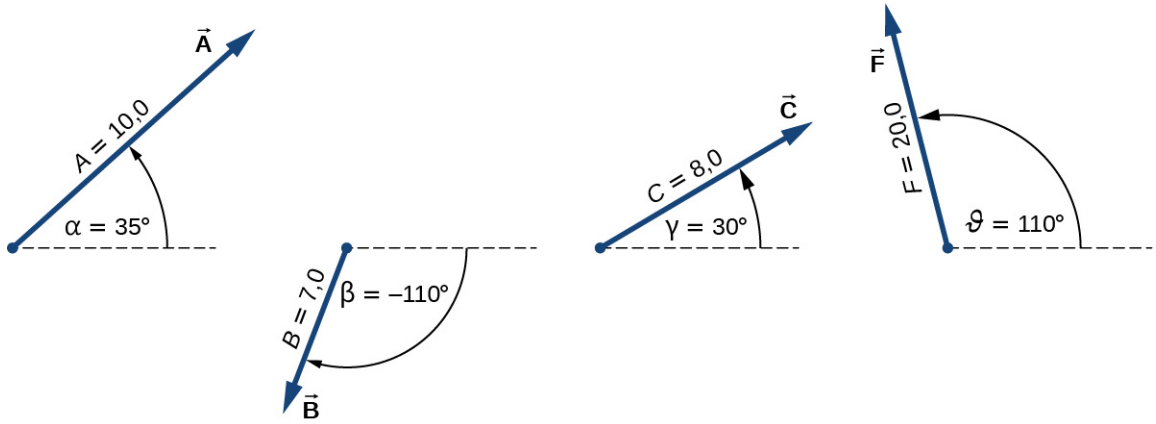


FIGURA 2.13 Vectores utilizados en el Ejemplo 2.2 y en el apartado Compruebe lo aprendido, que aparece a continuación.

Estrategia

En la construcción geométrica, encontrar un vector significa encontrar su magnitud y su ángulo direccional con la dirección horizontal. La estrategia consiste en dibujar a escala los vectores que aparecen en el lado derecho de la ecuación y construir el vector resultante. Luego, utilice una regla y un transportador para leer la magnitud de la resultante y el ángulo direccional. Para las partes (a) y (b) utilizamos la regla del paralelogramo. Para (c) utilizamos el método de cola a cabeza.

Solución

Para las partes (a) y (b), unimos el origen del vector $\vec{\mathbf{B}}$ al origen del vector $\vec{\mathbf{A}}$, como se muestra en la Figura 2.14, y construimos un paralelogramo. La diagonal más corta de este paralelogramo es la suma $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. La mayor de las diagonales es la diferencia $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$. Utilizamos una regla para medir las longitudes de las diagonales y un transportador para medir los ángulos con la horizontal. Para la resultante $\vec{\mathbf{R}}$, obtenemos $R =$

5,8 cm y $\theta_R \approx 0°$. Para la diferencia $\vec{\mathbf{D}}$, obtenemos $D = 16{,}2$ cm y $\theta_D = 49{,}3°$, que se muestran en la Figura 2.14.

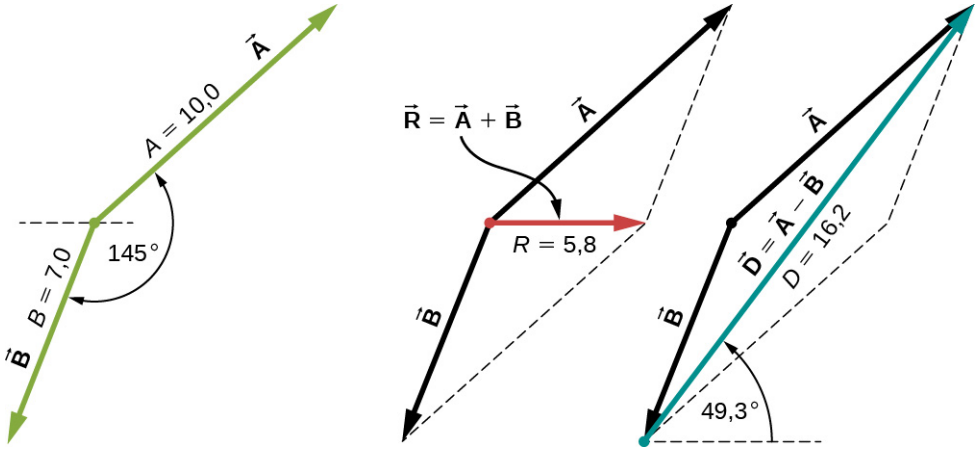


FIGURA 2.14 Utilizamos la regla del paralelogramo para resolver (a) (encontrar la resultante, en rojo) y (b) (encontrar la diferencia, en azul).

Para (c), podemos empezar con el vector $-3\vec{\mathbf{B}}$ y dibujar los vectores restantes de cola a cabeza como se muestra en la Figura 2.15. En la suma de vectores, el orden en el que dibujamos los vectores no es importante, pero dibujar los vectores a escala sí es muy importante. A continuación, dibujamos el vector $\vec{\mathbf{S}}$ desde el origen del primer vector hasta el final del último vector y colocamos la punta de la flecha al final de $\vec{\mathbf{S}}$. Utilizamos una regla para medir la longitud de $\vec{\mathbf{S}}$, y encontramos que su magnitud es $S = 36{,}9$ cm. Usamos un transportador y encontramos que su ángulo direccional es $\theta_S = 52{,}9°$. Esta solución se muestra en la Figura 2.15.

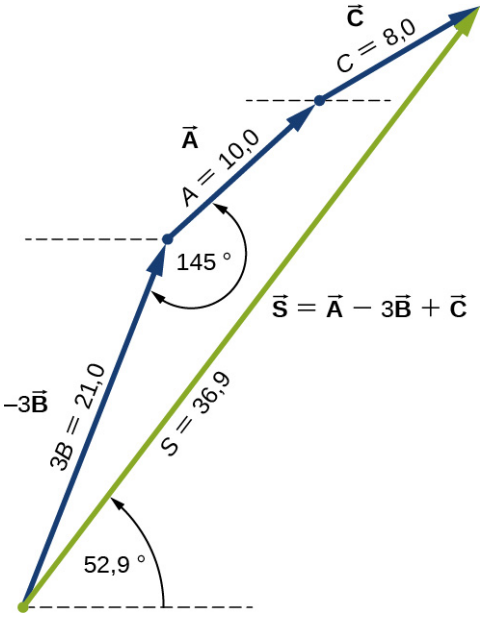


FIGURA 2.15 Utilizando el método de cola a cabeza para resolver (c) (encontrar el vector $\vec{\mathbf{S}}$, en verde).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.3

Utilizando los tres vectores de desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ en la Figura 2.13, elija una escala conveniente y utilice una regla y un transportador para encontrar el vector $\vec{\mathbf{G}}$ dado por la ecuación vectorial $\vec{\mathbf{G}} = \vec{\mathbf{A}} + 2\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{F}}$.

INTERACTIVO

Observe la suma de vectores en un plano; consulte esta calculadora de vectores (https://openstax.org/l/21compveccalc) y esta simulación de Phet (https://openstax.org/l/21phetvecaddsim_es).

2.2 Sistemas de coordenadas y componentes de un vector

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir vectores en dos y tres dimensiones en términos de sus componentes, mediante el empleo de vectores unitarios a lo largo de los ejes.
- Distinguir entre los componentes vectoriales de un vector y los componentes escalares de un vector.
- Explicar cómo se define la magnitud de un vector en términos de sus componentes.
- Identificar el ángulo direccional de un vector en un plano.
- Explicar la relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas en un plano.

Los vectores suelen describirse en términos de sus componentes en un sistema de coordenadas. Incluso en la vida cotidiana invocamos de forma natural el concepto de proyecciones ortogonales en un sistema de coordenadas rectangulares. Por ejemplo, si pregunta a alguien cómo llegar a un lugar determinado, es más probable que le digan que vaya 40 km al este y 30 km al norte que 50 km en la dirección 37° al norte del este.

En un sistema de coordenadas *xy* rectangular (cartesiano) en un plano, un punto en un plano se describe por un par de coordenadas (la *x*, la *y*). De forma similar, un vector $\vec{\mathbf{A}}$ en un plano se describe mediante un par de sus coordenadas *vectoriales*. La coordenada *x* del vector $\vec{\mathbf{A}}$ se llama su componente *x* y la coordenada *y* del vector $\vec{\mathbf{A}}$ se llama su componente *y*. El componente *x* del vector es un vector denotado por $\vec{\mathbf{A}}_x$. El componente *y* del vector es un vector denotado por $\vec{\mathbf{A}}_y$. En el sistema cartesiano, los **componentes vectoriales** *x* y *y* de un vector son las proyecciones ortogonales de este vector sobre los ejes de la *x* y la *y*, respectivamente. De este modo, siguiendo la regla del paralelogramo para la suma de vectores, cada vector en un plano cartesiano puede expresarse como la suma vectorial de sus componentes vectoriales:

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y. \tag{2.10}$$

Como se ilustra en la Figura 2.16, el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es la diagonal del rectángulo donde el componente *x* $\vec{\mathbf{A}}_x$ es el lado paralelo al eje de la *x* y el componente *y* $\vec{\mathbf{A}}_y$ es el lado paralelo al eje de la *y*. El componente vectorial $\vec{\mathbf{A}}_x$ es ortogonal al componente vectorial $\vec{\mathbf{A}}_y$.

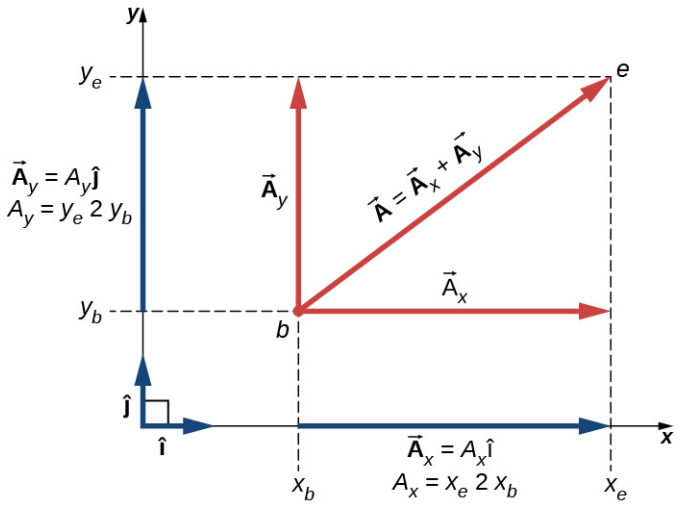


FIGURA 2.16 Vector $\vec{\mathbf{A}}$ en un plano en el sistema de coordenadas cartesianas es la suma vectorial de sus componentes vectoriales *x* y *y*. El componente vectorial *x* $\vec{\mathbf{A}}_x$ es la proyección ortogonal del vector $\vec{\mathbf{A}}$ en el eje de la

x. El componente vectorial *y* $\vec{\mathbf{A}}_y$ es la proyección ortogonal del vector $\vec{\mathbf{A}}$ en el eje de la *y*. Las cifras A_x y A_y que multiplican los vectores unitarios son los componentes escalares del vector.

Es habitual denotar la dirección positiva en el eje de la *x* por el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ y la dirección positiva en el eje de la *y* por el vector unitario $\hat{\mathbf{j}}$. **Los vectores unitarios de los ejes**, $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, definen dos direcciones ortogonales en el plano. Como se muestra en la Figura 2.16, los componentes *x* y *y* de un vector pueden escribirse ahora en términos de los vectores unitarios de los ejes:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{A}}_x = A_x\hat{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{A}}_y = A_y\hat{\mathbf{j}}. \end{cases} \qquad 2.11$$

Los vectores $\vec{\mathbf{A}}_x$ y $\vec{\mathbf{A}}_y$ definidos por la Ecuación 2.11 son los *componentes vectoriales* del vector $\vec{\mathbf{A}}$. Las cifras A_x y A_y que definen los componentes vectoriales en la Ecuación 2.11 son los **componentes escalares** del vector $\vec{\mathbf{A}}$. Combinando la Ecuación 2.10 con la Ecuación 2.11, obtenemos **la forma en componentes de un vector**:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}. \qquad 2.12$$

Si conocemos las coordenadas $b(x_b, y_b)$ del punto de origen de un vector (donde *b* significa "comienzo") y las coordenadas $e(x_e, y_e)$ del punto final de un vector (donde *e* significa "final"), podemos obtener los componentes escalares de un vector simplemente al restar las coordenadas del punto de origen de las coordenadas del punto final:

$$\begin{cases} A_x = x_e - x_b \\ A_y = y_e - y_b. \end{cases} \qquad 2.13$$

EJEMPLO 2.3

Desplazamiento de un puntero de ratón

Un puntero de ratón en el monitor de una computadora en su posición inicial está en el punto (6,0 cm, 1,6 cm) con respecto a la esquina inferior izquierda. Si mueve el puntero a un icono situado en el punto (2,0 cm, 4,5 cm), ¿cuál es el vector de desplazamiento del puntero?

Estrategia

El origen del sistema de coordenadas *xy* es la esquina inferior izquierda del monitor de la computadora. Por lo tanto, el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ en el eje de la *x* apunta horizontalmente a la derecha y el vector unitario $\hat{\mathbf{j}}$ en el eje de la *y* apunta verticalmente hacia arriba. El origen del vector de desplazamiento está situado en el punto *b* (6,0, 1,6) y el final del vector de desplazamiento está situado en el punto *e* (2,0, 4,5). Sustituya las coordenadas de estos puntos en la Ecuación 2.13 para encontrar los componentes escalares D_x y D_y del vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$. Por último, sustituya las coordenadas en la Ecuación 2.12 para escribir el vector de desplazamiento en forma de componente vectorial.

Solución

Identificamos $x_b = 6{,}0$, $x_e = 2{,}0$, $y_b = 1{,}6$ y $y_e = 4{,}5$, donde la unidad física es 1 cm. Los componentes escalares *x* y *y* del vector de desplazamiento son

$$\begin{aligned} D_x &= x_e - x_b = (2{,}0 - 6{,}0)\text{cm} = -4{,}0\text{ cm}, \\ D_y &= y_e - y_b = (4{,}5 - 1{,}6)\text{cm} = +2{,}9\text{ cm}. \end{aligned}$$

La forma de componente vectorial del vector de desplazamiento es

$$\vec{\mathbf{D}} = D_x\hat{\mathbf{i}} + D_y\hat{\mathbf{j}} = (-4{,}0\text{ cm})\hat{\mathbf{i}} + (2{,}9\text{ cm})\hat{\mathbf{j}} = (-4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 2{,}9\hat{\mathbf{j}})\text{cm}. \qquad 2.14$$

Esta solución se muestra en la Figura 2.17.

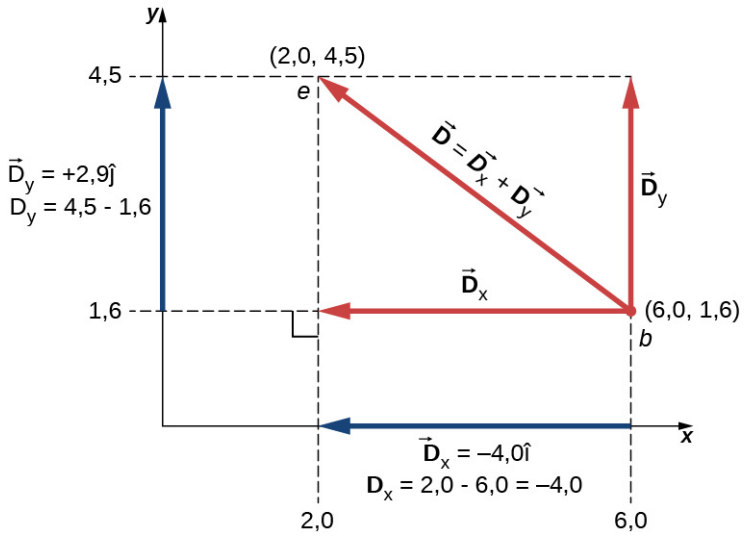


FIGURA 2.17 El gráfico del vector de desplazamiento. El vector apunta desde el punto de origen en *b* hasta el punto final en *e*.

Importancia

Observe que la unidad física (aquí, 1 cm) puede colocarse con cada componente inmediatamente antes del vector unitario o globalmente para ambos componentes, como en la Ecuación 2.14. A menudo, esta última forma es más conveniente porque es más sencilla.

El componente *x* del vector $\vec{\mathbf{D}}_x = -4{,}0\hat{\mathbf{i}} = 4{,}0(-\hat{\mathbf{i}})$ del vector de desplazamiento tiene la magnitud $\left|\vec{\mathbf{D}}_x\right| = \left|-4{,}0\right|\left\|\hat{\mathbf{i}}\right| = 4{,}0$ porque la magnitud del vector unitario es $\left|\hat{\mathbf{i}}\right| = 1$. Observe también que la dirección del componente *x* es $-\hat{\mathbf{i}}$, que es antiparalela a la dirección del eje de la *x* +; por lo tanto, el componente *x* del vector $\vec{\mathbf{D}}_x$ apunta a la izquierda, como se muestra en la Figura 2.17. El componente escalar *x* del vector $\vec{\mathbf{D}}$ es $D_x = -4{,}0$.

Del mismo modo, el componente *y* del vector $\vec{\mathbf{D}}_y = +2{,}9\hat{\mathbf{j}}$ del vector de desplazamiento tiene una magnitud $\left|\vec{\mathbf{D}}_y\right| = \left|2{,}9\right|\left\|\hat{\mathbf{j}}\right| = 2{,}9$ porque la magnitud del vector unitario es $\left|\hat{\mathbf{j}}\right| = 1$. La dirección del componente *y* es $+\hat{\mathbf{j}}$, que es paralela a la dirección del eje de la +*y*. Por lo tanto, el componente *y* del vector $\vec{\mathbf{D}}_y$ apunta hacia arriba, como se ve en la Figura 2.17. El componente escalar *y* del vector $\vec{\mathbf{D}}$ es $D_y = +2{,}9$. El vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ es la resultante de sus dos componentes *vectoriales*.

La forma de componente vectorial del vector de desplazamiento en la Ecuación 2.14 nos indica que el puntero del ratón se ha movido en el monitor 4,0 cm hacia la izquierda y 2,9 cm hacia arriba desde su posición inicial.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.4

Una mosca azul se posa en una hoja de papel cuadriculado en un punto situado a 10,0 cm a la derecha de su borde izquierdo y a 8,0 cm por encima de su borde inferior y camina lentamente hasta un punto situado a 5,0 cm del borde izquierdo y a 5,0 cm del borde inferior. Elija el sistema de coordenadas rectangulares con el origen en la esquina inferior izquierda del papel y halle el vector de desplazamiento de la mosca. Ilustre su solución con un gráfico.

Cuando conocemos las componentes escalares A_x y A_y de un vector $\vec{\mathbf{A}}$, podemos encontrar su magnitud *A* y su ángulo direccional θ_A. El **ángulo direccional**, o dirección para abreviar, es el ángulo que forma el vector con la dirección positiva en el eje de la *x*. El ángulo θ_A se mide en la *dirección contraria a las agujas del reloj* desde

el eje de la $x+$ hasta el vector (Figura 2.18). Como las longitudes A, A_x y A_y forman un triángulo rectángulo, están relacionadas por el teorema de Pitágoras:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad \Leftrightarrow \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \tag{2.15}$$

Esta ecuación funciona incluso si los componentes escalares de un vector son negativos. El ángulo direccional θ_A de un vector se define a través de la función tangente del ángulo θ_A en el triángulo mostrado en la Figura 2.18:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \tag{2.16}$$

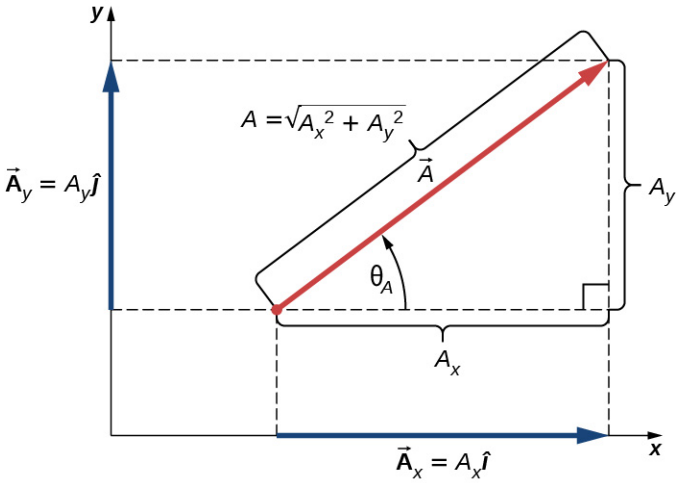


FIGURA 2.18 Cuando el vector se encuentra en el primer cuadrante o en el cuarto cuadrante, donde el componente A_x es positivo (Figura 2.19), el ángulo direccional θ_A en la (Ecuación 2.16) es idéntico al ángulo θ.

Cuando el vector se encuentra en el primer cuadrante o en el cuarto cuadrante, donde el componente A_x es positivo (Figura 2.19), el ángulo θ en la Ecuación 2.16 es idéntico al ángulo direccional θ_A. Para los vectores del cuarto cuadrante, el ángulo θ es negativo, lo que significa que para estos vectores, el ángulo direccional θ_A se mide en el *sentido de las agujas del reloj* desde el eje de la x positiva. Del mismo modo, para los vectores del segundo cuadrante, el ángulo θ es negativo. Cuando el vector se encuentra en el segundo o tercer cuadrante, donde el componente A_x es negativo, el ángulo direccional es $\theta_A = \theta + 180°$ (Figura 2.19).

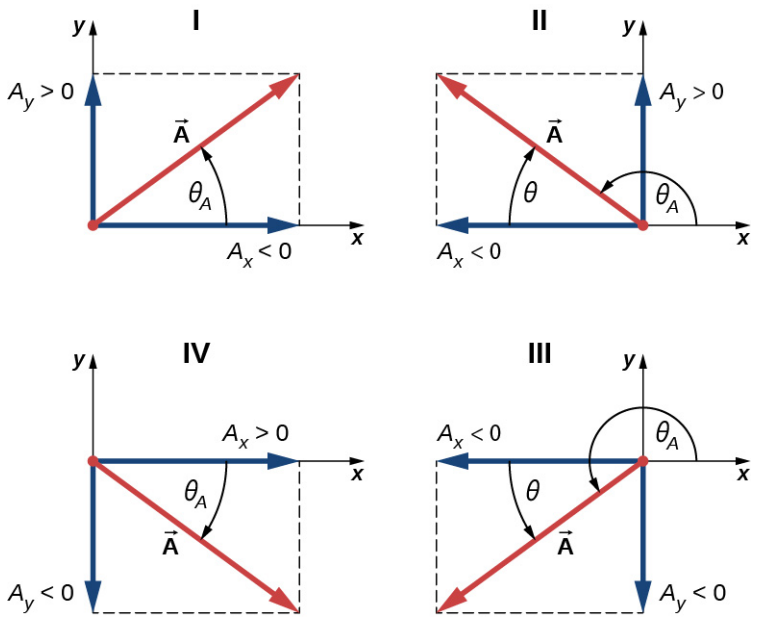


FIGURA 2.19 Los componentes escalares de un vector pueden ser positivos o negativos. Los vectores del primer cuadrante (I) tienen ambos componentes escalares positivos y los vectores del tercer cuadrante tienen ambos componentes escalares negativos. Para los vectores de los cuadrantes II y III, el ángulo direccional de un vector es $\theta_A = \theta + 180°$.

EJEMPLO 2.4

Magnitud y dirección del vector de desplazamiento

Usted mueve el puntero del ratón en la pantalla del monitor desde su posición inicial en el punto (6,0 cm, 1,6 cm) a un icono situado en el punto (2,0 cm, 4,5 cm). ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del vector de desplazamiento del puntero?

Estrategia

En el Ejemplo 2.3, encontramos el vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ del puntero del ratón (vea la Ecuación 2.14). Identificamos sus componentes escalares $D_x = -4{,}0\text{ cm}$ y $D_y = +2{,}9\text{ cm}$ y sustituimos en la Ecuación 2.15 y la Ecuación 2.16 para encontrar la magnitud D y la dirección θ_D, respectivamente.

Solución

La magnitud del vector $\vec{\mathbf{D}}$ es

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(-4{,}0\text{ cm})^2 + (2{,}9\text{ cm})^2} = \sqrt{(4{,}0)^2 + (2{,}9)^2}\text{ cm} = 4{,}9\text{ cm}.$$

El ángulo direccional es

$$\tan\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{+2{,}9\text{ cm}}{-4{,}0\text{ cm}} = -0{,}725 \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(-0{,}725) = -35{,}9°.$$

Vector $\vec{\mathbf{D}}$ se encuentra en el segundo cuadrante, por lo que su ángulo direccional es

$$\theta_D = \theta + 180° = -35{,}9° + 180° = 144{,}1°.$$

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.5

Si el vector de desplazamiento de una mosca azul que camina sobre una hoja de papel cuadriculado es $\vec{\mathbf{D}} = (-5{,}00\hat{\mathbf{i}} - 3{,}00\hat{\mathbf{j}})$cm, halle su magnitud y dirección.

En muchas aplicaciones, se conocen las magnitudes y direcciones de las cantidades vectoriales y necesitamos encontrar la resultante de muchos vectores. Por ejemplo, imagine que 400 autos circulan por el puente Golden Gate de San Francisco con un fuerte viento. Cada auto da al puente un empuje diferente en varias direcciones y nos gustaría saber cuán grande puede ser el empuje resultante. Ya hemos adquirido cierta experiencia con la construcción geométrica de sumas vectoriales. En tal sentido, sabemos que la tarea de hallar la resultante al dibujar los vectores y medir sus longitudes y ángulos puede ser intratable con bastante rapidez, lo que ocasiona grandes errores. Preocupaciones como estas no surgen cuando utilizamos métodos analíticos. El primer paso en un enfoque analítico es encontrar los componentes vectoriales cuando se conocen su dirección y la magnitud.

Volvamos al triángulo rectángulo en la Figura 2.18. El cociente del lado adyacente A_x a la hipotenusa A es la función coseno (cos) del ángulo direccional θ_A, $A_x/A = \cos\theta_A$, y el cociente del lado opuesto A_y a la hipotenusa A es la función seno (sen) de θ_A, $A_y/A = \operatorname{sen}\theta_A$. Cuando la magnitud A y la dirección θ_A son conocidas, podemos resolver estas relaciones para los componentes escalares:

$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta_A \\ A_y = A\operatorname{sen}\theta_A \end{cases}. \qquad 2.17$$

Al calcular los componentes del vector con la Ecuación 2.17, hay que tener cuidado con el ángulo. El ángulo direccional θ_A de un vector es el ángulo medido *en sentido contrario a las agujas del reloj* desde la dirección positiva del eje de la x hasta el vector. La medición en el sentido de las agujas del reloj da un ángulo negativo.

EJEMPLO 2.5

Componentes de los vectores de desplazamiento

Un grupo de rescate de un niño desaparecido sigue a un perro de búsqueda llamado Trooper. Trooper deambula y olfatea bastante por muchos senderos diferentes. Finalmente, Trooper encuentra al niño y la historia tiene un final feliz, pero su desplazamiento en diversos tramos luce realmente complejo. En uno de los tramos camina 200,0 m hacia el sureste y luego corre hacia el norte unos 300,0 m. En el tercer tramo, examina cuidadosamente los olores durante 50,0 m en la dirección 30° al oeste del norte. En el cuarto tramo, Trooper va directamente al sur durante 80,0 m, capta un nuevo olor y gira 23° al oeste del sur durante 150,0 m. Halle los componentes escalares de los vectores de desplazamiento de Trooper y sus vectores de desplazamiento en forma de componente vectorial para cada tramo.

Estrategia

Adoptemos un sistema de coordenadas rectangular con el eje de la x positiva en la dirección del este geográfico, con la dirección de la y positiva apuntando al norte geográfico. Explícitamente, el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ del eje de la x apunta al este y el vector unitario $\hat{\mathbf{j}}$ del eje de la y apunta al norte. Trooper recorre cinco tramos, por lo que hay cinco vectores de desplazamiento. Comenzamos por identificar sus magnitudes y ángulos direccionales, luego utilizamos la Ecuación 2.17 para encontrar los componentes escalares de cada desplazamiento y la Ecuación 2.12 para los vectores de desplazamiento.

Solución

En el primer tramo, la magnitud del desplazamiento es $L_1 = 200{,}0$ m y la dirección es sureste. Para el ángulo direccional θ_1 podemos tomar cualquiera de los dos 45° medido en el sentido de las agujas del reloj desde la dirección este o $45° + 270°$ medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde la dirección este. Con la primera opción, $\theta_1 = -45°$. Con la segunda opción, $\theta_1 = +315°$. Podemos utilizar cualquiera de estos dos ángulos. Los componentes son

$$L_{1x} = L_1\cos\theta_1 = (200{,}0\text{ m})\cos 315° = 141{,}4\text{ m},$$
$$L_{1y} = L_1\operatorname{sen}\theta_1 = (200{,}0\text{ m})\operatorname{sen}315° = -141{,}4\text{ m}.$$

El vector de desplazamiento del primer tramo es

$$\vec{\mathbf{L}}_1 = L_{1x}\hat{\mathbf{i}} + L_{1y}\hat{\mathbf{j}} = (141{,}4\hat{\mathbf{i}} - 141{,}4\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}.$$

En el segundo tramo de las andanzas de Trooper, la magnitud del desplazamiento es $L_2 = 300{,}0$ m y la dirección es norte. El ángulo direccional es $\theta_2 = +90°$. Obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} L_{2x} &= L_2 \cos\theta_2 = (300{,}0\ \text{m})\cos 90° = 0{,}0\ , \\ L_{2y} &= L_2\ \text{sen}\ \theta_2 = (300{,}0\ \text{m})\ \text{sen}\ 90° = 300{,}0\ \text{m}, \\ \vec{\mathbf{L}}_2 &= L_{2x}\hat{\mathbf{i}} + L_{2y}\hat{\mathbf{j}} = (300{,}0\ \text{m})\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

En el tercer tramo, la magnitud del desplazamiento es $L_3 = 50{,}0$ m y la dirección es 30° al oeste del norte. El ángulo direccional medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde la dirección este es $\theta_3 = 30° + 90° = +120°$. Esto da las siguientes respuestas:

$$\begin{aligned} L_{3x} &= L_3 \cos\theta_3 = (50{,}0\ \text{m})\cos 120° = -25{,}0\ \text{m}, \\ L_{3y} &= L_3\ \text{sen}\ \theta_3 = (50{,}0\ \text{m})\ \text{sen}\ 120° = +43{,}3\ \text{m}, \\ \vec{\mathbf{L}}_3 &= L_{3x}\hat{\mathbf{i}} + L_{3y}\hat{\mathbf{j}} = (-25{,}0\hat{\mathbf{i}} + 43{,}3\hat{\mathbf{j}})\text{m}. \end{aligned}$$

En el cuarto tramo de la excursión, la magnitud del desplazamiento es $L_4 = 80{,}0$ m y la dirección es sur. El ángulo de dirección puede tomarse como $\theta_4 = -90°$ o $\theta_4 = +270°$. Obtenemos

$$\begin{aligned} L_{4x} &= L_4 \cos\theta_4 = (80{,}0\ \text{m})\cos(-90°) = 0\ , \\ L_{4y} &= L_4\ \text{sen}\ \theta_4 = (80{,}0\ \text{m})\ \text{sen}\ (-90°) = -80{,}0\ \text{m}, \\ \vec{\mathbf{L}}_4 &= L_{4x}\hat{\mathbf{i}} + L_{4y}\hat{\mathbf{j}} = (-80{,}0\ \text{m})\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

En el último tramo, la magnitud es $L_5 = 150{,}0$ m y el ángulo es $\theta_5 = -23° + 270° = +247°$ (23° al oeste del sur), lo que da

$$\begin{aligned} L_{5x} &= L_5 \cos\theta_5 = (150{,}0\ \text{m})\cos 247° = -58{,}6\ \text{m}, \\ L_{5y} &= L_5\ \text{sen}\ \theta_5 = (150{,}0\ \text{m})\ \text{sen}\ 247° = -138{,}1\ \text{m}, \\ \vec{\mathbf{L}}_5 &= L_{5x}\hat{\mathbf{i}} + L_{5y}\hat{\mathbf{j}} = (-58{,}6\hat{\mathbf{i}} - 138{,}1\hat{\mathbf{j}})\text{m}. \end{aligned}$$

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.6

Si Trooper corre 20 m hacia el oeste antes de descansar, ¿cuál es su vector de desplazamiento?

Coordenadas polares

Para describir ubicaciones de puntos o vectores en un plano, necesitamos dos direcciones ortogonales. En el sistema de coordenadas cartesianas estas direcciones vienen dadas por vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo del eje de la x y del eje de la y, respectivamente. El sistema de coordenadas cartesianas es muy conveniente para describir los desplazamientos y las velocidades de los objetos y las fuerzas que actúan sobre ellos. Sin embargo, es engorroso cuando necesitamos describir la rotación de los objetos. Al describir la rotación, solemos trabajar en el **sistema de coordenadas polares**.

En el sistema de coordenadas polares, la ubicación del punto P en un plano viene dada por dos **coordenadas polares** (Figura 2.20). La primera coordenada polar es la **coordenada radial** r, que es la distancia del punto P al origen. La segunda coordenada polar es un ángulo φ que el vector radial hace con alguna dirección elegida, normalmente la dirección de la x positiva. En coordenadas polares, los ángulos se miden en radianes, o rads. El vector radial se fija en el origen y apunta lejos del origen hacia el punto P. Esta dirección radial se describe por un vector radial unitario $\hat{\mathbf{r}}$. El segundo vector unitario $\hat{\mathbf{t}}$ es un vector ortogonal a la dirección radial $\hat{\mathbf{r}}$. La dirección positiva $+\hat{\mathbf{t}}$ indica cómo el ángulo φ cambia en dirección contraria a las agujas del reloj. De este modo, un punto P que tiene coordenadas (x, y) en el sistema rectangular puede describirse por equivalencia en el sistema de coordenadas polares mediante las dos coordenadas polares (r, φ). La Ecuación 2.17 es válida para cualquier vector, por lo que podemos utilizarla para expresar las coordenadas de la x y la y del vector $\vec{\mathbf{r}}$.

De este modo, obtenemos la conexión entre las coordenadas polares y las coordenadas rectangulares del punto P:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}. \qquad 2.18$$

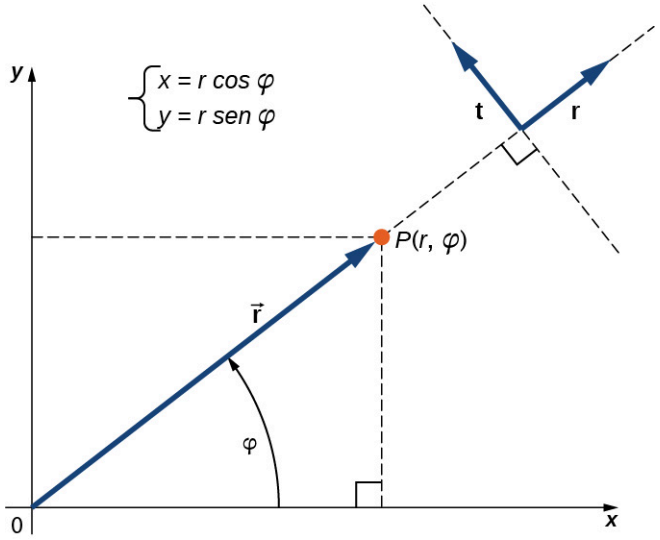


FIGURA 2.20 Utilizando coordenadas polares, el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ define la dirección positiva a lo largo del radio r (dirección radial) y, ortogonal a él, el vector unitario $\hat{\mathbf{t}}$ define la dirección positiva de la rotación por el ángulo φ.

EJEMPLO 2.6

Coordenadas polares

Un buscador de tesoros encuentra una moneda de plata en un lugar situado a 20,0 m de un pozo seco en la dirección 20° al norte del este y encuentra una moneda de oro en un lugar a 10,0 m del pozo en la dirección 20° al norte del oeste. ¿Cuáles son las coordenadas polares y rectangulares de estos hallazgos con respecto al pozo?

Estrategia

El pozo marca el origen del sistema de coordenadas y el este es la dirección de la $x+$. Identificamos las distancias radiales de los lugares al origen, que son $r_S = 20{,}0$ m (para la moneda de plata) y $r_G = 10{,}0$ m (para la moneda de oro). Para encontrar las coordenadas angulares, convertimos 20° a radianes: $20° = \pi 20/180 = \pi/9$. Utilizamos la Ecuación 2.18 para encontrar las coordenadas de la x y la y de las monedas.

Solución

La coordenada angular de la moneda de plata es $\varphi_S = \pi/9$, mientras que la coordenada angular de la moneda de oro es $\varphi_G = \pi - \pi/9 = 8\pi/9$. Por lo tanto, las coordenadas polares de la moneda de plata son $(r_S, \varphi_S) = (20{,}0\text{ m}, \pi/9)$ y las de la moneda de oro son $(r_G, \varphi_G) = (10{,}0\text{ m}, 8\pi/9)$. Sustituimos estas coordenadas en la Ecuación 2.18 para obtener coordenadas rectangulares. Para la moneda de oro, las coordenadas son

$$\begin{cases} x_G = r_G\cos\varphi_G = (10{,}0\text{ m})\cos 8\pi/9 = -9{,}4\text{ m} \\ y_G = r_G\,\text{sen}\,\varphi_G = (10{,}0\text{ m})\,\text{sen}\,8\pi/9 = 3{,}4\text{ m} \end{cases} \Rightarrow \quad (x_G, y_G) = (-9{,}4\text{ m}, 3{,}4\text{ m}).$$

Para la moneda de plata, las coordenadas son

$$\begin{cases} x_S = r_S \cos \varphi_S = (20{,}0\ \text{m}) \cos \pi/9 = 18{,}9\ \text{m} \\ y_S = r_S \operatorname{sen} \varphi_S = (20{,}0\ \text{m}) \operatorname{sen} \pi/9 = 6{,}8\ \text{m} \end{cases} \Rightarrow (x_S, y_S) = (18{,}9\ \text{m}, 6{,}8\ \text{m}).$$

Vectores en tres dimensiones

Para especificar la ubicación de un punto en el espacio, necesitamos tres coordenadas (x, y, z), donde las coordenadas de la x y de la y especifican ubicaciones en un plano, y la coordenada de la z da una posición vertical por encima o por debajo del plano. El espacio tridimensional tiene tres direcciones ortogonales, por lo que no necesitamos dos, sino *tres* vectores unitarios para definir un sistema de coordenadas tridimensional. En el sistema de coordenadas cartesianas, los dos primeros vectores unitarios son el vector unitario del eje de la x $\hat{\mathbf{i}}$ y el vector unitario del eje de la y $\hat{\mathbf{j}}$. El tercer vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$ es la dirección del eje z (Figura 2.21). El orden en que se marcan los ejes, que es el orden en que aparecen los tres vectores unitarios, es importante porque define la orientación del sistema de coordenadas. El orden x-y-z, que equivale al orden $\hat{\mathbf{i}}$ - $\hat{\mathbf{j}}$ - $\hat{\mathbf{k}}$, define el sistema de coordenadas estándar de la mano derecha (orientación positiva).

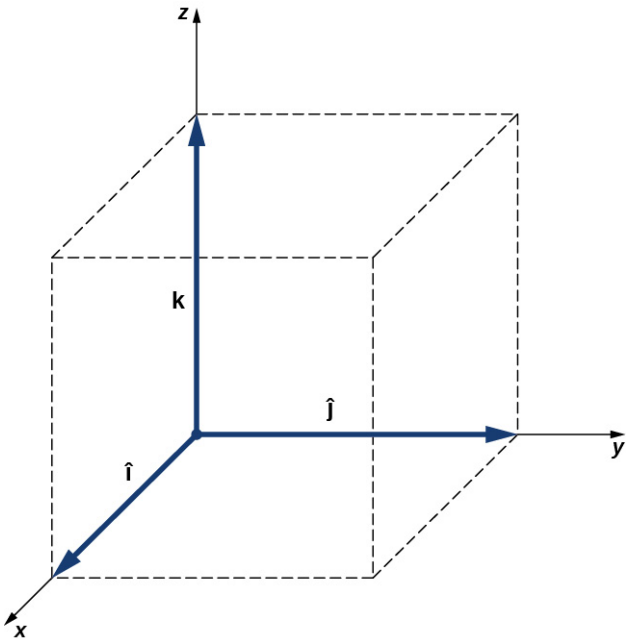


FIGURA 2.21 Tres vectores unitarios definen un sistema cartesiano en el espacio tridimensional. El orden en que aparecen estos vectores unitarios define la orientación del sistema de coordenadas. El orden mostrado aquí define la orientación de la mano derecha.

En el espacio tridimensional, el vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene tres componentes vectoriales: el componente x $\vec{\mathbf{A}}_x = A_x\hat{\mathbf{i}}$, que es la parte del vector $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje de la x, el componente y $\vec{\mathbf{A}}_y = A_y\hat{\mathbf{j}}$, que es la parte de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje de la y, y el componente z $\vec{\mathbf{A}}_z = A_z\hat{\mathbf{k}}$, que es la parte del vector a lo largo del eje z. Un vector en un espacio tridimensional es la suma vectorial de sus tres componentes vectoriales (Figura 2.22):

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}. \qquad 2.19$$

Si conocemos las coordenadas de su origen $b(x_b, y_b, z_b)$ y de su fin $e(x_e, y_e, z_e)$, sus componentes escalares se obtienen al tomar sus diferencias: A_x y A_y vienen dados por la Ecuación 2.13 y el componente z viene dado por

$$A_z = z_e - z_b. \qquad 2.20$$

La magnitud A se obtiene al generalizar la Ecuación 2.15 a tres dimensiones:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad 2.21$$

Esta expresión para la magnitud del vector proviene de aplicar el teorema de Pitágoras dos veces. Como se ve en la Figura 2.22, la diagonal en el plano xy tiene una longitud $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ y su potencia al cuadrado se suma al cuadrado A_z^2 para dar A^2. Observe que, cuando el componente z es cero, el vector se encuentra completamente en el plano xy y su descripción se reduce a dos dimensiones.

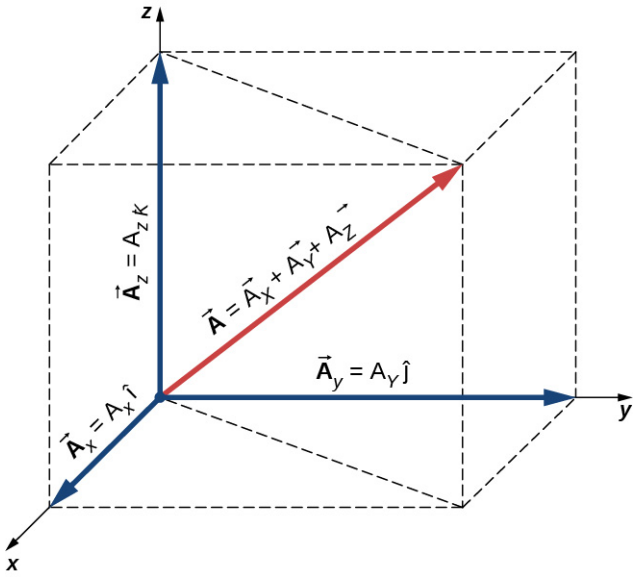


FIGURA 2.22 Un vector en un espacio tridimensional es la suma vectorial de sus tres componentes vectoriales.

EJEMPLO 2.7

Despegue de un dron

Durante un despegue del IAI Heron (Figura 2.23), su posición con respecto a una torre de control es de 100 m sobre el suelo, 300 m al este y 200 m al norte. Un minuto después, su posición es de 250 m sobre el suelo, 1200 m al este y 2100 m al norte. ¿Cuál es el vector de desplazamiento del dron con respecto a la torre de control? ¿Cuál es la magnitud de su vector de desplazamiento?



FIGURA 2.23 El dron IAI Heron en vuelo (créditos: sargento de Estado Mayor [Staff Sargeant, SSgt] Reynaldo Ramon, Fuerzas Aéreas de los EE. UU. [U.S. Air Force, USAF]).

Estrategia

Tomamos el origen del sistema de coordenadas cartesianas como la torre de control. La dirección del eje de la $x+$ viene dada por el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ al este, la dirección del eje de la $y+$ viene dada por el vector unitario $\hat{\mathbf{j}}$ al norte, y la dirección del eje de la $z+$ viene dada por el vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$, que apunta hacia arriba desde el suelo.

La primera posición del dron es el origen (o, equivalentemente, el comienzo) del vector de desplazamiento y su segunda posición es el final del vector de desplazamiento.

Solución

Identificamos *b*(300,0 m, 200,0 m, 100,0 m) y *e*(1200 m, 2100 m, 250 m), y utilizamos la Ecuación 2.13 y la Ecuación 2.20 para encontrar las componentes escalares del vector de desplazamiento del dron:

$$\begin{cases} D_x = x_e - x_b = 1200{,}0\text{ m} - 300{,}0\text{ m} = 900{,}0\text{ m}, \\ D_y = y_e - y_b = 2100{,}0\text{ m} - 200{,}0\text{ m} = 1.900{,}0\text{ m}, \\ D_z = z_e - z_b = 250{,}0\text{ m} - 100{,}0\text{ m} = 150{,}0\text{ m}. \end{cases}$$

Sustituimos estos componentes en la Ecuación 2.19 para encontrar el vector de desplazamiento:

$$\vec{\mathbf{D}} = D_x\hat{\mathbf{i}} + D_y\hat{\mathbf{j}} + D_z\hat{\mathbf{k}} = 900{,}0\text{ m}\hat{\mathbf{i}} + 1.900{,}0\text{ m}\hat{\mathbf{j}} + 150{,}0\text{ m}\hat{\mathbf{k}} = (0{,}90\hat{\mathbf{i}} + 1{,}90\hat{\mathbf{j}} + 0{,}15\hat{\mathbf{k}})\text{ km}.$$

Sustituimos en la Ecuación 2.21 para encontrar la magnitud del desplazamiento:

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} = \sqrt{(0{,}90\text{ km})^2 + (1{,}90\text{ km})^2 + (0{,}15\text{ km})^2} = 2{,}11\text{ km}.$$

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.7

Si el vector de velocidad media del dron en el desplazamiento en el Ejemplo 2.7 es $\vec{\mathbf{u}} = (15{,}0\hat{\mathbf{i}} + 31{,}7\hat{\mathbf{j}} + 2{,}5\hat{\mathbf{k}})$m/s, ¿cuál es la magnitud del vector velocidad del dron?

2.3 Álgebra de vectores

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Aplicar los métodos analíticos del álgebra vectorial para encontrar vectores resultantes y resolver ecuaciones vectoriales para vectores desconocidos.
- Interpretar situaciones físicas en términos de expresiones vectoriales.

Los vectores pueden sumarse y multiplicarse por escalares. La suma de vectores es asociativa (Ecuación 2.8) y conmutativa (Ecuación 2.7), y la multiplicación de vectores por una suma de escalares es distributiva (Ecuación 2.9). Además, la multiplicación escalar por una suma de vectores es distributiva:

$$\alpha(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) = \alpha\vec{\mathbf{A}} + \alpha\vec{\mathbf{B}}. \qquad 2.22$$

En esta ecuación, α es un número cualquiera (un escalar). Por ejemplo, un vector antiparalelo al vector $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$ se puede expresar simplemente multiplicando $\vec{\mathbf{A}}$ por el escalar $\alpha = -1$:

$$-\vec{\mathbf{A}} = -A_x\hat{\mathbf{i}} - A_y\hat{\mathbf{j}} - A_z\hat{\mathbf{k}}. \qquad 2.23$$

EJEMPLO 2.8

Dirección del movimiento

En un sistema de coordenadas cartesianas donde $\hat{\mathbf{i}}$ indica el este geográfico, $\hat{\mathbf{j}}$ indica el norte geográfico, y $\hat{\mathbf{k}}$ indica la altitud sobre el nivel del mar, un convoy militar avanza su posición a través de un territorio desconocido con velocidad $\vec{\mathbf{v}} = (4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 0{,}1\hat{\mathbf{k}})$km/h. Si el convoy tuviera que retirarse, ¿en qué dirección geográfica se movería?

Solución

El vector velocidad tiene el tercer componente $\vec{\mathbf{v}}_z = (+0{,}1\text{km/h})\hat{\mathbf{k}}$, que informa que el convoy sube a 100 m/h por un terreno montañoso. Al mismo tiempo, su velocidad es de 4,0 km/h hacia el este y 3,0 km/h hacia el norte, por lo que se desplaza sobre el terreno en dirección $\tan^{-1}(3/4) \approx 37°$ al norte del este. Si el convoy tuviera que retirarse, su nuevo vector velocidad $\vec{\mathbf{u}}$ tendría que ser antiparalelo a $\vec{\mathbf{v}}$ y ser de la forma $\vec{\mathbf{u}} = -\alpha\vec{\mathbf{v}}$, donde α es un número positivo. Así, la velocidad de retirada sería $\vec{\mathbf{u}} = \alpha(-4{,}0\hat{\mathbf{i}} - 3{,}0\hat{\mathbf{j}} - 0{,}1\hat{\mathbf{k}})\text{km/h}$. El signo negativo del tercer componente indica que el convoy estaría descendiendo. El ángulo direccional de la velocidad de retirada es $\tan^{-1}(-3\alpha/-4\alpha) \approx 37°$ al sur del oeste. Por lo tanto, el convoy se movería sobre el terreno en dirección 37° al sur del oeste mientras desciende en su camino de regreso.

La generalización del número cero al álgebra vectorial se denomina **vector nulo**, denotado por $\vec{\mathbf{0}}$. Todos los componentes del vector nulo son cero, $\vec{\mathbf{0}} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$, por lo que el vector nulo no tiene longitud ni dirección.

Dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son **vectores iguales** si y solo si su diferencia es el vector nulo:

$$\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}) - (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) = (A_x - B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y - B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z - B_z)\hat{\mathbf{k}}.$$

Esta ecuación vectorial significa que debemos tener simultáneamente $A_x - B_x = 0$, $A_y - B_y = 0$ y $A_z - B_z = 0$. De allí que podemos escribir $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ si y solo si los componentes correspondientes de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son iguales:

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A_x = B_x \\ A_y = B_y \\ A_z = B_z \end{cases}. \qquad 2.24$$

Dos vectores son iguales cuando sus componentes escalares correspondientes son iguales.

Resolver los vectores en sus componentes escalares (es decir, encontrar sus componentes escalares) y expresarlos analíticamente en forma de componentes vectoriales (dados por la Ecuación 2.19) nos permite utilizar el álgebra vectorial para encontrar sumas o diferencias de muchos vectores *analíticamente* (es decir, sin utilizar métodos gráficos). Por ejemplo, para encontrar la resultante de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, simplemente los sumamos componente por componente, de la siguiente manera:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}}.$$

De este modo, utilizando la Ecuación 2.24, los componentes escalares del vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$ son las sumas de los correspondientes componentes escalares de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x, \\ R_y = A_y + B_y, \\ R_z = A_z + B_z. \end{cases}$$

Se pueden utilizar métodos analíticos para encontrar los componentes de una resultante de muchos vectores. Por ejemplo, si tenemos que sumar N vectores $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \vec{\mathbf{F}}_3, \ldots, \vec{\mathbf{F}}_N$, donde cada vector es $\vec{\mathbf{F}}_k = F_{kx}\hat{\mathbf{i}} + F_{ky}\hat{\mathbf{j}} + F_{kz}\hat{\mathbf{k}}$, el vector resultante $\vec{\mathbf{F}}_R$ es

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_R = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_N &= \sum_{k=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_k = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx}\hat{\mathbf{i}} + F_{ky}\hat{\mathbf{j}} + F_{kz}\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} F_{kx}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\sum_{k=1}^{N} F_{ky}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\sum_{k=1}^{N} F_{kz}\right)\hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los componentes escalares del vector resultante son

$$\begin{cases} F_{Rx} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{Nx} \\ F_{Ry} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{Ny} \\ F_{Rz} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{Nz}. \end{cases} \quad 2.25$$

Una vez hallados los componentes escalares, podemos escribir la resultante en forma de componente vectorial:

$$\vec{\mathbf{F}}_R = F_{Rx}\hat{\mathbf{i}} + F_{Ry}\hat{\mathbf{j}} + F_{Rz}\hat{\mathbf{k}}.$$

Los métodos analíticos para hallar la resultante y, en general, para resolver ecuaciones vectoriales son muy importantes en física porque muchas cantidades físicas son vectores. Por ejemplo, utilizamos este método en cinemática para encontrar vectores de desplazamiento resultantes y vectores de velocidad resultantes, en mecánica para encontrar vectores de fuerza resultantes y las resultantes de muchas cantidades vectoriales derivadas, y en electricidad y magnetismo para encontrar campos vectoriales eléctricos o magnéticos resultantes.

EJEMPLO 2.9

Cálculo analítico de una resultante

Tres vectores de desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$ en un plano (Figura 2.13) se especifican por sus magnitudes A = 10,0, B = 7,0 y C = 8,0, respectivamente, y por sus respectivos ángulos direccionales con la horizontal $\alpha = 35°$, $\beta = -110°$ y $\gamma = 30°$. Las unidades físicas de las magnitudes son los centímetros. Resuelva los vectores a sus componentes escalares y halle las siguientes sumas vectoriales: (a) $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$, (b) $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, y (c) $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{A}} - 3\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$.

Estrategia

En primer lugar, utilizamos la Ecuación 2.17 para encontrar los componentes escalares de cada vector y luego expresamos cada vector en su forma de componente vectorial dada por la Ecuación 2.12. Luego, utilizamos los métodos analíticos del álgebra vectorial para encontrar las resultantes.

Solución

Resolvemos los vectores dados a sus componentes escalares:

$$\begin{cases} A_x = A\cos\alpha = (10{,}0\text{ cm})\cos 35° = 8{,}19\text{ cm} \\ A_y = A\,\text{sen}\,\alpha = (10{,}0\text{ cm})\,\text{sen}\,35° = 5{,}73\text{ cm} \end{cases}$$
$$\begin{cases} B_x = B\cos\beta = (7{,}0\text{ cm})\cos(-110°) = -2{,}39\text{ cm} \\ B_y = B\,\text{sen}\,\beta = (7{,}0\text{ cm})\,\text{sen}\,(-110°) = -6{,}58\text{ cm} \end{cases}.$$
$$\begin{cases} C_x = C\cos\gamma = (8{,}0\text{ cm})\cos 30° = 6{,}93\text{ cm} \\ C_y = C\,\text{sen}\,\gamma = (8{,}0\text{ cm})\,\text{sen}\,30° = 4{,}00\text{ cm} \end{cases}$$

Para (a) podemos sustituir directamente en la Ecuación 2.25 para encontrar los componentes escalares de la resultante:

$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x + C_x = 8{,}19\text{ cm} - 2{,}39\text{ cm} + 6{,}93\text{ cm} = 12{,}73\text{ cm} \\ R_y = A_y + B_y + C_y = 5{,}73\text{ cm} - 6{,}58\text{ cm} + 4{,}00\text{ cm} = 3{,}15\text{ cm} \end{cases}.$$

Por lo tanto, el vector resultante es $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} = (12{,}7\hat{\mathbf{i}} + 3{,}1\hat{\mathbf{j}})$cm.

Para (b), podemos escribir la diferencia de vectores como

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) - (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}) = (A_x - B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y - B_y)\hat{\mathbf{j}}.$$

Luego, los componentes escalares de la diferencia vectorial son

$$\begin{cases} D_x = A_x - B_x = 8{,}19\text{ cm} - (-2{,}39\text{ cm}) = 10{,}58\text{ cm} \\ D_y = A_y - B_y = 5{,}73\text{ cm} - (-6{,}58\text{ cm}) = 12{,}31\text{ cm} \end{cases}.$$

Por lo tanto, el vector de diferencia es $\vec{\mathbf{D}} = D_x\hat{\mathbf{i}} + D_y\hat{\mathbf{j}} = (10{,}6\hat{\mathbf{i}} + 12{,}3\hat{\mathbf{j}})$cm.

Para (c), podemos escribir el vector $\vec{\mathbf{S}}$ en la siguiente forma explícita:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{S}} &= \vec{\mathbf{A}} - 3\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) - 3(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}) + (C_x\hat{\mathbf{i}} + C_y\hat{\mathbf{j}}) \\ &= (A_x - 3B_x + C_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y - 3B_y + C_y)\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Luego, los componentes escalares de $\vec{\mathbf{S}}$ son

$$\begin{cases} S_x = A_x - 3B_x + C_x = 8{,}19\text{ cm} - 3(-2{,}39\text{ cm}) + 6{,}93\text{ cm} = 22{,}29\text{ cm} \\ S_y = A_y - 3B_y + C_y = 5{,}73\text{ cm} - 3(-6{,}58\text{ cm}) + 4{,}00\text{ cm} = 29{,}47\text{ cm} \end{cases}.$$

El vector es $\vec{\mathbf{S}} = S_x\hat{\mathbf{i}} + S_y\hat{\mathbf{j}} = (22{,}3\hat{\mathbf{i}} + 29{,}5\hat{\mathbf{j}})$cm.

Importancia

Una vez hallados los componentes del vector, podemos ilustrar los vectores mediante un gráfico o podemos calcular las magnitudes y los ángulos direccionales, como se muestra en la Figura 2.24. Los resultados de las magnitudes en (b) y (c) pueden compararse con los resultados de los mismos problemas obtenidos con el método gráfico, mostrados en la Figura 2.14 y la Figura 2.15. Observe que el método analítico produce resultados exactos y su exactitud no está limitada por la resolución de una regla o un transportador, como ocurría con el método gráfico utilizado en el Ejemplo 2.2 para hallar esta misma resultante.

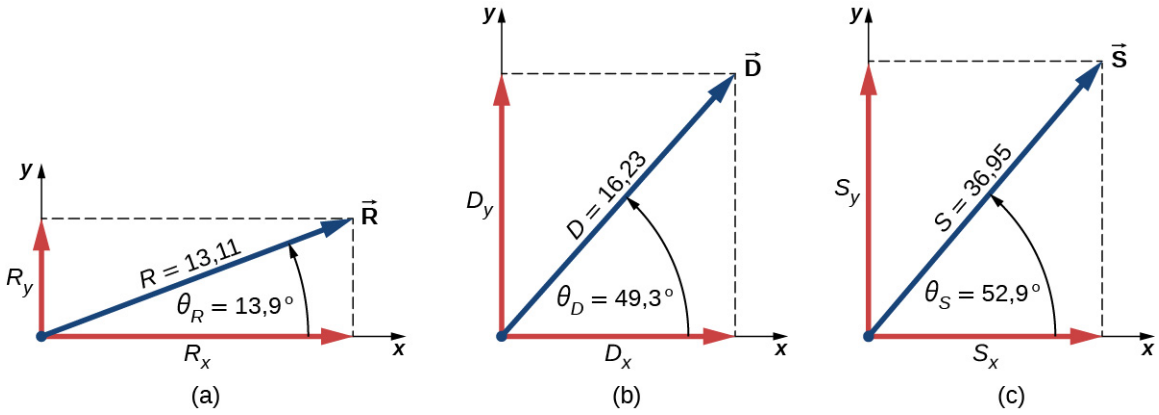


FIGURA 2.24 Ilustración gráfica de las soluciones obtenidas analíticamente en el Ejemplo 2.9.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.8

Tres vectores de desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ (Figura 2.13) se especifican por sus magnitudes $A = 10{,}00$, $B = 7{,}00$ y $F = 20{,}00$, respectivamente, y por sus respectivos ángulos direccionales con la horizontal $\alpha = 35°$, $\beta = -110°$ y $\varphi = 110°$. Las unidades físicas de las magnitudes son los centímetros. Utilice el método analítico para encontrar el vector $\vec{\mathbf{G}} = \vec{\mathbf{A}} + 2\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{F}}$. Compruebe que $G = 28{,}15$ cm y que $\theta_G = -68{,}65°$.

EJEMPLO 2.10

El juego de tira y afloja

Cuatro perros llamados Astro, Balto, Clifford y Dug juegan al tira y afloja con un juguete (Figura 2.25). Astro hala el juguete en dirección $\alpha = 55°$ al sur del este, Balto hala en dirección $\beta = 60°$ al este del norte, y Clifford hala en dirección $\gamma = 55°$ al oeste del norte. Astro hala fuertemente con 160,0 unidades de fuerza (N), que abreviamos como A = 160,0 N. Balto hala aún más fuerte que Astro con una fuerza de magnitud B = 200,0 N, y Clifford hala con una fuerza de magnitud C = 140,0 N. Cuando Dug hala del juguete de forma que su fuerza equilibra la resultante de las otras tres fuerzas, el juguete no se mueve en ninguna dirección. ¿Con qué fuerza y en qué dirección debe halar Dug el juguete para que esto ocurra?

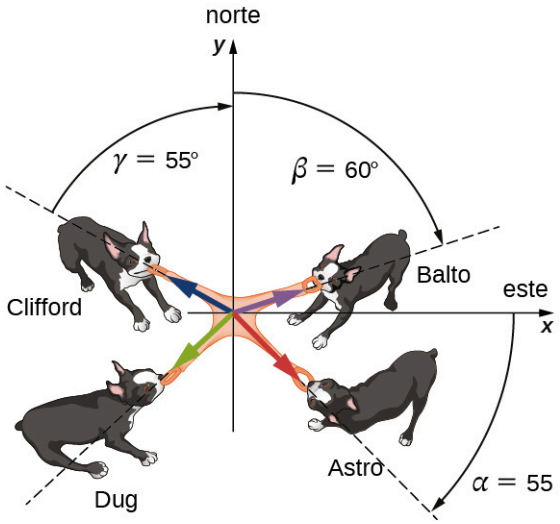


FIGURA 2.25 Cuatro perros juegan al tira y afloja con un juguete.

Estrategia

Suponemos que el este es la dirección del eje de la x positiva y el norte es la dirección del eje de la y positiva. Como en el Ejemplo 2.9, tenemos que resolver las tres fuerzas dadas, $\vec{\mathbf{A}}$ (el tirón de Astro), $\vec{\mathbf{B}}$ (el tirón de Balto), y $\vec{\mathbf{C}}$ (el tirón de Clifford), en sus componentes escalares y luego encontrar los componentes escalares del vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$. Cuando la fuerza de tracción $\vec{\mathbf{D}}$ de Dug equilibra esta resultante, la suma de $\vec{\mathbf{D}}$ y $\vec{\mathbf{R}}$ debe dar el vector nulo $\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$. Esto significa que $\vec{\mathbf{D}} = -\vec{\mathbf{R}}$, por lo que el tirón de Dug debe ser antiparalelo a $\vec{\mathbf{R}}$.

Solución

Los ángulos direccionales son $\theta_A = -\alpha = -55°$, $\theta_B = 90° - \beta = 30°$ y $\theta_C = 90° + \gamma = 145°$, y sustituyéndolos en la Ecuación 2.17 se obtienen los componentes escalares de las tres fuerzas dadas:

$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta_A = (160{,}0\text{ N})\cos(-55°) = +91{,}8\text{ N} \\ A_y = A\,\text{sen}\,\theta_A = (160{,}0\text{ N})\,\text{sen}\,(-55°) = -131{,}1\text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = B\cos\theta_B = (200{,}0\text{ N})\cos 30° = +173{,}2\text{ N} \\ B_y = B\,\text{sen}\,\theta_B = (200{,}0\text{ N})\,\text{sen}\,30° = +100{,}0\text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_x = C\cos\theta_C = (140{,}0\text{ N})\cos 145° = -114{,}7\text{ N} \\ C_y = C\,\text{sen}\,\theta_C = (140{,}0\text{ N})\,\text{sen}\,145° = +80{,}3\text{ N} \end{cases}$$

Ahora calculamos los componentes escalares del vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$:

$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x + C_x = +91{,}8\text{ N} + 173{,}2\text{ N} - 114{,}7\text{ N} = +150{,}3\text{ N} \\ R_y = A_y + B_y + C_y = -131{,}1\text{ N} + 100{,}0\text{ N} + 80{,}3\text{ N} = +49{,}2\text{ N} \end{cases}$$

El vector antiparalelo a la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ es

$$\vec{\mathbf{D}} = -\vec{\mathbf{R}} = -R_x\hat{\mathbf{i}} - R_y\hat{\mathbf{j}} = (-150{,}3\hat{\mathbf{i}} - 49{,}2\hat{\mathbf{j}})\ \text{N}.$$

La magnitud de la fuerza de tracción de Dug es

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(-150{,}3)^2 + (-49{,}2)^2}\ \text{N} = 158{,}1\ \text{N}.$$

La dirección de la fuerza de tracción de Dug es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-49{,}2\ \text{N}}{-150{,}3\ \text{N}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{49{,}2}{150{,}3}\right) = 18{,}1°.$$

Dug hala en la dirección $18{,}1°$ al sur del oeste porque ambos componentes son negativos, lo que significa que el vector de tracción se encuentra en el tercer cuadrante (Figura 2.19).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.9

Supongamos que Balto en el Ejemplo 2.10 abandona el juego para atender asuntos más importantes, pero Astro, Clifford y Dug siguen jugando. El tirón de Astro y Clifford sobre el juguete no cambia, pero Dug corre y muerde el juguete en otro lugar. ¿Con qué fuerza y en qué dirección debe Dug halar ahora del juguete para equilibrar los tirones combinados de Clifford y Astro? Ilustre esta situación dibujando un diagrama vectorial que indique todas las fuerzas implicadas.

EJEMPLO 2.11

Álgebra vectorial

Halle la magnitud del vector $\vec{\mathbf{C}}$ que satisface la ecuación $2\vec{\mathbf{A}} - 6\vec{\mathbf{B}} + 3\vec{\mathbf{C}} = 2\hat{\mathbf{j}}$, donde $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}/2$.

Estrategia

Primero resolvemos la ecuación dada para el vector desconocido $\vec{\mathbf{C}}$. Luego sustituimos $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$; agrupamos los términos a lo largo de cada una de las tres direcciones $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$; e identificamos los componentes escalares C_x, C_y y C_z. Finalmente, sustituimos en la Ecuación 2.21 para encontrar la magnitud C.

Solución

$$\begin{aligned}
2\vec{\mathbf{A}} - 6\vec{\mathbf{B}} + 3\vec{\mathbf{C}} &= 2\hat{\mathbf{j}} \\
3\vec{\mathbf{C}} &= 2\hat{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{A}} + 6\vec{\mathbf{B}} \\
\vec{\mathbf{C}} &= \tfrac{2}{3}\hat{\mathbf{j}} - \tfrac{2}{3}\vec{\mathbf{A}} + 2\vec{\mathbf{B}} \\
&= \tfrac{2}{3}\hat{\mathbf{j}} - \tfrac{2}{3}(\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}) + 2\left(-\hat{\mathbf{j}} + \tfrac{\hat{\mathbf{k}}}{2}\right) = \tfrac{2}{3}\hat{\mathbf{j}} - \tfrac{2}{3}\hat{\mathbf{i}} + \tfrac{4}{3}\hat{\mathbf{k}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \\
&= -\tfrac{2}{3}\hat{\mathbf{i}} + \left(\tfrac{2}{3} - 2\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\tfrac{4}{3} + 1\right)\hat{\mathbf{k}} \\
&= -\tfrac{2}{3}\hat{\mathbf{i}} - \tfrac{4}{3}\hat{\mathbf{j}} + \tfrac{7}{3}\hat{\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

Los componentes son $C_x = -2/3$, $C_y = -4/3$ y $C_z = 7/3$, y al sustituir en la Ecuación 2.21 obtenemos

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{(-2/3)^2 + (-4/3)^2 + (7/3)^2} = \sqrt{23/3}.$$

EJEMPLO 2.12

Desplazamiento de un esquiador

Partiendo de un albergue de esquí, un esquiador de fondo recorre 5,0 km hacia el norte, luego 3,0 km hacia el oeste y finalmente 4,0 km hacia el suroeste antes de tomar un descanso. Halle su vector de desplazamiento total con respecto al albergue cuando está en el punto de descanso. ¿A qué distancia y en qué dirección debe esquiar desde el punto de descanso para volver directamente al albergue?

Estrategia

Suponemos un sistema de coordenadas rectangular con el origen en el albergue de esquí y con el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ que apunta al este y el vector unitario $\hat{\mathbf{j}}$ que apunta al norte. Hay tres desplazamientos: $\vec{\mathbf{D}}_1$, $\vec{\mathbf{D}}_2$ y $\vec{\mathbf{D}}_3$. Identificamos sus magnitudes como $D_1 = 5{,}0\,\text{km}$, $D_2 = 3{,}0\,\text{km}$ y $D_3 = 4{,}0\,\text{km}$. Identificamos que sus direcciones son los ángulos $\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = 180°$ y $\theta_3 = 180° + 45° = 225°$. Resolvemos cada vector de desplazamiento en sus componentes escalares y los sustituimos en la Ecuación 2.25 para obtener los componentes escalares del desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{D}}$ desde el albergue hasta el punto de descanso. En el camino de regreso desde el punto de descanso hasta el albergue, el desplazamiento es $\vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{D}}$. Por último, encontramos la magnitud y la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$.

Solución

Las componentes escalares de los vectores de desplazamiento son

$$\begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos\theta_1 = (5{,}0\,\text{km})\cos 90° = 0 \\ D_{1y} = D_1 \operatorname{sen}\theta_1 = (5{,}0\,\text{km})\operatorname{sen} 90° = 5{,}0\,\text{km} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos\theta_2 = (3{,}0\,\text{km})\cos 180° = -3{,}0\,\text{km} \\ D_{2y} = D_2 \operatorname{sen}\theta_2 = (3{,}0\,\text{km})\operatorname{sen} 180° = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} D_{3x} = D_3 \cos\theta_3 = (4{,}0\,\text{km})\cos 225° = -2{,}8\,\text{km} \\ D_{3y} = D_3 \operatorname{sen}\theta_3 = (4{,}0\,\text{km})\operatorname{sen} 225° = -2{,}8\,\text{km} \end{cases}$$

Los componentes escalares del vector de desplazamiento neto son

$$\begin{cases} D_x = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = (0 - 3{,}0 - 2{,}8)\text{km} = -5{,}8\,\text{km} \\ D_y = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = (5{,}0 + 0 - 2{,}8)\text{km} = +2{,}2\,\text{km} \end{cases}.$$

Por lo tanto, el vector de desplazamiento neto del esquiador es $\vec{\mathbf{D}} = D_x\hat{\mathbf{i}} + D_y\hat{\mathbf{j}} = (-5{,}8\hat{\mathbf{i}} + 2{,}2\hat{\mathbf{j}})\text{km}$. En el camino de regreso al albergue, su desplazamiento es $\vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{D}} = -(-5{,}8\hat{\mathbf{i}} + 2{,}2\hat{\mathbf{j}})\text{km} = (5{,}8\hat{\mathbf{i}} - 2{,}2\hat{\mathbf{j}})\text{km}$. Su magnitud es $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(5{,}8)^2 + (-2{,}2)^2}\,\text{km} = 6{,}2\,\text{km}$ y su ángulo direccional es $\theta = \tan^{-1}(-2{,}2/5{,}8) = -20{,}8°$. Por lo tanto, para volver al albergue, deberá recorrer 6,2 km en una dirección de 21° al sur del este.

Importancia

Observe que no se necesita ninguna figura para resolver este problema por el método analítico. Las figuras son necesarias cuando se utiliza un método gráfico; sin embargo, podemos comprobar si nuestra solución tiene sentido haciendo un esquema, lo cual es un paso final útil para resolver cualquier problema vectorial.

EJEMPLO 2.13

Desplazamiento de un corredor

Un corredor sube un tramo de 200 escalones idénticos hasta la cima de una colina y luego corre a lo largo de la cima de la colina 50,0 m antes de detenerse en un bebedero (Figura 2.26). Su vector de desplazamiento desde el punto A en la parte inferior de los escalones hasta el punto B en el bebedero es $\vec{\mathbf{D}}_{AB} = (-90{,}0\hat{\mathbf{i}} + 30{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{m}$.

¿Cuál es la altura y el ancho de cada escalón en el tramo? ¿Cuál es la distancia real que recorre el corredor? Si hace un circuito y vuelve al punto *A*, ¿cuál es su vector de desplazamiento neto?

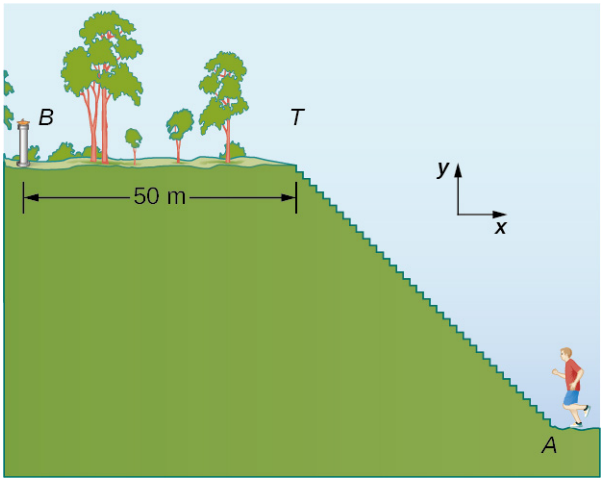


FIGURA 2.26 Un corredor sube un tramo de escaleras.

Estrategia

El vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{AB}$ es la suma vectorial del vector de desplazamiento del corredor $\vec{\mathbf{D}}_{AT}$ a lo largo de la escalera (desde el punto *A* en la parte inferior de la escalera hasta el punto *T* en la parte superior de la misma) y su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{TB}$ en la cima de la colina (desde el punto *A* en la cima de las escaleras hasta el bebedero en el punto *T*). Debemos encontrar los componentes horizontales y verticales de $\vec{\mathbf{D}}_{AT}$. Si cada escalón tiene un ancho *w* y una altura *h*, el componente horizontal de $\vec{\mathbf{D}}_{AT}$ deberá tener una longitud de 200 *w* y el componente vertical deberá tener una longitud de 200 *h*. La distancia real que recorre el corredor es la suma de la distancia que recorre por las escaleras y la distancia de 50,0 m que recorre en la cima de la colina.

Solución

En el sistema de coordenadas indicado en la Figura 2.26, el vector de desplazamiento del corredor en la cima de la colina es $\vec{\mathbf{D}}_{TB} = (-50{,}0\ \text{m})\hat{\mathbf{i}}$. Su vector de desplazamiento neto es

$$\vec{\mathbf{D}}_{AB} = \vec{\mathbf{D}}_{AT} + \vec{\mathbf{D}}_{TB}.$$

Por lo tanto, su vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}_{TB}$ a lo largo de las escaleras es

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{D}}_{AT} &= \vec{\mathbf{D}}_{AB} - \vec{\mathbf{D}}_{TB} = (-90{,}0\hat{\mathbf{i}} + 30{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{m} - (-50{,}0\ \text{m})\hat{\mathbf{i}} = [(-90{,}0 + 50{,}0)\hat{\mathbf{i}} + 30{,}0\hat{\mathbf{j}})]\text{m} \\ &= (-40{,}0\hat{\mathbf{i}} + 30{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{m}.\end{aligned}$$

Sus componentes escalares son $D_{ATx} = -40{,}0$ m y $D_{ATy} = 30{,}0$ m. Por lo tanto, debemos tener

$$200w = |-40{,}0|\text{m y } 200h = 30{,}0\ \text{m}.$$

De allí que el ancho del escalón es *w* = 40,0 m/200 = 0,2 m = 20 cm, y la altura del escalón sea *h* = 30,0 m/200 = 0,15 m = 15 cm. La distancia que recorre el corredor por las escaleras es

$$D_{AT} = \sqrt{D_{ATx}^2 + D_{ATy}^2} = \sqrt{(-40{,}0)^2 + (30{,}0)^2}\ \text{m} = 50{,}0\ \text{m}.$$

Así, la distancia real que recorre es $D_{AT} + D_{TB} = 50{,}0\ \text{m} + 50{,}0\ \text{m} = 100{,}0\ \text{m}$. Cuando hace un circuito y vuelve desde el bebedero a su posición inicial en el punto *A*, la distancia total que recorre es el doble de esta distancia, es decir, 200,0 m. Sin embargo, su vector de desplazamiento neto es cero, porque cuando su posición final es la misma que su posición inicial, los componentes escalares de su vector de desplazamiento neto son cero (Ecuación 2.13).

En muchas situaciones físicas, a menudo necesitamos conocer la dirección de un vector. Por ejemplo, quizá queramos conocer la dirección de un vector de campo magnético en algún punto o la dirección del movimiento de un objeto. Ya hemos dicho que la dirección viene dada por un vector unitario, que es una entidad adimensional, es decir, no tiene unidades físicas asociadas. Cuando el vector en cuestión se encuentra a lo largo de uno de los ejes en un sistema cartesiano de coordenadas, la respuesta es sencilla, porque entonces su vector unitario de dirección es paralelo o antiparalelo a la dirección del vector unitario de un eje. Por ejemplo, la dirección del vector $\vec{\mathbf{d}} = -5\ \text{m}\hat{\mathbf{i}}$ es el vector unitario $\hat{\mathbf{d}} = -\hat{\mathbf{i}}$. La regla general para encontrar el vector unitario $\widehat{\mathbf{V}}$ de dirección para cualquier vector $\vec{\mathbf{V}}$ es dividirlo entre su magnitud V:

$$\widehat{\mathbf{V}} = \frac{\vec{\mathbf{V}}}{V}. \qquad 2.26$$

Vemos en esta expresión que, efectivamente, el vector unitario de dirección es adimensional porque el numerador y el denominador en la Ecuación 2.26 tienen la misma unidad física. De este modo, la Ecuación 2.26 nos permite expresar el vector unitario de dirección en términos de vectores unitarios de los ejes. El siguiente ejemplo ilustra este principio.

EJEMPLO 2.14

El vector unitario de dirección

Si el vector de velocidad del convoy militar en el Ejemplo 2.8 es $\vec{\mathbf{v}} = (4{,}000\hat{\mathbf{i}} + 3{,}000\hat{\mathbf{j}} + 0{,}100\hat{\mathbf{k}})\text{km/h}$, ¿cuál es el vector unitario de su dirección de movimiento?

Estrategia

El vector unitario de la dirección de movimiento del convoy es el vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ que es paralelo al vector de velocidad. El vector unitario se obtiene al dividir un vector entre su magnitud, de acuerdo con la Ecuación 2.26.

Solución

La magnitud del vector $\vec{\mathbf{v}}$ es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4{,}000^2 + 3{,}000^2 + 0{,}100^2}\,\text{km/h} = 5{,}001\text{km/h}.$$

Para obtener el vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$, dividimos $\vec{\mathbf{v}}$ entre su magnitud:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v} = \frac{(4{,}000\hat{\mathbf{i}}+3{,}000\hat{\mathbf{j}}+0{,}100\hat{\mathbf{k}})\text{km/h}}{5{,}001\text{km/h}} \\ &= \frac{(4{,}000\hat{\mathbf{i}}+3{,}000\hat{\mathbf{j}}+0{,}100\hat{\mathbf{k}})}{5{,}001} \\ &= \frac{4{,}000}{5{,}001}\hat{\mathbf{i}} + \frac{3{,}000}{5{,}001}\hat{\mathbf{j}} + \frac{0{,}100}{5{,}001}\hat{\mathbf{k}} \\ &= (79{,}98\hat{\mathbf{i}} + 59{,}99\hat{\mathbf{j}} + 2{,}00\hat{\mathbf{k}}) \times 10^{-2}.\end{aligned}$$

Importancia

Tenga en cuenta que, cuando utilice el método analítico con una calculadora, es aconsejable realizar sus cálculos con al menos tres decimales y luego redondear la respuesta final al número requerido de cifras significativas, que es la forma en que realizamos los cálculos en este ejemplo. Si redondea su respuesta parcial demasiado pronto, se arriesga a que su respuesta final tenga un gran error numérico y esté muy lejos de la respuesta exacta o de un valor medido en un experimento.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.10

Verifique que el vector $\hat{\mathbf{v}}$ obtenido en el Ejemplo 2.14 es efectivamente un vector unitario calculando su magnitud. Si el convoy del Ejemplo 2.8 se desplazara por una llanura desértica (es decir, si el tercer

componente de su velocidad fuera cero), ¿cuál es el vector unitario de su dirección de movimiento? ¿Qué dirección geográfica representa?

2.4 Productos de los vectores

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la diferencia entre el producto escalar y el producto vectorial de dos vectores.
- Determinar el producto escalar de dos vectores.
- Determinar el producto vectorial de dos vectores.
- Describir cómo se utilizan los productos de vectores en física.

Un vector puede multiplicarse por otro vector pero no puede dividirse entre otro vector. Hay dos tipos de productos de vectores que se utilizan ampliamente en la física y la ingeniería. Un tipo de multiplicación es la *multiplicación escalar de dos vectores*. El producto escalar de dos vectores da como resultado un número (un escalar), como su nombre lo indica. Los productos escalares se utilizan para definir las relaciones de trabajo y energía. Por ejemplo, el trabajo que una fuerza (un vector) realiza sobre un objeto y provoca su desplazamiento (un vector) se define como un producto escalar del vector de fuerza por el vector de desplazamiento. Otro tipo de multiplicación muy diferente es la *multiplicación vectorial de vectores*. El producto vectorial de dos vectores da como resultado un vector, como su nombre lo indica. Los productos vectoriales se utilizan para definir otras cantidades vectoriales derivadas. Por ejemplo, al describir las rotaciones, una cantidad vectorial llamada *torque* se define como un producto vectorial de una fuerza aplicada (un vector) y su distancia desde el pivote a la fuerza (un vector). Es importante distinguir entre estos dos tipos de multiplicaciones vectoriales porque el producto escalar es una cantidad escalar y el producto vectorial es una cantidad vectorial.

El producto escalar de dos vectores (el producto punto)

La multiplicación escalar de dos vectores da como resultado un producto escalar.

Producto escalar (producto punto)

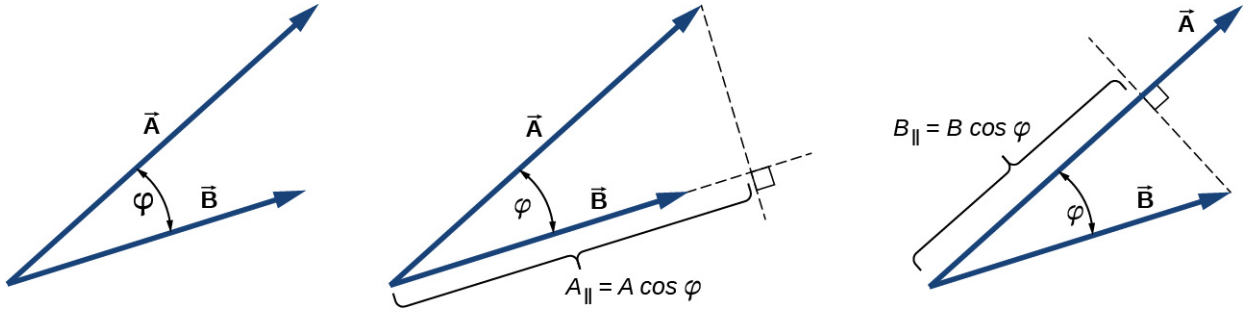
El **producto escalar** $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es un número definido por la ecuación

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\varphi, \tag{2.27}$$

donde φ es el ángulo entre los vectores (mostrado en la Figura 2.27). El producto escalar también se denomina **producto punto** por la notación de punto que lo indica.

En la definición del producto punto, la dirección del ángulo φ no importa, y φ se puede medir desde cualquiera de los dos vectores hacia el otro porque $\cos\varphi = \cos(-\varphi) = \cos(2\pi - \varphi)$. El producto punto es un número negativo cuando $90° < \varphi \leq 180°$ y es un número positivo cuando $0° \leq \varphi < 90°$. Además, el producto punto de dos vectores paralelos es $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos 0° = AB$, y el producto punto de dos vectores antiparalelos es $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos 180° = -AB$. El producto escalar de dos *vectores ortogonales* es igual a cero: $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos 90° = 0$. El producto escalar de un vector consigo mismo es el cuadrado de su magnitud:

$$\vec{\mathbf{A}}^2 \equiv \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = AA\cos 0° = A^2. \tag{2.28}$$



(a) (b) (c)

FIGURA 2.27 El producto escalar de dos vectores. (a) El ángulo entre los dos vectores. (b) La proyección ortogonal $A_\perp$ del vector $\vec{\mathbf{A}}$ en la dirección del vector $\vec{\mathbf{B}}$. (c) La proyección ortogonal $B_\perp$ del vector $\vec{\mathbf{B}}$ en la dirección del vector $\vec{\mathbf{A}}$.

EJEMPLO 2.15

El producto escalar

Para los vectores mostrados en la Figura 2.13, halle el producto escalar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{F}}$.

Estrategia

A partir de la Figura 2.13, la magnitud de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ son $A = 10{,}0$ y $F = 20{,}0$. El ángulo θ, entre ellos, es la diferencia: $\theta = \varphi - \alpha = 110° - 35° = 75°$. Sustituyendo estos valores en la Ecuación 2.27 obtenemos el producto escalar.

Solución

Un cálculo sencillo nos da

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{F}} = AF \cos\theta = (10{,}0)(20{,}0) \cos 75° = 51{,}76.$$

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.11

Para los vectores dados en la Figura 2.13, halle el producto escalar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$.

En el sistema de coordenadas cartesianas, los productos escalares del vector unitario de un eje con otros vectores unitarios de ejes siempre son iguales a cero porque estos vectores unitarios son ortogonales:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} &= \left|\hat{\mathbf{i}}\right|\left|\hat{\mathbf{j}}\right| \cos 90° = (1)(1)(0) = 0, \\ \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} &= \left|\hat{\mathbf{i}}\right|\left|\hat{\mathbf{k}}\right| \cos 90° = (1)(1)(0) = 0, \\ \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} &= \left|\hat{\mathbf{k}}\right|\left|\hat{\mathbf{j}}\right| \cos 90° = (1)(1)(0) = 0. \end{aligned} \qquad \textbf{2.29}$$

En estas ecuaciones, utilizamos el hecho de que la magnitud de todos los vectores unitarios es uno: $\left|\hat{\mathbf{i}}\right| = \left|\hat{\mathbf{j}}\right| = \left|\hat{\mathbf{k}}\right| = 1$. Para los vectores unitarios de los ejes, la Ecuación 2.28 da las siguientes identidades:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = i^2 = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = j^2 = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = k^2 = 1. \qquad \textbf{2.30}$$

El producto escalar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ también puede interpretarse como el producto de B con la proyección $A_\parallel$ del vector $\vec{\mathbf{A}}$ en la dirección del vector $\vec{\mathbf{B}}$ (Figura 2.27(b)) o el producto de A con la proyección $B_\parallel$ del vector $\vec{\mathbf{B}}$ en la dirección del vector $\vec{\mathbf{A}}$ (Figura 2.27(c)):

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} &= AB\cos\varphi \\ &= B(A\cos\varphi) = BA_{\parallel} \\ &= A(B\cos\varphi) = AB_{\parallel}.\end{aligned}$$

Por ejemplo, en el sistema de coordenadas rectangulares en un plano, el componente escalar x de un vector es su producto punto con el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$, y el componente escalar y de un vector es su producto punto con el vector unitario $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\begin{cases}\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \left|\vec{\mathbf{A}}\right|\left|\hat{\mathbf{i}}\right|\cos\theta_A = A\cos\theta_A = A_x \\ \vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \left|\vec{\mathbf{A}}\right|\left|\hat{\mathbf{j}}\right|\cos(90^\circ - \theta_A) = A\,\text{sen}\,\theta_A = A_y\end{cases}.$$

La multiplicación escalar de vectores es conmutativa,

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}, \tag{2.31}$$

y obedece a la ley distributiva:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}. \tag{2.32}$$

Podemos utilizar las leyes conmutativa y distributiva para derivar varias relaciones para los vectores, como expresar el producto punto de dos vectores en términos de sus componentes escalares.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.12

Para el vector $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$ en un sistema de coordenadas rectangulares, utilice la Ecuación 2.29 hasta Ecuación 2.32 para demostrar que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = A_x$ $\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = A_y$ y $\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = A_z$.

Cuando los vectores en la Ecuación 2.27 se dan en sus formas de componentes vectoriales,

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \text{ y } \vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}},$$

podemos calcular su producto escalar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} &= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}) \cdot (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) \\ &= A_xB_x\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + A_xB_y\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + A_xB_z\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ &\quad + A_yB_x\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + A_yB_y\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + A_yB_z\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ &\quad + A_zB_x\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + A_zB_y\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + A_zB_z\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Como los productos escalares de dos vectores unitarios diferentes de los ejes dan cero, y los productos escalares de los vectores unitarios con ellos mismos dan uno (vea la Ecuación 2.29 y la Ecuación 2.30), solo hay tres términos que no son cero en esta expresión. Por lo tanto, el producto escalar se simplifica a

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{2.33}$$

Podemos utilizar la Ecuación 2.33 para el producto escalar en términos de componentes escalares de vectores para encontrar el ángulo entre dos vectores. Si dividimos la Ecuación 2.27 entre AB, obtenemos la ecuación para $\cos\varphi$, en la que sustituimos la Ecuación 2.33:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}. \tag{2.34}$$

El ángulo φ entre los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se obtiene tomando el coseno inverso de la expresión en la Ecuación 2.34.

EJEMPLO 2.16

Ángulo entre dos fuerzas

Tres perros halan de un palo en diferentes direcciones, como se muestra en la Figura 2.28. El primer perro hala con fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1 = (10{,}0\hat{\mathbf{i}} - 20{,}4\hat{\mathbf{j}} + 2{,}0\hat{\mathbf{k}})\text{N}$, el segundo perro hala con fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2 = (-15{,}0\hat{\mathbf{i}} - 6{,}2\hat{\mathbf{k}})\text{N}$, y el tercer perro hala con fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3 = (5{,}0\hat{\mathbf{i}} + 12{,}5\hat{\mathbf{j}})\text{N}$. ¿Cuál es el ángulo entre las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$?

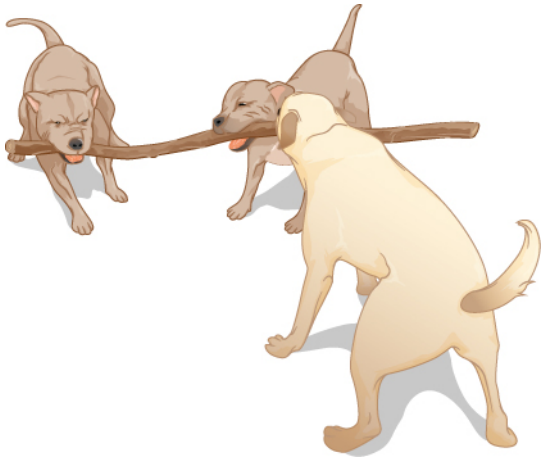


FIGURA 2.28 Tres perros juegan con un palo.

Estrategia

Los componentes del vector de fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ son $F_{1x} = 10{,}0\text{ N}$, $F_{1y} = -20{,}4\text{ N}$ y $F_{1z} = 2{,}0\text{ N}$, mientras que los del vector de fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ son $F_{2x} = -15{,}0\text{ N}$, $F_{2y} = 0{,}0\text{ N}$ y $F_{2z} = -6{,}2\text{ N}$. Calculando el producto escalar de estos vectores y sus magnitudes, y sustituyendo en la Ecuación 2.34 se obtiene el ángulo de interés.

Solución

Las magnitudes de las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ son

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2 + F_{1z}^2} = \sqrt{10{,}0^2 + 20{,}4^2 + 2{,}0^2}\text{ N} = 22{,}8\text{ N}$$

y

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2 + F_{2z}^2} = \sqrt{15{,}0^2 + 6{,}2^2}\text{ N} = 16{,}2\text{ N}.$$

Sustituyendo los componentes escalares en la Ecuación 2.33 produce el producto escalar

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_1 \cdot \vec{\mathbf{F}}_2 &= F_{1x}F_{2x} + F_{1y}F_{2y} + F_{1z}F_{2z}\\ &= (10{,}0\text{ N})(-15{,}0\text{ N}) + (-20{,}4\text{ N})(0{,}0\text{ N}) + (2{,}0\text{ N})(-6{,}2\text{ N})\\ &= -162{,}4\text{ N}^2.\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo todo en la Ecuación 2.34 se obtiene el ángulo

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{F}}_1 \cdot \vec{\mathbf{F}}_2}{F_1 F_2} = \frac{-162{,}4\text{N}^2}{(22{,}8\text{ N})(16{,}2\text{ N})} = -0{,}439 \Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}(-0{,}439) = 116{,}0°.$$

Importancia

Observe que, cuando los vectores se dan en términos de los vectores unitarios de los ejes, podemos encontrar el ángulo entre ellos sin conocer los detalles de las direcciones geográficas que representan los vectores unitarios. En este caso, por ejemplo, la dirección de la $x+$ puede ser hacia el este y la dirección de la $+y$ puede ser hacia el norte. Sin embargo, el ángulo entre las fuerzas en el problema es el mismo si la dirección de la $x+$

está al oeste y la dirección de la $+y$ está al sur.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.13

Halle el ángulo entre las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_3$ en el Ejemplo 2.16.

EJEMPLO 2.17

El trabajo de una fuerza

Cuando la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ hala de un objeto y cuando provoca su desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$, decimos que la fuerza realiza un trabajo. La cantidad de trabajo que realiza la fuerza es el producto escalar $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{D}}$. Si el palo en el Ejemplo 2.16 se mueve momentáneamente y se desplaza por el vector $\vec{\mathbf{D}} = (-7{,}9\hat{\mathbf{j}} - 4{,}2\hat{\mathbf{k}})$ cm, ¿cuánto trabajo hace el tercer perro en el Ejemplo 2.16?

Estrategia

Calculamos el producto escalar del vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ con el vector de fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3 = (5{,}0\hat{\mathbf{i}} + 12{,}5\hat{\mathbf{j}})$N, que es el tirón del tercer perro. Utilicemos W_3 para denotar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$ en el desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$.

Solución

El cálculo del trabajo es la aplicación directa del producto punto:

$$\begin{aligned} W_3 &= \vec{\mathbf{F}}_3 \cdot \vec{\mathbf{D}} = F_{3x} D_x + F_{3y} D_y + F_{3z} D_z \\ &= (5{,}0\ \text{N})(0{,}0\ \text{cm}) + (12{,}5\ \text{N})(-7{,}9\ \text{cm}) + (0{,}0\ \text{N})(-4{,}2\ \text{cm}) \\ &= -98{,}7\ \text{N} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Importancia

La unidad de trabajo del SI se denomina julio (J), donde 1 J = 1 N · m. La unidad cm · N puede escribirse como $10^{-2}\text{m} \cdot \text{N} = 10^{-2}\text{J}$, por lo que la respuesta puede expresarse como $W_3 = -0{,}9875\ \text{J} \approx -1{,}0\ \text{J}$.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.14

¿Cuánto trabajo realizan el primer perro y el segundo en el Ejemplo 2.16 sobre el desplazamiento en el Ejemplo 2.17?

El producto vectorial de dos vectores (el producto cruz)

La multiplicación de dos vectores da como resultado un producto vectorial.

Producto vectorial (producto cruz)

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se denota por $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y suele denominarse **producto cruz**. El producto vectorial es un vector que tiene su dirección perpendicular a ambos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. En otras palabras, el vector $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano que contiene los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, como se muestra en la Figura 2.29. La magnitud del producto vectorial se define como

$$\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = AB \operatorname{sen} \varphi, \qquad 2.35$$

donde el ángulo φ, entre los dos vectores, se mide desde el vector $\vec{\mathbf{A}}$ (primer vector del producto) al vector

$\vec{\mathbf{B}}$ (segundo vector del producto), como se indica en la Figura 2.29, y está entre $0°$ y $180°$.

Según la Ecuación 2.35, el producto vectorial es igual a cero para pares de vectores que son paralelos ($\varphi = 0°$) o antiparalelos ($\varphi = 180°$) porque $\text{sen}\, 0° = \text{sen}\, 180° = 0$.

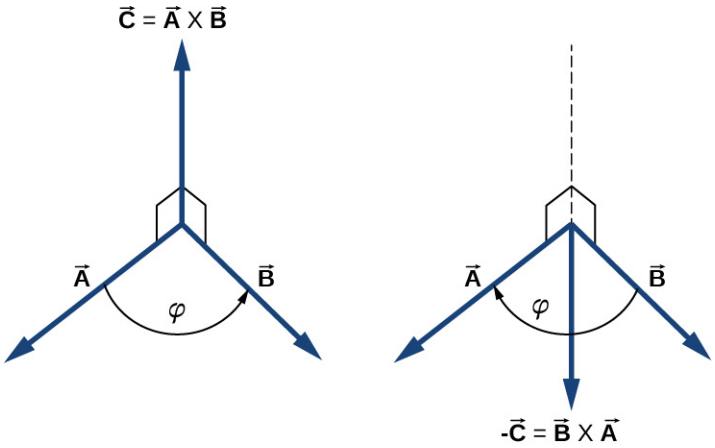


FIGURA 2.29 El producto vectorial de dos vectores se dibuja en un espacio tridimensional. (a) El producto vectorial $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es un vector perpendicular al plano que contiene los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Los pequeños cuadrados dibujados en perspectiva marcan los ángulos rectos entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$, y entre $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$ de modo que si $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están acostados en el suelo, el vector $\vec{\mathbf{C}}$ apunta verticalmente hacia arriba. (b) El producto vectorial $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$ es un vector antiparalelo al vector $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

En la línea perpendicular al plano que contiene los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ hay dos direcciones alternativas: hacia arriba o hacia abajo, como se muestra en la Figura 2.29, y la dirección del producto vectorial puede ser cualquiera de ellas. En la orientación estándar de la mano derecha, donde el ángulo entre los vectores se mide en sentido contrario a las agujas del reloj desde el primer vector, el vector $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ apunta *hacia arriba*, como se ve en la Figura 2.29(a). Si invertimos el orden de la multiplicación, de modo que ahora $\vec{\mathbf{B}}$ es lo primero en el producto, entonces el vector $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$ debe apuntar *hacia abajo*, como se ve en la Figura 2.29(b). Esto significa que los vectores $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$ son *antiparalelos* entre sí y que la multiplicación de vectores *no* es conmutativa, sino *anticonmutativa*. La **anticonmutatividad** significa que el producto vectorial invierte el signo cuando se invierte el orden de la multiplicación:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}. \qquad 2.36$$

La **regla de la mano derecha** es un mnemotécnico común que sirve para determinar la dirección del producto vectorial. Como se muestra en la Figura 2.30, un sacacorchos se coloca en una dirección perpendicular al plano que contiene los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y su mango se gira en la dirección del primer al segundo vector del producto. La dirección del producto cruz se da por la progresión del sacacorchos.

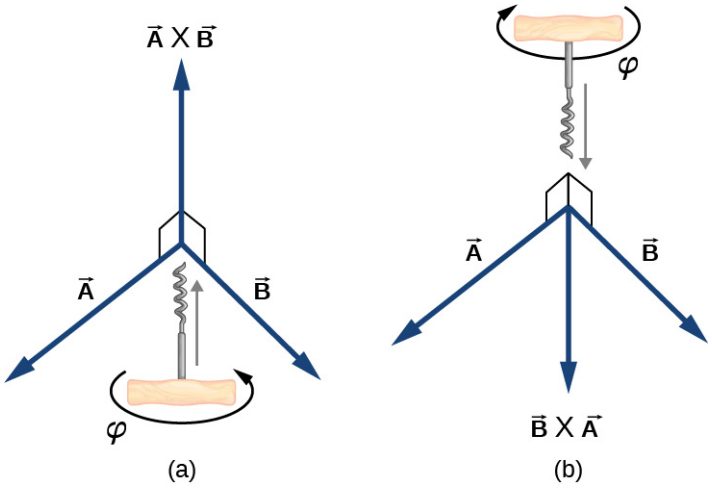


FIGURA 2.30 La regla de la mano derecha sirve para determinar la dirección del producto cruz $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Coloque un sacacorchos en la dirección perpendicular al plano que contiene los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y gírelo en la dirección del primer al segundo vector del producto. La dirección del producto cruz se da por la progresión del sacacorchos. (a) El movimiento hacia arriba significa que el vector del producto cruz apunta hacia arriba. (b) El movimiento hacia abajo significa que el vector del producto cruz apunta hacia abajo.

EJEMPLO 2.18

El torque de una fuerza

La ventaja mecánica que proporciona una herramienta familiar llamada *llave inglesa* (Figura 2.31) depende de la magnitud F de la fuerza aplicada, de su dirección con respecto al mango de la llave y de la distancia a la que se aplica esta fuerza. La distancia R desde la tuerca hasta el punto donde el vector de fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se une está representado por el vector radial $\vec{\mathbf{R}}$. La cantidad física vectorial que hace girar la tuerca se denomina *torque* (denotado por $\vec{\tau}$), y es el producto vectorial de la distancia entre el pivote a la fuerza con la fuerza: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}$.

Para aflojar una tuerca oxidada, se aplica una fuerza de 20,00 N al mango de la llave en ángulo $\varphi = 40°$ y a una distancia de 0,25 m de la tuerca, como se muestra en la Figura 2.31(a). Calcule la magnitud y la dirección del torque aplicado a la tuerca. ¿Cuál sería la magnitud y la dirección del torque si la fuerza se aplicara con un ángulo $\varphi = 45°$, como se muestra en la Figura 2.31(b)? ¿Para qué valor del ángulo φ el torque tiene la mayor magnitud?

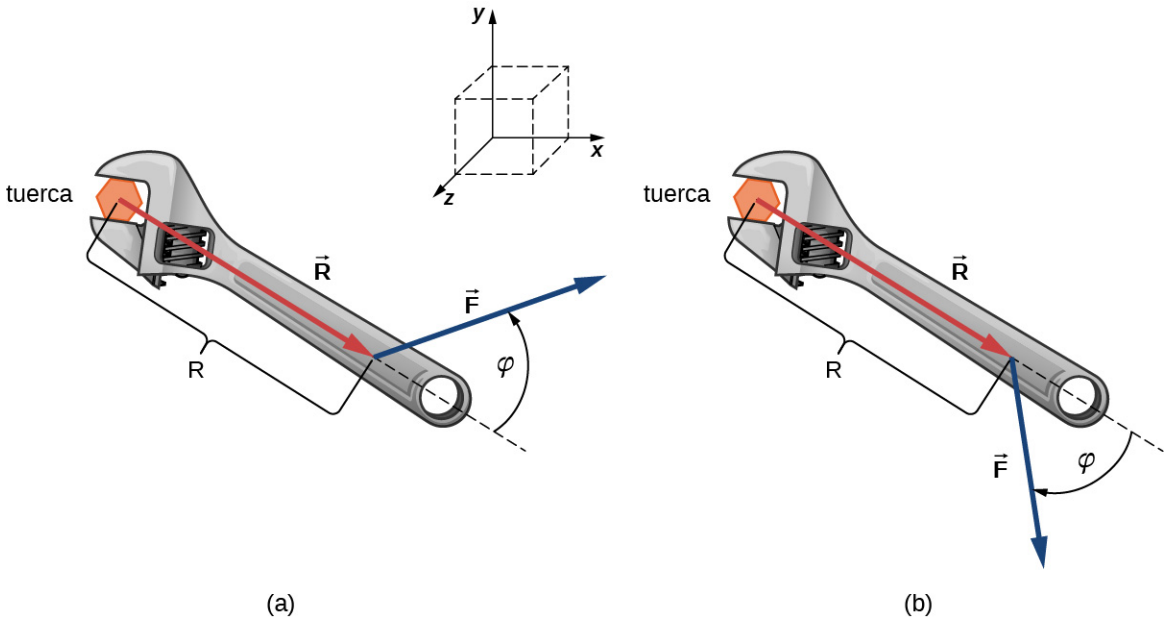


FIGURA 2.31 Una llave proporciona agarre y ventaja mecánica al aplicar el torque para girar una tuerca. (a) Gire en sentido contrario a las agujas del reloj para aflojar la tuerca. (b) Gire en sentido de las agujas del reloj para apretar la tuerca.

Estrategia

Adoptamos el marco de referencia mostrado en la Figura 2.31, donde los vectores $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ se encuentran en el plano *xy* y el origen está en la posición de la tuerca. La dirección radial a lo largo del vector $\vec{\mathbf{R}}$ (apuntando lejos del origen) es la dirección de referencia para medir el ángulo φ porque $\vec{\mathbf{R}}$ es el primer vector del producto vectorial $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}$. El vector $\vec{\tau}$ debe estar a lo largo del eje de la *z* porque este es el eje perpendicular al plano *xy*, donde ambos $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ están. Para calcular la magnitud de τ, utilizamos la Ecuación 2.35. Para encontrar la dirección de $\vec{\tau}$, utilizamos la regla de la mano derecha (Figura 2.30).

Solución

Para la situación de (a), la regla del sacacorchos nos da la dirección de $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}$ en la dirección positiva del eje *z*. Físicamente, significa que el vector de torque $\vec{\tau}$ apunta fuera de la página, perpendicular al mango de la llave. Identificamos $F = 20{,}00$ N y $R = 0{,}25$ m, y calculamos la magnitud utilizando la Ecuación 2.35:

$$\tau = \left|\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}\right| = RF \operatorname{sen} \varphi = (0{,}25\ \text{m})(20{,}00\ \text{N}) \operatorname{sen} 40^\circ = 3{,}21\ \text{N} \cdot \text{m}.$$

Para la situación en (b), la regla del sacacorchos da la dirección de $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}$ en la dirección negativa del eje *z*. Físicamente, significa que el vector $\vec{\tau}$ apunta a la página, perpendicular al mango de la llave. La magnitud de este torque es

$$\tau = \left|\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}\right| = RF \operatorname{sen} \varphi = (0{,}25\ \text{m})(20{,}00\ \text{N}) \operatorname{sen} 45^\circ = 3{,}53\ \text{N} \cdot \text{m}.$$

El torque tiene el mayor valor cuando el $\operatorname{sen} \varphi = 1$, lo que se produce cuando $\varphi = 90^\circ$. Físicamente, significa que la llave inglesa es más eficaz, es decir, nos proporciona la mejor ventaja mecánica, cuando aplicamos la fuerza perpendicular al mango de la llave. Para la situación de este ejemplo, este valor óptimo de torque es $\tau_{\text{óptimo}} = RF = (0{,}25\ \text{m})(20{,}00\ \text{N}) = 5{,}00\ \text{N} \cdot \text{m}$.

Importancia

Cuando resolvemos problemas de mecánica, a menudo no necesitamos utilizar la regla del sacacorchos en absoluto, como veremos ahora en la siguiente solución equivalente. Observe que una vez que hemos identificado ese vector $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}$ que se encuentra a lo largo del eje *z*, podemos escribir este vector en términos

del vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$ del eje z:

$$\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}} = RF \operatorname{sen} \varphi \hat{\mathbf{k}}.$$

En esta ecuación, el número que multiplica $\hat{\mathbf{k}}$ es el componente escalar z del vector $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}$. En el cálculo de este componente, hay que tener en cuenta que el ángulo φ se mide *en sentido contrario a las agujas del reloj* desde $\vec{\mathbf{R}}$ (primer vector) al $\vec{\mathbf{F}}$ (segundo vector). Siguiendo este principio para los ángulos, obtenemos $RF \operatorname{sen}(+40°) = +3{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}$ para la situación en (a), y obtenemos $RF \operatorname{sen}(-45°) = -3{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$ para la situación en (b). En este último caso, el ángulo es negativo porque el gráfico en la Figura 2.31 indica que el ángulo se mide en el sentido de las agujas del reloj; pero, el mismo resultado se obtiene cuando este ángulo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj porque $+(360° - 45°) = +315°$ y $\operatorname{sen}(+315°) = \operatorname{sen}(-45°)$. De este modo, obtenemos la solución sin referencia a la regla del sacacorchos. Para la situación en (a), la solución es $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}} = +3{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}\hat{\mathbf{k}}$; para la situación en (b), la solución es $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}} = -3{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}\hat{\mathbf{k}}$.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.15

Para los vectores dados en la Figura 2.13, halle el producto vectorial $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{F}}$.

Al igual que el producto punto (Ecuación 2.32), el producto cruz tiene la siguiente propiedad distributiva:

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}. \tag{2.37}$$

La propiedad distributiva se aplica frecuentemente cuando los vectores se expresan en sus formas componentes, en términos de vectores unitarios de ejes cartesianos.

Cuando aplicamos la definición del producto cruz, la Ecuación 2.35, a los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ que definen las direcciones de la x, la y y la z positivas en el espacio, encontramos que

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0. \tag{2.38}$$

Todos los demás productos cruz de estos tres vectores unitarios deben ser vectores de magnitud unitaria porque $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son ortogonales. Por ejemplo, para el par $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, la magnitud es $\left|\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}\right| = ij \operatorname{sen} 90° = (1)(1)(1) = 1$. La dirección del producto vectorial $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ debe ser ortogonal al plano xy, lo que significa que debe estar a lo largo del eje de la z. Los únicos vectores unitarios a lo largo del eje z son $-\hat{\mathbf{k}}$ o $+\hat{\mathbf{k}}$. Por la regla del sacacorchos, la dirección del vector $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ debe ser paralela al eje z positivo. Por lo tanto, el resultado de la multiplicación $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ es idéntico a $+\hat{\mathbf{k}}$. Podemos repetir un razonamiento similar para los pares restantes de vectores unitarios. Los resultados de estas multiplicaciones son

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = +\hat{\mathbf{k}}, \\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = +\hat{\mathbf{i}}, \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = +\hat{\mathbf{j}}. \end{cases} \tag{2.39}$$

Observe que en la Ecuación 2.39, los tres vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ aparecen en el *orden cíclico* que se muestra en el diagrama de la Figura 2.32(a). El orden cíclico significa que en la fórmula del producto, $\hat{\mathbf{i}}$ le sigue $\hat{\mathbf{k}}$ y viene antes de $\hat{\mathbf{j}}$, o $\hat{\mathbf{k}}$ le sigue $\hat{\mathbf{j}}$ y viene antes de $\hat{\mathbf{i}}$, o $\hat{\mathbf{j}}$ le sigue $\hat{\mathbf{i}}$ y viene antes de $\hat{\mathbf{k}}$. El producto cruz de dos vectores unitarios diferentes siempre es un tercer vector unitario. Cuando dos vectores unitarios en el producto cruz aparecen en el orden cíclico, el resultado de dicha multiplicación es el vector unitario restante, como se ilustra en la Figura 2.32(b). Cuando los vectores unitarios en el producto cruz aparecen en un orden diferente, el resultado es un vector unitario antiparalelo al vector unitario restante (es decir, el resultado es con el signo menos, como muestran los ejemplos de la Figura 2.32(c) y la Figura 2.32(d). En la práctica, cuando la tarea es encontrar productos cruz de vectores que están dados en forma de componentes vectoriales, esta regla para la multiplicación cruzada de vectores unitarios es muy útil.

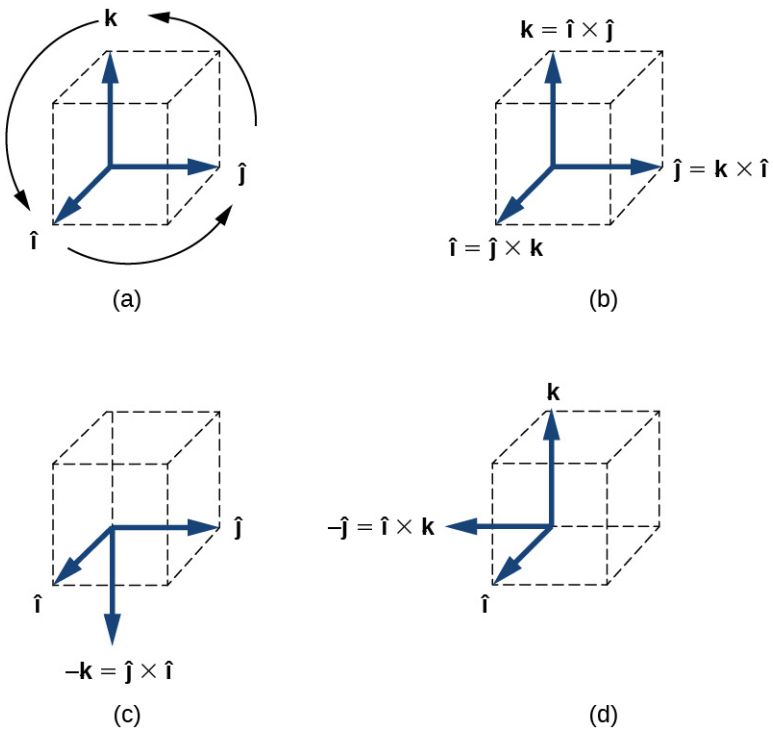


FIGURA 2.32 (a) El diagrama del orden cíclico de los vectores unitarios de los ejes. (b) Los únicos productos cruz donde los vectores unitarios aparecen en el orden cíclico. Estos productos tienen el signo positivo. (c, d) Dos ejemplos de productos cruz donde los vectores unitarios no aparecen en el orden cíclico. Estos productos tienen el signo negativo.

Supongamos que queremos encontrar el producto cruz $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ para los vectores $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$. Podemos utilizar la propiedad distributiva (Ecuación 2.37), la anticonmutatividad (Ecuación 2.36), y los resultados en la Ecuación 2.38 y la Ecuación 2.39 para vectores unitarios para realizar la siguiente operación de álgebra:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} &= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}) \times (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) \\
&= A_x\hat{\mathbf{i}} \times (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) + A_y\hat{\mathbf{j}} \times (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) + A_z\hat{\mathbf{k}} \times (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) \\
&= A_xB_x\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + A_xB_y\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + A_xB_z\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} \\
&\quad + A_yB_x\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + A_yB_y\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} + A_yB_z\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} \\
&\quad + A_zB_x\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} + A_zB_y\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} + A_zB_z\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} \\
&= A_xB_x(0) + A_xB_y(+\hat{\mathbf{k}}) + A_xB_z(-\hat{\mathbf{j}}) \\
&\quad + A_yB_x(-\hat{\mathbf{k}}) + A_yB_y(0) + A_yB_z(+\hat{\mathbf{i}}) \\
&\quad + A_zB_x(+\hat{\mathbf{j}}) + A_zB_y(-\hat{\mathbf{i}}) + A_zB_z(0).
\end{aligned}$$

Cuando se realicen operaciones algebraicas que impliquen el producto cruz, hay que tener mucho cuidado en mantener el orden correcto de la multiplicación, ya que el producto cruz es anticonmutativo. Los dos últimos pasos que nos quedan por hacer para completar nuestra tarea son, primero, agrupar los términos que contienen un vector unitario común y, segundo, factorizar. De esta manera obtenemos la siguiente expresión muy útil para el cálculo del producto cruz:

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}}. \qquad 2.40$$

En esta expresión, los componentes escalares del vector del producto cruz son

$$\begin{cases} C_x = A_y B_z - A_z B_y, \\ C_y = A_z B_x - A_x B_z, \\ C_z = A_x B_y - A_y B_x. \end{cases} \quad 2.41$$

Al momento de encontrar el producto cruz, en la práctica, podemos utilizar tanto la Ecuación 2.35 como la Ecuación 2.40, dependiendo de cuál de ellas nos parezca menos compleja computacionalmente. Ambas conducen al mismo resultado final. Una forma de asegurarse de que el resultado final es correcto es utilizar ambas.

EJEMPLO 2.19

Una partícula en un campo magnético

Al moverse en un campo magnético, algunas partículas pueden experimentar una fuerza magnética. Sin entrar en detalles, el estudio detallado de los fenómenos magnéticos se aborda en capítulos posteriores, reconozcamos que el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ es un vector, la fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}$ es un vector, y la velocidad $\vec{\mathbf{u}}$ de la partícula es un vector. El vector de fuerza magnética es proporcional al producto vectorial del vector de velocidad por el vector de campo magnético, que expresamos como $\vec{\mathbf{F}} = \zeta\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}$. En esta ecuación, una constante ζ se encarga de la coherencia en unidades físicas, por lo que podemos omitir las unidades físicas en los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. En este ejemplo, vamos a suponer que la constante ζ es positiva.

Una partícula que se mueve en el espacio con un vector de velocidad $\vec{\mathbf{u}} = -5{,}0\hat{\mathbf{i}} - 2{,}0\hat{\mathbf{j}} + 3{,}5\hat{\mathbf{k}}$ entra en una región con un campo magnético y experimenta una fuerza magnética. Halle la fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}$ sobre esta partícula en el punto de entrada a la región donde el vector de campo magnético es (a) $\vec{\mathbf{B}} = 7{,}2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 2{,}4\hat{\mathbf{k}}$ y (b) $\vec{\mathbf{B}} = 4{,}5\hat{\mathbf{k}}$. En cada caso, halle la magnitud F de la fuerza magnética y el ángulo θ que el vector de fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ hace con el vector de campo magnético dado $\vec{\mathbf{B}}$.

Estrategia

Primero, queremos encontrar el producto vectorial $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}$, porque entonces podemos determinar la fuerza magnética utilizando $\vec{\mathbf{F}} = \zeta\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}$. La magnitud F puede hallarse mediante el uso de componentes, $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, o calculando la magnitud $\left|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}\right|$ utilizando directamente la Ecuación 2.35. En este último enfoque, tendríamos que encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Cuando tenemos $\vec{\mathbf{F}}$, el método general para encontrar el ángulo direccional θ implica el cálculo del producto escalar $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ y la sustitución en la Ecuación 2.34. Para calcular el producto vectorial podemos utilizar la Ecuación 2.40 o calcular el producto directamente, lo que sea más sencillo.

Solución

Los componentes del vector velocidad son $u_x = -5{,}0$, $u_y = -2{,}0$ y $u_z = 3{,}5$.

(a) Los componentes del vector de campo magnético son $B_x = 7{,}2$, $B_y = -1{,}0$ y $B_z = -2{,}4$. Sustituyéndolos en la Ecuación 2.41 se obtienen los componentes escalares del vector $\vec{\mathbf{F}} = \zeta\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}$:

$$\begin{cases} F_x = \zeta(u_y B_z - u_z B_y) = \zeta[(-2{,}0)(-2{,}4) - (3{,}5)(-1{,}0)] = 8{,}3\zeta \\ F_y = \zeta(u_z B_x - u_x B_z) = \zeta[(3{,}5)(7{,}2) - (-5{,}0)(-2{,}4)] = 13{,}2\zeta \\ F_z = \zeta(u_x B_y - u_y B_x) = \zeta[(-5{,}0)(-1{,}0) - (-2{,}0)(7{,}2)] = 19{,}4\zeta \end{cases}.$$

Por lo tanto, la fuerza magnética es $\vec{\mathbf{F}} = \zeta(8{,}3\hat{\mathbf{i}} + 13{,}2\hat{\mathbf{j}} + 19{,}4\hat{\mathbf{k}})$ y su magnitud es

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \zeta\sqrt{(8{,}3)^2 + (13{,}2)^2 + (19{,}4)^2} = 24{,}9\zeta.$$

Para calcular el ángulo θ, tendríamos que encontrar la magnitud del vector de campo magnético,

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(7{,}2)^2 + (-1{,}0)^2 + (-2{,}4)^2} = 7{,}6,$$

y el producto escalar $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$:

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = F_x B_x + F_y B_y + F_z B_z = (8{,}3\zeta)(7{,}2) + (13{,}2\zeta)(-1{,}0) + (19{,}4\zeta)(-2{,}4) = 0.$$

Ahora, sustituyendo en la Ecuación 2.34 obtenemos el ángulo θ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{FB} = \frac{0}{(18{,}2\zeta)(7{,}6)} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = 90°.$$

Por lo tanto, el vector de fuerza magnética es perpendicular al vector de campo magnético. (Podríamos haber ahorrado algo de tiempo si hubiéramos calculado antes el producto escalar).

(b) Dado que el vector $\vec{\mathbf{B}} = 4{,}5\hat{\mathbf{k}}$ tiene un solo componente, podemos realizar la operación de álgebra rápidamente y encontrar el producto vectorial directamente:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}} &= \zeta\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}} = \zeta(-5{,}0\hat{\mathbf{i}} - 2{,}0\hat{\mathbf{j}} + 3{,}5\hat{\mathbf{k}}) \times (4{,}5\hat{\mathbf{k}}) \\ &= \zeta[(-5{,}0)(4{,}5)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} + (-2{,}0)(4{,}5)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} + (3{,}5)(4{,}5)\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}] \\ &= \zeta[-22{,}5(-\hat{\mathbf{j}}) - 9{,}0(+\hat{\mathbf{i}}) + 0] = \zeta(-9{,}0\hat{\mathbf{i}} + 22{,}5\hat{\mathbf{j}}).\end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza magnética es

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \zeta\sqrt{(-9{,}0)^2 + (22{,}5)^2 + (0{,}0)^2} = 24{,}2\zeta.$$

Dado que el producto escalar es

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = F_x B_x + F_y B_y + F_z B_z = (-9{,}0\zeta)(0) + (22{,}5\zeta)(0) + (0)(4{,}5) = 0,$$

el vector de fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}$ es perpendicular al vector de campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$.

Importancia

Incluso sin calcular el producto escalar, podemos predecir que el vector de fuerza magnética debe ser siempre perpendicular al vector de campo magnético debido a la forma en que se construye este vector. En concreto, el vector de fuerza magnética es el producto vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \zeta\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y, por la definición del producto vectorial (vea la Figura 2.29), el vector $\vec{\mathbf{F}}$ debe ser perpendicular a ambos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 2.16

Dados dos vectores $\vec{\mathbf{A}} = -\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$, halle: (a) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, (b) $\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right|$, (c) el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y (d) el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y el vector $\vec{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$.

Para concluir esta sección, queremos destacar que el "producto punto" y el "producto cruz" son objetos matemáticos totalmente diferentes que tienen significados distintos. El producto punto es un escalar; el producto cruz es un vector. En capítulos posteriores se utilizan indistintamente los términos *producto punto* y *producto escalar*. Asimismo, los términos *producto cruz* y *producto vectorial* se utilizan indistintamente.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

ángulo direccional en un plano, un ángulo entre la dirección positiva del eje de la x y el vector, medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde el eje hasta el vector

anticonmutatividad el cambio en el orden de la operación introduce el signo menos

asociativa los términos pueden agruparse de cualquier manera

cantidad escalar cantidad que puede especificarse completamente por un solo número con una unidad física apropiada

cantidad vectorial cantidad física descrita por un vector matemático, es decir, donde se especifica tanto su magnitud como su dirección; sinónimo de vector en física

componente escalar un número que multiplica un vector unitario en un componente vectorial de un vector

componentes vectoriales componentes ortogonales de un vector; un vector es la suma vectorial de sus componentes vectoriales

conmutativa las operaciones pueden realizarse en cualquier orden

construcción geométrica de cola a cabeza construcción geométrica para dibujar el vector resultante de muchos vectores

coordenada radial distancia al origen en un sistema de coordenadas polares

coordenadas polares una coordenada radial y un ángulo

desplazamiento cambio de posición

diferencia de dos vectores suma vectorial del primer vector con el vector antiparalelo al segundo

distributiva la multiplicación se puede distribuir entre los términos de la suma

ecuación escalar ecuación en la que los lados izquierdo y derecho son números

ecuación vectorial ecuación en la que los lados izquierdo y derecho son vectores

escalar un número, sinónimo de cantidad escalar en física

forma en componentes de un vector un vector escrito como la suma vectorial de sus componentes en términos de vectores unitarios

magnitud longitud de un vector

producto cruz el resultado de la multiplicación vectorial de vectores es un vector llamado producto cruz; también llamado producto vectorial

producto escalar el resultado de la multiplicación escalar de dos vectores es un escalar llamado producto escalar; también llamado producto punto

producto punto el resultado de la multiplicación escalar de dos vectores es un escalar llamado producto punto; también llamado producto escalar

producto vectorial el resultado de la multiplicación vectorial de vectores es un vector llamado producto vectorial; también llamado producto cruz

regla de la mano derecha una regla utilizada para determinar la dirección del producto vectorial

regla del paralelogramo construcción geométrica de la suma vectorial en un plano

sistema de coordenadas polares un sistema de coordenadas ortogonales en el que la ubicación en un plano viene dada por coordenadas polares

suma vectorial resultante de la combinación de dos (o más) vectores

vector objeto matemático con magnitud y dirección

vector nulo un vector con todos sus componentes iguales a cero

vector resultante suma vectorial de dos (o más) vectores

vector unitario vector de una magnitud unitaria que especifica la dirección; no tiene unidad física

vectores antiparalelos dos vectores con direcciones que difieren en $180°$

vectores iguales dos vectores son iguales si y solo si todos sus componentes correspondientes son iguales; alternativamente, dos vectores paralelos de magnitudes iguales

vectores ortogonales dos vectores con direcciones que difieren exactamente en $90°$, sinónimo de vectores perpendiculares

vectores paralelos dos vectores con ángulos direccionales exactamente iguales

vectores unitarios de los ejes vectores unitarios que definen direcciones ortogonales en un plano o en el espacio

Ecuaciones Clave

Multiplicación por un escalar (ecuación vectorial)	$\vec{\mathbf{B}} = \alpha\vec{\mathbf{A}}$
Multiplicación por un escalar (ecuación escalar para las magnitudes)	$B = \lvert\alpha\rvert A$
Resultante de dos vectores	$\vec{\mathbf{D}}_{AD} = \vec{\mathbf{D}}_{AC} + \vec{\mathbf{D}}_{CD}$
Ley conmutativa	$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$
Ley asociativa	$(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}})$
Ley distributiva	$\alpha_1\vec{\mathbf{A}} + \alpha_2\vec{\mathbf{A}} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{\mathbf{A}}$
La forma en componentes de un vector en dos dimensiones	$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$
Componentes escalares de un vector en dos dimensiones	$\begin{cases} A_x = x_e - x_b \\ A_y = y_e - y_b \end{cases}$
Magnitud de un vector en un plano	$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
El ángulo direccional de un vector en un plano	$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$
Componentes escalares de un vector en un plano	$\begin{cases} A_x = A\cos\theta_A \\ A_y = A\,\text{sen}\,\theta_A \end{cases}$
Coordenadas polares en un plano	$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$
La forma en componentes de un vector en tres dimensiones	$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$
El componente escalar z de un vector en tres dimensiones	$A_z = z_e - z_b$
Magnitud de un vector en tres dimensiones	$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
Propiedad distributiva	$\alpha(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) = \alpha\vec{\mathbf{A}} + \alpha\vec{\mathbf{B}}$
Vector antiparalelo a $\vec{\mathbf{A}}$	$-\vec{\mathbf{A}} = -A_x\hat{\mathbf{i}} - A_y\hat{\mathbf{j}} - A_z\hat{\mathbf{k}}$

Vectores iguales

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A_x = B_x \\ A_y = B_y \\ A_z = B_z \end{cases}$$

Componentes de la resultante de N vectores

$$\begin{cases} F_{Rx} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{Nx} \\ F_{Ry} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{Ny} \\ F_{Rz} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{Nz} \end{cases}$$

Vector unitario general

$$\widehat{\mathbf{V}} = \frac{\vec{\mathbf{V}}}{V}$$

Definición del producto escalar

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\varphi$$

Propiedad conmutativa del producto escalar

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

Propiedad distributiva del producto escalar

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$$

Producto escalar en términos de componentes escalares de vectores

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Coseno del ángulo entre dos vectores

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{AB}$$

Productos punto de vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$$

Magnitud del producto vectorial (definición)

$$\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = AB\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Anticonmutatividad del producto vectorial

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

Propiedad distributiva del producto vectorial

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

Productos cruz de vectores unitarios

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = +\hat{\mathbf{k}}, \\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = +\hat{\mathbf{i}}, \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = +\hat{\mathbf{j}}. \end{cases}$$

El producto cruz en términos de componentes escalares de vectores	$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{k}}$

Resumen

2.1 Escalares y vectores

- La cantidad vectorial es cualquier cantidad que tiene magnitud y dirección, como el desplazamiento o la velocidad. Las cantidades vectoriales se representan mediante objetos matemáticos llamados vectores.
- Geométricamente, los vectores se representan mediante flechas, con el extremo marcado por una punta de flecha. La longitud del vector es su magnitud, que es un escalar positivo. En un plano, la dirección de un vector viene dada por el ángulo que forma el vector con una dirección de referencia, a menudo un ángulo con la horizontal. El ángulo direccional de un vector es un escalar.
- Dos vectores son iguales si y solo si tienen las mismas magnitudes y direcciones. Los vectores paralelos tienen los mismos ángulos direccionales, aunque pueden tener diferentes magnitudes. Los vectores antiparalelos tienen ángulos direccionales que difieren en $180°$. Los vectores ortogonales tienen ángulos direccionales que difieren en $90°$.
- Cuando un vector se multiplica por un escalar, el resultado es otro vector de longitud diferente a la del vector original. La multiplicación por un escalar positivo no cambia la dirección original; solo afecta la magnitud. La multiplicación por un escalar negativo invierte el sentido original. El vector resultante es antiparalelo al vector original. La multiplicación por un escalar es distributiva. Los vectores pueden dividirse entre escalares distintos a cero, pero no pueden dividirse entre vectores.
- Dos o más vectores pueden sumarse para formar otro vector. La suma vectorial se denomina vector resultante. Podemos sumar vectores a vectores o escalares a escalares, pero no podemos sumar escalares a vectores. La suma de vectores es conmutativa y asociativa.
- Para construir geométricamente un vector resultante de dos vectores en un plano, utilizamos la regla del paralelogramo. Para construir geométricamente un vector resultante de muchos vectores en un plano, utilizamos el método de la cola a la cabeza.

2.2 Sistemas de coordenadas y componentes de un vector

- Los vectores se describen en términos de sus componentes en un sistema de coordenadas. En dos dimensiones (en un plano), los vectores tienen dos componentes. En tres dimensiones (en el espacio), los vectores tienen tres componentes.
- Un componente vectorial de un vector es su parte en la dirección de un eje. El componente vectorial es el producto del vector unitario de un eje por su componente escalar a lo largo de dicho eje. Un vector es la resultante de sus componentes vectoriales.
- Las componentes escalares de un vector son diferencias de coordenadas, donde las coordenadas del origen se restan de las coordenadas del punto final de un vector. En un sistema rectangular, la magnitud de un vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes.
- En un plano, la dirección de un vector viene dada por el ángulo que tiene el vector con el eje de la x positiva. Este ángulo direccional se mide en sentido contrario a las agujas del reloj. El componente escalar x de un vector puede expresarse como el producto de su magnitud por el coseno de su ángulo direccional, y el componente escalar y puede expresarse como el producto de su magnitud por el seno de su ángulo de dirección.
- En un plano, hay dos sistemas de coordenadas equivalentes. El sistema de coordenadas cartesianas está definido por vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo del eje de la x y del eje de la y, respectivamente. El sistema de coordenadas polares está definido por el vector unitario radial $\hat{\mathbf{r}}$, que da la dirección desde el origen, y un vector unitario $\hat{\mathbf{t}}$, que es perpendicular (ortogonal) a la dirección radial.

2.3 Álgebra de vectores

- Los métodos analíticos del álgebra vectorial nos permiten encontrar las resultantes de las sumas o diferencias de vectores sin tener que dibujarlas. Los métodos analíticos de suma de

vectores son exactos, al contrario que los métodos gráficos, que son aproximados.
- Los métodos analíticos del álgebra vectorial se utilizan habitualmente en mecánica, electricidad y magnetismo. Son importantes herramientas matemáticas de la física.

2.4 Productos de los vectores

- Hay dos tipos de multiplicación para los vectores. Un tipo de multiplicación es el producto escalar, también conocido como producto punto. El otro tipo de multiplicación es el producto vectorial, también conocido como producto cruz. El producto escalar de vectores es un número (escalar). El producto vectorial de vectores es un vector.
- Ambos tipos de multiplicación tienen la propiedad distributiva, pero solo el producto escalar tiene la propiedad conmutativa. El producto vectorial tiene la anticonmutatividad, lo que significa que, cuando cambiamos el orden en que se multiplican dos vectores, el resultado adquiere un signo menos.
- El producto escalar de dos vectores se obtiene multiplicando sus magnitudes por el coseno del ángulo entre ellos. El producto escalar de vectores ortogonales es igual a cero; el producto escalar de vectores antiparalelos es negativo.
- El producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a ambos. Su magnitud se obtiene multiplicando sus magnitudes por el seno del ángulo entre ellas. La dirección del producto vectorial se puede determinar mediante la regla de la mano derecha. El producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos es igual a cero. La magnitud del producto vectorial es mayor para los vectores ortogonales.
- El producto escalar de vectores se utiliza para encontrar ángulos entre vectores y en las definiciones de magnitudes físicas escalares derivadas, como el trabajo o la energía.
- El producto cruz de vectores se utiliza en las definiciones de cantidades físicas vectoriales derivadas, como el torque o la fuerza magnética, y en la descripción de rotaciones.

Preguntas Conceptuales

2.1 Escalares y vectores

1. El pronóstico meteorológico indica que la temperatura será $-5\ ^\circ\text{C}$ al día siguiente. ¿Es la temperatura un vector o una cantidad escalar? Explique.

2. ¿Cuál de los siguientes es un vector: la altura de una persona, la altitud del monte Everest, la velocidad de una mosca, la edad de la Tierra, el punto de ebullición del agua, el costo de un libro, la población de la Tierra o la aceleración de la gravedad?

3. Dé un ejemplo concreto de un vector; indique su magnitud, unidades y dirección.

4. ¿Qué tienen en común los vectores y los escalares? ¿En qué se diferencian?

5. Supongamos que suma dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. ¿Qué dirección relativa entre ellos produce la resultante de mayor magnitud? ¿Cuál es la magnitud máxima? ¿Qué dirección relativa entre ellos produce la resultante de menor magnitud? ¿Cuál es la magnitud mínima?

6. ¿Es posible sumar una cantidad escalar a una cantidad vectorial?

7. ¿Es posible que dos vectores de distinta magnitud sumen cero? ¿Es posible que tres vectores de diferentes magnitudes sumen cero? Explique.

8. ¿El cuentakilómetros de un automóvil indica una cantidad escalar o vectorial?

9. Cuando un corredor de 10.000 metros que compite en una pista de 400 metros cruza la línea de meta, ¿cuál es el desplazamiento neto del corredor? ¿Este desplazamiento puede ser cero? Explique.

10. Un vector tiene magnitud cero. ¿Es necesario especificar su dirección? Explique.

11. ¿Puede la magnitud de un vector ser negativa?

12. ¿Puede la magnitud del desplazamiento de una partícula ser mayor que la distancia recorrida?

13. Si dos vectores son iguales, ¿qué puede decir de sus componentes? ¿Qué puede decir sobre sus magnitudes? ¿Qué puede decir de sus direcciones?

14. Si tres vectores suman cero, ¿qué condición geométrica cumplen?

2.2 Sistemas de coordenadas y componentes de un vector

15. Dé un ejemplo de un vector distinto de cero que tenga un componente de cero.

16. Explique por qué un vector no puede tener un componente mayor que su propia magnitud.

17. Si dos vectores son iguales, ¿qué puede decir de sus componentes?

18. Si los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son ortogonales, ¿cuál es el componente de $\vec{\mathbf{B}}$ a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$? ¿Cuál es el componente de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$?

19. Si uno de los dos componentes de un vector es distinto de cero, ¿puede ser cero la magnitud del otro componente de este vector?

20. Si dos vectores tienen la misma magnitud, ¿sus componentes tienen que ser iguales?

2.4 Productos de los vectores

21. ¿Cuál es el error en las siguientes expresiones? ¿Cómo puede corregirlas? (a) $C = \vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}}$, (b) $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}}$, (c) $C = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, (d) $C = A\vec{\mathbf{B}}$, (e) $C + 2\vec{\mathbf{A}} = B$, (f) $\vec{\mathbf{C}} = A \times \vec{\mathbf{B}}$, (g) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, (h) $\vec{\mathbf{C}} = 2\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, (i) $C = \vec{\mathbf{A}}/\vec{\mathbf{B}}$, y (j) $C = \vec{\mathbf{A}}/B$.

22. Si el producto cruz de dos vectores es igual a cero, ¿qué se puede decir de sus direcciones?

23. Si el producto punto de dos vectores es igual a cero, ¿qué se puede decir de sus direcciones?

24. ¿Cuál es el producto punto de un vector con el producto cruz que este vector tiene con otro vector?

Problemas

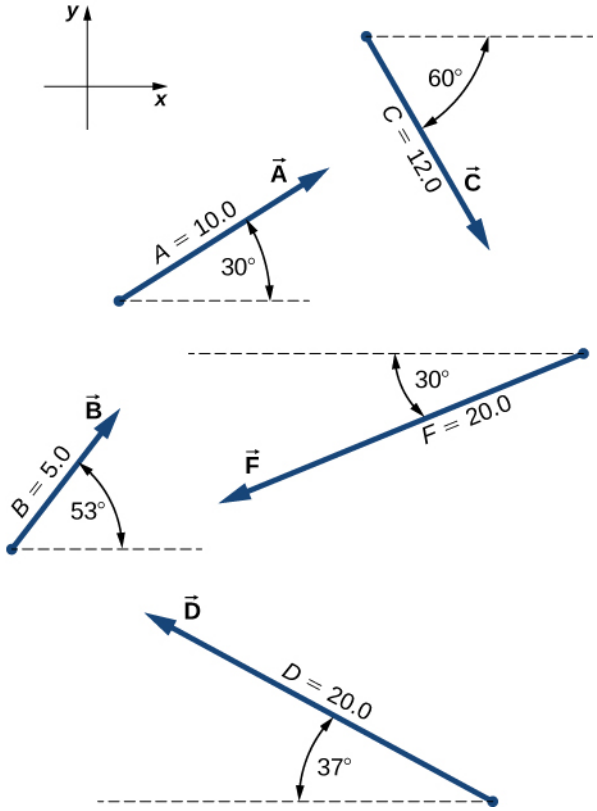
2.1 Escalares y vectores

25. Un buceador realiza un lento descenso a las profundidades del océano. Su posición vertical con respecto a un barco en la superficie cambia varias veces. Hace la primera parada a 9,0 m del barco, pero tiene un problema para igualar la presión, por lo que asciende 3,0 m y luego sigue descendiendo otros 12,0 m hasta la segunda parada. Desde allí, asciende 4 m y luego desciende 18,0 m, vuelve a ascender 7 m y desciende de nuevo 24,0 m, donde hace una parada, a la espera de su compañero. Asumiendo la dirección positiva arriba hacia la superficie, exprese su vector de desplazamiento vertical neto en términos del vector unitario. ¿Cuál es su distancia al barco?

26. En un juego de tira y afloja en un campus, 15 estudiantes halan de una cuerda por ambos extremos en un esfuerzo por desplazar el nudo central hacia un lado u otro. Dos estudiantes halan con una fuerza de 196 N cada uno hacia la derecha, cuatro halan con una fuerza de 98 N cada uno hacia la izquierda, cinco halan con una fuerza de 62 N cada uno hacia la izquierda, tres halan con una fuerza de 150 N cada uno hacia la derecha y un estudiante hala con una fuerza de 250 N hacia la izquierda. Suponiendo la dirección positiva hacia la derecha, exprese la tracción neta sobre el nudo en términos del vector unitario. ¿Qué tamaño tiene la tracción neta en el nudo? ¿En qué dirección?

27. Supongamos que camina 18,0 m en línea recta hacia el oeste y luego 25,0 m en línea recta hacia el norte. ¿A qué distancia se encuentra de su punto de partida y cuál es la dirección de la brújula de una línea que conecta su punto de partida con su posición final? Utilice un método gráfico.

28. Para los vectores dados en la siguiente figura, utilice un método gráfico para encontrar las siguientes resultantes: (a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, (b) $\vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{B}}$, (c) $\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{F}}$, (d) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, (e) $\vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{F}}$, (f) $\vec{\mathbf{A}} + 2\vec{\mathbf{F}}$, (g) $\vec{\mathbf{C}} - 2\vec{\mathbf{D}} + 3\vec{\mathbf{F}}$; y (h) $\vec{\mathbf{A}} - 4\vec{\mathbf{D}} + 2\vec{\mathbf{F}}$.



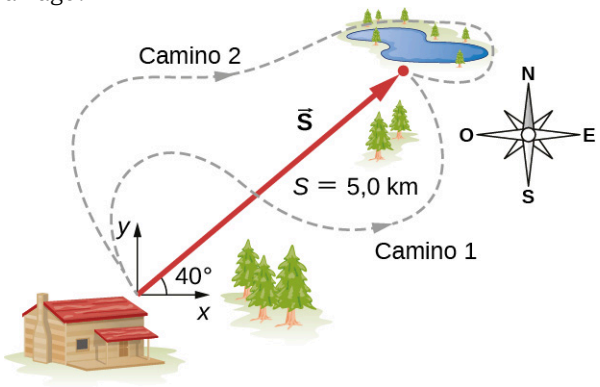
29. Un repartidor parte de la oficina de correos, conduce 40 km hacia el norte, luego 20 km hacia el oeste, después 60 km hacia el noreste y finalmente 50 km hacia el norte para realizar una parada y almorzar. Utilice un método gráfico para encontrar su vector de desplazamiento neto.

30. Un perro aventurero se aleja de su casa, corre tres cuadras hacia el este, dos hacia el norte, una hacia el este, una hacia el norte y dos hacia el oeste. Suponiendo que cada cuadra es de unos 100 m, ¿a qué distancia de casa y en qué dirección está el perro? Utilice un método gráfico.

31. En un intento por escapar de una isla desierta, un náufrago construye una balsa y zarpa al mar. El viento cambia mucho durante el día y lo arrastra en las siguientes direcciones: 2,50 km y 45,0° al norte del oeste, luego 4,70 km y 60,0° al sur del este, luego 1,30 km y 25,0° al sur del oeste, luego 5,10 km en línea recta hacia el este, luego 1,70 km y 5,00° al este del norte, luego 7,20 km y 55,0° al sur del oeste, y finalmente 2,80 km y 10,0° al norte del este. Utilice un método gráfico para encontrar la posición final del náufrago con respecto a la isla.

32. Una avioneta vuela 40,0 km en dirección de 60° al norte del este y luego vuela 30,0 km en dirección de 15° al norte del este. Utilice un método gráfico para encontrar la distancia total que recorre la avioneta desde el punto de partida y la dirección del recorrido hasta la posición final.

33. Un trampero recorre una distancia en línea recta de 5,0 km desde su cabaña hasta el lago, como se muestra en la siguiente figura. Utilice un método gráfico (la regla del paralelogramo) para determinar el desplazamiento del trampero directamente hacia el este y el desplazamiento directamente hacia el norte que suman su vector de desplazamiento resultante. Si el trampero caminara solo en dirección este y norte, en zigzag hasta el lago, ¿cuántos kilómetros tendría que recorrer para llegar al lago?



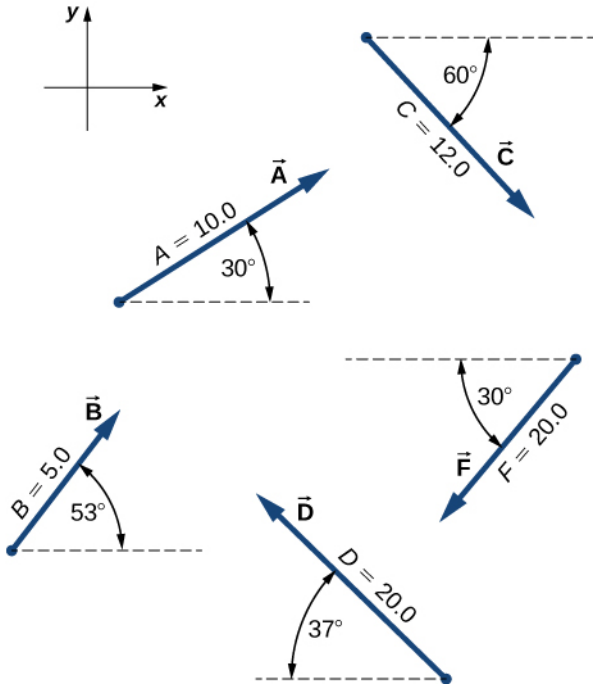
34. Una topógrafa mide la distancia a través de un río que fluye en línea recta hacia el norte por el siguiente método. Partiendo directamente de un árbol en la orilla opuesta, la topógrafa camina 100 m a lo largo del río para establecer un punto de partida. Entonces mira hacia el árbol y lee que el ángulo desde el punto de partida hasta el árbol es 35°. ¿Cuál es el ancho del río?

35. Un peatón camina 6,0 km hacia el este y luego 13,0 km hacia el norte. Utilice un método gráfico para encontrar el desplazamiento resultante del peatón y la dirección geográfica.

36. Las magnitudes de dos vectores de desplazamiento son $A = 20$ m y $B = 6$ m. ¿Cuáles son los valores mayores y menores de la magnitud de la resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$?

2.2 Sistemas de coordenadas y componentes de un vector

37. Suponiendo que el eje de la x + es horizontal y apunta a la derecha, resuelva los vectores dados en la siguiente figura a sus componentes escalares y expréselos en forma de componentes vectoriales.



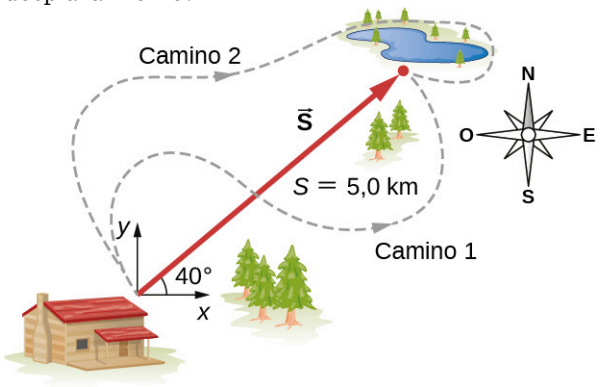
38. Supongamos que camina 18,0 m en línea recta hacia el oeste y luego 25,0 m en línea recta hacia el norte. ¿A qué distancia se encuentra de su punto de partida? ¿Cuál es su vector de desplazamiento? ¿Cuál es la dirección de su desplazamiento? Supongamos que el eje de la x + está al este.

39. Conduce 7,50 km en línea recta en una dirección de 15° al este del norte. (a) Calcule las distancias que tendría que recorrer en línea recta hacia el este y luego en línea recta hacia el norte para llegar al mismo punto. (b) Demuestre que sigue llegando al mismo punto si los tramos

este y norte se invierten de orden. Supongamos que el eje de la $x+$ está al este.

40. Un trineo es arrastrado por dos caballos en un terreno llano. La fuerza neta sobre el trineo puede expresarse en el sistema de coordenadas cartesianas como el vector $\vec{\mathbf{F}} = (-2980{,}0\hat{\mathbf{i}} + 8200{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{N}$, donde $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ indican direcciones hacia el este y el norte, respectivamente. Halle la magnitud y la dirección de la tracción.

41. Una trampera recorre una distancia en línea recta de 5,0 km desde su cabaña hasta el lago, como se muestra en la siguiente figura. Determine las componentes este y norte de su vector de desplazamiento. ¿Cuántos kilómetros más tendría que caminar si recorriera por los componentes de los desplazamientos? ¿Cuál es su vector de desplazamiento?



42. Las coordenadas polares de un punto son $4\pi/3$ y 5,50 m. ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

43. Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares $P_1\,(2{,}500\text{ m}, \pi/6)$ y $P_2\,(3{,}800\text{ m}, 2\pi/3)$. Determine sus coordenadas cartesianas y la distancia entre estas en el sistema de coordenadas cartesianas. Redondee la distancia al centímetro más cercano.

44. Un camaleón reposa tranquilamente en el mosquitero de una veranda, esperando que pase un insecto. Supongamos que el origen de un sistema de coordenadas cartesianas está en la esquina inferior izquierda de la veranda y la dirección horizontal hacia la derecha es la dirección de la $x+$. Si sus coordenadas son (2,000 m, 1,000 m), (a) ¿a qué distancia está de la esquina del biombo? (b) ¿Cuál es su ubicación en coordenadas polares?

45. Dos puntos del plano cartesiano son A (2,00 m, -4,00 m) y B (-3,00 m, 3,00 m). Calcule la distancia entre ellos y sus coordenadas polares.

46. Una mosca entra por una ventana abierta y recorre la habitación. En un sistema de coordenadas cartesianas con tres ejes a lo largo de tres bordes de la habitación, la mosca cambia su posición del punto b (4,0 m, 1,5 m, 2,5 m) al punto e (1,0 m, 4,5 m, 0,5 m). Halle los componentes escalares del vector de desplazamiento de la mosca y exprese su vector de desplazamiento en forma de componente vectorial. ¿Cuál es su magnitud?

2.3 Álgebra de vectores

47. Para los vectores $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{A}} = -3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$, calcule (a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y su magnitud y ángulo direccional, y (b) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ y su magnitud y ángulo direccional.

48. Una partícula sufre tres desplazamientos consecutivos dados por los vectores $\vec{\mathbf{D}}_1 = (3{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}} - 2{,}0\hat{\mathbf{k}})\text{mm}$, $\vec{\mathbf{D}}_2 = (1{,}0\hat{\mathbf{i}} - 7{,}0\hat{\mathbf{j}} + 4{,}0\hat{\mathbf{k}})\text{mm}$ y $\vec{\mathbf{D}}_3 = (-7{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + 1{,}0\hat{\mathbf{k}})\text{mm}$. (a) Halle el vector de desplazamiento resultante de la partícula. (b) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento resultante? (c) Si todos los desplazamientos fueran a lo largo de una línea, ¿qué distancia recorrería la partícula?

49. Dados dos vectores de desplazamiento $\vec{\mathbf{A}} = (3{,}00\hat{\mathbf{i}} - 4{,}00\hat{\mathbf{j}} + 4{,}00\hat{\mathbf{k}})\text{m}$ y $\vec{\mathbf{B}} = (2{,}00\hat{\mathbf{i}} + 3{,}00\hat{\mathbf{j}} - 7{,}00\hat{\mathbf{k}})\text{m}$, halle los desplazamientos y sus magnitudes para (a) $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y (b) $\vec{\mathbf{D}} = 2\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$.

50. Una avioneta vuela 40,0 km en una dirección de 60° al norte del este y luego vuela 30,0 km en una dirección de 15° al norte del este. Utilice el método analítico para encontrar la distancia total que recorre la avioneta desde el punto de partida, y la dirección geográfica de su vector de desplazamiento. ¿Cuál es su vector de desplazamiento?

51. En un intento por escapar de una isla desierta, un náufrago construye una balsa y zarpa al mar. El viento cambia mucho durante el día y lo arrastra por las siguientes líneas rectas: 2,50 km y 45,0° al norte del oeste, luego 4,70 km y 60,0° al sur del este, luego 1,30 km y 25,0° al sur del oeste, luego 5,10 km hacia el este, luego 1,70 km y 5,00° al este del norte, luego 7,20 km y 55,0° al sur del oeste, y finalmente 2,80 km y 10,0° al norte del este. Utilice el método analítico para encontrar el vector resultante de todos sus vectores de desplazamiento. ¿Cuál es su magnitud y dirección?

52. Suponiendo que el eje de la $x+$ es horizontal hacia

la derecha para los vectores dados en la siguiente figura, utilice el método analítico para encontrar las siguientes resultantes: (a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, (b) $\vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{B}}$, (c) $\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{F}}$, (d) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, (e) $\vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{F}}$, (f) $\vec{\mathbf{A}} + 2\vec{\mathbf{F}}$, (g) $\vec{\mathbf{C}} - 2\vec{\mathbf{D}} + 3\vec{\mathbf{F}}$, y (h) $\vec{\mathbf{A}} - 4\vec{\mathbf{D}} + 2\vec{\mathbf{F}}$.

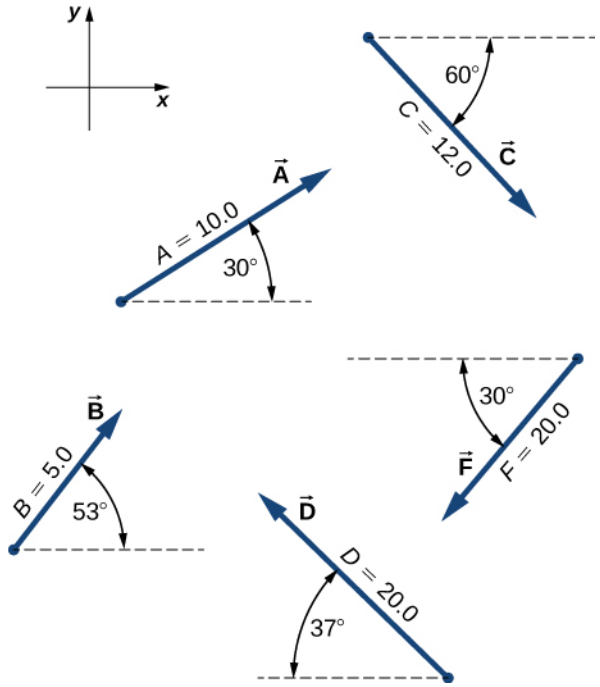


FIGURA 2.33

53. Dados los vectores de la figura anterior, halle el vector $\vec{\mathbf{R}}$ que resuelve las ecuaciones (a) $\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}$ y (b) $\vec{\mathbf{C}} - 2\vec{\mathbf{D}} + 5\vec{\mathbf{R}} = 3\vec{\mathbf{F}}$. Supongamos que el eje de la $x+$ es horizontal hacia la derecha.

54. Un repartidor parte de la oficina de correos, conduce 40 km hacia el norte, luego 20 km hacia el oeste, después 60 km hacia el noreste y finalmente 50 km hacia el norte para realizar una parada y almorzar. Utilice el método analítico para determinar lo siguiente: (a) Halle su vector de desplazamiento neto. (b) ¿A qué distancia está el restaurante de la oficina de correos? (c) Si vuelve directamente del restaurante a la oficina de correos, ¿cuál es su vector de desplazamiento en el viaje de regreso? (d) ¿Cuál es el rumbo de su brújula en el viaje de regreso? Supongamos que el eje de la $x+$ está al este.

55. Un perro aventurero se aleja de su casa, corre tres cuadras hacia el este, dos hacia el norte y una hacia el este, una hacia el norte y dos hacia el oeste. Suponiendo que cada cuadra tiene una longitud de unos 100 m, utilice el método analítico para encontrar el vector de desplazamiento neto del perro, su magnitud y su dirección. Supongamos que el eje de la $x+$ está al este. ¿Cómo se vería afectada su respuesta si cada cuadra tuviera unos 100 m?

56. Si $\vec{\mathbf{D}} = (6{,}00\hat{\mathbf{i}} - 8{,}00\hat{\mathbf{j}})$m, $\vec{\mathbf{B}} = (-8{,}00\hat{\mathbf{i}} + 3{,}00\hat{\mathbf{j}})$m y $\vec{\mathbf{A}} = (26{,}0\hat{\mathbf{i}} + 19{,}0\hat{\mathbf{j}})$m, halle las incógnitas en las constantes a y b tales que $a\vec{\mathbf{D}} + b\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{0}}$.

57. Dado el vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{D}} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}})$m, encontrar el vector de desplazamiento $\vec{\mathbf{R}}$ para que $\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{R}} = -4D\hat{\mathbf{j}}$.

58. Halle el vector unitario de dirección para las siguientes cantidades vectoriales: (a) fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (3{,}0\hat{\mathbf{i}} - 2{,}0\hat{\mathbf{j}})$N, (b) desplazamiento $\vec{\mathbf{D}} = (-3{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}})$m, y (c) velocidad $\vec{\mathbf{v}} = (-5{,}00\hat{\mathbf{i}} + 4{,}00\hat{\mathbf{j}})$m/s.

59. En un punto del espacio, la dirección del vector de campo eléctrico viene dada en el sistema cartesiano por el vector unitario $\hat{\mathbf{E}} = 1/\sqrt{5}\hat{\mathbf{i}} - 2/\sqrt{5}\hat{\mathbf{j}}$. Si la magnitud del vector de campo eléctrico es E = 400,0 V/m, ¿cuáles son los componentes escalares E_x, E_y y E_z del vector de campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en este punto? Cuál es el ángulo direccional θ_E del vector de campo eléctrico en este punto?

60. Los dos remolcadores que se muestran en la siguiente figura halan una barcaza. Un remolcador hala la barcaza con una fuerza de magnitud de 4.000 unidades de fuerza a 15° por encima de la línea AB (ver la figura) y el otro remolcador, con una fuerza de magnitud de 5.000 unidades de fuerza a 12° por debajo de la línea AB. Resuelva las fuerzas de tracción a sus componentes escalares y halle los componentes de la fuerza resultante que hala la barcaza. ¿Cuál es la magnitud de la tracción resultante? ¿Cuál es su dirección con respecto a la línea AB?

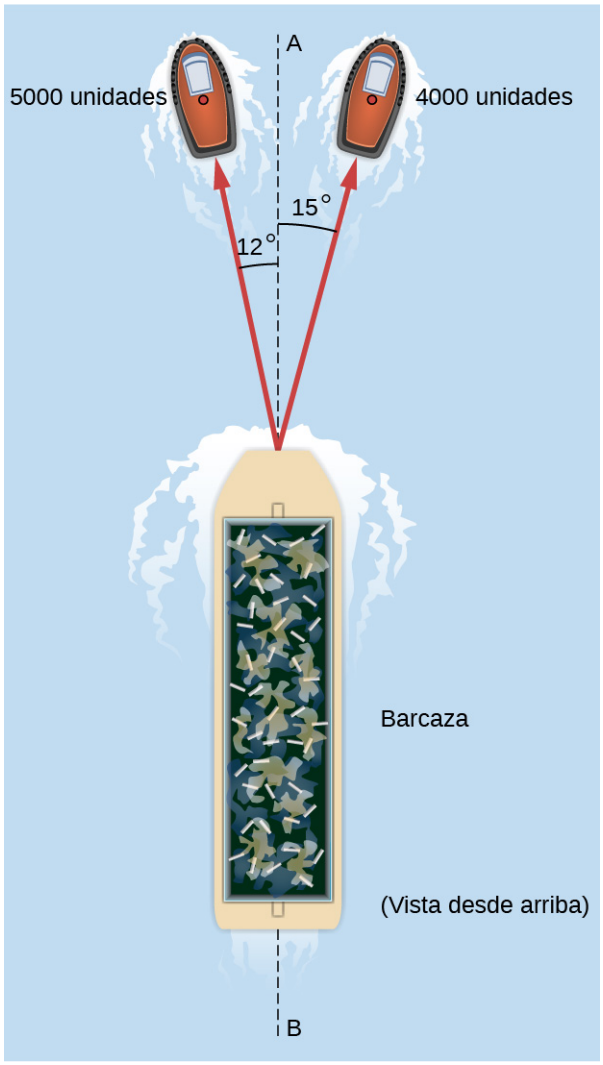
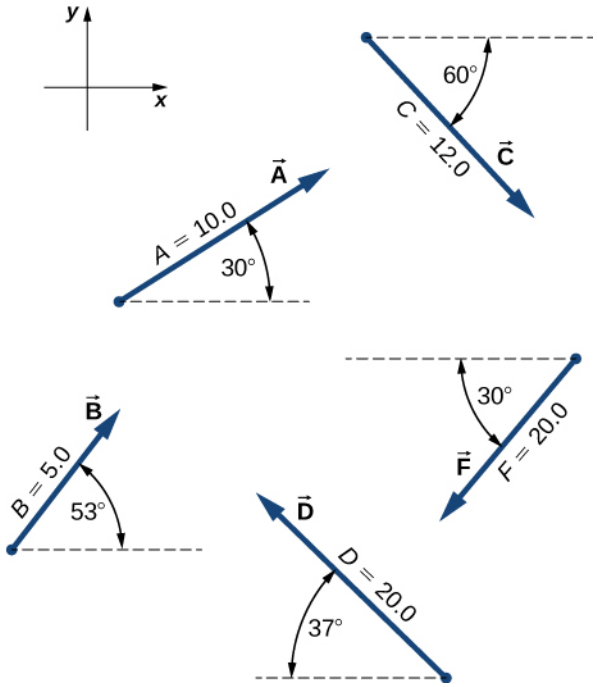


FIGURA 2.34

61. En la torre de control de un aeropuerto regional, un controlador aéreo supervisa dos aviones mientras sus posiciones cambian con respecto a la torre de control. Un avión es un Boeing 747 de carga y el otro es un Douglas DC-3. El Boeing se encuentra a una altitud de 2.500 m, sube a 10° sobre la horizontal, y se mueve 30° al norte del oeste. El DC-3 está a una altitud de 3.000 m, sube a 5° sobre la horizontal, y vuela directamente hacia el oeste. (a) Halle los vectores de posición de los aviones con respecto a la torre de control. (b) ¿Cuál es la distancia entre los aviones en el momento en que el controlador aéreo toma nota de sus posiciones?

2.4 Productos de los vectores

62. Suponiendo que el eje de la $x+$ es horizontal hacia la derecha para los vectores de la siguiente figura, halle los siguientes productos escalares: (a) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$, (b) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{F}}$, (c) $\vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$, (d) $\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{F}} + 2\vec{\mathbf{C}})$, (e) $\hat{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, (f) $\hat{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, (g) $(3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) \cdot \vec{\mathbf{B}}$, y (h) $\widehat{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.



63. Suponiendo que el eje de la $x+$ es horizontal hacia la derecha para los vectores de la figura anterior, halle: (a) el componente del vector $\vec{\mathbf{A}}$ junto al vector $\vec{\mathbf{C}}$, (b) el componente del vector $\vec{\mathbf{C}}$ junto al vector $\vec{\mathbf{A}}$, (c) el componente del vector $\hat{\mathbf{i}}$ junto al vector $\vec{\mathbf{F}}$, y (d) el componente del vector $\vec{\mathbf{F}}$ junto al vector $\hat{\mathbf{i}}$.

64. Halle el ángulo entre vectores para (a) $\vec{\mathbf{D}} = (-3{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}})$m y $\vec{\mathbf{A}} = (-3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}})$m y (b) $\vec{\mathbf{D}} = (2{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$m y $\vec{\mathbf{B}} = (-2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 2{,}0\hat{\mathbf{k}})$m.

65. Halle los ángulos que el vector $\vec{\mathbf{D}} = (2{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$m hace con los ejes de la x, la y y la z.

66. Demuestre que el vector de fuerza $\vec{\mathbf{D}} = (2{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$N es ortogonal al vector de fuerza $\vec{\mathbf{G}} = (3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + 10{,}0\hat{\mathbf{k}})$N.

67. Suponiendo que el eje de la $x+$ es horizontal hacia la derecha para los vectores de la figura anterior, halle los siguientes productos vectoriales: (a) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$, (b) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{F}}$, (c) $\vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{C}}$, (d) $\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{F}} + 2\vec{\mathbf{C}})$, (e) $\hat{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{B}}$, (f) $\hat{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{B}}$, (g) $(3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) \times \vec{\mathbf{B}}$, y (h) $\widehat{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

68. Halle el producto cruz $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$ para (a) $\vec{\mathbf{A}} = 2{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{C}} = 3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + 10{,}0\hat{\mathbf{k}}$, (b) $\vec{\mathbf{A}} = 3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + 10{,}0\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{C}} = 2{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, (c) $\vec{\mathbf{A}} = -3{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}}$ y

$\vec{\mathbf{C}} = -3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}}$, y (d) $\vec{\mathbf{C}} = -2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 2{,}0\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{A}} = -9{,}0\hat{\mathbf{j}}$.

69. Para los vectores de la figura anterior, halle: (a) $(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{D}}$, (b) $(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot (\vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{B}})$, y (c) $(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{F}})(\vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{B}})$.

70. (a) Si $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{F}}$, ¿podemos concluir que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$? (b) Si $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{F}}$, ¿podemos concluir que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$? (c) Si $F\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}F$, ¿podemos concluir que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$? ¿Por qué sí por qué no?

Problemas Adicionales

71. Usted vuela 32,0 km en línea recta en el aire quieto en la dirección 35,0° al sur del oeste. (a) Calcule las distancias que tendría que volar hacia el sur y luego hacia el oeste para llegar al mismo punto. (b) Calcule las distancias que tendría que volar primero en una dirección de 45,0° al sur del oeste y luego en dirección de 45,0° al oeste del norte. Observe que se trata de los componentes del desplazamiento a lo largo de un conjunto diferente de ejes, es decir, el que rota a 45° con respecto a los ejes en (a).

72. Las coordenadas rectangulares de un punto vienen dadas por (2, y) y sus coordenadas polares por (r, $\pi/6$). Halle y y r.

73. Si las coordenadas polares de un punto son (r, φ) y sus coordenadas rectangulares son (x, y), determine las coordenadas polares de los siguientes puntos: (a) (-x, y), (b) (-2x, -2y), y (c) (3x, -3y).

74. Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen magnitudes idénticas de 5,0 unidades. Halle el ángulo entre ellos si $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = 5\sqrt{2}\hat{\mathbf{j}}$.

75. Partiendo de la isla de Moi, en un archipiélago desconocido, un barco pesquero realiza un viaje de ida y vuelta con dos paradas en las islas de Noi y Poi. Navega desde Moi durante 4,76 millas náuticas (nautical mile, nmi) en una dirección de 37° al norte del este a Noi. Desde Noi, navega a 69° al oeste del norte hasta Poi. En su regreso desde Poi, navega a 28° al este del sur. ¿Qué distancia navega el barco entre Noi y Poi? ¿Qué distancia navega entre Moi y Poi? Exprese su respuesta tanto en millas náuticas como en kilómetros. Nota: 1 nmi = 1852 m.

76. Un controlador aéreo observa dos señales de dos aviones en el monitor del radar. Un avión se encuentra a 800 m de altura y a una distancia horizontal de 19,2 km de la torre en una dirección de 25° al sur del oeste. El segundo avión está a 1.100 m de altura y su distancia horizontal es de 17,6 km y 20° al sur del oeste. ¿Cuál es la distancia entre estos aviones?

77. Demuestre que cuando $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$, luego $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\varphi$, donde φ es el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

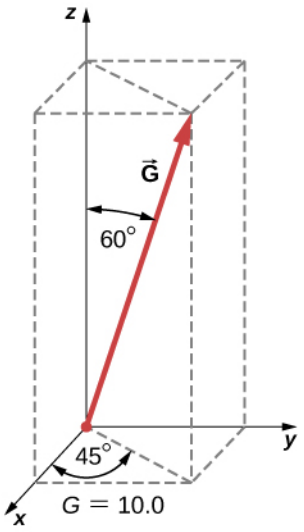
78. Cuatro vectores de fuerza tienen cada uno la misma magnitud *f*. ¿Cuál es la mayor magnitud que puede tener el vector de fuerza resultante cuando se suman estas fuerzas? ¿Cuál es la menor magnitud de la resultante? Haga un gráfico de ambas situaciones.

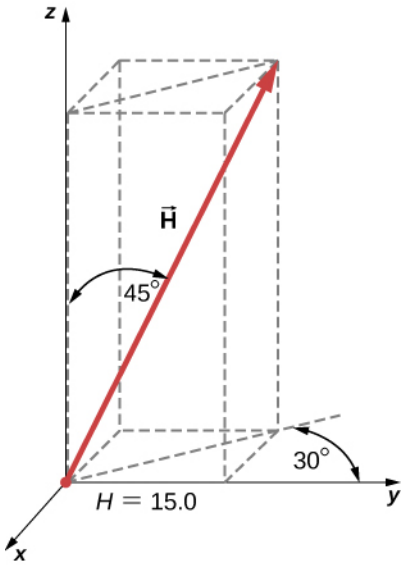
79. Un patinador se desliza por un recorrido circular de radio 5,00 m en la dirección de las agujas del reloj. Cuando da la vuelta a la mitad del círculo, partiendo del punto oeste, halle: (a) la magnitud de su vector de desplazamiento y (b) la distancia que realmente ha patinado. (c) ¿Cuál es la magnitud de su vector de desplazamiento cuando da la vuelta completa al círculo y vuelve al punto oeste?

80. Un perro rebelde pasea sujetado a una correa por su dueño. En un momento dado, el perro encuentra un olor interesante en algún punto del terreno y quiere explorarlo en detalle, pero el dueño se impacienta y hala de la correa con fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (98{,}0\hat{\mathbf{i}} + 132{,}0\hat{\mathbf{j}} + 32{,}0\hat{\mathbf{k}})$N a lo largo de la correa. (a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de tracción? (b) ¿Qué ángulo forma la correa con la vertical?

81. Si el vector de velocidad de un oso polar es $\vec{\mathbf{u}} = (-18{,}0\hat{\mathbf{i}} - 13{,}0\hat{\mathbf{j}})$km/h, ¿a qué velocidad y en qué dirección geográfica se dirige? Aquí, $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son direcciones hacia el este y el norte geográficos, respectivamente.

82. Halle los componentes escalares de los vectores tridimensionales $\vec{\mathbf{G}}$ y $\vec{\mathbf{H}}$ en la siguiente figura y escriba los vectores en forma de componentes vectoriales en términos de los vectores unitarios de los ejes.



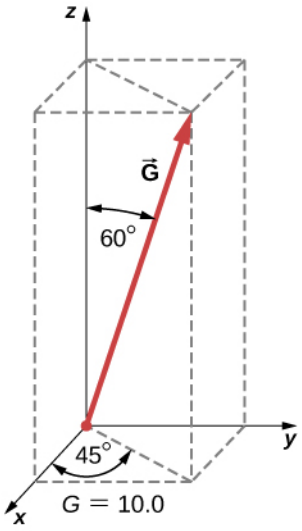


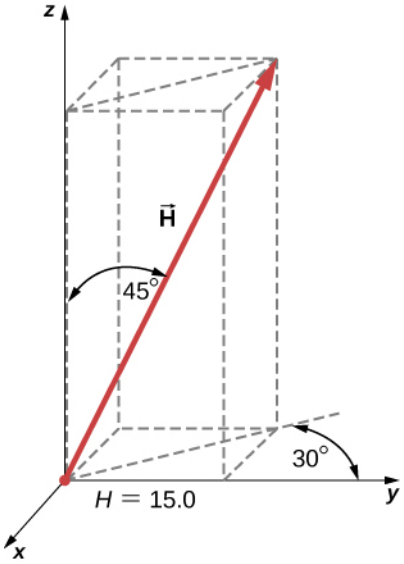
83. Una buceadora explora un arrecife poco profundo en la costa de Belice. Inicialmente nada 90,0 m hacia el norte, hace un giro hacia el este y continúa durante 200,0 m, luego sigue a un gran mero durante 80,0 m en la dirección de 30° al norte del este. Mientras tanto, una corriente local la desplaza 150,0 m hacia el sur. Suponiendo que la corriente ya no está presente, ¿en qué dirección y a qué distancia debería nadar ahora para volver al punto de partida?

84. Un vector de fuerza $\vec{\mathbf{A}}$ tiene componentes *x* y *y*, respectivamente, de -8,80 unidades de fuerza y 15,00 unidades de fuerza. Los componentes *x* y *y* del vector de fuerza $\vec{\mathbf{B}}$ son, respectivamente, 13,20 unidades de fuerza y -6,60 unidades de fuerza. Halle los componentes del vector de fuerza $\vec{\mathbf{C}}$ que satisfacen la ecuación vectorial $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} + 3\vec{\mathbf{C}} = 0$.

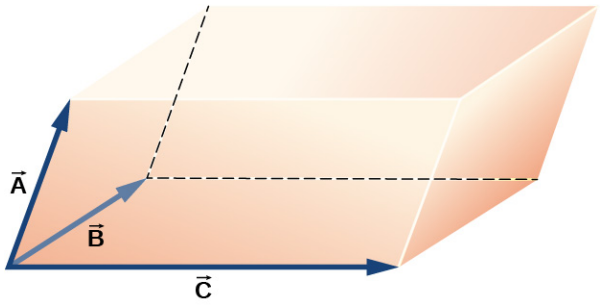
85. Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son dos vectores ortogonales en el plano *xy* y tienen magnitudes idénticas. Si $\vec{\mathbf{A}} = 3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}}$, halle $\vec{\mathbf{B}}$.

86. Para los vectores tridimensionales de la siguiente figura, halle: (a) $\vec{\mathbf{G}} \times \vec{\mathbf{H}}$, (b) $\left|\vec{\mathbf{G}} \times \vec{\mathbf{H}}\right|$, y (c) $\vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{H}}$.





87. Demuestre que $(\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}) \cdot \vec{\mathbf{A}}$ es el volumen del paralelepípedo, cuyas aristas están formadas por los tres vectores de la siguiente figura.

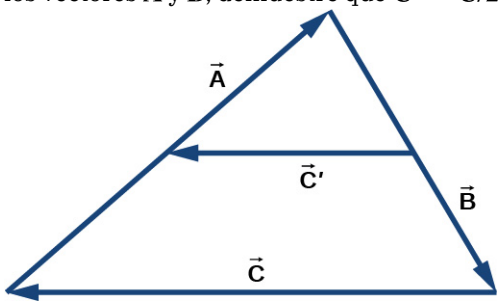


Problemas De Desafío

88. El vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene una longitud de 5,0 cm y un vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una longitud de 4,0 cm. Calcule el ángulo entre estos dos vectores cuando $\left|\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}\right| = 3{,}0\text{ cm}$ y $\left|\vec{\mathbf{A}}-\vec{\mathbf{B}}\right| = 3{,}0\text{ cm}$.

89. ¿Cuál es el componente del vector de fuerza $\vec{\mathbf{G}} = (3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + 10{,}0\hat{\mathbf{k}})\text{N}$ junto al vector de fuerza $\vec{\mathbf{H}} = (1{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{N}$?

90. La siguiente figura muestra un triángulo formado por los tres vectores $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$. Si el vector $\vec{\mathbf{C}}'$ se dibuja entre los puntos medios de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, demuestre que $\vec{\mathbf{C}}' = \vec{\mathbf{C}}/2$.



91. Las distancias entre los puntos de un plano no cambian cuando se rota un sistema de coordenadas. En otras palabras, la magnitud de un vector es *invariante* bajo rotaciones del sistema de coordenadas. Supongamos que un sistema de coordenadas S rota alrededor de su origen por un ángulo φ para convertirse en un nuevo sistema de coordenadas S', como se muestra en la siguiente figura. Un punto en un plano tiene coordenadas (x, y) en S y coordenadas (x', y') en S'.

(a) Demuestre que, durante la transformación de rotación, las coordenadas en S' se expresan en términos de las coordenadas en S mediante las siguientes relaciones:

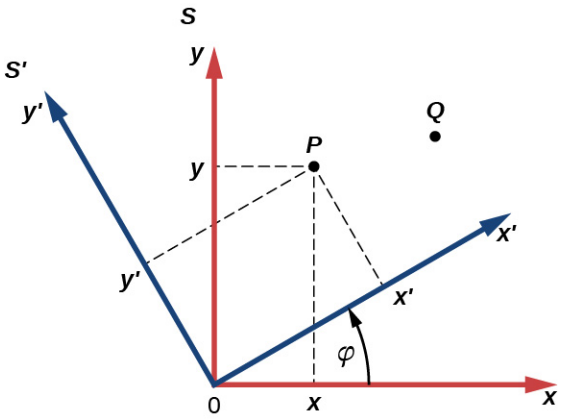
$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\,\varphi \\ y' = -x\,\text{sen}\,\varphi + y\cos\varphi \end{cases}.$$

(b) Demuestre que la distancia del punto P al origen es invariante bajo rotaciones del sistema de coordenadas. Aquí, tiene que mostrar que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

(c) Demuestre que la distancia entre los puntos P y Q es invariante bajo rotaciones del sistema de coordenadas. Aquí, tiene que mostrar que

$$\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(x'_P - x'_Q)^2 + (y'_P - y'_Q)^2}.$$



CAPÍTULO 3
Movimiento rectilíneo



Figura 3.1 Un tren de levitación magnética (Magnetic Levitation, maglev) de la serie L0 de JR Central realiza una prueba en la pista de pruebas de Yamanashi. El movimiento del tren de maglev puede describirse mediante la cinemática, que es el tema de este capítulo (créditos: modificación del trabajo de "Maryland GovPics"/Flickr).

ESQUEMA DEL CAPITULO

3.1 Posición, desplazamiento y velocidad media
3.2 Velocidad y rapidez instantáneas
3.3 Aceleración media e instantánea
3.4 Movimiento con aceleración constante
3.5 Caída libre
3.6 Calcular la velocidad y el desplazamiento a partir de la aceleración

INTRODUCCIÓN Nuestro universo está lleno de objetos en movimiento. Desde las estrellas, los planetas y las galaxias, el movimiento de las personas y de los animales, hasta la escala microscópica de los átomos y las moléculas, todo en nuestro universo está en movimiento. Podemos describir el movimiento con la ayuda de las dos disciplinas de la cinemática y la dinámica. Estudiamos la dinámica, que se ocupa de las causas del movimiento, en las Leyes del movimiento de Newton. Sin embargo, hay mucho que aprender sobre el movimiento sin referirse a lo que lo causa, y esto es el estudio de la cinemática. La cinemática consiste en describir el movimiento mediante propiedades como la posición, el tiempo, la velocidad y la aceleración.

El tratamiento completo de la **cinemática** considera el movimiento en dos y tres dimensiones. Por ahora, hablamos del movimiento en una dimensión, lo que nos proporciona las herramientas necesarias para estudiar el movimiento multidimensional. Un buen ejemplo de un objeto que experimenta un movimiento unidimensional es el tren de maglev (levitación magnética), representado al principio de este capítulo. Cuando viaja, por ejemplo, de Tokio a Kioto, se encuentra en diferentes posiciones a lo largo de la vía en varios momentos de su viaje; por ende, tiene desplazamientos o cambios de posición. También tiene una variedad de

velocidades a lo largo de su trayectoria y sufre aceleraciones (cambios de velocidad). Con los conocimientos aprendidos en este capítulo podemos calcular estas cantidades y la velocidad media. Todas estas magnitudes pueden describirse mediante la cinemática, sin conocer la masa del tren ni las fuerzas que intervienen.

3.1 Posición, desplazamiento y velocidad media

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Definir la posición, el desplazamiento y la distancia recorrida.
- Calcular el desplazamiento total dada la posición en función del tiempo.
- Determinar la distancia total recorrida.
- Calcular la velocidad media dado el desplazamiento y el tiempo transcurrido.

Cuando está en movimiento, las preguntas básicas que debe hacerse son: ¿dónde está? ¿A dónde va? ¿Qué tan rápido llega? Las respuestas a estas preguntas requieren que especifique su posición, su desplazamiento y su velocidad media, los términos que definimos en esta sección.

Posición

Para describir el movimiento de un objeto, primero hay que poder describir su **posición** (x): *dónde se encuentra en un momento determinado*. Más concretamente, necesitamos especificar su posición respecto a un marco de referencia conveniente. Un marco de referencia es un conjunto arbitrario de ejes a partir del cual se describen la posición y el movimiento de un objeto. La Tierra se utiliza a menudo como marco de referencia, y con frecuencia describimos la posición de un objeto en relación con los objetos estacionarios de la Tierra. Por ejemplo, el lanzamiento de un cohete podría describirse en términos de la posición del cohete con respecto a la Tierra en su conjunto, mientras que la posición de una ciclista podría describirse en términos de dónde se encuentra en relación con los edificios por los que pasa en la Figura 3.2. En otros casos, utilizamos marcos de referencia que no son estacionarios, sino que están en movimiento respecto a la Tierra. Para describir la posición de una persona en un avión, por ejemplo, utilizamos el avión, no la Tierra, como marco de referencia. Para describir la posición de un objeto que experimenta un movimiento unidimensional, solemos utilizar la variable x. Más adelante en el capítulo, durante el análisis de la caída libre, utilizamos la variable y.



FIGURA 3.2 Estos ciclistas en Vietnam pueden describirse por sus posiciones con respecto a los edificios o al canal. Sus movimientos pueden describirse mediante sus cambios de posición, o desplazamientos, en un marco de referencia (créditos: modificación de un trabajo de Suzan Black).

Desplazamiento

Si un objeto se mueve con respecto a un marco de referencia, por ejemplo, si una profesora se desplaza hacia la derecha con respecto a una pizarra como en la Figura 3.3, la posición del objeto cambia. Este cambio de posición se denomina **desplazamiento**. La palabra *desplazamiento* implica que un objeto se ha movido o ha

sido desplazado. Si bien la posición es el valor numérico de la x a lo largo de una línea recta en la que puede estar situado un objeto, el desplazamiento da el *cambio* de posición a lo largo de esta línea. Dado que el desplazamiento indica la dirección, es un vector y puede ser positivo o negativo, dependiendo de la elección de la dirección positiva. Además, en un análisis de movimiento puede haber muchos desplazamientos. Si la derecha es positiva y un objeto se desplaza 2 m a la derecha y luego 4 m a la izquierda, los desplazamientos individuales son 2 m y −4 m, respectivamente.

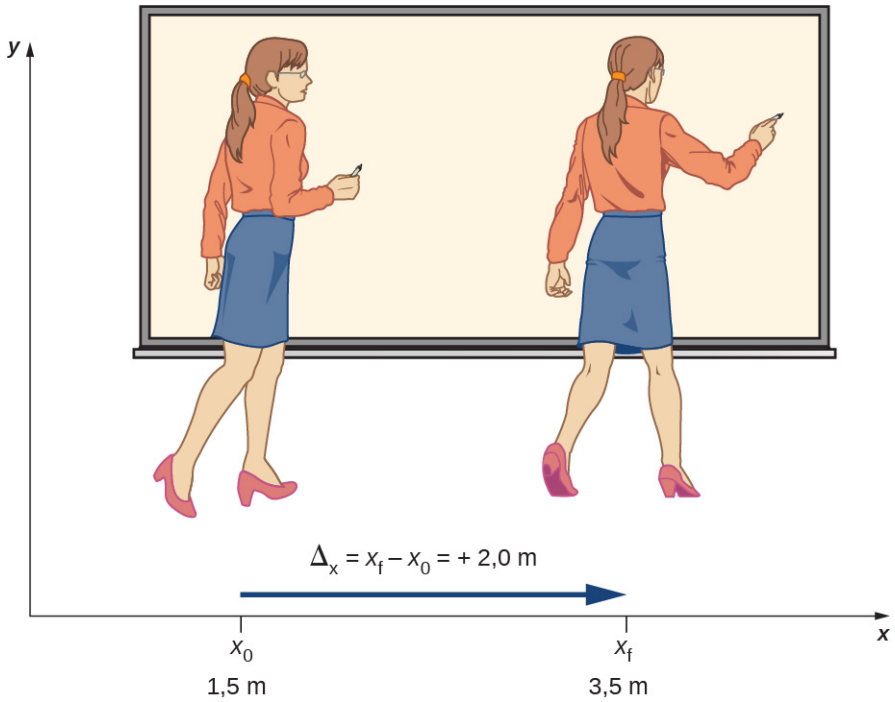


FIGURA 3.3 La profesora se pasea a la izquierda y a la derecha mientras da una conferencia. Su posición respecto a la Tierra viene dada por la x. El desplazamiento de +2,0 m de la profesora con respecto a la Tierra está representado por una flecha que apunta a la derecha.

Desplazamiento

Desplazamiento Δx es el cambio de posición de un objeto:

$$\Delta x = x_f - x_0, \tag{3.1}$$

donde Δx es el desplazamiento, x_f es la posición final, y x_0 es la posición inicial.

Utilizamos la letra griega mayúscula delta (Δ) con el significado de "cambio en" cualquier cantidad que le siga; así, Δx significa *cambio de posición* (posición final menos posición inicial). Siempre resolvemos el desplazamiento restando la posición inicial x_0 de la posición final x_f. Hay que tener en cuenta que la unidad del SI para el desplazamiento es el metro, pero a veces utilizamos kilómetros u otras unidades de longitud. Asimismo, que cuando en un problema se utilicen unidades distintas a los metros, es posible que tenga que convertirlas a metros para completar el cálculo (vea el Apéndice B).

Los objetos en movimiento también pueden tener una serie de desplazamientos. En el ejemplo anterior de la profesora que se paseaba, los desplazamientos individuales son de 2 m y −4 m, lo que supone un desplazamiento total de -2 m. Definimos el **desplazamiento total** Δx_{Total}, como *la suma de los desplazamientos individuales*, y lo expresamos matemáticamente con la ecuación

$$\Delta x_{\text{Total}} = \sum \Delta x_i, \tag{3.2}$$

donde Δx_i son cada uno de los desplazamientos. En el ejemplo anterior,

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 2 - 0 = 2 \text{ m}.$$

De la misma manera,

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = -2 - (2) = -4 \text{ m}$$

Por lo tanto,

$$\Delta x_{\text{Total}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2 - 4 = -2 \text{ m} \quad .$$

El desplazamiento total es de 2 - 4 = -2 m hacia la izquierda, es decir, en dirección negativa. También es útil para calcular la magnitud del desplazamiento, o su tamaño. La magnitud del desplazamiento siempre es positiva. Es el valor absoluto del desplazamiento, porque el desplazamiento es un vector y no puede tener un valor negativo de magnitud. En nuestro ejemplo, la magnitud del desplazamiento total es de 2 m, mientras que las magnitudes de cada uno de los desplazamientos son de 2 m y 4 m.

La magnitud del desplazamiento total no debe confundirse con la distancia recorrida. La distancia recorrida x_{Total}, es la longitud total del camino recorrido entre dos posiciones. En el problema anterior, la **distancia recorrida** es la suma de las magnitudes de cada uno de los desplazamientos:

$$x_{\text{Total}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 2 + 4 = 6 \text{ m}.$$

Velocidad media

Para calcular las demás magnitudes físicas de la cinemática debemos introducir la variable de tiempo. La variable de tiempo nos permite no solo indicar dónde está el objeto (su posición) durante su movimiento, sino también a qué velocidad se mueve. La velocidad a la que se mueve un objeto viene dada por la tasa en la que cambia la posición con el tiempo.

Para cada posición x_i, asignamos un tiempo determinado t_i. Si los detalles del movimiento en cada instante no son importantes, la tasa suele expresarse como la **velocidad media** $\bar{v}$. Esta cantidad vectorial es simplemente el desplazamiento total entre dos puntos, dividido entre el tiempo que tarda en viajar entre ellos. El tiempo que tarda en viajar entre dos puntos se denomina **tiempo transcurrido** Δt.

Velocidad media

Si x_1 y x_2 son las posiciones de un objeto en los tiempos t_1 y t_2, respectivamente, entonces

$$\text{Velocidad media} = \bar{v} = \frac{\text{Desplazamiento entre dos puntos}}{\text{Tiempo transcurrido entre dos puntos}} \qquad 3.3$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Es importante señalar que la velocidad media es un vector y puede ser negativa, dependiendo de las posiciones x_1 y x_2.

EJEMPLO 3.1

Entrega de volantes

Jill sale de su casa para entregar volantes para su venta de garaje; viaja hacia el este a lo largo de la calle bordeada de casas. A 0,5 km y 9 minutos después se queda sin volantes y tiene que volver sobre sus pasos hasta su casa para conseguir más. Esto le toma 9 minutos más. Tras recoger más volantes, vuelve a emprender el mismo camino al continuar por donde lo dejó, y termina a 1,0 km de su casa. En esta tercera etapa de su viaje tarda 15 minutos. En ese momento regresa hacia su casa, en dirección al oeste. Después de 1,75 km y 25

minutos se detiene a descansar.

a. ¿Cuál es el desplazamiento total de Jill hasta el punto en que se detiene a descansar?
b. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento final?
c. ¿Cuál es la velocidad media durante todo su viaje?
d. ¿Cuál es la distancia total recorrida?
e. Haga un gráfico de la posición en función del tiempo.

Se muestra un esquema de los movimientos de Jill en la Figura 3.4.

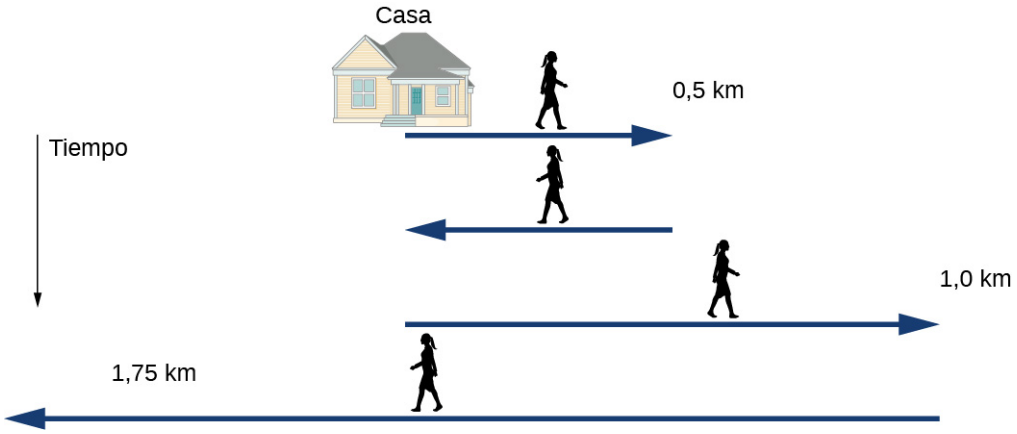


FIGURA 3.4 Línea del tiempo de los movimientos de Jill.

Estrategia

El problema contiene datos sobre los distintos tramos del viaje de Jill, por lo que valdría la pena hacer una tabla con las cantidades físicas. En el enunciado del problema se nos da la posición y el tiempo para poder calcular los desplazamientos y el tiempo transcurrido. Consideramos que el este es la dirección positiva. A partir de esta información podemos encontrar el desplazamiento total y la velocidad media. La casa de Jill es el punto de partida x_0. En la siguiente tabla se indican la hora y la posición de Jill en las dos primeras columnas, y los desplazamientos se calculan en la tercera columna.

Tiempo t_i (min)	Posición x_i (km)	Desplazamiento Δx_i (km)
$t_0 = 0$	$x_0 = 0$	$\Delta x_0 = 0$
$t_1 = 9$	$x_1 = 0{,}5$	$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 0{,}5$
$t_2 = 18$	$x_2 = 0$	$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = -0{,}5$
$t_3 = 33$	$x_3 = 1{,}0$	$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 1{,}0$
$t_4 = 58$	$x_4 = -0{,}75$	$\Delta x_4 = x_4 - x_3 = -1{,}75$

Solución

a. De la tabla anterior, el desplazamiento total es
$$\sum \Delta x_i = 0{,}5 - 0{,}5 + 1{,}0 - 1{,}75 \text{ km} = -0{,}75 \text{ km}.$$
b. La magnitud del desplazamiento total es $|-0{,}75|$ km $= 0{,}75$ km.
c. Velocidad media $= \frac{\text{Desplazamiento total}}{\text{Tiempo transcurrido}} = \bar{v} = \frac{-0{,}75 \text{ km}}{58 \text{ min}} = -0{,}013 \text{ km/min}$
d. La distancia total recorrida (suma de las magnitudes de cada uno de los desplazamientos) es
$x_{\text{Total}} = \sum |\Delta x_i| = 0{,}5 + 0{,}5 + 1{,}0 + 1{,}75 \text{ km} = 3{,}75 \text{ km}.$

e. Podemos graficar la posición de Jill en función del tiempo como una herramienta útil para ver el movimiento; el gráfico se muestra en la Figura 3.5.

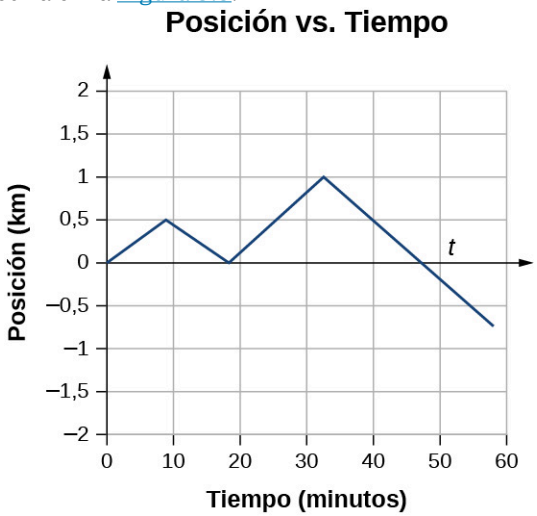


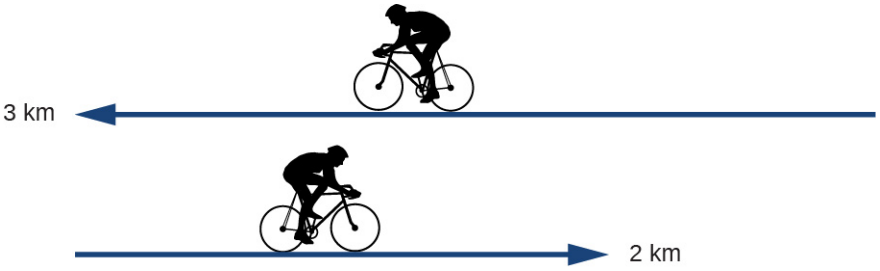
FIGURA 3.5 Este gráfico representa la posición de Jill en función del tiempo. La velocidad media es la pendiente de una línea que une los puntos inicial y final.

Importancia

El desplazamiento total de Jill es de -0,75 km, lo que significa que al final de su viaje termina 0,75 km al oeste de su casa. La velocidad media significa que si alguien caminara hacia el oeste a 0,013 km/min comenzando a la misma hora que Jill salió de su casa, ambos llegarían al punto de parada final al mismo tiempo. Hay que tener en cuenta que si Jill terminara su viaje en su casa, su desplazamiento total sería cero, así como su velocidad media. La distancia total recorrida durante los 58 minutos de tiempo transcurrido de su viaje es de 3,75 km.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.1

Un ciclista recorre 3 km hacia el oeste y luego da la vuelta y recorre 2 km hacia el este. (a) ¿Cuál es su desplazamiento? (b) ¿Cuál es la distancia recorrida? (c) ¿Cuál es la magnitud de su desplazamiento?



3.2 Velocidad y rapidez instantáneas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la diferencia entre velocidad media y velocidad instantánea.
- Señalar la diferencia entre velocidad y rapidez.
- Calcular la velocidad instantánea dada la ecuación matemática de la velocidad.
- Calcular la rapidez dada la velocidad instantánea.

Ahora hemos visto cómo calcular la velocidad media entre dos posiciones. Sin embargo, dado que los objetos en el mundo real se mueven continuamente a través del espacio y el tiempo, nos gustaría encontrar la velocidad de un objeto en cualquier punto. Podemos encontrar la velocidad del objeto en cualquier punto de su

trayectoria mediante algunos principios fundamentales del cálculo. Esta sección nos permite comprender mejor la física del movimiento y nos servirá en capítulos posteriores.

Velocidad instantánea

La cantidad que nos indica qué tan rápido se mueve un objeto en cualquier punto de su trayectoria es la **velocidad instantánea**, normalmente llamada simplemente *velocidad*. Es la velocidad media entre dos puntos de la trayectoria en el límite en que el tiempo (y, por ende, el desplazamiento) entre ambos puntos se aproxima a cero. Para ilustrar esta idea matemáticamente, necesitamos expresar la posición de la x como una función continua de t denotada por $x(t)$. La expresión para la velocidad media entre dos puntos con esta notación es $\overline{v} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$. Para encontrar la velocidad instantánea en cualquier posición, suponemos que $t_1 = t$ y $t_2 = t + \Delta t$. Tras incorporar estas expresiones en la ecuación de la velocidad media y tomar el límite como $\Delta t \to 0$, encontramos la expresión para la velocidad instantánea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Velocidad instantánea

La velocidad instantánea de un objeto es el límite de la velocidad media a medida que el tiempo transcurrido se acerca a cero, o la derivada de x con respecto a t:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t). \qquad 3.4$$

Al igual que la velocidad media, la velocidad instantánea es un vector con dimensión de longitud por tiempo. La velocidad instantánea en un momento determinado t_0 es la tasa de cambio de la función de posición, que es la pendiente de la función de posición $x(t)$ en t_0. La Figura 3.6 muestra cómo la velocidad media $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ entre dos tiempos se aproxima a la velocidad instantánea en t_0. La velocidad instantánea se muestra en el tiempo t_0, que resulta estar en el máximo de la función de posición. La pendiente del gráfico de posición es cero en este punto; por ende, la velocidad instantánea es cero. Para otros tiempos, t_1, t_2, y así sucesivamente, la velocidad instantánea no es cero porque la pendiente del gráfico de posición sería positiva o negativa. Si la función de posición tuviera un mínimo, la pendiente del gráfico de posición también sería cero, lo que daría una velocidad instantánea de cero también allí. Así, los ceros de la función de velocidad dan el mínimo y el máximo de la función de posición.

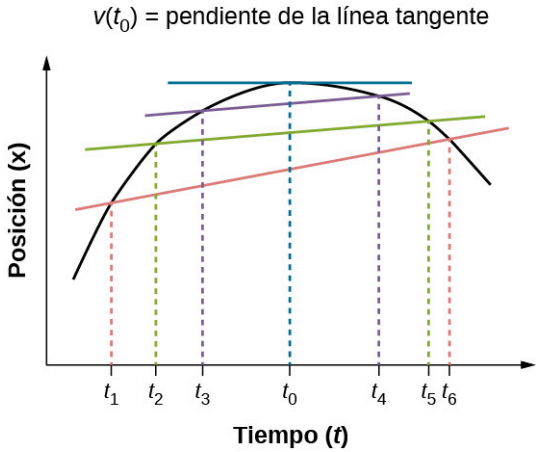


FIGURA 3.6 En un gráfico de posición en función del tiempo, la velocidad instantánea es la pendiente de la línea tangente en un punto determinado. Las velocidades medias $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ entre tiempos $\Delta t = t_6 - t_1$, $\Delta t = t_5 - t_2$, y $\Delta t = t_4 - t_3$ se muestran. Cuando $\Delta t \to 0$, la velocidad media se aproxima a la velocidad instantánea en $t = t_0$.

EJEMPLO 3.2

Encontrar la velocidad a partir de un gráfico de posición en función del tiempo

Dado el gráfico de posición en función del tiempo de la Figura 3.7, halle el gráfico de velocidad en función del tiempo.

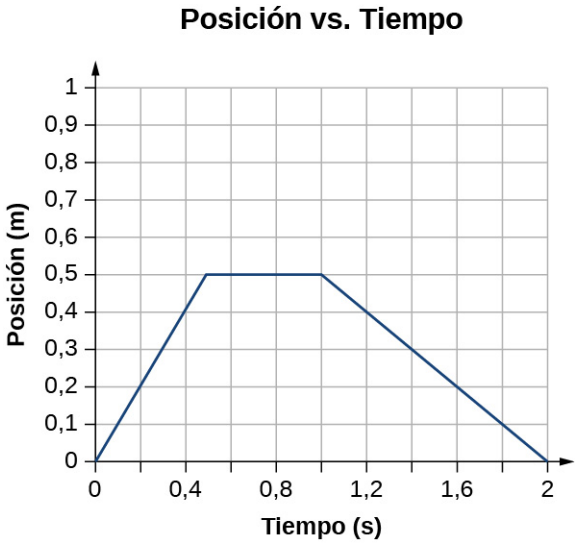


FIGURA 3.7 El objeto comienza en la dirección positiva, se detiene brevemente y luego invierte la dirección, para dirigirse de nuevo hacia el origen. Observe que el objeto llega al reposo instantáneamente, lo que requeriría una fuerza infinita. Así, el gráfico es una aproximación al movimiento en el mundo real. (El concepto de fuerza se trata en las Leyes de movimiento de Newton).

Estrategia

El gráfico contiene tres líneas rectas durante tres intervalos. Encontramos la velocidad durante cada intervalo al tomar la pendiente de la línea con la cuadrícula.

Solución

Intervalo de 0 s a 0,5 s: $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}5\text{ m} - 0{,}0\text{ m}}{0{,}5\text{ s} - 0{,}0\text{ s}} = 1{,}0\text{ m/s}$

Intervalo de 0,5 s a 1,0 s: $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}5\text{ m} - 0{,}5\text{ m}}{1{,}0\text{ s} - 0{,}5\text{ s}} = 0{,}0\text{ m/s}$

Intervalo de 1,0 s a 2,0 s: $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}0\text{ m} - 0{,}5\text{ m}}{2{,}0\text{ s} - 1{,}0\text{ s}} = -0{,}5\text{ m/s}$

El gráfico de estos valores de velocidad en función del tiempo se muestra en la Figura 3.8.

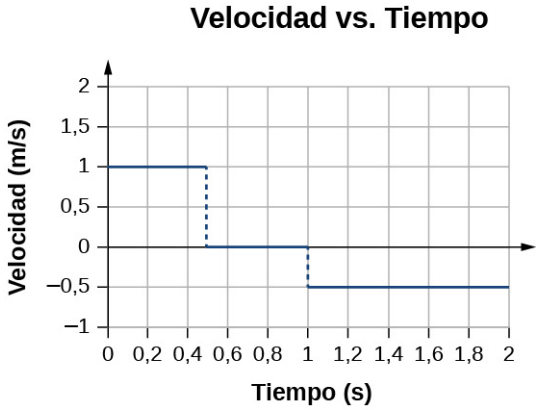


FIGURA 3.8 La velocidad es positiva durante la primera parte del recorrido, cero cuando el objeto se detiene y

negativa cuando el objeto invierte su dirección.

Importancia

Durante el intervalo de 0 s a 0,5 s, la posición del objeto se aleja del origen y la curva de la posición en función del tiempo tiene una pendiente positiva. En cualquier punto de la curva durante este intervalo, podemos encontrar la velocidad instantánea al tomar su pendiente, que es de +1 m/s, como se muestra en la Figura 3.8. En el intervalo posterior, de 0,5 s a 1,0 s, la posición no cambia y vemos que la pendiente es cero. De 1,0 s a 2,0 s, el objeto retrocede hacia el origen y la pendiente es de -0,5 m/s. El objeto ha invertido su dirección y tiene una velocidad negativa.

Rapidez

En el lenguaje cotidiano, la mayoría de la gente utiliza indistintamente los términos *rapidez* y *velocidad*. Sin embargo, en física no tienen el mismo significado y son conceptos distintos. Una diferencia importante es que la rapidez no tiene dirección; es decir, la rapidez es un escalar.

Podemos calcular la **rapidez media** al hallar la distancia total recorrida dividida entre el tiempo transcurrido:

$$\text{Rapidez media} = \overline{s} = \frac{\text{Distancia total}}{\text{Tiempo transcurrido}}. \tag{3.5}$$

La rapidez media no es necesariamente la misma que la magnitud de la velocidad media, que se encuentra al dividir la magnitud del desplazamiento total entre el tiempo transcurrido. Por ejemplo, si un viaje comienza y termina en el mismo lugar, el desplazamiento total es cero y, por tanto, la velocidad media es cero. Sin embargo, la rapidez media no es cero, porque la distancia total recorrida es mayor que cero. Si hacemos un viaje por carretera de 300 km y tenemos que llegar a nuestro destino a una hora determinada, entonces nos interesaría conocer nuestra rapidez media.

Sin embargo, podemos calcular la **rapidez instantánea** a partir de la magnitud de la velocidad instantánea:

$$\text{Rapidez instantánea} = |v(t)|\,. \tag{3.6}$$

Si una partícula se mueve a lo largo del eje de la x a +7,0 m/s y otra partícula se mueve a lo largo del mismo eje a -7,0 m/s, tienen velocidades diferentes, pero ambas tienen la misma rapidez de 7,0 m/s. En la siguiente tabla se muestran algunos valores de rapidez típicos.

Rapidez	m/s	mi/h
Deriva continental	10^{-7}	2×10^{-7}
Caminata rápida	1,7	3,9
Ciclista	4,4	10
Corredor de velocidad	12,2	27
Límite de velocidad en zonas rurales	24,6	56
Récord oficial de velocidad en tierra	341,1	763
Velocidad del sonido a nivel del mar	343	768
Transbordador espacial en reentrada	7.800	17.500

Rapidez	m/s	mi/h
Velocidad de escape de la Tierra*	11.200	25.000
Rapidez orbital de la Tierra alrededor del Sol	29.783	66.623
Velocidad de la luz en el vacío	299.792.458	670.616.629

TABLA 3.1 Rapidez de diversos objetos *La velocidad de escape es la velocidad a la que debe lanzarse un objeto para que supere la gravedad terrestre y no sea arrastrado hacia la Tierra.

Calcular la velocidad instantánea

Al calcular la velocidad instantánea, necesitamos especificar la forma explícita de la función de posición $x(t)$. Si cada término de la ecuación $x(t)$ tiene la forma de At^n donde A es una constante y n es un número entero, esto se puede diferenciar con la regla de la potencia para que sea:

$$\frac{d(At^n)}{dt} = Ant^{n-1}. \qquad 3.7$$

Observe que, si hay más términos que se suman, esta regla de la potencia de la diferenciación puede hacerse varias veces y la solución es la suma de esos términos. El siguiente ejemplo ilustra el empleo de la Ecuación 3.7.

EJEMPLO 3.3

Velocidad instantánea en función de la velocidad media

La posición de una partícula viene dada por $x(t) = 3{,}0t + 0{,}5t^3$ m.

a. Utilizando la Ecuación 3.4 y la Ecuación 3.7, halle la velocidad instantánea en $t = 2{,}0$ s.
b. Calcule la velocidad media entre 1,0 s y 3,0 s.

Estrategia

La Ecuación 3.4 da la velocidad instantánea de la partícula como la derivada de la función de posición. Al observar la forma de la función de posición dada, vemos que es un polinomio en t. Por lo tanto, podemos utilizar la Ecuación 3.7, la regla de la potencia del cálculo, para encontrar la solución. Utilizamos la Ecuación 3.6 para calcular la velocidad media de la partícula.

Solución

a. $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 3{,}0 + 1{,}5t^2$ m/s.
Sustituyendo $t = 2{,}0$ s en esta ecuación se obtiene $v(2{,}0\text{ s}) = [3{,}0 + 1{,}5(2{,}0)^2]$ m/s $= 9{,}0$ m/s.
b. Para determinar la velocidad media de la partícula entre 1,0 s y 3,0 s, calculamos los valores de la $x(1{,}0\text{ s})$ y la $x(3{,}0\text{ s})$:

$$x(1{,}0\text{ s}) = \left[(3{,}0)(1{,}0) + 0{,}5(1{,}0)^3\right]\text{ m} = 3{,}5\text{ m}$$

$$x(3{,}0\text{ s}) = \left[(3{,}0)(3{,}0) + 0{,}5(3{,}0)^3\right]\text{ m} = 22{,}5\text{ m}.$$

Entonces la velocidad media es

$$\bar{v} = \frac{x(3{,}0\text{ s}) - x(1{,}0\text{ s})}{t(3{,}0\text{ s}) - t(1{,}0\text{ s})} = \frac{22{,}5 - 3{,}5\text{ m}}{3{,}0 - 1{,}0\text{ s}} = 9{,}5\text{ m/s}.$$

Importancia

En el límite de que el intervalo utilizado para calcular $\bar{v}$ llega a cero, el valor obtenido para $\bar{v}$ converge al valor

de *v*.

EJEMPLO 3.4

Velocidad instantánea en función de la rapidez

Consideremos el movimiento de una partícula en la que la posición es $x(t) = 3{,}0t - 3t^2$ m.

a. ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 0{,}25$ s, $t = 0{,}50$ s y $t = 1{,}0$ s?
b. ¿Cuál es la rapidez de la partícula en esos momentos?

Estrategia

La velocidad instantánea es la derivada de la función de posición y la rapidez es la magnitud de la velocidad instantánea. Utilizamos la Ecuación 3.4 y la Ecuación 3.7 para resolver la velocidad instantánea.

Solución

a. $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 3{,}0 - 6{,}0t$ m/s $v(0{,}25\text{ s}) = 1{,}50$ m/s, $v(0{,}5\text{ s}) = 0$ m/s, $v(1{,}0\text{ s}) = -3{,}0$ m/s
b. Rapidez $= |v(t)| = 1{,}50$ m/s, 0,0 m/s, y 3,0 m/s

Importancia

La velocidad de la partícula nos brinda información sobre la dirección, lo cual indica que la partícula se mueve hacia la izquierda (oeste) o hacia la derecha (este). La rapidez da la magnitud de la velocidad. Al graficar la posición, la velocidad y la rapidez como funciones del tiempo, podemos entender estos conceptos visualmente en la Figura 3.9. En (a), el gráfico muestra que la partícula se mueve en dirección positiva hasta $t = 0{,}5$ s, cuando invierte su dirección. La inversión de la dirección también puede verse en (b) a los 0,5 s, donde la velocidad es cero y luego se vuelve negativa. A 1,0 s vuelve al origen donde comenzó. La velocidad de la partícula a 1,0 s en (b) es negativa, porque está viajando en la dirección negativa. Sin embargo, en (c), su rapidez es positiva y permanece así durante todo el recorrido. También podemos interpretar la velocidad como la pendiente del gráfico de posición en función del tiempo. La pendiente de la *x(t)* es decreciente hacia cero, para convertirse en cero a los 0,5 s y pasar a ser cada vez más negativa a partir de ese momento. Este análisis de comparación de los gráficos de posición, velocidad y rapidez sirve para detectar errores en los cálculos. Los gráficos deben ser coherentes entre sí y contribuir a interpretar los cálculos.

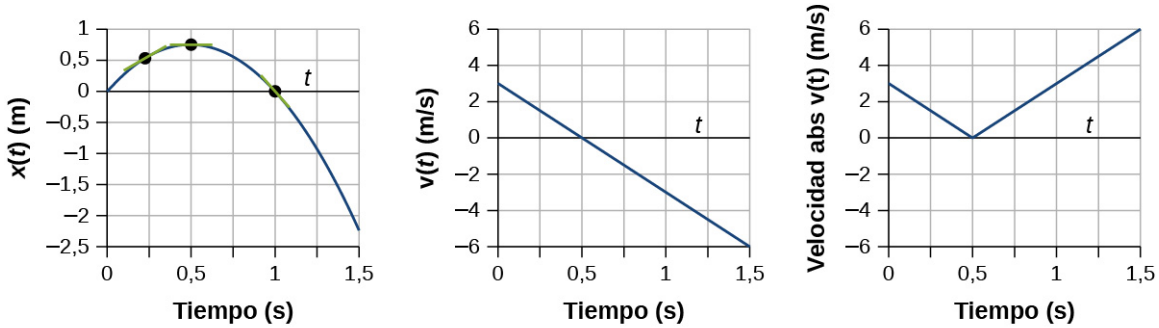


FIGURA 3.9 (a) Posición: *x(t)* en función del tiempo. (b) Velocidad: *v(t)* en función del tiempo. La pendiente del gráfico de posición es la velocidad. La comparación aproximada de las pendientes de las líneas tangentes en (a) a 0,25 s, 0,5 s y 1,0 s con los valores de la velocidad en los tiempos correspondientes indica que son los mismos valores. (c) Rapidez: $|v(t)|$ en función del tiempo. La rapidez es siempre un número positivo.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.2

La posición de un objeto como función del tiempo es $x(t) = -3t^2$ m. (a) ¿Cuál es la velocidad del objeto como función del tiempo? (b) ¿La velocidad es siempre positiva? (c) ¿Cuáles son la velocidad y la rapidez en $t = 1{,}0$ s?

3.3 Aceleración media e instantánea

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Calcular la aceleración media entre dos puntos en el tiempo.
- Calcular la aceleración instantánea dada la forma funcional de la velocidad.
- Explicar la naturaleza vectorial de la aceleración y la velocidad instantáneas.
- Explicar la diferencia entre aceleración media y aceleración instantánea.
- Hallar la aceleración instantánea en un momento determinado en un gráfico de la velocidad en función del tiempo.

La importancia de comprender la aceleración abarca tanto nuestra experiencia cotidiana como los vastos alcances del espacio exterior y el diminuto mundo de la física subatómica. En la conversación cotidiana, *acelerar* significa aumentar la rapidez, pisar el pedal del freno disminuye la velocidad del vehículo. Estamos familiarizados con la aceleración de nuestro auto, por ejemplo. Cuanto mayor sea la aceleración, mayor será el cambio de velocidad en un momento determinado. La aceleración está muy presente en la física experimental. En los experimentos con aceleradores de partículas lineales, por ejemplo, las partículas subatómicas se aceleran a velocidades muy altas en experimentos de colisión, que nos brindan información sobre la estructura del mundo subatómico, así como sobre el origen del universo. En el espacio, los rayos cósmicos son partículas subatómicas que se han acelerado hasta alcanzar energías muy elevadas en las supernovas (estrellas masivas que explotan) y los núcleos galácticos activos. Es importante entender los procesos que aceleran los rayos cósmicos, ya que estos rayos contienen una radiación muy penetrante que puede dañar los componentes electrónicos de las naves espaciales, por ejemplo.

Aceleración media

La definición formal de aceleración concuerda con estas nociones que acabamos de describir, pero es más inclusiva.

Aceleración media

La aceleración media es la tasa a la que cambia la velocidad:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_\mathrm{f} - v_0}{t_\mathrm{f} - t_0}, \tag{3.8}$$

donde $\overline{a}$ es la **aceleración media**, v es la velocidad y t es el tiempo. (La barra sobre la a significa aceleración *media*).

Dado que la aceleración es la velocidad en metros por segundo dividida entre el tiempo en segundos, las unidades del SI para la aceleración suelen abreviarse como $\mathrm{m/s^2}$, es decir, metros por segundo al cuadrado o metros por segundo por segundo. Esto significa literalmente cuántos metros por segundo cambia la velocidad cada segundo. Recordemos que la velocidad es un vector, tiene tanto magnitud como dirección, lo que significa que un cambio en la velocidad puede ser un cambio en la magnitud (o rapidez), pero también puede ser un cambio en la dirección. Por ejemplo, si una corredora que se desplaza a 10 km/h hacia el este se detiene lentamente, invierte la dirección y continúa su carrera a 10 km/h hacia el oeste, su velocidad cambia como resultado del cambio de dirección, aunque la *magnitud* de la velocidad es la misma en ambas direcciones. Por lo tanto, la aceleración se produce cuando la velocidad cambia de magnitud (un aumento o disminución de la rapidez) o de dirección, o ambas cosas.

La aceleración como vector

La aceleración es un vector en la misma dirección que el *cambio* de velocidad, Δv. Dado que la velocidad es un vector, puede cambiar de magnitud o de dirección, o ambas. La aceleración es, por lo tanto, un cambio

de rapidez o de dirección, o ambos.

Tenga en cuenta que, aunque la aceleración se produzca en la dirección del cambio de velocidad, no siempre se produce en la dirección del movimiento. Cuando un objeto se ralentiza, su aceleración es opuesta a la dirección de su movimiento. Aunque esto se denomina comúnmente *desaceleración* como en la Figura 3.10, decimos que el tren acelera en una dirección opuesta a su dirección de movimiento.



FIGURA 3.10 Un tren subterráneo en Sao Paulo, Brasil, desacelera al llegar a una estación. Acelera en una dirección opuesta a la de su movimiento (créditos: modificación del trabajo de Yusuke Kawasaki).

El término *desaceleración* puede causar confusión en nuestro análisis porque no es un vector y no apunta a una dirección específica con respecto a un sistema de coordenadas, motivo por el cual no lo utilizamos. La aceleración es un vector, por lo que debemos elegir el signo apropiado en nuestro sistema de coordenadas elegido. En el caso del tren en la Figura 3.10, la aceleración es *en sentido negativo en el sistema de coordenadas elegido*, por lo que decimos que el tren sufre una aceleración negativa.

Si un objeto en movimiento tiene una velocidad en la dirección positiva con respecto a un origen elegido y adquiere una aceleración negativa constante, el objeto acaba por detenerse e invertir su dirección. Si esperamos lo suficiente, el objeto pasa por el origen, y va en dirección contraria. Esto se ilustra en la Figura 3.11.

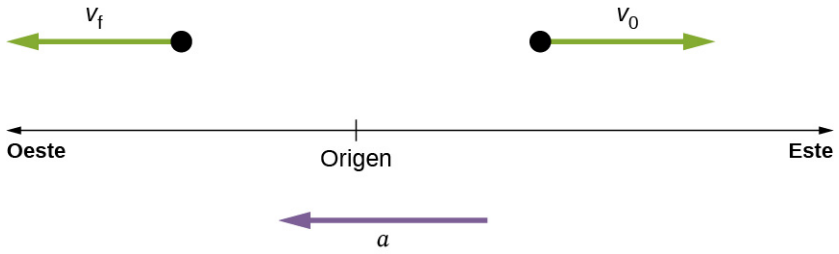


FIGURA 3.11 Un objeto en movimiento con un vector de velocidad hacia el este bajo una aceleración negativa se detiene e invierte su dirección. Pasa por el origen, y va en dirección contraria, después de un tiempo suficiente.

EJEMPLO 3.5

Calcular la aceleración media: un caballo de carreras sale de la compuerta

Un caballo de carreras al salir de la compuerta acelera desde el reposo hasta una velocidad de 15,0 m/s hacia el oeste en 1,80 s. ¿Cuál es su aceleración media?



FIGURA 3.12 Caballos de carreras que aceleran al salir de la compuerta (créditos: modificación de la obra de Jon Sullivan).

Estrategia

Primero, dibujamos un esquema y asignamos un sistema de coordenadas al problema como en la Figura 3.13. Este es un problema sencillo, pero siempre ayuda visualizarlo. Observe que asignamos el este como positivo y el oeste como negativo. Por lo tanto, en este caso, tenemos una velocidad negativa.

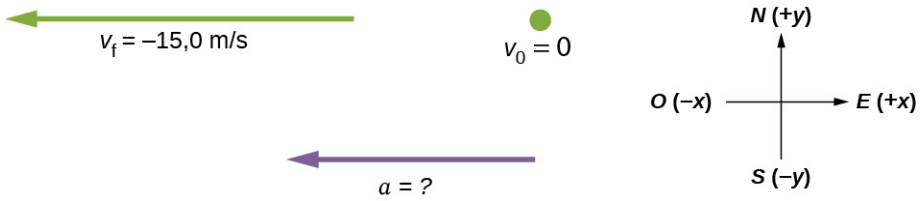


FIGURA 3.13 Identifique el sistema de coordenadas, la información dada y lo que quiere determinar.

Podemos resolver este problema identificando Δv y Δt a partir de la información dada, y luego calcular la aceleración media directamente a partir de la ecuación $\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$.

Solución

En primer lugar, identifique los valores conocidos: $v_0 = 0$, $v_f = -15{,}0$ m/s (el signo negativo indica la dirección hacia el oeste), $\Delta t = 1{,}80$ s.

En segundo lugar, calcule el cambio de velocidad. Dado que el caballo pasa de cero a -15,0 m/s, su cambio de velocidad es igual a su velocidad final:

$$\Delta v = v_f - v_0 = v_f = -15{,}0 \text{ m/s}.$$

Por último, sustituya los valores conocidos (Δv y Δt) y resuelva la incógnita $\overline{a}$:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-15{,}0 \text{ m/s}}{1{,}80 \text{ s}} = -8{,}33 \text{m/s}^2.$$

Importancia

El signo negativo indica que la aceleración es hacia el oeste. Una aceleración de 8,33 m/s^2 hacia el oeste significa que el caballo aumenta su velocidad en 8,33 m/s hacia el oeste cada segundo; es decir, 8,33 metros por segundo por segundo, que escribimos como 8,33 m/s^2. Se trata realmente de una aceleración media, porque el paseo no es suave. Más adelante veremos que una aceleración de esta magnitud requeriría que el jinete se aferrara con una fuerza casi igual a su peso.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.3

Los protones en una aceleración lineal se aceleran desde el reposo hasta $2{,}0 \times 10^7$ m/s en 10^{-4} s. ¿Cuál es la

aceleración media de los protones?

Aceleración instantánea

La aceleración instantánea a, o *aceleración en un instante específico*, se obtiene con el mismo proceso que se mencionó para la velocidad instantánea. Es decir, calculamos la aceleración media entre dos puntos de tiempo separados por Δt y suponemos que Δt se acerca a cero. El resultado es la derivada de la función de velocidad $v(t)$, que es la **aceleración instantánea** y se expresa matemáticamente como

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t). \tag{3.9}$$

Así, al igual que la velocidad es la derivada de la función de posición, la aceleración instantánea es la derivada de la función de velocidad. Podemos mostrarlo gráficamente de la misma manera que la velocidad instantánea. En la Figura 3.14, la aceleración instantánea en el tiempo t_0 es la pendiente de la línea tangente a al gráfico de velocidad en función del tiempo en el tiempo t_0. Vemos que la aceleración media $\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ se acerca a la aceleración instantánea como Δt se acerca a cero. También en la parte (a) de la figura, vemos que la velocidad tiene un máximo cuando su pendiente es cero. Este tiempo corresponde al cero de la función de aceleración. En la parte (b), se muestra la aceleración instantánea en la velocidad mínima, que también es cero, ya que la pendiente de la curva también es cero. Así, para una función de velocidad dada, los ceros de la función de aceleración dan el mínimo o el máximo de la velocidad.

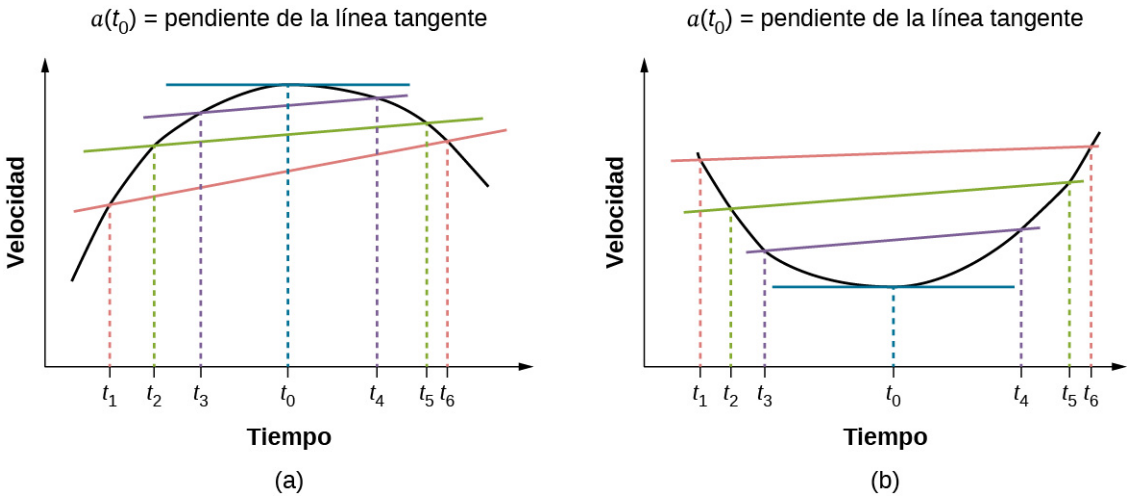
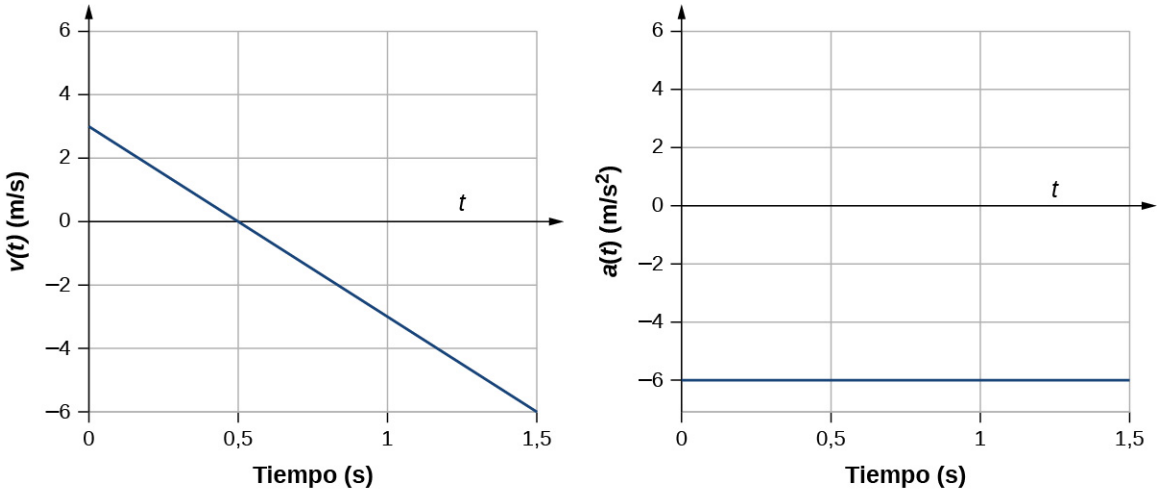


FIGURA 3.14 En un gráfico de velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea es la pendiente de la línea tangente. (a) Se muestra la aceleración media $\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$ entre los tiempos $\Delta t = t_6 - t_1$, $\Delta t = t_5 - t_2$ y $\Delta t = t_4 - t_3$. Cuando $\Delta t \to 0$, la aceleración media se aproxima a la aceleración instantánea en el tiempo t_0. En la vista (a), se muestra la aceleración instantánea para el punto de la curva de velocidad en la velocidad máxima. En este punto, la aceleración instantánea es la pendiente de la línea tangente, que es cero. En cualquier otro momento, la pendiente de la línea tangente, y, por tanto, la aceleración instantánea, no sería cero. (b) Igual que en (a), pero se muestra para la aceleración instantánea en la velocidad mínima.

Para ilustrar este concepto, veamos dos ejemplos. En primer lugar, se muestra un ejemplo sencillo con la Figura 3.9(b), el gráfico de velocidad en función del tiempo del Ejemplo 3.4, para encontrar la aceleración gráficamente. Este gráfico se representa en la Figura 3.15(a), que es una línea recta. El gráfico correspondiente de la aceleración en función del tiempo se encuentra a partir de la pendiente de la velocidad y se muestra en la Figura 3.15(b). En este ejemplo, la función de velocidad es una línea recta con una pendiente constante, por lo que la aceleración es una constante. En el siguiente ejemplo, la función de velocidad tiene una dependencia funcional más complicada al tiempo.



(a) Velocidad (b) Aceleración

FIGURA 3.15 (a, b) El gráfico de velocidad en función del tiempo es lineal y tiene una pendiente negativa constante (a) que es igual a la aceleración, mostrada en (b).

Si conocemos la forma funcional de la velocidad, $v(t)$, podemos calcular la aceleración instantánea $a(t)$ en cualquier punto temporal del movimiento utilizando la Ecuación 3.9.

EJEMPLO 3.6

Calcular la aceleración instantánea

Una partícula está en movimiento y se acelera. La forma funcional de la velocidad es $v(t) = 20t - 5t^2$ m/s.

a. Halle la forma funcional de la aceleración.
b. Halle la velocidad instantánea en $t = 1$, 2, 3 y 5 s.
c. Halle la aceleración instantánea en $t = 1$, 2, 3 y 5 s.
d. Interprete los resultados de (c) en términos de las direcciones de los vectores aceleración y velocidad.

Estrategia

Encontramos la forma funcional de la aceleración al tomar la derivada de la función de velocidad. A continuación, calculamos los valores de la velocidad y la aceleración instantáneas a partir de las funciones dadas para cada una de ellas. Para la parte (d), tenemos que comparar las direcciones de la velocidad y la aceleración en cada momento.

Solución

a. $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 20 - 10t \text{ m/s}^2$
b. $v(1 \text{ s}) = 15 \text{ m/s}$, $v(2 \text{ s}) = 20 \text{ m/s}$, $v(3 \text{ s}) = 15 \text{ m/s}$, $v(5 \text{ s}) = -25 \text{ m/s}$
c. $a(1 \text{ s}) = 10 \text{ m/s}^2$, $a(2 \text{ s}) = 0 \text{ m/s}^2$, $a(3 \text{ s}) = -10 \text{ m/s}^2$, $a(5 \text{ s}) = -30 \text{ m/s}^2$
d. En $t = 1$ s, la velocidad $v(1 \text{ s}) = 15$ m/s es positiva y la aceleración también, de allí que, tanto la velocidad como la aceleración están en la misma dirección. La partícula se mueve más rápido.

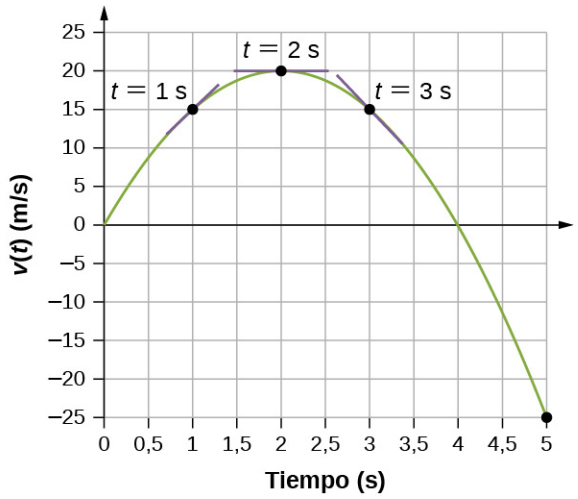
En $t = 2$ s, la velocidad ha aumentado a $v(2 \text{ s}) = 20$ m/s, donde es su máximo, lo que corresponde al momento en que la aceleración es cero. Vemos que la velocidad máxima se produce cuando la pendiente de la función de velocidad es cero, que es justo el cero de la función de aceleración.

En $t = 3$ s, la velocidad es $v(3 \text{ s}) = 15$ m/s y la aceleración es negativa. Se ha reducido la velocidad de la partícula y el vector de aceleración es negativo. La partícula se ralentiza.

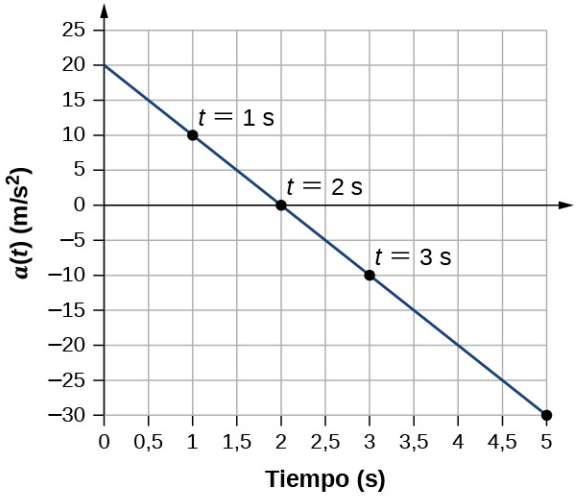
En $t = 5$ s, la velocidad es $v(5 \text{ s}) = -25$ m/s y la aceleración es cada vez más negativa. Entre los tiempos $t = 3$ s y $t = 5$ s la velocidad de la partícula ha disminuido a cero y luego se ha vuelto negativa, lo que invierte su

dirección. La partícula vuelve a acelerar, pero en sentido contrario.

Podemos ver estos resultados gráficamente en la Figura 3.16.



(a) Velocidad



(b) Aceleración

FIGURA 3.16 (a) Velocidad en función del tiempo. Las líneas tangentes se indican en los tiempos 1, 2 y 3 s. Las pendientes de las líneas tangentes son las aceleraciones. En t = 3 s, la velocidad es positiva. En t = 5 s, la velocidad es negativa, lo que indica que la dirección de la partícula se ha invertido. (b) Aceleración en función del tiempo. Comparando los valores de las aceleraciones dadas por los puntos negros con las correspondientes pendientes de las líneas tangentes (pendientes de las líneas que pasan por los puntos negros) en (a), vemos que son idénticas.

Importancia

Al hacer un análisis tanto numérico como gráfico de la velocidad y la aceleración de la partícula, podemos aprender mucho sobre su movimiento. El análisis numérico complementa el análisis gráfico para ofrecer una visión total del movimiento. El cero de la función de aceleración corresponde al máximo de la velocidad en este ejemplo. También en este ejemplo, la aceleración aumenta cuando es positiva y en la misma dirección que la velocidad. A medida que la aceleración se inclina a cero, hasta el punto de ser negativa, la velocidad alcanza un máximo, tras el cual comienza a disminuir. Si esperamos lo suficiente, la velocidad también se vuelve negativa, lo que indica inversión de la dirección. Un ejemplo del mundo real de este tipo de movimiento es un auto con una velocidad en aumento, hasta llegar a un máximo, tras lo cual empieza a desacelerar, se detiene y luego invierte la dirección.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.4

Un avión aterriza en una pista rumbo al este. Describa su aceleración.

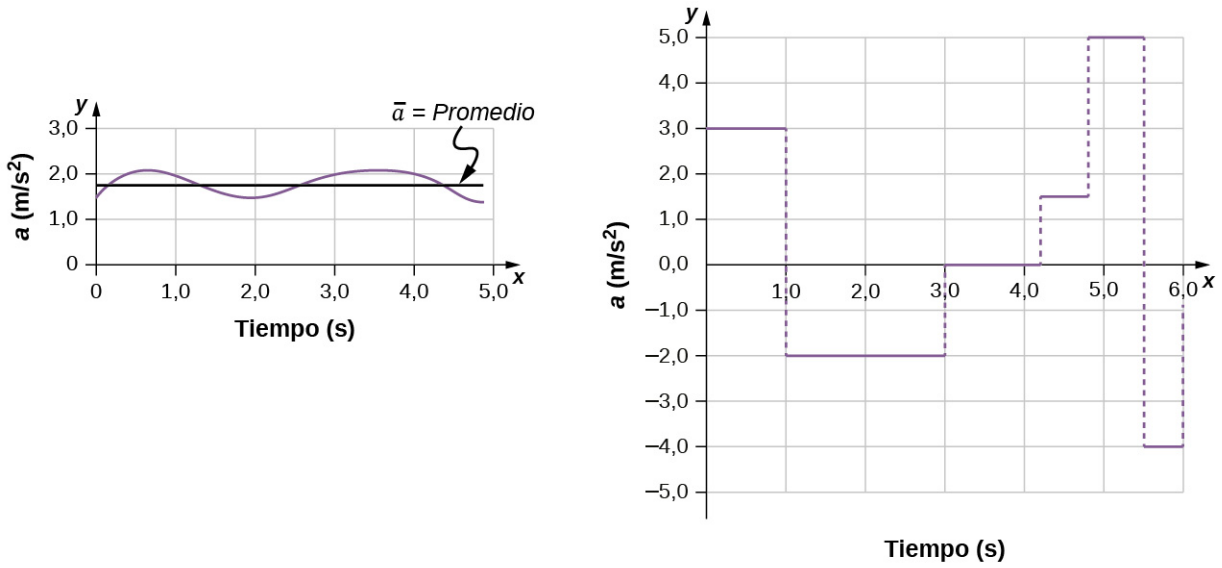
Cómo sentir la aceleración

Probablemente esté acostumbrado a experimentar la aceleración cuando entra en un elevador o pisa el acelerador de su auto. Sin embargo, la aceleración se produce en muchos otros objetos de nuestro universo con los que no tenemos contacto directo. La Tabla 3.2 presenta la aceleración de varios objetos. Podemos ver que las aceleraciones pasan por muchos órdenes de magnitud.

Aceleración	Valor (m/s^2)
Tren de alta velocidad	0,25
Elevador	2
Guepardo	5
Objeto en caída libre, sin resistencia del aire, cerca de la superficie de la Tierra	9,8
Máximo del transbordador espacial durante el lanzamiento	29
Pico del paracaidista durante la apertura normal del paracaídas	59
Avión F16 al salir de una caída en picada	79
Eyección del asiento del avión	147
Misil Sprint	982
Pico de aceleración del trineo de cohetes más rápido	1.540
Pulga saltarina	3.200
Bola de béisbol al ser golpeada por un bate	30.000
Cierre de las mandíbulas de una hormiga de mandíbula trampa	1.000.000
Protón en el Gran Colisionador de Hadrones	$1{,}9 \times 10^9$

TABLA 3.2 Valores típicos de aceleración (créditos: Wikipedia: Órdenes de magnitud (aceleración))

En esta tabla, vemos que las aceleraciones típicas varían mucho con los diferentes objetos y no tienen nada que ver ni con el tamaño del objeto ni con su masa. La aceleración también puede variar mucho durante el movimiento de un objeto. Un auto de carreras tiene una gran aceleración justo después del arranque, pero luego disminuye a medida que alcanza una velocidad constante. Su aceleración media puede ser muy distinta a su aceleración instantánea en un momento determinado de su movimiento. La Figura 3.17 compara gráficamente la aceleración media con la aceleración instantánea para dos movimientos muy diferentes.



(a) (b)

FIGURA 3.17 Gráficos de la aceleración instantánea en función del tiempo para dos movimientos unidimensionales diferentes. (a) La aceleración apenas varía y es siempre en la misma dirección, ya que es positiva. La media a lo largo del intervalo es casi igual a la aceleración en un momento dado. (b) La aceleración varía mucho, tal vez representando un paquete en la cinta transportadora de una oficina de correos que acelera hacia delante y hacia atrás, a medida que avanza. Es necesario considerar intervalos de tiempo pequeños (como de 0 a 1,0 s) con una aceleración constante o casi constante en tal situación.

INTERACTIVO

Aprenda sobre los gráficos de posición, velocidad y aceleración. Mueva al hombrecito de un lado a otro con el ratón y trace su movimiento. Establezca la posición, la velocidad o la aceleración y deje que la simulación mueva al hombre por usted. Visite este enlace (https://openstax.org/l/21movmansimul) para utilizar la simulación del hombre en movimiento.

3.4 Movimiento con aceleración constante

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Identificar qué ecuaciones de movimiento se van a utilizar para resolver las incógnitas.
- Utilizar las ecuaciones de movimiento apropiadas para resolver un problema de persecución de dos cuerpos.

Puede suponer que, cuanto mayor sea la aceleración de, por ejemplo, un auto que se aleja de una señal de pare, mayor será el desplazamiento del auto en un tiempo determinado. Sin embargo, no hemos desarrollado ninguna ecuación específica que relacione la aceleración y el desplazamiento. En esta sección, veremos algunas ecuaciones convenientes para las relaciones cinemáticas, empezando por las definiciones de desplazamiento, velocidad y aceleración. En primer lugar, investigamos un único objeto en movimiento, denominado movimiento de un solo cuerpo. Luego, investigamos el movimiento de dos objetos, denominado **problemas de persecución de dos cuerpos**.

Notación

En primer lugar, hagamos algunas simplificaciones en la notación. Tomar el tiempo inicial como cero, como si el tiempo se midiera con un cronómetro, es una gran simplificación. Como el tiempo transcurrido es $\Delta t = t_f - t_0$, al tomar $t_0 = 0$ significa que $\Delta t = t_f$, el tiempo final del cronómetro. Cuando el tiempo inicial se toma como cero, utilizamos el subíndice 0 para denotar los valores iniciales de posición y velocidad. Es decir, x_0 *es la posición inicial* y v_0 *es la velocidad inicial*. No ponemos subíndices en los valores finales. O sea, *t es el*

tiempo final, *x es la posición final* y *v es la velocidad final*. Esto da una expresión más simple para el tiempo transcurrido, $\Delta t = t$. También simplifica la expresión para el desplazamiento *x*, que ahora es $\Delta x = x - x_0$. Además, simplifica la expresión para el cambio en la velocidad, que ahora es $\Delta v = v - v_0$. En resumen, utilizando la notación simplificada, con el tiempo inicial tomado como cero,

$$\Delta t = t$$
$$\Delta x = x - x_0$$
$$\Delta v = v - v_0,$$

donde el subíndice 0 denota un valor inicial y la ausencia de subíndice denota un valor final en cualquier movimiento que se considere.

Ahora hacemos la importante suposición de que *la aceleración es constante*. Esta suposición nos permite evitar el uso del cálculo para encontrar la aceleración instantánea. Como la aceleración es constante, las aceleraciones media e instantánea son iguales, es decir,

$$\bar{a} = a = \text{constante}.$$

Por lo tanto, podemos utilizar el símbolo *a* para la aceleración en todos los tiempos. Suponer que la aceleración es constante no limita seriamente las situaciones que podemos estudiar ni degrada la exactitud de nuestro tratamiento. Por un lado, la aceleración *es* constante en un gran número de situaciones. Además, en muchas otras situaciones podemos describir el movimiento con exactitud suponiendo una aceleración constante igual a la aceleración media de ese movimiento. Por último, para los movimientos en los que la aceleración cambia drásticamente, como un auto que acelera hasta alcanzar la velocidad máxima y luego frena hasta detenerse, el movimiento puede considerarse en partes separadas, cada una de las cuales tiene su propia aceleración constante.

Desplazamiento y posición a partir de la velocidad

Para obtener nuestras dos primeras ecuaciones, empezamos con la definición de velocidad media:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Sustituir la notación simplificada por Δx y Δt produce

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t}.$$

Al resolver la *x* obtenemos

$$x = x_0 + \bar{v}t, \qquad \textbf{3.10}$$

donde la velocidad media es

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}. \qquad \textbf{3.11}$$

La ecuación $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ refleja el hecho de que, cuando la aceleración es constante, $\bar{v}$ es solo el simple promedio de las velocidades inicial y final. La Figura 3.18 ilustra este concepto gráficamente. En la parte (a) de la figura, la aceleración es constante y la velocidad aumenta a una tasa constante. La velocidad media durante el intervalo de 1 hora entre 40 km/h y 80 km/h es de 60 km/h:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{40\ \text{km/h} + 80\ \text{km/h}}{2} = 60\ \text{km/h}.$$

En la parte (b), la aceleración no es constante. Durante el intervalo de 1 hora, la velocidad está más cerca de 80 km/h que de 40 km/h. Por lo tanto, la velocidad media es mayor que en la parte (a).

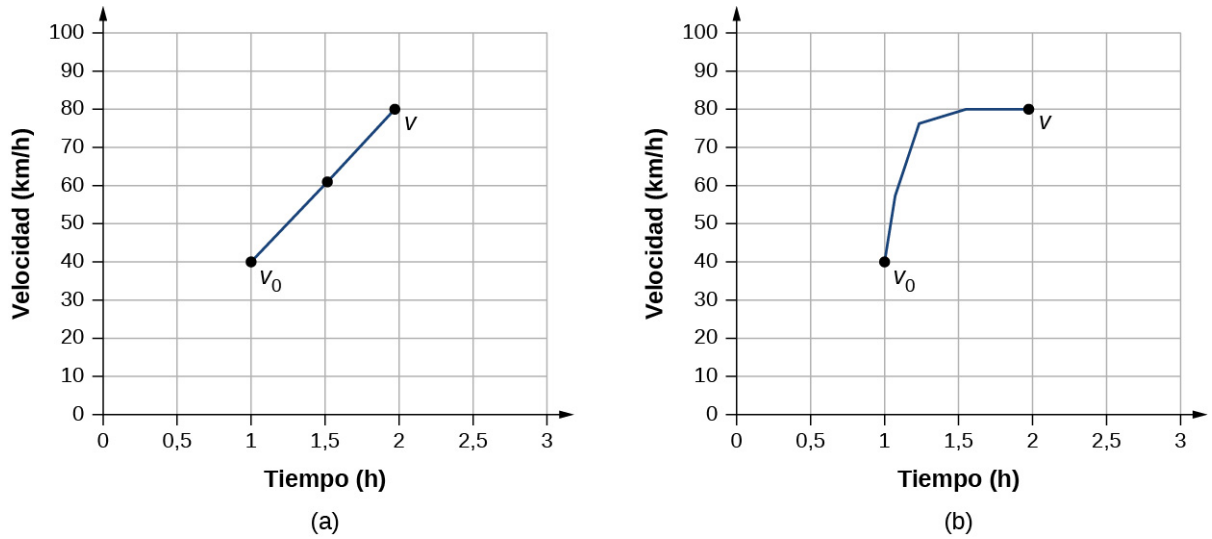


FIGURA 3.18 (a) Gráfico de velocidad en función del tiempo con aceleración constante que muestra las velocidades inicial y final v_0 y v. La velocidad media es $\frac{1}{2}(v_0 + v) = 60$ km/h. (b) Gráfico de velocidad en función del tiempo con una aceleración que cambia con el tiempo. La velocidad media no viene dada por $\frac{1}{2}(v_0 + v)$, pero es superior a 60 km/h.

Resolución de la velocidad final a partir de la aceleración y el tiempo

Podemos derivar otra ecuación útil al manipular la definición de aceleración:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Sustituir la notación simplificada por Δv y Δt nos da

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{(constante } a\text{)}.$$

Si se resuelve v, se obtiene

$$v = v_0 + at \quad \text{(constante } a\text{)}. \qquad \textbf{3.12}$$

EJEMPLO 3.7

Calcular la velocidad final

Un avión aterriza a una velocidad inicial de 70,0 m/s y luego desacelera a 1,50 m/s^2 durante 40,0 s. ¿Cuál es su velocidad final?

Estrategia

En primer lugar, identificamos los valores conocidos: $v_0 = 70$ m/s, $a = -1{,}50$ m/s^2, $t = 40$ s.

En segundo lugar, identificamos la incógnita; en este caso, es la velocidad final v_f.

Por último, determinamos qué ecuación utilizar. Para ello, averiguamos qué ecuación cinemática nos da la incógnita en función de los valores conocidos. Calculamos la velocidad final mediante el empleo de la Ecuación 3.12, $v = v_0 + at$.

Solución

Sustituya los valores conocidos y resuelva:

$$v = v_0 + at = 70{,}0 \text{ m/s} + \left(-1{,}50 \text{ m/s}^2\right)(40{,}0 \text{ s}) = 10{,}0 \text{ m/s}.$$

La Figura 3.19 es un esquema que muestra los vectores de aceleración y velocidad.

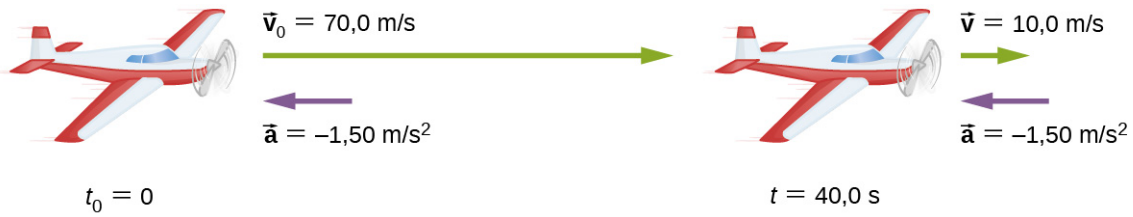


FIGURA 3.19 El avión aterriza con una velocidad inicial de 70,0 m/s y reduce su velocidad hasta una velocidad final de 10,0 m/s antes de dirigirse a la terminal. Observe que la aceleración es negativa porque su dirección es opuesta a la velocidad, que es positiva.

Importancia

La velocidad final es mucho menor que la inicial, como se desea al frenar, pero sigue siendo positiva (ver la figura). Con los motores a reacción, el empuje inverso puede mantenerse el tiempo suficiente para detener el avión y empezar a moverlo hacia atrás, lo que se indica con una velocidad final negativa, pero no es el caso aquí.

Además de ser útil en la resolución de problemas, la ecuación $v = v_0 + at$ nos permite conocer las relaciones entre la velocidad, la aceleración y el tiempo. Podemos ver, por ejemplo, que

- la velocidad final depende de la magnitud de la aceleración y de su duración;
- si la aceleración es cero, entonces la velocidad final es igual a la velocidad inicial ($v = v_0$), como era de esperar (en otras palabras, la velocidad es constante);
- si a es negativa, la velocidad final es menor que la inicial.

Todas estas observaciones se ajustan a nuestra intuición. Hay que tener en cuenta que siempre es útil examinar las ecuaciones básicas a tenor de nuestra intuición y experiencia para comprobar que efectivamente describen la naturaleza con exactitud.

Resolución de la posición final a partir de la aceleración constante

Podemos combinar las ecuaciones anteriores para encontrar una tercera ecuación que nos permita calcular la posición final de un objeto que experimenta una aceleración constante. Comenzamos con

$$v = v_0 + at.$$

Sumando v_0 a cada lado de esta ecuación y dividiendo entre 2 se obtiene

$$\frac{v_0 + v}{2} = v_0 + \frac{1}{2}at.$$

Dado que $\frac{v_0+v}{2} = \bar{v}$ para una aceleración constante, tenemos

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at.$$

Ahora sustituimos esta expresión por $\bar{v}$ en la ecuación del desplazamiento, $x = x_0 + \bar{v}t$, que produce

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (\text{constante } a)\,. \tag{3.13}$$

EJEMPLO 3.8

Calcular el desplazamiento de un objeto en aceleración

Los dragsters pueden alcanzar una aceleración media de 26,0 m/s^2. Supongamos que un dragster acelera desde el reposo a esta tasa durante 5,56 s como en la Figura 3.20. ¿Qué distancia recorre en este tiempo?



FIGURA 3.20 El piloto de Top Fuel del ejército estadounidense, Tony "The Sarge" (el sargento) Schumacher, comienza la carrera con el calentamiento de neumáticos controlado (créditos: teniente coronel William Thurmond. Foto cortesía del Ejército de los EE. UU.).

Estrategia

En primer lugar, dibujemos un esquema como la Figura 3.21. Se nos pide que encontremos el desplazamiento, que es x si tomamos x_0 como cero. (Piense en x_0 como la línea de salida de una carrera. Puede estar en cualquier lugar, pero lo llamamos cero y medimos todas las demás posiciones en relación con él). Podemos utilizar la ecuación $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ cuando identificamos v_0, a, y t del enunciado del problema.

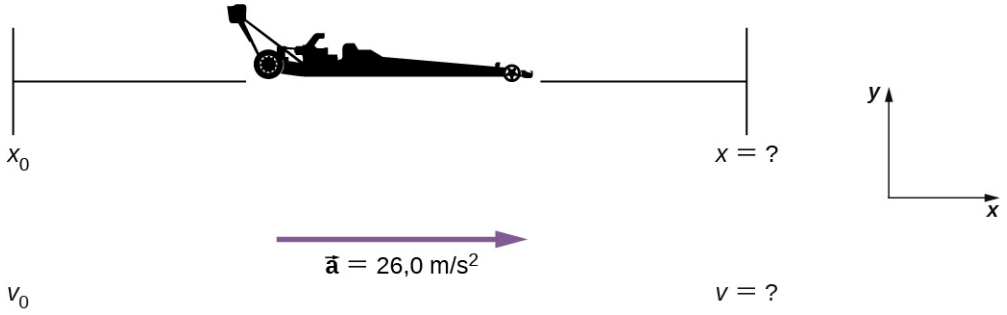


FIGURA 3.21 Esquema de un dragster en aceleración.

Solución

En primer lugar, tenemos que identificar los valores conocidos. Partir del reposo significa que $v_0 = 0$, a se da como 26,0 m/s^2 y t se da como 5,56 s.

En segundo lugar, sustituimos los valores conocidos en la ecuación para resolver la incógnita:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Dado que la posición y la velocidad iniciales son ambas cero, esta ecuación se simplifica a

$$x = \frac{1}{2}at^2.$$

Al sustituir los valores identificados de a y t obtenemos

$$x = \frac{1}{2}(26{,}0\ \text{m/s}^2)(5{,}56\ \text{s})^2 = 402\ \text{m}.$$

Importancia

Si convertimos 402 m a millas, encontramos que la distancia recorrida es muy cercana a un cuarto de milla, la distancia estándar para las carreras de aceleración. Por lo tanto, nuestra respuesta es razonable. Este es un desplazamiento impresionante para cubrir en solo 5,56 s, pero los dragsters de primera categoría pueden hacer un cuarto de milla incluso en menos tiempo. Si al dragster se le diera una velocidad inicial, esto añadiría otro término a la ecuación de la distancia. Si se utiliza la misma aceleración y tiempo en la ecuación, la distancia recorrida sería mucho mayor.

¿Qué más podemos aprender examinando la ecuación $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$? Podemos ver las siguientes relaciones:

- El desplazamiento depende del cuadrado del tiempo transcurrido cuando la aceleración no es cero. En el Ejemplo 3.8, el dragster cubre solo una cuarta parte de la distancia total en la primera mitad del tiempo transcurrido.
- Si la aceleración es cero, la velocidad inicial es igual a la velocidad media ($v_0 = \bar{v}$) y $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ se convierte en $x = x_0 + v_0 t$.

Resolución de la velocidad final a partir de la distancia y la aceleración

Se puede obtener una cuarta ecuación útil a partir de otra manipulación algebraica de las ecuaciones anteriores. Si resolvemos $v = v_0 + at$ para t, obtenemos

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Al sustituir esto y $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ en $x = x_0 + \bar{v}t$, obtenemos

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \text{(constante } a\text{)}. \tag{3.14}$$

EJEMPLO 3.9

Calcular la velocidad final

Calcule la velocidad final del dragster en el Ejemplo 3.8 sin utilizar información sobre el tiempo.

Estrategia

La ecuación $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ es ideal para esta tarea porque relaciona las velocidades, la aceleración y el desplazamiento, y no requiere información sobre el tiempo.

Solución

En primer lugar, identificamos los valores conocidos. Sabemos que $v_0 = 0$, ya que el dragster parte del reposo. También sabemos que $x - x_0 = 402$ m (esta era la respuesta en el Ejemplo 3.8). La aceleración media viene dada por $a = 26{,}0\ \text{m/s}^2$.

En segundo lugar, sustituimos los valores conocidos en la ecuación $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ y resolvemos v:

$$v^2 = 0 + 2\left(26{,}0\ \text{m/s}^2\right)(402\ \text{m}).$$

Por lo tanto,

$$v^2 = 2{,}09 \times 10^4\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v = \sqrt{2{,}09 \times 10^4\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 145\ \text{m/s}.$$

Importancia

Una velocidad de 145 m/s equivale a unos 522 km/h, o a unas 324 mi/h, pero incluso esta rapidez vertiginosa se queda corta para el récord del cuarto de milla. Además, tenga en cuenta que una raíz cuadrada tiene dos valores; tomamos el valor positivo para indicar una velocidad en la misma dirección que la aceleración.

El examen de la ecuación $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ aportaría más información sobre las relaciones generales entre las cantidades físicas:

- La velocidad final depende de cuán grande es la aceleración y la distancia sobre la que actúa.
- Para una aceleración fija, un auto que va el doble de rápido no se detiene simplemente en el doble de distancia. La distancia para detenerse es mayor. (Por eso tenemos zonas de velocidad reducida cerca de los colegios).

Cómo juntar las ecuaciones

En los siguientes ejemplos, seguimos explorando el movimiento unidimensional, pero en situaciones que requieren una manipulación ligeramente más algebraica. Los ejemplos también permiten conocer las técnicas de resolución de problemas. La nota que sigue se proporciona para facilitar la referencia a las ecuaciones necesarias. Tenga en cuenta que estas ecuaciones no son independientes. En muchas situaciones tenemos dos incógnitas y necesitamos dos ecuaciones del conjunto para resolver las incógnitas. Necesitamos tantas ecuaciones como incógnitas para resolver una situación determinada.

Resumen de las ecuaciones cinemáticas (constante *a*)

$$x = x_0 + \bar{v}t$$

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0)$$

Antes de mencionar los ejemplos, analicemos las ecuaciones con más atención para ver el comportamiento de la aceleración en valores extremos. Al reordenar la Ecuación 3.12, tenemos

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

De ello se deduce que, para un tiempo finito, si la diferencia entre las velocidades inicial y final es pequeña, la aceleración es pequeña, y se aproxima a cero en el límite en que las velocidades inicial y final son iguales. Por el contrario, en el límite $t \to 0$ para una diferencia finita entre las velocidades inicial y final, la aceleración se vuelve infinita.

Del mismo modo, al reordenar la Ecuación 3.14, podemos expresar la aceleración en términos de velocidad y desplazamiento:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)}.$$

Por lo tanto, para una diferencia finita entre las velocidades inicial y final la aceleración se hace infinita en el límite en que el desplazamiento se aproxima a cero. La aceleración se aproxima a cero en el límite en que la diferencia entre la velocidad inicial y final se aproxima a cero para un desplazamiento finito.

EJEMPLO 3.10

¿Hasta dónde llega un auto?

En el hormigón seco, un auto puede desacelerar a una tasa de 7,00 m/s^2, mientras que en el hormigón húmedo solo puede desacelerar a 5,00 m/s^2. Calcule las distancias necesarias para detener un auto que se desplaza a 30,0 m/s (unos 110 km/h) sobre (a) hormigón seco y (b) hormigón húmedo. (c) Repita ambos cálculos y halle el desplazamiento desde el punto en que el conductor ve que un semáforo se pone en rojo, teniendo en cuenta su tiempo de reacción de 0,500 s para poner el pie en el freno.

Estrategia

En primer lugar, tenemos que dibujar un esquema como en la Figura 3.22. Para determinar cuáles ecuaciones son las mejores para utilizar, tenemos que enumerar todos los valores conocidos e identificar exactamente lo que tenemos que resolver.

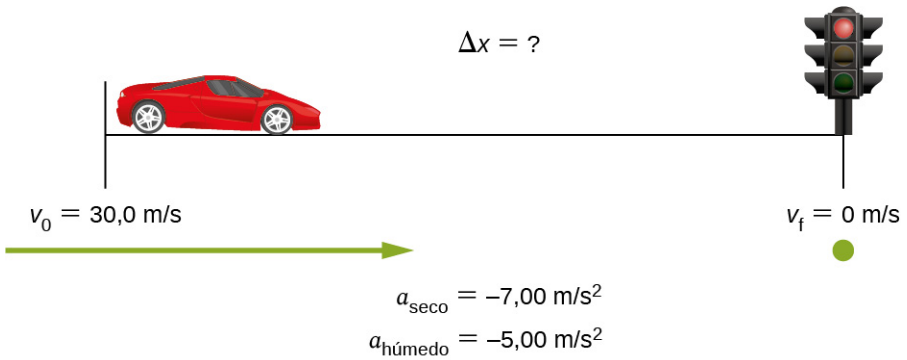


FIGURA 3.22 Esquema de ejemplo para visualizar la desaceleración y la distancia de frenado de un auto.

Solución

a. En primer lugar, tenemos que identificar los valores conocidos y lo que queremos resolver. Sabemos que v_0 = 30,0 m/s, v = 0, y a = -7,00 m/s^2 (a es negativa porque está en dirección opuesta a la velocidad). Tomamos x_0 como cero. Buscamos desplazamientos Δx, o x - x_0.
En segundo lugar, identificamos la ecuación que nos permitirá resolver el problema. La mejor ecuación a utilizar es

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Esta ecuación es la mejor porque incluye solo una incógnita, x. Conocemos los valores de todas las demás variables de esta ecuación. (Otras ecuaciones nos permitirían resolver x, pero requieren que conozcamos el tiempo de parada, t, que no conocemos. Podríamos utilizarlas, pero implicaría cálculos adicionales).
En tercer lugar, reordenamos la ecuación para resolver x:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

y sustituir los valores conocidos:

$$x - 0 = \frac{0^2 - (30{,}0\ \text{m/s})^2}{2(-7{,}00\text{m/s}^2)}.$$

Por lo tanto,

$$x = 64{,}3\ \text{m en hormigón seco.}$$

b. Esta parte puede resolverse exactamente de la misma manera que (a). La única diferencia es que la aceleración es de -5,00 m/s^2. El resultado es

$$x_{\text{húmedo}} = 90{,}0\ \text{m en el hormigón húmedo.}$$

c. Cuando el conductor reacciona, la distancia de parada es la misma que en (a) y (b) para el hormigón seco y húmedo. Por lo tanto, para responder a esta pregunta, tenemos que calcular la distancia que recorre el

auto durante el tiempo de reacción, y luego sumarlo al tiempo de parada. Es razonable suponer que la velocidad se mantiene constante durante el tiempo de reacción del conductor.
Para ello, una vez más, identificamos los valores conocidos y lo que queremos resolver. Sabemos que $\overline{v} = 30{,}0$ m/s, $t_{\text{reacción}} = 0{,}500$ s y $a_{\text{reacción}} = 0$. Tomamos $x_{0\text{-reacción}}$ como cero. Buscamos $x_{\text{reacción}}$.
En segundo lugar, como antes, identificamos la mejor ecuación a utilizar. En este caso, $x = x_0 + \overline{v}t$ funciona bien porque la única incógnita es x, que es lo que queremos resolver.
En tercer lugar, sustituimos los valores conocidos para resolver la ecuación:

$$x = 0 + (30{,}0 \text{ m/s})\,(0{,}500 \text{ s}) = 15{,}0 \text{ m}.$$

Esto significa que el auto se desplaza 15,0 m mientras el conductor reacciona, lo que hace que los desplazamientos totales en los dos casos de hormigón seco y húmedo sean 15,0 m mayores que si reacciona instantáneamente.
Por último, sumamos el desplazamiento durante el tiempo de reacción al desplazamiento en el momento del frenado (Figura 3.23),

$$x_{\text{frenado}} + x_{\text{reacción}} = x_{\text{total}},$$

y encontramos que (a) es de 64,3 m + 15,0 m = 79,3 m en seco y (b) es de 90,0 m + 15,0 m = 105 m en húmedo.

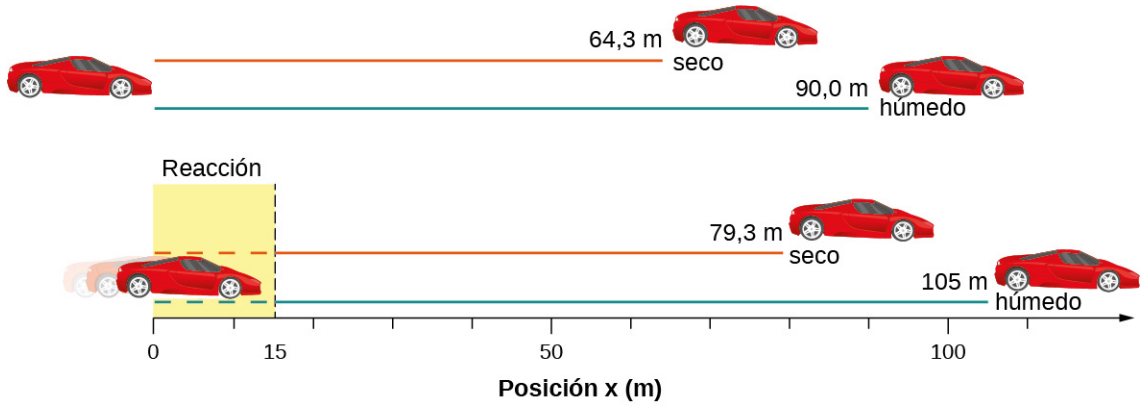


FIGURA 3.23 La distancia necesaria para detener un auto varía mucho, dependiendo de las condiciones de la carretera y del tiempo de reacción del conductor. Aquí se muestran las distancias de frenado para el pavimento seco y húmedo, tal y como se ha calculado en este ejemplo, para un auto que viaja inicialmente a 30,0 m/s. También se muestran las distancias totales recorridas desde el punto en que el conductor ve por primera vez el semáforo en rojo, suponiendo un tiempo de reacción de 0,500 s.

Importancia

Los desplazamientos encontrados en este ejemplo parecen razonables para detener un auto que se mueve rápidamente. Debería tardar más detener un auto en pavimento húmedo que en seco. Es interesante que el tiempo de reacción aumente significativamente los desplazamientos, pero lo más importante es el enfoque general de la resolución de problemas. Identificamos los valores conocidos y las cantidades a determinar, y luego encontramos una ecuación adecuada. Si hay más de una incógnita, necesitamos tantas ecuaciones independientes como incógnitas a resolver. A menudo hay más de una forma de resolver un problema. Las distintas partes de este ejemplo pueden, de hecho, resolverse por otros métodos, pero las soluciones presentadas aquí son las más breves.

EJEMPLO 3.11

Calcular el tiempo

Supongamos que un auto se incorpora al tráfico de la autopista en una rampa de 200 m de longitud. Si su velocidad inicial es de 10,0 m/s y acelera a 2,00 m/s^2, ¿cuánto tiempo tarda el auto en recorrer los 200 m de la rampa? (Esta información podría ser útil para un ingeniero de tráfico).

Estrategia

En primer lugar, trazamos un esquema como en la Figura 3.24. Se nos pide que resolvamos el tiempo *t*. Como antes, identificamos las cantidades conocidas para elegir una relación física conveniente (es decir, una ecuación con una incógnita, *t*).

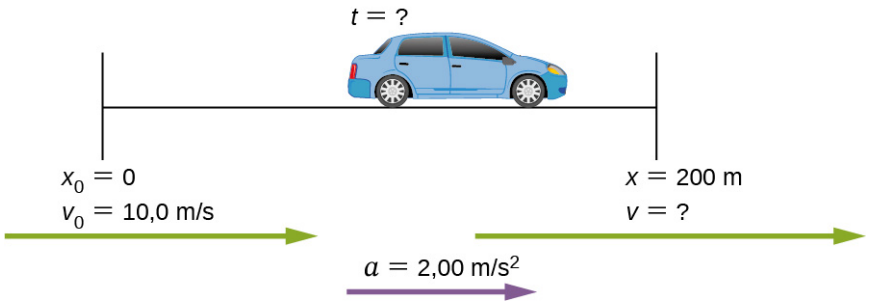


FIGURA 3.24 Esquema de un auto que acelera en una rampa de autopista.

Solución

Una vez más, identificamos los valores conocidos y lo que queremos resolver. Sabemos que $x_0 = 0$, $v_0 = 10\text{ m/s}$, $a = 2{,}00\text{ m/s}^2$, y $x = 200\text{ m}$.

Tenemos que resolver *t*. La ecuación $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ funciona mejor porque la única incógnita en la ecuación es la variable *t*, para la que necesitamos resolver. A partir de esta idea, vemos que, cuando introducimos los valores conocidos en la ecuación, obtenemos una ecuación cuadrática.

Tenemos que reordenar la ecuación para resolver la variable *t*, y luego sustituir los valores conocidos en la ecuación:

$$200\text{ m} = 0\text{ m} + (10{,}0\text{ m/s})t + \frac{1}{2}\left(2{,}00\text{ m/s}^2\right)t^2.$$

Ahora, simplificamos la ecuación. Las unidades de metros se cancelan porque están en cada término. Podemos conseguir que las unidades de los segundos se cancelen tomando $t = t\text{ s}$, donde *t* es la magnitud del tiempo y s es la unidad. Al hacerlo, nos deja

$$200 = 10t + t^2.$$

Luego, utilizamos la fórmula cuadrática para resolver *t*,

$$t^2 + 10t - 200 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que arroja dos soluciones: $t = 10{,}0$ y $t = -20{,}0$. Un valor negativo para el tiempo es poco razonable, ya que significaría que el evento ocurrió 20 s antes de que comenzara el movimiento. Podemos descartar esa solución. Por lo tanto,

$$t = 10{,}0\text{ s}.$$

Importancia

Siempre que una ecuación contiene una incógnita al cuadrado, hay dos soluciones. En algunos problemas, ambas soluciones tienen sentido; en otros, solo una solución es razonable. La respuesta de 10,0 s parece razonable para una rampa de acceso a una autopista típica.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.5

Un cohete acelera a una tasa de 20 m/s^2 durante el lanzamiento. ¿Cuánto tarda el cohete en alcanzar una

velocidad de 400 m/s?

EJEMPLO 3.12

Aceleración de una nave espacial

Una nave espacial ha dejado la órbita de la Tierra y se dirige a la Luna. Acelera a 20 m/s^2 durante 2 min y recorre una distancia de 1.000 km. ¿Cuál es la velocidad inicial y final de la nave espacial?

Estrategia

Se nos pide que encontremos la velocidad inicial y final de la nave espacial. Observando las ecuaciones cinemáticas, vemos que una ecuación no dará la respuesta. Debemos utilizar una ecuación cinemática para resolver una de las velocidades y sustituirla en otra ecuación cinemática para obtener la segunda velocidad. Así, resolvemos simultáneamente dos de las ecuaciones cinemáticas.

Solución

Primero resolvemos v_0 utilizando $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$1{,}0 \times 10^6 \text{ m} = v_0(120{,}0 \text{ s}) + \frac{1}{2}(20{,}0 \text{ m/s}^2)(120{,}0 \text{ s})^2$$

$$v_0 = 7133{,}3 \text{ m/s}.$$

Luego sustituimos v_0 en $v = v_0 + at$ para resolver la velocidad final:

$$v = v_0 + at = 7133{,}3 \text{ m/s} + (20{,}0 \text{ m/s}^2)(120{,}0 \text{ s}) = 9533{,}3 \text{ m/s}.$$

Importancia

Hay seis variables de desplazamiento, tiempo, velocidad y aceleración, que describen el movimiento en una dimensión. Las condiciones iniciales de un problema determinado pueden ser muchas combinaciones de estas variables. Debido a esta diversidad, las soluciones pueden no ser tan fáciles como simples sustituciones en una de las ecuaciones. Este ejemplo ilustra que las soluciones a la cinemática requerirían la resolución de dos ecuaciones cinemáticas simultáneas.

Una vez establecidos los fundamentos de la cinemática, podemos pasar a muchos otros ejemplos y aplicaciones interesantes. En el proceso de desarrollo de la cinemática, también hemos vislumbrado un enfoque general para la resolución de problemas que produce tanto respuestas correctas como conocimientos sobre las relaciones físicas. El siguiente nivel de complejidad en nuestros problemas de cinemática implica el movimiento de dos cuerpos interrelacionados, denominados *problemas de persecución de dos cuerpos*.

Problemas de persecución de dos cuerpos

Hasta ahora hemos visto ejemplos de movimiento en los que interviene un solo cuerpo. Incluso para el problema con dos autos y las distancias de parada en carreteras húmedas y secas, dividimos este problema en dos problemas separados para encontrar las respuestas. En un **problema de persecución de dos cuerpos**, los movimientos de los objetos están acoplados, es decir, la incógnita que buscamos depende del movimiento de ambos objetos. Para resolver estos problemas escribimos las ecuaciones de movimiento de cada objeto y las resolvemos simultáneamente para encontrar la incógnita. Esto se ilustra en la Figura 3.25.



FIGURA 3.25 Un escenario de persecución de dos cuerpos donde el auto 2 tiene una velocidad constante y el auto 1 está detrás con una aceleración constante. El auto 1 alcanza al auto 2 en un momento posterior.

El tiempo y la distancia necesarios para que el auto 1 alcance al auto 2 dependen de la distancia inicial a la que se encuentra el auto 1 con respecto al auto 2, así como de las velocidades de ambos autos y de la aceleración del auto 1. Para encontrar estas incógnitas hay que resolver las ecuaciones cinemáticas que describen el movimiento de ambos autos.

Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.13

Un guepardo atrapa a una gacela

Un guepardo espera escondido detrás de un arbusto. El guepardo ve pasar a una gacela a 10 m/s. En el momento en que la gacela pasa por delante del guepardo, este acelera desde el reposo a 4 m/s^2 para atrapar a la gacela. (a) ¿Cuánto tarda el guepardo en atrapar a la gacela? (b) ¿Cuál es el desplazamiento de la gacela y del guepardo?

Estrategia

Para resolver este problema utilizamos el conjunto de ecuaciones de la aceleración constante. Como hay dos objetos en movimiento, tenemos ecuaciones de movimiento separadas que describen cada animal. Sin embargo, lo que une las ecuaciones es un parámetro común que tiene el mismo valor para cada animal. Si analizamos el problema en detalle, está claro que el parámetro común a cada animal es su posición x en un tiempo posterior t. Dado que ambos comienzan en $x_0 = 0$, sus desplazamientos son los mismos en un tiempo posterior t, cuando el guepardo alcanza a la gacela. Si elegimos la ecuación de movimiento que resuelve el desplazamiento para cada animal, podemos entonces establecer las ecuaciones iguales entre sí y resolver la incógnita, que es el tiempo.

Solución

a. Ecuación para la gacela: la gacela tiene una velocidad constante, que es su velocidad media, ya que no está acelerando. Por lo tanto, utilizamos la Ecuación 3.10 con $x_0 = 0$:

$$x = x_0 + \bar{v}t = \bar{v}t.$$

Ecuación para el guepardo: el guepardo acelera desde el reposo, así que usamos la Ecuación 3.13 con $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2.$$

Ahora tenemos una ecuación de movimiento para cada animal con un parámetro común, que puede eliminarse para encontrar la solución. En este caso, resolvemos t:

$$x = \bar{v}t = \tfrac{1}{2}at^2$$
$$t = \tfrac{2\bar{v}}{a}.$$

La gacela tiene una velocidad constante de 10 m/s, que es su velocidad media. La aceleración del guepardo es de 4 m/s^2. Al evaluar t, el tiempo que tarda el guepardo en alcanzar a la gacela, tenemos

$$t = \frac{2\bar{v}}{a} = \frac{2(10)}{4} = 5 \text{ s}.$$

b. Para obtener el desplazamiento, utilizamos la ecuación de movimiento del guepardo o de la gacela, ya que ambas deberían dar la misma respuesta.
Desplazamiento del guepardo:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(4)(5)^2 = 50 \text{ m}.$$

Desplazamiento de la gacela:

$$x = \bar{v}t = 10(5) = 50 \text{ m}.$$

Vemos que ambos desplazamientos son iguales, como se esperaba.

Importancia

Es importante analizar el movimiento de cada objeto y utilizar las ecuaciones cinemáticas apropiadas para describir el movimiento individual. También es importante tener una buena perspectiva visual del problema de persecución de dos cuerpos para ver el parámetro común que une el movimiento de ambos objetos.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.6

Una bicicleta tiene una velocidad constante de 10 m/s. Una persona parte del reposo y comienza a correr para alcanzar a la bicicleta en 30 s cuando esta se encuentra en la misma posición que la persona. ¿Cuál es la aceleración de la persona?

3.5 Caída libre

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

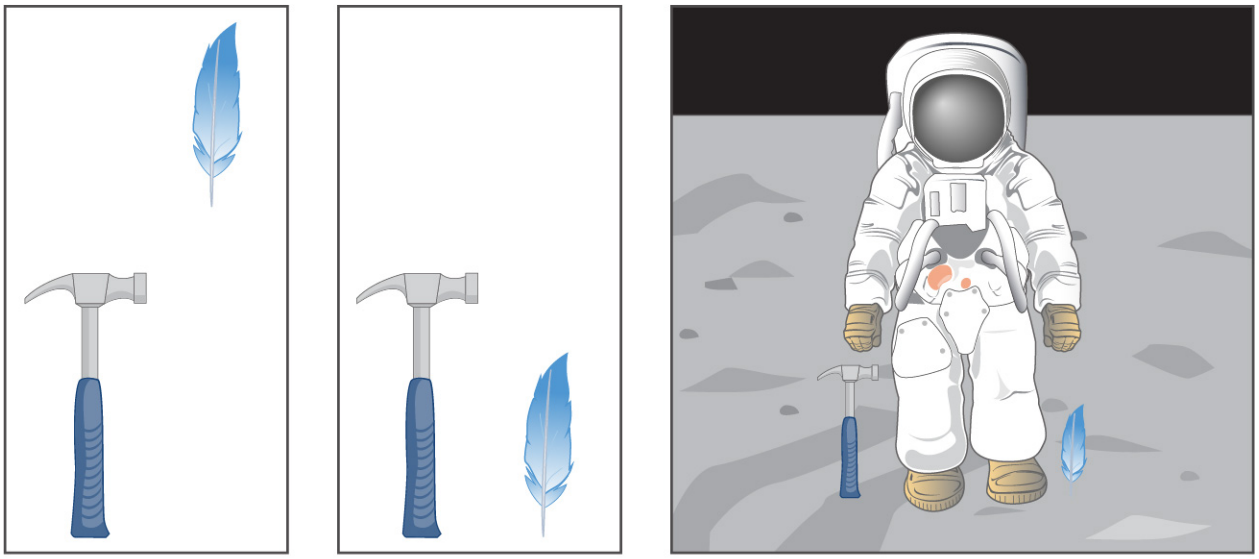
Al final de esta sección, podrá:

- Utilizar las ecuaciones cinemáticas con las variables y y g para analizar el movimiento de caída libre.
- Describir cómo cambian los valores de la posición, la velocidad y la aceleración durante una caída libre.
- Resolver la posición, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo cuando un objeto está en caída libre.

Una aplicación interesante de la Ecuación 3.4 a la Ecuación 3.14 es la llamada *caída libre*, que describe el movimiento de un objeto que cae en un campo gravitacional, como por ejemplo cerca de la superficie de la Tierra u otros cuerpos celestes de tamaño planetario. Supongamos que el cuerpo cae en línea recta perpendicular a la superficie, por lo que su movimiento es unidimensional. Por ejemplo, podemos calcular la profundidad de un pozo minero vertical al dejar caer una roca en él y escuchar cómo toca el fondo. Sin embargo, "caer", en el contexto de la caída libre, no implica necesariamente que el cuerpo se desplace de una altura mayor a otra menor. Si se lanza una pelota hacia arriba, las ecuaciones de la caída libre se aplican tanto a su ascenso como a su descenso.

Gravedad

El hecho más notable e inesperado sobre la caída de objetos es que si la resistencia del aire y la fricción son despreciables, entonces en un lugar determinado todos los objetos caen hacia el centro de la Tierra con la *misma aceleración constante, independientemente de su masa*. Este hecho determinado experimentalmente es inesperado porque estamos tan acostumbrados a los efectos de la resistencia del aire y la fricción que esperamos que los objetos ligeros caigan más lentamente que los pesados. Hasta que Galileo Galilei (1564-1642) demostró lo contrario, se creía que un objeto más pesado tiene una mayor aceleración en caída libre. Ahora sabemos que no es así. A falta de resistencia del aire, los objetos pesados llegan al suelo al mismo tiempo que los más ligeros cuando se dejan caer desde la misma altura como en la Figura 3.26.



En el aire En el vacío En el vacío (de la manera difícil)

FIGURA 3.26 El martillo y la pluma caen con la misma aceleración constante si la resistencia del aire es despreciable. Se trata de una característica general de la gravedad que no es exclusiva de la Tierra, como demostró el astronauta David R. Scott en 1971 en la Luna, donde la aceleración de la gravedad es solo de 1,67 m/s^2 y no hay atmósfera.

En el mundo real, la resistencia del aire hace que un objeto más ligero caiga más lentamente que un objeto más pesado del mismo tamaño. Una pelota de tenis llega al suelo después de una pelota de béisbol lanzada al mismo tiempo. (Puede ser difícil observar la diferencia si la altura no es grande). La resistencia del aire se opone al movimiento de un objeto a través del aire, y la fricción entre los objetos, como entre la ropa y el conducto de la lavandería o entre una piedra y un estanque en el que se deja caer, también se opone al movimiento entre ellos.

Para las situaciones ideales de estos primeros capítulos, un objeto que *cae sin resistencia del aire o fricción* se define como en **caída libre**. La fuerza de la gravedad hace que los objetos caigan hacia el centro de la Tierra. La aceleración de los objetos en caída libre se denomina, por tanto, **aceleración debida a la gravedad**. La aceleración debida a la gravedad es constante, lo que significa que podemos aplicar las ecuaciones cinemáticas a cualquier objeto que caiga y en el que la resistencia del aire y la fricción sean despreciables. Esto nos abre una amplia clase de situaciones interesantes.

La aceleración debida a la gravedad es tan importante que su magnitud recibe su propio símbolo, g. Es constante en cualquier lugar de la Tierra y tiene el valor promedio

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \quad (\text{o } 32{,}2 \text{ pies/s}^2).$$

Aunque g varía entre 9,78 m/s^2 y 9,83 m/s^2, dependiendo de la latitud, la altitud, las formaciones geológicas subyacentes y la topografía local, utilizaremos en este texto un valor medio de 9,8 m/s^2 redondeado a dos cifras significativas, a menos que se especifique lo contrario. Sin tener en cuenta estos efectos sobre el valor de g como resultado de la posición en la superficie de la Tierra, así como los efectos resultantes de la rotación de la Tierra, tomamos la dirección de la aceleración debida a la gravedad hacia abajo (hacia el centro de la Tierra). De hecho, su dirección *define* lo que llamamos vertical. Hay que tener en cuenta que el hecho de que la aceleración a en las ecuaciones cinemáticas tenga el valor $+g$ o $-g$ depende de cómo definamos nuestro sistema de coordenadas. Si definimos la dirección ascendente como positiva, entonces $a = -g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$, y si definimos la dirección descendente como positiva, entonces $a = g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$.

Movimiento unidimensional en función de la gravedad

La mejor manera de ver las características básicas del movimiento en el que interviene la gravedad es empezar con las situaciones más sencillas y luego progresar hacia otras más complejas. Así pues, empezamos

considerando un movimiento recto hacia arriba y hacia abajo sin resistencia del aire ni fricción. Estas suposiciones significan que la velocidad (si la hay) es vertical. Si se deja caer un objeto, sabemos que la velocidad inicial es cero cuando está en caída libre. Cuando el objeto ha dejado de estar en contacto con lo que lo sostenía o lanzaba, está en caída libre. Cuando el objeto es lanzado, tiene la misma rapidez inicial en caída libre que tenía antes de ser soltado. Cuando el objeto entra en contacto con el suelo o con cualquier otro objeto, ya no está en caída libre y su aceleración de g ya no es válida. En estas circunstancias, el movimiento es unidimensional y tiene una aceleración constante de magnitud g. Representamos el desplazamiento vertical con el símbolo y.

Ecuaciones cinemáticas para objetos en caída libre

Suponemos aquí que la aceleración es igual a $-g$ (con la dirección positiva hacia arriba).

$$v = v_0 - gt \tag{3.15}$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{3.16}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \tag{3.17}$$

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Caída libre

1. Decidir el signo de la aceleración de la gravedad. En la Ecuación 3.15 a la Ecuación 3.17, la aceleración g es negativa, lo que dice que la dirección positiva es hacia arriba y la dirección negativa es hacia abajo. En algunos problemas, sería útil tener la aceleración g como positiva, lo que indica que la dirección positiva es hacia abajo.
2. Dibuje un esquema del problema. Esto permite visualizar la física involucrada.
3. Registre los valores conocidos e incógnitas de la descripción del problema. Esto permite trazar una estrategia con el fin de seleccionar las ecuaciones adecuadas para resolver el problema.
4. Decidir cuál de la Ecuación 3.15 a la Ecuación 3.17 se va a utilizar para resolver las incógnitas.

EJEMPLO 3.14

Caída libre de una pelota

La Figura 3.27 muestra las posiciones de una pelota, a intervalos de 1 s, con una velocidad inicial de 4,9 m/s hacia abajo, que se lanza desde lo alto de un edificio de 98 m. (a) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que la pelota llegue al suelo? (b) ¿Cuál es la velocidad cuando llega al suelo?

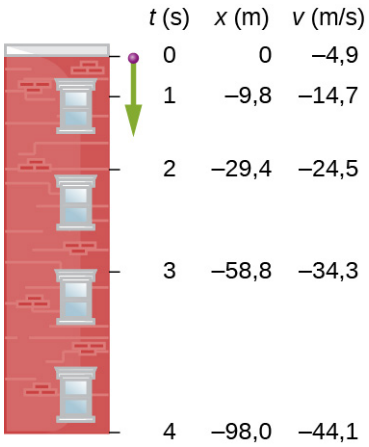


FIGURA 3.27 Las posiciones y velocidades a intervalos de 1 s de una pelota lanzada hacia abajo desde un edificio alto a 4,9 m/s.

Estrategia

Elija el origen en la parte superior del edificio con la dirección positiva hacia arriba y la dirección negativa hacia abajo. Para encontrar el tiempo en que la posición es -98 m, utilizamos la Ecuación 3.16, con $y_0 = 0, v_0 = -4{,}9$ m/s, y $g = 9{,}8$ m/s^2.

Solución

a. Sustituya los valores dados en la ecuación:

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$-98{,}0 \text{ m} = 0 - (4{,}9 \text{ m/s})t - \tfrac{1}{2}(9{,}8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Esto se simplifica a

$$t^2 + t - 20 = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática con raíces $t = -5{,}0$ s y $t = 4{,}0$ s. La raíz positiva es la que nos interesa, ya que el tiempo $t = 0$ es el tiempo en que la pelota se libera en la parte superior del edificio. (El tiempo $t = -5{,}0$ s representa el hecho de que una pelota lanzada hacia arriba desde el suelo habría estado en el aire durante 5,0 s cuando pasó por la parte superior del edificio moviéndose hacia abajo a 4,9 m/s).

b. Utilizando la Ecuación 3.15, tenemos

$$v = v_0 - gt = -4{,}9 \text{ m/s} - (9{,}8 \text{ m/s}^2)(4{,}0 \text{ s}) = -44{,}1 \text{ m/s}.$$

Importancia

Para las situaciones en las que se obtienen dos raíces de una ecuación cuadrática en la variable del tiempo, debemos observar el significado físico de ambas raíces para determinar cuál es la correcta. Dado que $t = 0$ corresponde al momento en que se lanzó la pelota, la raíz negativa correspondería a un momento anterior al lanzamiento de la pelota, lo que no es físicamente significativo. Cuando la pelota toca el suelo, su velocidad no es inmediatamente cero, pero en cuanto la pelota interactúa con el suelo, su aceleración no es g y se acelera con un valor diferente en un tiempo corto hasta la velocidad cero. Este problema muestra lo importante que es establecer el sistema correcto de coordenadas y mantener los signos de g en las ecuaciones cinemáticas.

EJEMPLO 3.15

Movimiento vertical de una pelota de béisbol

Un bateador batea una pelota de béisbol directamente hacia arriba en el plato del home y la pelota es atrapada

5,0 s después de ser golpeada como en la Figura 3.28. (a) ¿Cuál es la velocidad inicial de la pelota? (b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? (c) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima? (d) ¿Cuál es la aceleración en la parte superior de su recorrido? (e) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando es atrapada? Supongamos que la pelota es golpeada y atrapada en el mismo lugar.

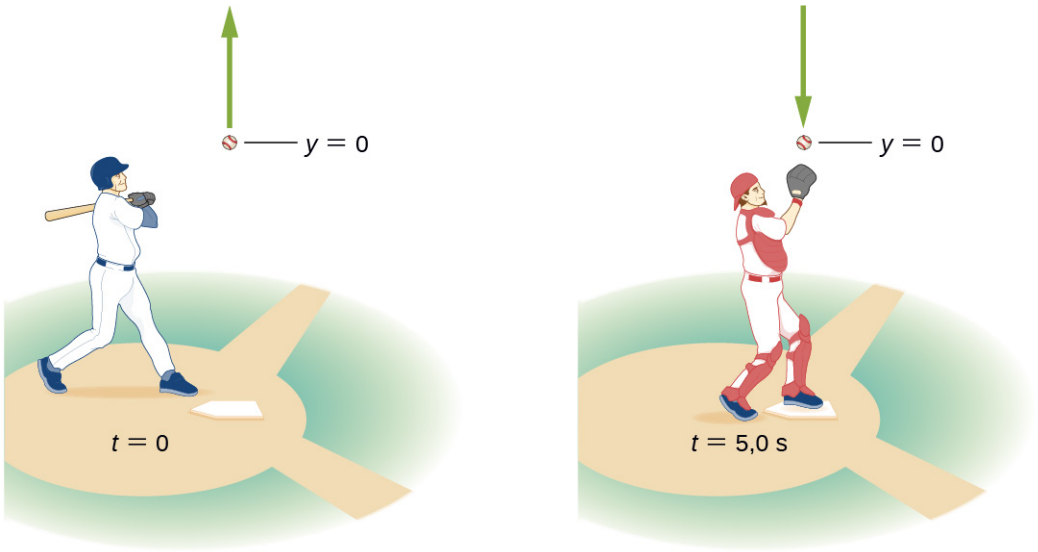


FIGURA 3.28 Una pelota de béisbol que se batea hacia arriba es atrapada por el receptor 5,0 s después.

Estrategia

Escoja un sistema de coordenadas con un eje y positivo que sea recto hacia arriba y con un origen que esté en el lugar donde se golpea y atrapa la pelota.

Solución

a. La Ecuación 3.16 nos da

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 0 + v_0(5{,}0\text{ s}) - \frac{1}{2}\left(9{,}8\text{ m/s}^2\right)(5{,}0\text{ s})^2,$$

que nos da $v_0 = 24{,}5$ m/s.

b. En la altura máxima, $v = 0$. Con $v_0 = 24{,}5$ m/s, la Ecuación 3.17 nos da

$$v^2 = v_0^2 - 2\,g(y - y_0)$$

$$0 = (24{,}5\text{ m/s})^2 - 2(9{,}8\text{ m/s}^2)(y - 0)$$

o

$$y = 30{,}6\text{ m}.$$

c. Para encontrar el tiempo en que $v = 0$, utilizamos la Ecuación 3.15:

$$v = v_0 - gt$$

$$0 = 24{,}5\text{ m/s} - (9{,}8\text{ m/s}^2)t.$$

Esto nos da $t = 2{,}5$ s. Como la pelota sube durante 2,5 s, el tiempo de caída es de 2,5 s.

d. La aceleración es de 9,8 m/s^2 en todas partes, incluso cuando la velocidad es cero en la parte superior del recorrido. Aunque la velocidad es cero en la parte superior, está cambiando a una tasa de 9,8 m/s^2 hacia abajo.

e. La velocidad en $t = 5{,}0$s se puede determinar con la Ecuación 3.15:

$$\begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ &= 24{,}5\ \text{m/s} - 9{,}8\ \text{m/s}^2(5{,}0\ \text{s}) \\ &= -24{,}5\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Importancia

La pelota vuelve con la rapidez que tenía cuando salió. Esta es una propiedad general de la caída libre para cualquier velocidad inicial. Utilizamos una única ecuación para ir del lanzamiento a la atrapada, y no tuvimos que dividir el movimiento entre dos segmentos, hacia arriba y hacia abajo. Estamos acostumbrados a pensar que el efecto de la gravedad es crear una caída libre hacia la Tierra. Es importante entender, como se ilustra en este ejemplo, que los objetos que se alejan de la Tierra hacia arriba también se encuentran en estado de caída libre.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.7

Un trozo de hielo se desprende de un glaciar y cae 30,0 m antes de llegar al agua. Suponiendo que cae libremente (no hay resistencia del aire), ¿cuánto tiempo tarda en caer al agua? ¿Qué cantidad aumenta más rápido, la rapidez del trozo de hielo o su distancia recorrida?

EJEMPLO 3.16

Propulsor de cohete

Un pequeño cohete con un propulsor despega y se dirige hacia arriba. Cuando a una altura de 5,0 km y una velocidad de 200,0 m/s, suelta su propulsor. (a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el propulsor? (b) ¿Cuál es la velocidad del propulsor a una altura de 6,0 km? Ignore la resistencia del aire.

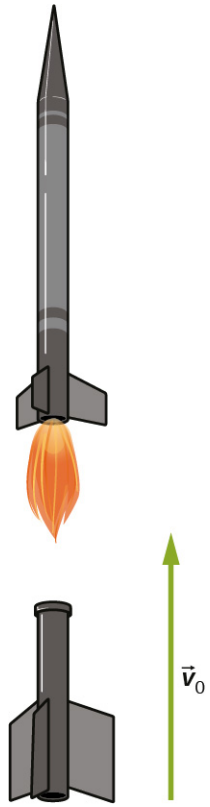


FIGURA 3.29 Un cohete libera su propulsor a una altura y velocidad determinadas. ¿A qué altura y a qué velocidad llega el propulsor?

Estrategia

Tenemos que seleccionar el sistema de coordenadas para la aceleración de la gravedad, que tomamos como negativa hacia abajo. Se nos da la velocidad inicial del propulsor y su altura. Consideramos el punto de liberación como el origen. Sabemos que la velocidad es cero en la posición máxima dentro del intervalo de aceleración; por lo tanto, la velocidad del propulsor es cero en su altura máxima, así que también podemos utilizar esta información. A partir de estas observaciones, utilizamos la Ecuación 3.17, que nos da la altura máxima del propulsor. También utilizamos la Ecuación 3.17 para dar la velocidad a 6,0 km. La velocidad inicial del propulsor es de 200,0 m/s.

Solución

a. A partir de la Ecuación 3.17, $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$. Con $v = 0$ y $y_0 = 0$, podemos resolver y:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(2{,}0 \times 10^2 \text{ m/s})^2}{2(9{,}8 \text{ m/s}^2)} = 2040{,}8 \text{ m}.$$

Esta solución da la altura máxima del propulsor en nuestro sistema de coordenadas, que tiene su origen en el punto de liberación, por lo que la altura máxima del propulsor es de aproximadamente 7,0 km.

b. Una altitud de 6,0 km corresponde a $y = 1{,}0 \times 10^3$ m en el sistema de coordenadas que estamos utilizando. Las otras condiciones iniciales son $y_0 = 0$, y $v_0 = 200{,}0$ m/s.
Tenemos, a partir de la Ecuación 3.17,

$$v^2 = (200{,}0 \text{ m/s})^2 - 2(9{,}8 \text{ m/s}^2)(1{,}0 \times 10^3 \text{ m}) \Rightarrow v = \pm 142{,}8 \text{ m/s}.$$

Importancia

Tenemos una solución positiva y otra negativa en (b). Como nuestro sistema de coordenadas tiene la dirección positiva hacia arriba, los +142,8 m/s corresponden a una velocidad positiva hacia arriba a 6000 m durante el tramo ascendente de la trayectoria del propulsor. El valor v = -142,8 m/s corresponde a la velocidad a 6000 m en el tramo descendente. Este ejemplo también es importante porque un objeto recibe una velocidad inicial en el origen de nuestro sistema de coordenadas, pero el origen está a una altitud sobre la superficie de la Tierra, lo que debe tenerse en cuenta al formar la solución.

INTERACTIVO

Visite este sitio (https://openstax.org/l/21equatgraph) para aprender a graficar polinomios. La forma de la curva cambia a medida que se ajustan las constantes. Visualice las curvas de los términos individuales (por ejemplo, $y = bx$) para ver cómo se suman para generar la curva polinómica.

3.6 Calcular la velocidad y el desplazamiento a partir de la aceleración

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Derivar las ecuaciones cinemáticas para una aceleración constante mediante el cálculo integral.
- Utilizar la formulación integral de las ecuaciones cinemáticas en el análisis del movimiento.
- Hallar la forma funcional de la velocidad en función del tiempo dada la función de aceleración.
- Hallar la forma funcional de la posición en función del tiempo dada la función de velocidad.

En esta sección se asume que usted tiene suficiente experiencia en cálculo para estar familiarizado con la integración. En Velocidad y rapidez instantáneas y Aceleración media e instantánea introducimos las funciones cinemáticas de velocidad y aceleración con el empleo de la derivada. Al tomar la derivada de la función de posición encontramos la función de velocidad; igualmente, al tomar la derivada de la función de velocidad encontramos la función de aceleración. Mediante el cálculo integral, podemos trabajar hacia atrás y calcular la función de velocidad a partir de la función de aceleración, y la función de posición a partir de la función de velocidad.

Ecuaciones cinemáticas del cálculo integral

Empecemos con una partícula con una aceleración a(t) que es una función conocida del tiempo. Dado que la derivada de tiempo de la función de velocidad es la aceleración,

$$\frac{d}{dt}v(t) = a(t),$$

podemos tomar la integral indefinida de ambos lados, al encontrar

$$\int \frac{d}{dt}v(t)dt = \int a(t)dt + C_1,$$

donde C_1 es una constante de integración. Dado que $\int \frac{d}{dt}v(t)dt = v(t)$, la velocidad viene dada por

$$v(t) = \int a(t)dt + C_1. \qquad 3.18$$

Del mismo modo, la derivada temporal de la función de posición es la función de velocidad,

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(t).$$

Por lo tanto, podemos utilizar las mismas manipulaciones matemáticas que acabamos de emplear y encontrar

$$x(t) = \int v(t)dt + C_2, \qquad 3.19$$

donde C_2 es una segunda constante de integración.

Podemos derivar las ecuaciones cinemáticas para una aceleración constante mediante el empleo de estas integrales. Con $a(t) = a$ una constante, y al hacer la integración en la Ecuación 3.18, encontramos

$$v(t) = \int adt + C_1 = at + C_1.$$

Si la velocidad inicial es $v(0) = v_0$, entonces

$$v_0 = 0 + C_1.$$

Luego, $C_1 = v_0$ y

$$v(t) = v_0 + at,$$

que es la Ecuación 3.12. Al sustituir esta expresión en la Ecuación 3.19 obtenemos

$$x(t) = \int (v_0 + at)dt + C_2.$$

Haciendo la integración, encontramos

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_2.$$

Si $x(0) = x_0$, tenemos

$$x_0 = 0 + 0 + C_2;$$

por lo tanto, $C_2 = x_0$. Al sustituir de nuevo en la ecuación de $x(t)$, tenemos finalmente

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

que es la Ecuación 3.13.

EJEMPLO 3.17

Movimiento de una lancha a motor

Una lancha a motor viaja a una velocidad constante de 5,0 m/s cuando comienza a desacelerar para llegar al muelle. Su aceleración es $a(t) = -\frac{1}{4}t$ m/s^3. (a) ¿Cuál es la función de velocidad de la lancha a motor? (b) ¿En qué momento la velocidad llega a cero? (c) ¿Cuál es la función de posición de la lancha a motor? (d) ¿Cuál es el desplazamiento de la lancha a motor desde que comienza a desacelerar hasta que la velocidad es cero? (e) Grafique las funciones de velocidad y posición.

Estrategia

(a) Para obtener la función de velocidad debemos integrar y utilizar las condiciones iniciales para encontrar la constante de integración. (b) Establecemos la función de velocidad igual a cero y resolvemos t. (c) De forma similar, debemos integrar para encontrar la función de posición y utilizar las condiciones iniciales para encontrar la constante de integración. (d) Como la posición inicial se toma como cero, solo tenemos que evaluar la función de posición en el momento en que la velocidad es cero.

Solución

Tomamos $t = 0$ como el tiempo en que la lancha comienza a desacelerar.

a. A partir de la forma funcional de la aceleración podemos resolver la Ecuación 3.18 para obtener $v(t)$:

$$v(t) = \int a(t)dt + C_1 = \int -\frac{1}{4}tdt + C_1 = -\frac{1}{8}t^2 + C_1.$$

En $t = 0$ tenemos $v(0) = 5{,}0$ m/s $= 0 + C_1$, por lo que $C_1 = 5{,}0$ m/s o $v(t) = 5{,}0 \text{ m/s} - \frac{1}{8}t^2$.

b. $v(t) = 0 = 5{,}0 \text{ m/s} - \frac{1}{8}t^2 \text{ m/s}^3 \Rightarrow t = 6{,}3 \text{ s}$

c. Resolvemos la Ecuación 3.19:

$$x(t) = \int v(t)dt + C_2 = \int (5{,}0 - \frac{1}{8}t^2)\,dt + C_2 = 5{,}0t \text{ m/s} - \frac{1}{24}t^3 \text{ m/s}^3 + C_2.$$

En $t = 0$, suponemos que $x(0) = 0 = x_0$, dado que solo nos interesa el desplazamiento a partir del momento en que la lancha comienza a desacelerar. Tenemos

$$x(0) = 0 = C_2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la posición es

$$x(t) = 5{,}0t - \frac{1}{24}t^3.$$

d. Como la posición inicial se toma como cero, solo tenemos que evaluar la función de posición en el momento en que la velocidad es cero. Esto ocurre en $t = 6{,}3$ s. Por lo tanto, el desplazamiento es

$$x(6{,}3) = 5{,}0(6{,}3 \text{ s}) - \frac{1}{24}(6{,}3 \text{ s})^3 = 21{,}1 \text{ m}.$$

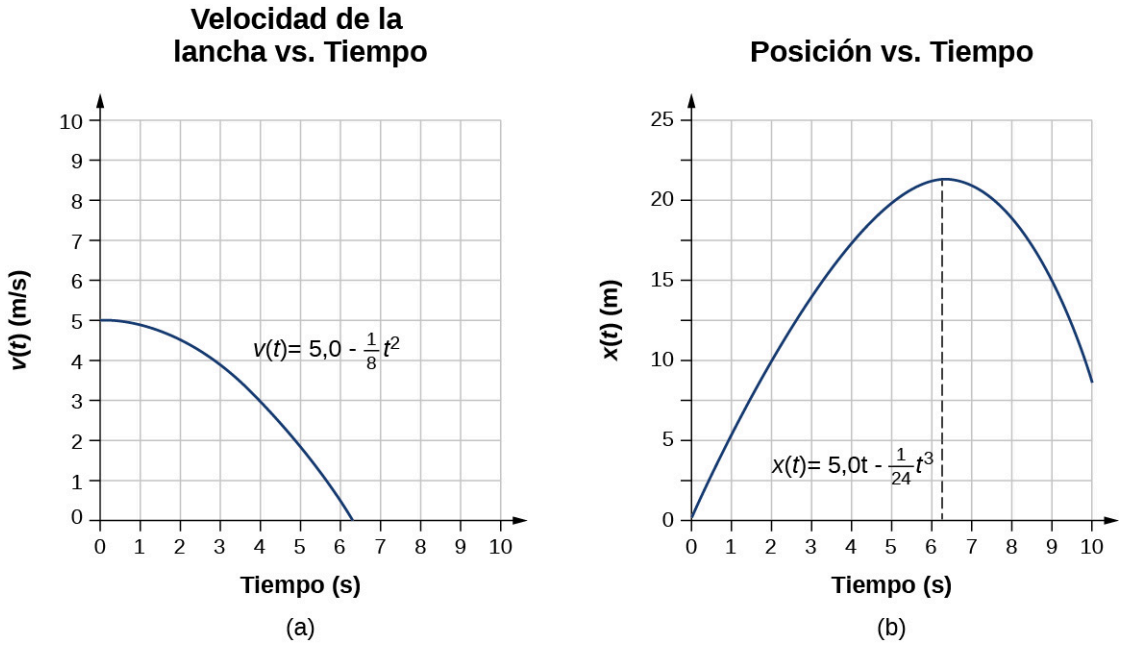


FIGURA 3.30 (a) Velocidad de la lancha a motor en función del tiempo. La lancha reduce su velocidad a cero en 6,3 s. En tiempos superiores a este, la velocidad se vuelve negativa, es decir, la lancha invierte su dirección. (b) Posición de la lancha a motor en función del tiempo. En t = 6,3 s, la velocidad es cero y la lancha se ha detenido. En momentos superiores a este, la velocidad se vuelve negativa, es decir, si la lancha sigue moviéndose con la misma aceleración, invierte la dirección y se dirige de vuelta al lugar de origen.

Importancia

La función de aceleración es lineal en el tiempo, por lo que la integración implica polinomios simples. En la Figura 3.30, vemos que si extendemos la solución más allá del punto en que la velocidad es cero, la velocidad se vuelve negativa y la lancha invierte su dirección. Esto nos dice que las soluciones pueden darnos información fuera de nuestro interés inmediato y que debemos tener cuidado al interpretarlas.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 3.8

Una partícula parte del reposo y tiene una función de aceleración $a(t) = \left(5 - \left(10\frac{1}{s}\right)t\right)\frac{m}{s^2}$. (a) ¿Cuál es la función de velocidad? (b) ¿Cuál es la función de posición? (c) ¿Cuándo es cero la velocidad?

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

aceleración debida a la gravedad aceleración de un objeto como resultado de la gravedad
aceleración instantánea aceleración en un momento determinado
aceleración media la tasa del cambio de la velocidad; el cambio de la velocidad en el tiempo
caída libre el estado de movimiento que resulta de la fuerza gravitatoria únicamente
cinemática la descripción del movimiento mediante propiedades como la posición, el tiempo, la velocidad y la aceleración
desplazamiento el cambio de posición de un objeto
desplazamiento total la suma de cada uno de los desplazamientos durante un tiempo determinado
distancia recorrida la longitud total del camino recorrido entre dos posiciones
posición la ubicación de un objeto en un momento determinado
problema de persecución de dos cuerpos un problema de cinemática en el que las incógnitas se calculan al resolver simultáneamente las ecuaciones cinemáticas de dos objetos en movimiento.
rapidez instantánea el valor absoluto de la velocidad instantánea
rapidez media la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo transcurrido
tiempo transcurrido la diferencia entre el tiempo final y el tiempo inicial
velocidad instantánea la velocidad en un instante o momento específico
velocidad media el desplazamiento dividido entre el tiempo en que se produce el desplazamiento a una aceleración constante

Ecuaciones Clave

Desplazamiento	$\Delta x = x_{\mathrm{f}} - x_{\mathrm{i}}$
Desplazamiento total	$\Delta x_{\mathrm{Total}} = \sum \Delta x_{\mathrm{i}}$
Velocidad media (para una aceleración constante)	$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$
Velocidad instantánea	$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
Rapidez media	$\text{Rapidez media} = \overline{s} = \frac{\text{Distancia total}}{\text{Tiempo transcurrido}}$
Rapidez instantánea	$\text{Rapidez instantánea} = \lvert v(t) \rvert$
Aceleración media	$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$
Aceleración instantánea	$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$
Posición a partir de la velocidad media	$x = x_0 + \overline{v}t$
Velocidad media	$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$
Velocidad a partir de la aceleración	$v = v_0 + at \ \ (\text{constante } a)$
Posición a partir de la velocidad y la aceleración	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \ \ (\text{constante } a)$

Velocidad a partir de la distancia	$v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0)$ (constante a)
Velocidad de caída libre	$v = v_0 - gt$ (positivo ascendente)
Altura de la caída libre	$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$
Velocidad de caída libre desde la altura	$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$
Velocidad a partir de la aceleración	$v(t) = \int a(t)dt + C_1$
Posición a partir de la velocidad	$x(t) = \int v(t)dt + C_2$

Resumen

3.1 Posición, desplazamiento y velocidad media

- La cinemática es la descripción del movimiento sin considerar sus causas. En este capítulo, se limita al movimiento ectilíneo, llamado movimiento unidimensional.
- El desplazamiento es el cambio de posición de un objeto. La unidad del SI para el desplazamiento es el metro. El desplazamiento tiene tanto dirección como magnitud.
- La distancia recorrida es la longitud total del camino recorrido entre dos posiciones.
- El tiempo se mide en términos de cambio. El tiempo entre dos puntos de posición x_1 y x_2 es $\Delta t = t_2 - t_1$. El tiempo transcurrido de un evento es $\Delta t = t_f - t_0$, donde t_f es el tiempo final y t_0 es el tiempo inicial. El tiempo inicial se toma como cero.
- La velocidad media $\overline{v}$ se define como el desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido. Si x_1, t_1 y x_2, t_2 son dos puntos temporales de posición, la velocidad media entre estos puntos es

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

3.2 Velocidad y rapidez instantáneas

- La velocidad instantánea es una función continua del tiempo y da la velocidad en cualquier momento durante el movimiento de una partícula. Podemos calcular la velocidad instantánea en un momento determinado al tomar la derivada de la función de posición, lo que nos da la forma funcional de la velocidad instantánea $v(t)$.
- La velocidad instantánea es un vector y puede ser negativa.
- La rapidez instantánea se encuentra al tomar el valor absoluto de la velocidad instantánea, y siempre es positiva.
- La rapidez media es la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo transcurrido.
- La pendiente de un gráfico de posición en función del tiempo en un momento determinado da la velocidad instantánea en ese momento.

3.3 Aceleración media e instantánea

- La aceleración es la tasa en la que cambia la velocidad. La aceleración es un vector: tiene tanto una magnitud como una dirección. La unidad del SI para la aceleración es el metro por segundo al cuadrado.
- La aceleración puede causarla un cambio en la magnitud o en la dirección de la velocidad, o en ambas.
- La aceleración instantánea $a(t)$ es una función continua del tiempo y produce la aceleración en cualquier momento específico durante el movimiento. Se calcula a partir de la derivada de la función de velocidad. La aceleración instantánea es la pendiente del gráfico de la velocidad en función del tiempo.
- La aceleración negativa (a veces llamada desaceleración) es la aceleración en la dirección negativa en el sistema de coordenadas elegido.

3.4 Movimiento con aceleración constante

- Al analizar el movimiento unidimensional con aceleración constante, identifique las cantidades conocidas y elija las ecuaciones

adecuadas para resolver las incógnitas. Para resolver las incógnitas se necesitan una o dos de las ecuaciones cinemáticas, dependiendo de las cantidades conocidas y desconocidas.
- Los problemas de persecución de dos cuerpos siempre requieren la resolución simultánea de dos ecuaciones para las incógnitas.

3.5 Caída libre

- Un objeto en caída libre experimenta una aceleración constante si la resistencia del aire es despreciable.
- En la Tierra, todos los objetos en caída libre tienen una aceleración g debida a la gravedad, cuyo promedio es $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.
- Para los objetos en caída libre, la dirección ascendente se toma normalmente como positiva para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

3.6 Calcular la velocidad y el desplazamiento a partir de la aceleración

- El cálculo integral nos brinda una formulación más completa de la cinemática.
- Si se conoce la aceleración $a(t)$, podemos utilizar el cálculo integral para derivar expresiones para la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.
- Si la aceleración es constante, las ecuaciones integrales se reducen a la Ecuación 3.12 y la Ecuación 3.13 para el movimiento con aceleración constante.

Preguntas Conceptuales

3.1 Posición, desplazamiento y velocidad media

1. Dé un ejemplo en el que haya distinciones claras entre la distancia recorrida, el desplazamiento y la magnitud del desplazamiento. Identifique específicamente cada cantidad en su ejemplo.
2. ¿En qué circunstancias la distancia recorrida equivale a la magnitud del desplazamiento? ¿Cuál es el único caso en el que la magnitud del desplazamiento y la distancia son exactamente iguales?
3. Las bacterias se mueven de un lado a otro utilizando sus flagelos (estructuras que parecen pequeñas colas). Se han observado valores de rapidez de hasta 50 µm/s (50×10^{-6} m/s). La distancia total recorrida por una bacteria es grande para su tamaño, mientras que su desplazamiento es pequeño. ¿Por qué?
4. Dé un ejemplo de un dispositivo utilizado para medir el tiempo e identifique qué cambio en ese dispositivo indica un cambio en el tiempo.
5. ¿El cuentakilómetros de un auto mide la distancia recorrida o el desplazamiento?
6. Durante un intervalo de tiempo determinado, la velocidad media de un objeto es cero. ¿Qué puede concluir sobre su desplazamiento en el intervalo de tiempo?

3.2 Velocidad y rapidez instantáneas

7. Existe una distinción entre la rapidez media y la magnitud de la velocidad media. Dé un ejemplo que ilustre la diferencia entre estas dos cantidades.
8. ¿El velocímetro de un auto mide la velocidad o la rapidez?
9. Si divide la distancia total recorrida en un viaje en auto (determinada por el cuentakilómetros) entre el tiempo transcurrido del recorrido, ¿está calculando la rapidez media o la magnitud de la velocidad media? ¿En qué circunstancias son iguales estas dos cantidades?
10. ¿Cómo se relacionan la velocidad instantánea y la rapidez instantánea? ¿En qué se diferencian?

3.3 Aceleración media e instantánea

11. ¿Es posible que la rapidez sea constante mientras la aceleración no sea cero?
12. ¿Es posible que la velocidad sea constante mientras la aceleración no sea cero? Explique.
13. Dé un ejemplo en el que la velocidad sea cero y la aceleración no.
14. Si un tren subterráneo se desplaza hacia la izquierda (tiene una velocidad negativa) y luego se detiene, ¿cuál es la dirección de su aceleración? ¿La aceleración es positiva o negativa?
15. Los signos más y menos se utilizan en el movimiento unidimensional para indicar la dirección. ¿Cuál es el signo de una aceleración que reduce la magnitud de una velocidad negativa? ¿De una velocidad positiva?

3.4 Movimiento con aceleración constante

16. Al analizar el movimiento de un solo objeto, ¿cuál es el número necesario de variables físicas conocidas que se necesitan para resolver las cantidades desconocidas con las ecuaciones

cinemáticas?

17. Enuncie dos escenarios de la cinemática de un solo objeto donde tres cantidades conocidas requieren dos ecuaciones cinemáticas para resolver las incógnitas.

3.5 Caída libre

18. ¿Cuál es la aceleración de una roca lanzada en línea recta hacia arriba? ¿En la cima de su vuelo? ¿En el camino hacia abajo? Supongamos que no hay resistencia del aire.

19. Un objeto que es lanzado hacia arriba cae de nuevo a la Tierra. Se trata de un movimiento unidimensional. (a) ¿Cuándo su velocidad es cero? (b) ¿Cambia su velocidad de dirección? (c) ¿Tiene la aceleración el mismo signo al subir que al bajar?

20. Supongamos que se lanza una piedra casi en línea recta a un coco en una palmera y que la piedra no golpea al coco en la subida, pero sí en la bajada. Descartando la resistencia del aire y la ligera variación horizontal del movimiento para tener en cuenta el golpe y el fallo del coco, ¿cómo se compara la rapidez de la roca cuando golpea el coco en el camino hacia abajo con la que habría tenido si hubiera golpeado el coco en el camino hacia arriba? ¿Es más probable que el coco se desprenda al subir o al bajar? Explique.

21. La gravedad de una caída depende de la rapidez con la que se golpea el suelo. Siendo todos los factores menos la aceleración de la gravedad iguales, ¿cuántas veces más podría producirse una caída segura en la Luna que en la Tierra (la aceleración gravitatoria en la Luna es aproximadamente una sexta parte de la de la Tierra)?

22. ¿Cuántas veces más alto podría saltar una astronauta en la Luna que en la Tierra si su rapidez de despegue es la misma en ambos lugares (la aceleración gravitatoria en la Luna es aproximadamente una sexta parte de la de la Tierra)?

3.6 Calcular la velocidad y el desplazamiento a partir de la aceleración

23. Cuando se da la función de aceleración, ¿qué otra información se necesita para encontrar la función de velocidad y la función de posición?

Problemas

3.1 Posición, desplazamiento y velocidad media

24. Consideremos un sistema de coordenadas en el que el eje de la x positiva se dirige verticalmente hacia arriba. ¿Cuáles son las posiciones de una partícula (a) 5,0 m directamente por encima del origen y (b) 2,0 m por debajo del origen?

25. Un auto se encuentra a 2,0 km al oeste de un semáforo en $t = 0$ y 5,0 km al este del semáforo en $t = 6{,}0$ min. Supongamos que el origen del sistema de coordenadas es el semáforo y la dirección de la x positiva es hacia el este. (a) ¿Cuáles son los vectores de posición del auto en estos dos momentos? (b) ¿Cuál es el desplazamiento del auto entre 0 min y 6,0 min?

26. El tren maglev de Shanghái conecta Longyang Road con el aeropuerto internacional de Pudong, a una distancia de 30 km. El trayecto dura un promedio de 8 minutos. ¿Cuál es la velocidad media del tren maglev?

27. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje de la x viene dada por $x(t) = 4{,}0 - 2{,}0t$ m. (a) ¿En qué momento la partícula cruza el origen? (b) ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula entre $t = 3{,}0$ s y $t = 6{,}0$ s?

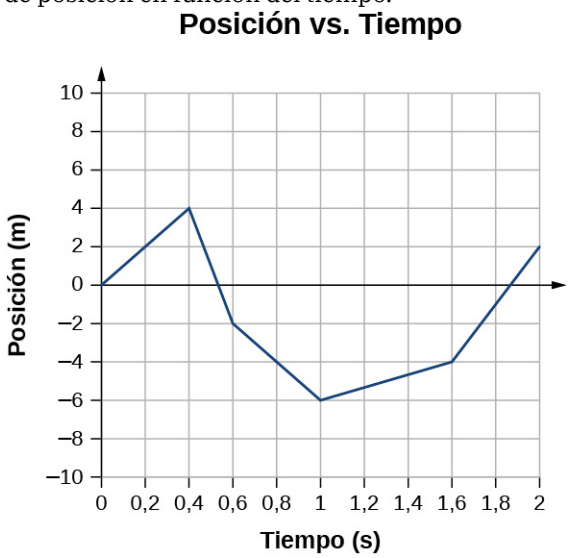
28. Un ciclista recorre 8,0 km hacia el este durante 20 minutos, luego gira y se dirige al oeste durante 8 minutos y 3,2 km. Finalmente, recorre 16 km hacia el este, lo que le lleva 40 minutos. (a) ¿Cuál es el desplazamiento final del ciclista? (b) ¿Cuál es su velocidad media?

29. El 15 de febrero de 2013, un meteorito superbólido (más brillante que el Sol) entró en la atmósfera terrestre sobre Cheliábinsk (Rusia) y estalló a 23,5 km de altura. Los testigos pudieron sentir el intenso calor de la bola de fuego, y la onda expansiva de la explosión hizo volar las ventanas de los edificios. La onda expansiva tardó aproximadamente 2 minutos y 30 segundos en alcanzar el nivel del suelo. La onda expansiva se desplazó a 10° sobre el horizonte. a) ¿Cuál fue la velocidad media de la onda expansiva? b) Compárela con la velocidad del sonido, que es de 343 m/s a nivel del mar.

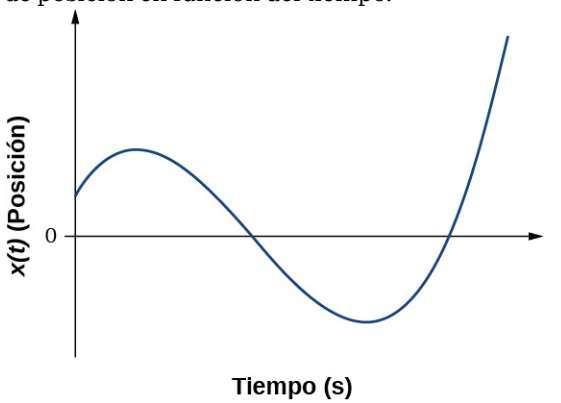
3.2 Velocidad y rapidez instantáneas

30. Una marmota corre 20 m hacia la derecha en 5 s, luego gira y corre 10 m hacia la izquierda en 3 s. (a) ¿Cuál es la velocidad media de la marmota? (b) ¿Cuál es su rapidez media?

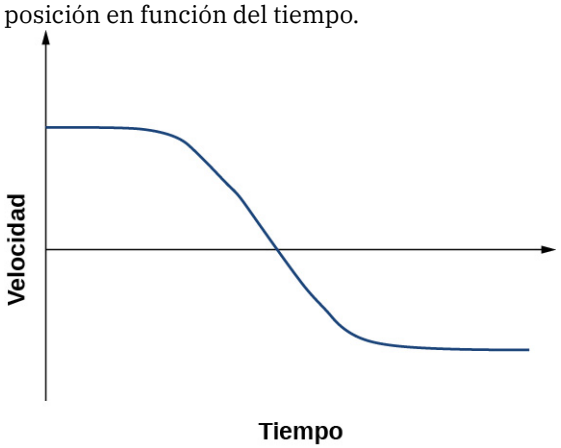
31. Trace un esquema del gráfico de velocidad en función del tiempo a partir del siguiente gráfico de posición en función del tiempo.



32. Trace un esquema del gráfico de velocidad en función del tiempo a partir del siguiente gráfico de posición en función del tiempo.



33. Dado el siguiente gráfico de velocidad en función del tiempo, haga un esquema del gráfico de posición en función del tiempo.



34. Un objeto tiene una función de posición $x(t) = 5t$ m. (a) ¿Cuál es la velocidad en función del tiempo? (b) Grafique la función de posición y la función de velocidad.

35. Una partícula se mueve a lo largo del eje de la x según $x(t) = 10t - 2t^2$ m. (a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 2$ s y $t = 3$ s? (b) ¿Cuál es la rapidez instantánea en esos momentos? (c) ¿Cuál es la velocidad media entre $t = 2$ s y $t = 3$ s?

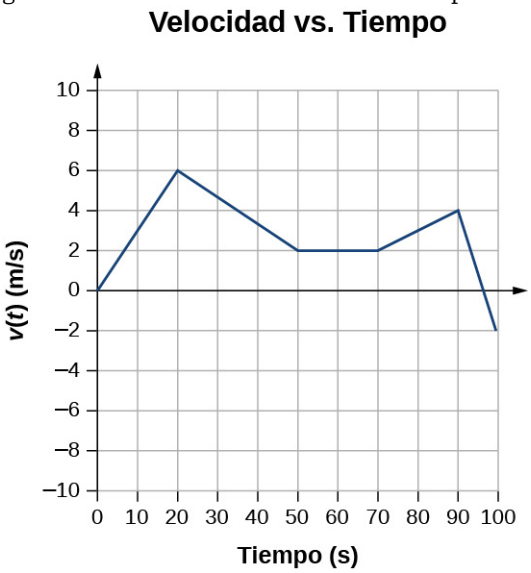
36. **Resultados poco razonables.** Una partícula se mueve a lo largo del eje de la x según $x(t) = 3t^3 + 5t$. ¿En qué momento la velocidad de la partícula es igual a cero? ¿Esto es razonable?

3.3 Aceleración media e instantánea

37. Un guepardo puede acelerar desde el reposo hasta una rapidez de 30,0 m/s en 7,00 s. ¿Cuál es su aceleración?

38. El Dr. John Paul Stapp fue un oficial de las Fuerzas Aéreas de los EE. UU. que estudió los efectos de la aceleración extrema en el cuerpo humano. El 10 de diciembre de 1954, Stapp se montó en un trineo cohete, aceleró desde el reposo hasta una velocidad máxima de 282 m/s (1.015 km/h) en 5,00 s y regresó al reposo de forma brusca en solo 1,40 s. Calcule su (a) aceleración en su dirección de movimiento y (b) aceleración opuesta a su dirección de movimiento. Exprese cada una en múltiplos de g (9,80 m/s^2) tomando su relación con la aceleración de la gravedad.

39. Haga un esquema del gráfico de la aceleración en función del tiempo a partir del siguiente gráfico de velocidad en función del tiempo.



40. Una persona sale con su auto del garaje con una aceleración de 1,40 m/s^2. (a) ¿Cuánto tarda en

alcanzar una rapidez de 2,00 m/s? (b) Si frena hasta detenerse en 0,800 s, ¿cuál es su aceleración?

41. Supongamos que un misil balístico intercontinental pasa del reposo a una rapidez suborbital de 6,50 km/s en 60,0 s (la rapidez y el tiempo reales son clasificados). ¿Cuál es su aceleración media en metros por segundo y en múltiplos de g (9,80 m/s^2)?

42. Un avión, que parte del reposo, se desplaza por la pista con aceleración constante durante 18 s y luego despega a una rapidez de 60 m/s. ¿Cuál es la aceleración media del avión?

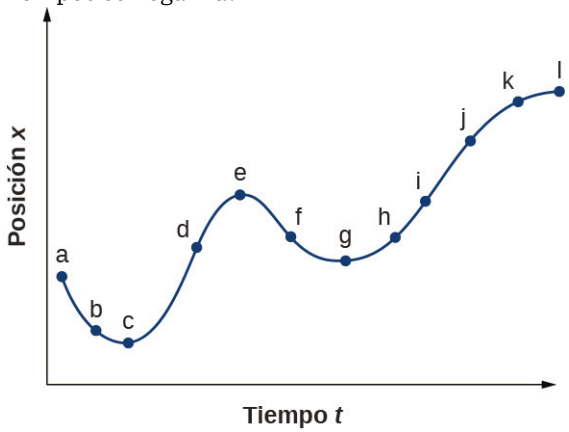
3.4 Movimiento con aceleración constante

43. Una partícula se mueve en línea recta a una velocidad constante de 30 m/s. ¿Cuál es su desplazamiento entre t = 0 y t = 5,0 s?

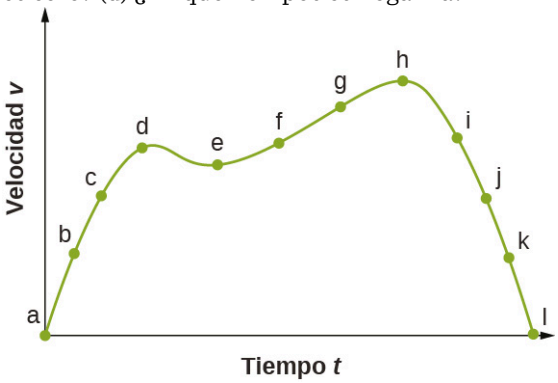
44. Una partícula se mueve en línea recta con una velocidad inicial de 0 m/s y una aceleración constante de 30 m/s^2. Si $x = 0$ en $t = 0$, ¿cuál es la posición de la partícula en t = 5 s?

45. Una partícula se mueve en línea recta con una velocidad inicial de 30 m/s y una aceleración constante de 30 m/s^2. (a) ¿Cuál es su desplazamiento en t = 5 s? (b) ¿Cuál es su velocidad en ese mismo momento?

46. (a) Haga un esquema del gráfico de la velocidad en función del tiempo correspondiente al gráfico del desplazamiento en función del tiempo que se da en la siguiente figura. (b) Identifique el tiempo o los tiempos (t_a, t_b, t_c, etc.) en los que la velocidad instantánea tiene el mayor valor positivo. (c) ¿En qué tiempos es cero? (d) ¿En qué tiempos es negativa?



47. (a) Haga un gráfico de la aceleración en función del tiempo correspondiente al gráfico de la velocidad en función del tiempo que se da en la siguiente figura. (b) Identifique el tiempo o los tiempos (t_a, t_b, t_c, etc.) en los que la aceleración tiene el mayor valor positivo. (c) ¿En qué tiempos es cero? (d) ¿En qué tiempos es negativa?



48. Una partícula tiene una aceleración constante de 6,0 m/s^2. (a) Si su velocidad inicial es de 2,0 m/s, ¿en qué tiempo su desplazamiento es de 5,0 m? (b) ¿Cuál es su velocidad en ese tiempo?

49. En t = 10 s, una partícula se mueve de izquierda a derecha con una rapidez de 5,0 m/s. En t = 20 s, la partícula se mueve de derecha a izquierda con una rapidez de 8,0 m/s. Suponiendo que la aceleración de la partícula sea constante, determine (a) su aceleración, (b) su velocidad inicial y (c) el instante en que su velocidad es cero.

50. Una pelota bien lanzada se atrapa con un guante bien acolchado. Si la aceleración de la pelota es $2{,}10 \times 10^4$ m/s^2, y 1,85 ms ($1 \text{ ms} = 10^{-3}$ s) transcurre desde que la pelota toca por primera vez el guante hasta que se detiene, ¿cuál es la velocidad inicial de la pelota?

51. Una bala en una pistola se acelera desde la recámara hasta el final del cañón a una tasa media de $6{,}20 \times 10^5$ m/s^2 en $8{,}10 \times 10^{-4}$ s. ¿Cuál es su velocidad de salida (es decir, su velocidad final)?

52. a) Un tren ligero de cercanías acelera a una tasa de 1,35 m/s^2. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar su velocidad máxima de 80,0 km/h, partiendo del reposo? b) El mismo tren desacelera, por lo general, a una tasa de 1,65 m/s^2. ¿Cuánto tiempo tarda en detenerse desde su velocidad máxima? (c) En caso de emergencias, el tren puede desacelerar más rápidamente, hasta detenerse desde 80,0 km/h en 8,30 s. ¿Cuál es su aceleración de emergencia en metros por segundo al cuadrado?

53. Al entrar en una autopista, un auto acelera desde el reposo a una tasa de 2,40 m/s^2 durante 12,0 s. (a) Trace un esquema de la situación. (b) Enumere los valores conocidos de este problema. (c) ¿Qué distancia recorre el auto en

esos 12,0 s? Para resolver esta parte, primero identifique la incógnita y luego indique cómo ha elegido la ecuación adecuada para resolverla. Después de elegir la ecuación, muestre sus pasos para resolver la incógnita, compruebe sus unidades y discuta si la respuesta es razonable. (d) ¿Cuál es la velocidad final del auto? Resuelva esta incógnita de la misma manera que en (c), mostrando todos los pasos explícitamente.

54. **Resultados poco razonables.** Al final de una carrera, una corredora desacelera desde una velocidad de 9,00 m/s a una tasa de 2,00 m/s^2. (a) ¿Qué distancia recorre en los siguientes 5,00 s? (b) ¿Cuál es su velocidad final? (c) Evalúe el resultado. ¿Tiene sentido?

55. La sangre se acelera desde el reposo hasta 30,0 cm/s en una distancia de 1,80 cm por el ventrículo izquierdo del corazón. (a) Trace un esquema de la situación. (b) Enumere los valores conocidos de este problema. (c) ¿Cuánto tiempo tarda la aceleración? Para resolver esta parte, primero identifique la incógnita y luego explique cómo eligió la ecuación apropiada para resolverla. Después de elegir la ecuación, muestre sus pasos para resolver la incógnita, mediante la comprobación de sus unidades. (d) ¿Es razonable la respuesta cuando se compara con el tiempo de un latido?

56. Durante un tiro de golpe, un jugador de hockey acelera el disco desde una velocidad de 8,00 m/s hasta 40,0 m/s en la misma dirección. Si este tiro necesita $3{,}33 \times 10^{-2}$ s, ¿cuál es la distancia sobre la que acelera el disco?

57. Una potente motocicleta puede acelerar desde el reposo hasta 26,8 m/s (100 km/h) en solo 3,90 s. (a) ¿Cuál es su aceleración media? (b) Suponiendo una aceleración constante, ¿qué distancia recorre en ese tiempo?

58. Los trenes de carga solo pueden producir una aceleración relativamente pequeña. (a) ¿Cuál es la velocidad final de un tren de carga que acelera a una tasa de $0{,}0500\ m/s^2$ durante 8,00 min, que parte de una velocidad inicial de 4,00 m/s? (b) Si el tren puede frenar a una tasa de $0{,}550\ m/s^2$, ¿cuánto tiempo tardará en detenerse a partir de esta velocidad? (c) ¿Qué distancia recorrerá en cada caso?

59. Un proyectil de fuegos artificiales acelera desde el reposo hasta una velocidad de 65,0 m/s en una distancia de 0,250 m. (a) Calcule la aceleración. (b) ¿Cuánto tiempo duró la aceleración?

60. Un cisne en un lago se eleva y bate las alas, y corre sobre el agua. (a) Si el cisne debe alcanzar una velocidad de 6,00 m/s para despegar y acelera desde el reposo a una tasa media de $0{,}35\ m/s^2$, ¿qué distancia recorrerá antes de volar? b) ¿Cuánto tiempo tarda?

61. El cerebro de un pájaro carpintero está especialmente protegido de las grandes aceleraciones gracias a algunas uniones tendinosas en el interior del cráneo. Mientras picotea en un árbol, la cabeza del pájaro carpintero se detiene desde una velocidad inicial de 0,600 m/s en una distancia de solo 2,00 mm. (a) Calcule la aceleración en metros por segundo al cuadrado y en múltiplos de *g*, donde $g = 9{,}80\ m/s^2$. (b) Calcule el tiempo de parada. (c) Los tendones que protegen el cerebro se estiran, lo que hace que su distancia de parada sea de 4,50 mm (mayor que la de la cabeza y, por tanto, menor que la aceleración del cerebro). ¿Cuál es la aceleración del cerebro, expresada en múltiplos de *g*?

62. Un incauto jugador de fútbol choca con un poste de portería acolchado mientras corre a una velocidad de 7,50 m/s y se detiene por completo tras comprimir el acolchado y su cuerpo 0,350 m. (a) ¿Cuál es su aceleración? (b) ¿Cuánto dura la colisión?

63. Lanzan un paquete de ayuda desde un avión de carga y aterriza en el bosque. Si suponemos que la rapidez del paquete de ayuda en el impacto es de 54 m/s (123 mph), ¿cuál es su aceleración? Supongamos que los árboles y la nieve lo detienen a una distancia de 3,0 m.

64. Un tren expreso pasa por una estación. Entra con una velocidad inicial de 22,0 m/s y desacelera a una tasa de $0{,}150\ m/s^2$ a medida que pasa. La estación mide 210,0 m de longitud. (a) ¿A qué velocidad va cuando la parte delantera del tren sale de la estación? (b) ¿A cuánto tiempo está la parte delantera del tren en la estación? (c) Si el tren mide 130 m de longitud, ¿cuál es la velocidad del extremo del tren al salir? (d) ¿Cuándo sale el extremo del tren de la estación?

65. **Resultados poco razonables.** Los dragsters pueden alcanzar una rapidez máxima de 145,0 m/s en solo 4,45 s. (a) Calcule la aceleración media de este dragster. (b) Calcule la velocidad final de este dragster partiendo del reposo y acelerando a la tasa encontrada en (a) durante 402,0 m (un cuarto de milla) sin utilizar ninguna información sobre el tiempo. (c) ¿Por qué la velocidad final es mayor que la utilizada

para encontrar la aceleración media? (*Pista*: Considere si la suposición de aceleración constante es válida para un dragster. En caso contrario, explique si la aceleración sería mayor al principio o al final de la carrera y qué efecto tendría eso en la velocidad final).

3.5 Caída libre

66. Calcule el desplazamiento y la velocidad en los tiempos de (a) 0,500 s, (b) 1,00 s, (c) 1,50 s y (d) 2,00 s para una pelota lanzada en línea recta con una velocidad inicial de 15,0 m/s. Tome el punto de liberación como $y_0 = 0$.

67. Calcule el desplazamiento y la velocidad en los tiempos de (a) 0,500 s, (b) 1,00 s, (c) 1,50 s, (d) 2,00 s y (e) 2,50 s para una roca lanzada en línea recta con una velocidad inicial de 14,0 m/s desde el puente Verrazano Narrows en la ciudad de Nueva York. La calzada de este puente está a 70,0 m por encima del agua.

68. Un árbitro de baloncesto lanza el balón hacia arriba para dar el aviso de inicio. ¿A qué velocidad debe saltar un jugador de baloncesto para elevarse 1,25 m sobre el suelo en un intento por atrapar el balón?

69. Un helicóptero de rescate sobrevuela sobre una persona cuya embarcación se ha hundido. Uno de los socorristas lanza un salvavidas directamente hacia la víctima, a una velocidad inicial de 1,40 m/s y observa que tarda 1,8 s en llegar al agua. (a) Enumere los valores conocidos de este problema. (b) ¿A qué altura sobre el agua se soltó el salvavidas? Hay que tener en cuenta que la corriente descendente del helicóptero reduce los efectos de la resistencia del aire en la caída del salvavidas, por lo que una aceleración igual a la de la gravedad es razonable.

70. **Resultados poco razonables.** Un delfín en un espectáculo acuático salta en línea recta fuera del agua a una velocidad de 15,0 m/s. (a) Enumere los valores conocidos de este problema. (b) ¿A qué altura se eleva su cuerpo por encima del agua? Para resolver esta parte, primero hay que observar que la velocidad final ya es un valor conocido, e identificar su valor. Luego, identifique la incógnita y comente cómo ha elegido la ecuación adecuada para resolverla. Después de elegir la ecuación, muestre sus pasos para resolver la incógnita, compruebe las unidades y analice si la respuesta es razonable. (c) ¿Cuánto tiempo está el delfín en el aire? Descarte cualquier efecto derivado de su tamaño u orientación.

71. Una clavadista salta directamente desde un trampolín, esquiva el trampolín en la bajada y cae con los pies por delante en una piscina. Comienza con una velocidad de 4,00 m/s y su punto de despegue está a 1,80 m por encima de la piscina. (a) ¿Cuál es su punto más alto por encima del trampolín? (b) ¿Cuánto tiempo están sus pies en el aire? (c) ¿Cuál es su velocidad cuando sus pies tocan el agua?

72. (a) Calcule la altura de un acantilado si una roca tarda 2,35 s en llegar al suelo cuando es lanzada directamente desde el acantilado, a una velocidad inicial de 8,00 m/s. (b) ¿Cuánto tiempo tardaría en llegar al suelo si se lanza directamente hacia abajo con la misma rapidez?

73. Un lanzador de bala, muy fuerte, pero inepto, lanza la bala en vertical con una velocidad inicial de 11,0 m/s. ¿De cuánto tiempo dispone para apartarse si el lanzamiento se liberó a una altura de 2,20 m y él mide 1,80 m?

74. Lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 15,0 m/s. Pasa por una rama de árbol en el camino a una altura de 7,0 m. ¿Cuánto tiempo adicional transcurre antes de que la pelota pase por la rama del árbol en el camino de vuelta?

75. Un canguro puede saltar sobre un objeto de 2,50 m de altura. (a) Considerando solo su movimiento vertical, calcule su rapidez vertical cuando abandona el suelo. (b) ¿Cuánto tiempo está en el aire?

76. De pie en la base de uno de los acantilados del monte Arapiles en Victoria, Australia, un excursionista oye cómo se desprende una roca desde una altura de 105,0 m. No puede ver la roca de inmediato, pero luego sí, 1,50 s después. (a) ¿A qué distancia por encima del excursionista está la roca cuando la oye? (b) ¿Cuánto tiempo tiene para moverse antes de que la roca le golpee la cabeza?

77. Hay un acantilado de 250 metros de altura en Half Dome, en el Parque Nacional de Yosemite, en California. Supongamos que una roca se desprende de la cima de este acantilado. (a) ¿A qué velocidad irá cuando choque contra el suelo? (b) Suponiendo un tiempo de reacción de 0,300 s, ¿cuánto tiempo tendrá un turista que se encuentre en la parte inferior para apartarse tras oír el ruido de la roca al desprenderse (sin tener en cuenta la altura del turista, que de todas formas sería despreciable si lo golpea)? La

velocidad del sonido es de 335,0 m/s en este día.

3.6 Calcular la velocidad y el desplazamiento a partir de la aceleración

78. La aceleración de una partícula varía con el tiempo según la ecuación $a(t) = pt^2 - qt^3$. Inicialmente, la velocidad y la posición son cero. (a) ¿Cuál es la velocidad en función del tiempo? (b) ¿Cuál es la posición en función del tiempo?

79. Entre $t = 0$ y $t = t_0$, un cohete se mueve en línea recta hacia arriba con una aceleración dada por $a(t) = A - Bt^{1/2}$, donde A y B son constantes. (a) Si x está en metros y t en segundos, ¿cuáles son las unidades de A y B? (b) Si el cohete parte del reposo, ¿cómo varía la velocidad entre $t = 0$ y $t = t_0$? (c) Si su posición inicial es cero, ¿cuál es la posición del cohete en función del tiempo durante este mismo intervalo de tiempo?

80. La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo según $v(t) = A + Bt^{-1}$, donde $A = 2$ m/s, $B = 0{,}25$ m, y $1{,}0\text{ s} \leq t \leq 8{,}0\text{ s}$. Determine la aceleración y la posición de la partícula en $t = 2{,}0$ s y $t = 5{,}0$ s. Supongamos que $x(t = 1\text{ s}) = 0$.

81. Una partícula en reposo sale del origen con su velocidad que se incrementa con el tiempo según $v(t) = 3{,}2t$ m/s. A los 5,0 s, la velocidad de la partícula empieza a disminuir según [16,0 - 1,5(t - 5,0)] m/s. Esta disminución continúa hasta $t = 11{,}0$ s, después de lo cual la velocidad de la partícula permanece constante en 7,0 m/s. (a) ¿Cuál es la aceleración de la partícula en función del tiempo? (b) ¿Cuál es la posición de la partícula en $t = 2{,}0$ s, $t = 7{,}0$ s y $t = 12{,}0$ s?

Problemas Adicionales

82. El jugador de béisbol profesional Nolan Ryan podía lanzar la pelota aproximadamente a 160,0 km/h. A esa velocidad media, ¿cuánto tarda la pelota que lanzó Ryan en llegar al plato de home, que está a 18,4 m del montículo del lanzador? Compárelo con el tiempo promedio de reacción de un ser humano ante un estímulo visual, que es de 0,25 s.

83. Un avión sale de Chicago y realiza el trayecto de 3.000 km hasta Los Ángeles en 5,0 h. Un segundo avión sale de Chicago media hora más tarde y llega a Los Ángeles a la misma hora. Compare la velocidad media de los dos aviones. Ignore la curvatura de la Tierra y la diferencia de altitud entre las dos ciudades.

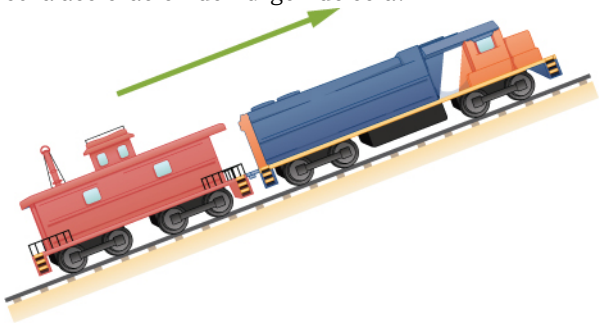
84. **Resultados poco razonables.** Un ciclista recorre 16,0 km al este, luego 8,0 km al oeste, después 8,0 km al este, luego 32,0 km al oeste y finalmente 11,2 km al este. Si su velocidad media es de 24 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en realizar el viaje? ¿Es un tiempo razonable?

85. Un objeto tiene una aceleración de $+1{,}2\text{ cm/s}^2$. En $t = 4{,}0$ s, su velocidad es $-3{,}4$ cm/s. Determine las velocidades del objeto en $t = 1{,}0$ s y $t = 6{,}0$ s.

86. Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ecuación $x(t) = 2{,}0 - 4{,}0t^2$ m. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración en $t = 2{,}0$ s y $t = 5{,}0$ s?

87. Una partícula que se mueve con aceleración constante tiene velocidades de 2,0 m/s en $t = 2{,}0$ s y $-7{,}6$ m/s en $t = 5{,}2$ s. ¿Cuál es la aceleración de la partícula?

88. Un tren asciende por una pendiente pronunciada a velocidad constante (ver la siguiente figura) cuando su furgón de cola se suelta y empieza a rodar libremente por la vía. Después de 5,0 s, el furgón de cola se encuentra a 30 m por detrás del tren. ¿Cuál es la aceleración del furgón de cola?



89. Un electrón se mueve en línea recta, a una velocidad de $4{,}0 \times 10^5$ m/s. Entra en una región de 5,0 cm de longitud, donde sufre una aceleración de $6{,}0 \times 10^{12}\text{ m/s}^2$ a lo largo de la misma línea recta. a) ¿Cuál es la velocidad del electrón cuando sale de esta región? b) ¿Cuánto tiempo tarda el electrón en atravesar la región?

90. Una conductora de ambulancia lleva a un paciente al hospital. Mientras viaja a 72 km/h, se da cuenta de que el semáforo de los próximos cruces se ha puesto en ámbar. Para llegar a la intersección antes de que el semáforo se ponga en rojo, debe recorrer 50 m en 2,0 s. (a) ¿Qué aceleración mínima debe tener la ambulancia para llegar a la intersección antes de que el

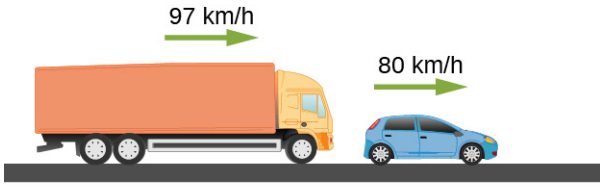
semáforo se ponga en rojo? (b) ¿Cuál es la rapidez de la ambulancia cuando llega a la intersección?

91. Una motocicleta que desacelera uniformemente recorre 2,0 km sucesivos en 80 s y 120 s, respectivamente. Calcule (a) la aceleración de la motocicleta y (b) su velocidad al principio y al final del recorrido de 2 km.

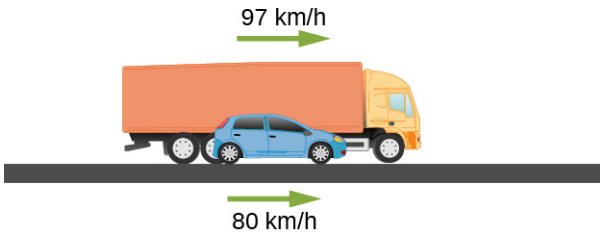
92. Una ciclista viaja del punto A al punto B en 10 min. Durante los primeros 2,0 min de su viaje, mantiene una aceleración uniforme de $0{,}090\ \text{m/s}^2$. A continuación, se desplaza a velocidad constante durante los siguientes 5,0 min. Después, desacelera a una tasa constante, de modo que se detiene en el punto B 3,0 min más tarde. (a) Haga un esquema del gráfico de velocidad en función del tiempo para el viaje. (b) ¿Cuál es la aceleración durante los últimos 3 min? (c) ¿Qué distancia recorre la ciclista?

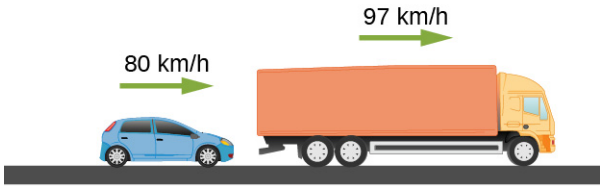
93. Dos trenes se desplazan a 30 m/s en direcciones opuestas en la misma vía. Los ingenieros ven simultáneamente que están en curso de colisión y aplican los frenos cuando están a 1000 m de distancia. Suponiendo que ambos trenes tienen la misma aceleración, ¿cuál debe ser esta aceleración para que los trenes se detengan justo antes de colisionar?

94. Un camión de 10,0 m de longitud, que se desplaza a una velocidad constante de 97,0 km/h, adelanta a un auto de 3,0 m de longitud, que se desplaza a una velocidad constante de 80,0 km/h. ¿Cuánto tiempo transcurre entre el momento en que la parte delantera del camión está a la par de la parte trasera del auto y el momento en que la parte trasera del camión está a la par de la parte delantera del auto?



Antes





Después

95. Un auto de policía espera escondido un poco fuera de la carretera. El auto de policía detecta a un auto que circula a gran velocidad, a 40 m/s. En el momento en que el auto que va a gran velocidad pasa por delante del auto de policía, este acelera desde el reposo a $4\ \text{m/s}^2$ para alcanzar al auto que va a gran velocidad. ¿Cuánto tiempo tarda el auto de policía en alcanzar al auto que va a gran velocidad?

96. Pablo corre en una media maratón a una velocidad de 3 m/s. Otro corredor, Jacob, está 50 metros detrás de Pablo, a la misma velocidad. Jacob comienza a acelerar a $0{,}05\ \text{m/s}^2$. (a) ¿Cuánto tiempo tarda Jacob en alcanzar a Pablo? (b) ¿Cuál es la distancia recorrida por Jacob? (c) ¿Cuál es la velocidad final de Jacob?

97. **Resultados poco razonables.** Una corredora se acerca a la línea de meta y se encuentra a 75 m; su rapidez en esta posición es de 8 m/s. En este punto decelera a $0{,}5\ \text{m/s}^2$. ¿Cuánto tarda en cruzar la línea de meta a 75 m de distancia? ¿Esto es razonable?

98. Un avión acelera a $5{,}0\ \text{m/s}^2$ durante 30,0 s. Durante este tiempo, cubre una distancia de 10,0 km. ¿Cuáles son las velocidades inicial y final del avión?

99. Compare la distancia recorrida por un objeto que experimenta un cambio de velocidad que es

el doble de su velocidad inicial con un objeto que cambia su velocidad cuatro veces su velocidad inicial durante el mismo tiempo. Las aceleraciones de ambos objetos son constantes.

100. Un objeto se mueve hacia el este a una velocidad constante y se encuentra en la posición x_0 en tiempo $t_0 = 0$. (a) ¿Qué aceleración debe tener el objeto para que su desplazamiento total sea cero en un tiempo t posterior? (b) ¿Cuál es la interpretación física de la solución en el caso de $t \to \infty$?

101. Se lanza una pelota directamente hacia arriba. Pasa por una ventana de 2,00 m de altura a 7,50 m del suelo en su camino hacia arriba y tarda 1,30 s en pasar por la ventana. ¿Cuál era la velocidad inicial de la pelota?

102. Se deja caer una moneda desde un globo aerostático, que está a 300 m del suelo y que se eleva a 10,0 m/s hacia arriba. Para la moneda, halle: (a) la altura máxima alcanzada, (b) su posición y velocidad 4,00 s después de soltarla, y (c) el tiempo antes de que toque el suelo.

103. Una pelota de tenis se deja caer sobre un suelo duro desde una altura de 1,50 m y rebota hasta una altura de 1,10 m. (a) Calcule su velocidad justo antes de que golpee el suelo. (b) Calcule su velocidad justo después de que abandone el suelo al volver a subir. (c) Calcule su aceleración durante el contacto con el suelo si ese contacto dura 3,50 ms ($3{,}50 \times 10^{-3}$ s) (d) ¿Cuánto se comprimió la pelota durante su colisión con el suelo, suponiendo que el suelo es absolutamente rígido?

104. **Resultados poco razonables**. Una gota de lluvia cae desde una nube a 100 m de altura. Ignore la resistencia del aire. ¿Cuál es la rapidez de la gota de lluvia cuando toca el suelo? ¿Es una cifra razonable?

105. Compare el tiempo en el aire de un jugador de baloncesto que salta 1,0 m en vertical desde el suelo con el de un jugador que salta 0,3 m en vertical.

106. Supongamos que una persona tarda 0,5 s en reaccionar y mover la mano para coger un objeto que se le ha caído. (a) ¿A qué distancia cae el objeto en la Tierra, donde $g = 9{,}8$ m/s^2? (b) ¿A qué distancia cae el objeto en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1/6 de la de la Tierra?

107. Un globo aerostático se eleva desde el nivel del suelo a una velocidad constante de 3,0 m/s. Un minuto después del despegue, un saco de arena cae accidentalmente desde el globo. Calcule (a) el tiempo que tarda el saco de arena en llegar al suelo y (b) la velocidad del saco de arena cuando toca el suelo.

108. (a) En los Juegos Olímpicos de Pekín 2008, el jamaicano Usain Bolt estableció el récord mundial de la carrera de 100 m. Bolt cruzó la línea de meta con un tiempo de 9,69 segundos. Si suponemos que Bolt aceleró durante 3,00 s para alcanzar su rapidez máxima, y mantuvo esa rapidez durante el resto de la carrera, calcule su rapidez máxima y su aceleración. (b) Durante los mismos Juegos Olímpicos, Bolt también estableció el récord mundial en la carrera de 200 m con un tiempo de 19,30 s. Utilizando los mismos supuestos que para la carrera de 100 m, ¿cuál fue su rapidez máxima en esta carrera?

109. Un objeto se deja caer desde una altura de 75,0 m sobre el nivel del suelo. (a) Determine la distancia recorrida durante el primer segundo. (b) Determine la velocidad final con la que el objeto golpea el suelo. (c) Determine la distancia recorrida durante el último segundo de movimiento antes de golpear el suelo.

110. Una bola de acero se deja caer sobre un suelo duro desde una altura de 1,50 m y rebota hasta una altura de 1,45 m. (a) Calcule su velocidad justo antes de golpear el suelo. (b) Calcule su velocidad justo después de abandonar el suelo al volver a subir. (c) Calcule su aceleración durante el contacto con el suelo si ese contacto dura 0,0800 ms ($8{,}00 \times 10^{-5}$ s) (d) ¿Cuánto se comprimió la pelota durante su colisión con el suelo, suponiendo que el suelo sea absolutamente rígido?

111. Se deja caer un objeto desde el tejado de un edificio de altura h. Durante el último segundo de su descenso, desciende a una distancia de $h/3$. Calcule la altura del edificio.

Problemas De Desafío

112. En una carrera de 100 metros, la ganadora es cronometrada en 11,2 s. El tiempo de la segunda clasificada es de 11,6 s. ¿A qué distancia se encuentra la segunda clasificada de la ganadora cuando cruza la línea de meta? Supongamos que la velocidad de cada

corredora es constante durante toda la carrera.

113. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje de la x varía con el tiempo según $x(t) = 5{,}0t^2 - 4{,}0t^3$ m. Calcule (a) la velocidad y la aceleración de la partícula como funciones del tiempo, (b) la velocidad y la aceleración en $t = 2{,}0$ s, (c) el tiempo en que la posición es un máximo, (d) el tiempo en que la velocidad es cero, y (e) la posición máxima.

114. Una ciclista esprinta al final de una carrera para conseguir la victoria. Tiene una velocidad inicial de 11,5 m/s y acelera a una tasa de 0,500 m/s^2 durante 7,00 s. (a) ¿Cuál es su velocidad final? (b) La ciclista continúa con esta velocidad hasta la meta. Si está a 300 m de la meta cuando empieza a acelerar, ¿cuánto tiempo ha ahorrado? c) El segundo clasificado llevaba 5,00 m de ventaja cuando la ganadora empezó a acelerar, pero él no pudo hacerlo y recorrió a 11,8 m/s hasta la meta. ¿Cuál fue la diferencia de tiempo de llegada en segundos entre la ganadora y el subcampeón? ¿A qué distancia estaba el subcampeón cuando la ganadora cruzó la línea de meta?

115. En 1967, el neozelandés Burt Munro estableció el récord mundial para una motocicleta Indian, en el Salar Bonneville de Utah, de 295,38 km/h. El recorrido de ida era de 8,00 km de largo. Las tasas de aceleración suelen describirse por el tiempo que se tarda en alcanzar los 96,0 km/h desde el reposo. Si este tiempo fue de 4,00 s y Burt aceleró a ese ritmo hasta alcanzar su rapidez máxima, ¿cuánto tiempo tardó Burt en completar el recorrido?

CAPÍTULO 4
Movimiento en dos y tres dimensiones



Figura 4.1 Los Red Arrows son el equipo de acrobacias aéreas de la Fuerza Aérea Real británica. Con sede en Lincolnshire, Inglaterra, realizan espectáculos de vuelo de precisión a altas velocidades, lo que requiere una medición precisa de la posición, la velocidad y la aceleración en tres dimensiones (créditos: modificación del trabajo de Phil Long).

ESQUEMA DEL CAPITULO

4.1 Vectores de desplazamiento y velocidad
4.2 Vector de aceleración
4.3 Movimiento de proyectil
4.4 Movimiento circular uniforme
4.5 Movimiento relativo en una y dos dimensiones

INTRODUCCIÓN Para dar una descripción completa de la cinemática, debemos explorar el movimiento en dos y tres dimensiones. Al fin y al cabo, la mayoría de los objetos de nuestro universo no se mueven en línea recta, sino que siguen trayectorias curvas. Desde los balones de fútbol pateados, las trayectorias de vuelo de los pájaros y los movimientos orbitales de los cuerpos celestes, hasta el flujo de plasma sanguíneo en las venas, la mayoría de los movimientos siguen trayectorias curvas.

Afortunadamente, el tratamiento del movimiento en una dimensión en el capítulo anterior nos ha dado una base sobre la que construir, ya que los conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración definidos en una dimensión pueden ampliarse a dos y tres dimensiones. Pensemos en los Red Arrows, también conocidos como el equipo acrobático de la Real Fuerza Aérea del Reino Unido. Cada jet sigue una trayectoria curva única en el espacio aéreo tridimensional, además de tener una velocidad y una aceleración únicas. Así, para describir el movimiento de cualquiera de los jets con precisión, debemos asignar a cada jet un único vector de posición en tres dimensiones, así como un único vector de velocidad y aceleración. Podemos aplicar las mismas ecuaciones básicas para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, que

derivamos en Movimiento en línea recta para describir el movimiento de los jets en dos y tres dimensiones. Esta vez, con algunas modificaciones, en particular, la inclusión de vectores.

En este capítulo también exploramos dos tipos especiales de movimiento en dos dimensiones: el movimiento de proyectil y el movimiento circular. Por último, concluimos con un análisis sobre el movimiento relativo. En la imagen que abre el capítulo, cada jet tiene un movimiento relativo con respecto a cualquier otro jet del grupo o a los espectadores del espectáculo aéreo en tierra.

4.1 Vectores de desplazamiento y velocidad

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Calcular vectores de posición en un problema de desplazamiento multidimensional.
- Resolver el desplazamiento en dos o tres dimensiones.
- Calcular el vector velocidad dado el vector de posición en función del tiempo.
- Calcular la velocidad media en varias dimensiones.

El desplazamiento y la velocidad en dos o tres dimensiones son extensiones directas de las definiciones unidimensionales. Sin embargo, ahora son cantidades vectoriales, por lo que los cálculos con ellas tienen que seguir las reglas del álgebra vectorial, no del álgebra escalar.

Vector de desplazamiento

Para describir el movimiento en dos y tres dimensiones, primero debemos establecer un sistema de coordenadas y una convención para los ejes. Generalmente utilizamos las coordenadas de la x, la y y la z para localizar una partícula en el punto $P(x, y, z)$ en tres dimensiones. Si la partícula se mueve, las variables de la x, la y y la z son funciones del tiempo (t):

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t). \tag{4.1}$$

El **vector de posición** desde el origen del sistema de coordenadas hasta el punto P es $\vec{\mathbf{r}}(t)$. En notación vectorial unitaria, presentada en Sistemas de coordenadas y componentes de un vector, $\vec{\mathbf{r}}(t)$ es

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}. \tag{4.2}$$

La Figura 4.2 muestra el sistema de coordenadas y el vector hacia el punto P, donde una partícula podría estar situada en un tiempo t determinado. Observe la orientación de los ejes de la x, la y y la z. Esta orientación se denomina sistema de coordenadas de la mano derecha (Sistemas de coordenadas y componentes de un vector) y se utiliza a lo largo del capítulo.

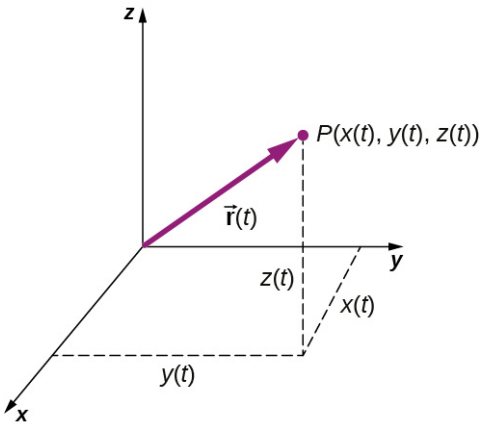


FIGURA 4.2 Un sistema de coordenadas tridimensional con una partícula en la posición $P(x(t), y(t), z(t))$.

Con nuestra definición de la posición de una partícula en el espacio tridimensional, podemos formular el desplazamiento tridimensional. La Figura 4.3 muestra una partícula en el tiempo t_1 situada en P_1 con vector de posición $\vec{\mathbf{r}}(t_1)$. En un tiempo posterior t_2, la partícula se encuentra en P_2 con vector de posición $\vec{\mathbf{r}}(t_2)$. El

vector de desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ se encuentra restando $\vec{\mathbf{r}}(t_1)$ de $\vec{\mathbf{r}}(t_2)$:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1). \tag{4.3}$$

La adición de vectores se trata en Vectores. Observe que es la misma operación que hicimos en una dimensión, pero ahora los vectores están en un espacio tridimensional.

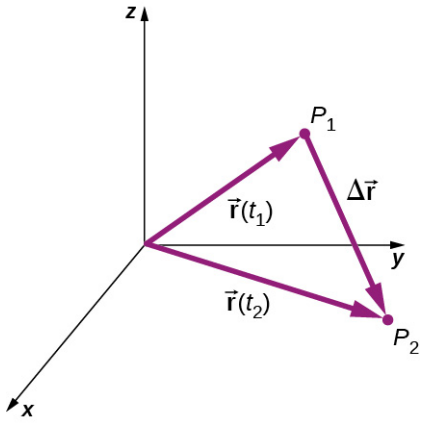


FIGURA 4.3 El desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)$ es el vector desde P_1 hasta P_2.

Los siguientes ejemplos ilustran el concepto de desplazamiento en múltiples dimensiones.

EJEMPLO 4.1

Satélite de órbita polar

Un satélite se encuentra en una órbita polar circular alrededor de la Tierra a una altitud de 400 km, lo que significa que pasa directamente por encima de los polos norte y sur. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del vector de desplazamiento desde que está directamente sobre el Polo Norte hasta que está a $-45°$ de latitud?

Estrategia

Hacemos un dibujo del problema para visualizar la solución gráficamente. Esto nos permitirá entender el desplazamiento. A continuación, utilizamos los vectores unitarios para resolver el desplazamiento.

Solución

La Figura 4.4 muestra la superficie de la Tierra y un círculo que representa la órbita del satélite. Aunque los satélites se mueven en el espacio tridimensional, siguen trayectorias de elipses, que pueden graficarse en dos dimensiones. Los vectores de posición se dibujan desde el centro de la Tierra, que tomamos como origen del sistema de coordenadas, con el eje de la y como norte y el eje de la x como este. El vector entre ellos es el desplazamiento del satélite. Tomamos el radio de la Tierra como 6370 km, por lo que la longitud de cada vector de posición es de 6770 km.

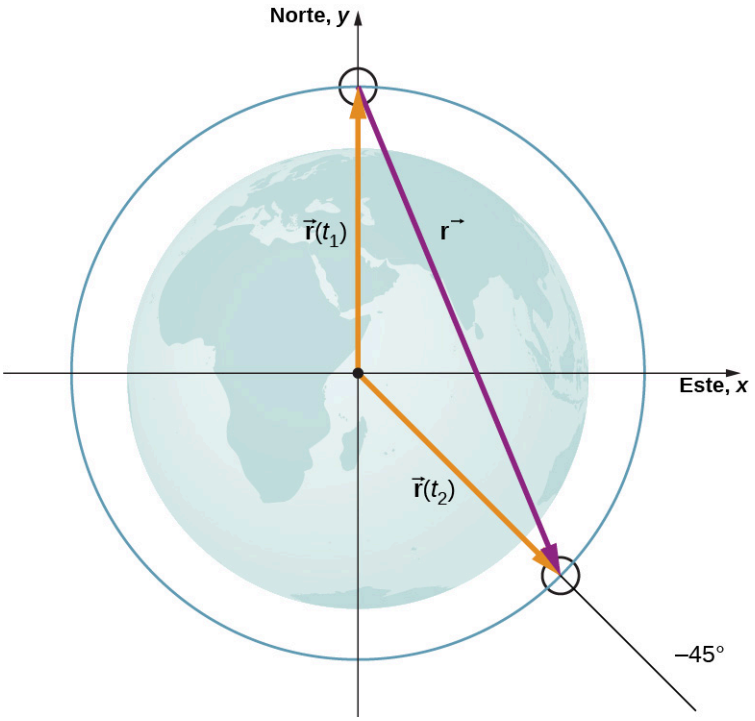


FIGURA 4.4 Se dibujan dos vectores de posición desde el centro de la Tierra, que es el origen del sistema de coordenadas, con el eje de la *y* como norte y el eje de la *x* como este. El vector entre ellos es el desplazamiento del satélite.

En notación vectorial unitaria, los vectores de posición son

$$\vec{\mathbf{r}}(t_1) = 6770.\ \text{km}\hat{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}(t_2) = 6770.\ \text{km}\ (\cos(-45°))\hat{\mathbf{i}} + 6770.\ \text{km}\ (\text{sen}(-45°))\hat{\mathbf{j}}.$$

Al evaluar el seno y el coseno, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}(t_1) &= 6770.\hat{\mathbf{j}}\\ \vec{\mathbf{r}}(t_2) &= 4.787\hat{\mathbf{i}} - 4.787\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Ahora podemos encontrar $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, el desplazamiento del satélite:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1) = 4.787\hat{\mathbf{i}} - 11.557\hat{\mathbf{j}}.$$

La magnitud del desplazamiento es $\left|\Delta\vec{\mathbf{r}}\right| = \sqrt{(4.787)^2 + (-11.557)^2} = 12.509$ km. El ángulo que forma el desplazamiento con el eje de la *x* es $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-11.557}{4.787}\right) = -67{,}5°$.

Importancia

El trazado del desplazamiento brinda información y significado a la solución del vector unitario del problema. Al trazar el desplazamiento, debemos incluir sus componentes, así como su magnitud y el ángulo que forma con un eje elegido, en este caso, el eje de la *x* (Figura 4.5).

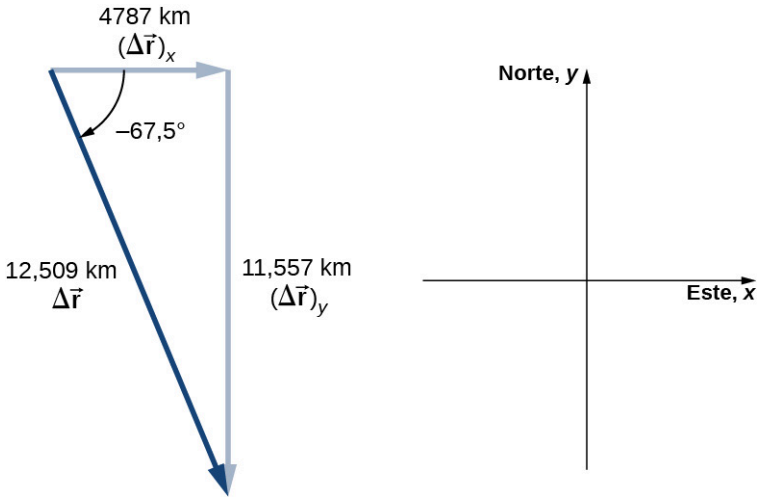


FIGURA 4.5 Vector de desplazamiento con componentes, ángulo y magnitud.

Observe que, en este ejemplo, el satélite tomó una trayectoria curva a lo largo de su órbita circular para llegar desde su posición inicial hasta su posición final. También podría haber viajado 4.787 km al este y luego 11.557 km al sur para llegar al mismo lugar. Ambas trayectorias son más largas que la longitud del vector de desplazamiento. De hecho, el vector de desplazamiento da el trayecto más corto entre dos puntos en una, dos o tres dimensiones.

Muchas aplicaciones en física pueden tener una serie de desplazamientos, como se ha comentado en el capítulo anterior. El desplazamiento total es la suma de los desplazamientos individuales, solo que esta vez hay que tener cuidado, porque estamos sumando vectores. Ilustramos este concepto con un ejemplo de movimiento browniano.

EJEMPLO 4.2

Movimiento browniano

El movimiento browniano es un movimiento aleatorio y caótico de las partículas suspendidas en un fluido, resultante de las colisiones con las moléculas del mismo. Este movimiento es tridimensional. Los desplazamientos en orden numérico de una partícula que experimenta un movimiento browniano podrían tener el siguiente aspecto, en micrómetros (Figura 4.6):

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 &= 2{,}0\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3{,}0\hat{\mathbf{k}}\\ \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 &= -\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{k}}\\ \Delta\vec{\mathbf{r}}_3 &= 4{,}0\hat{\mathbf{i}} - 2{,}0\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\\ \Delta\vec{\mathbf{r}}_4 &= -3{,}0\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2{,}0\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

¿Cuál es el desplazamiento total de la partícula desde el origen?

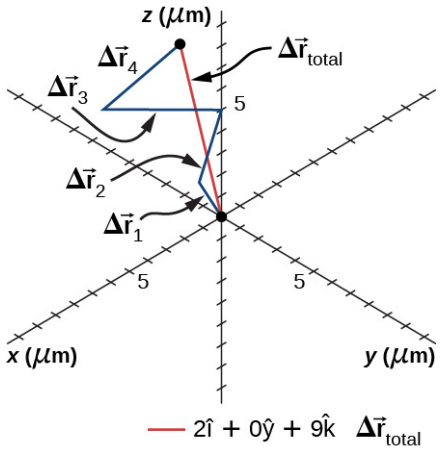


FIGURA 4.6 Trayectoria de una partícula sometida a desplazamientos aleatorios de movimiento browniano. El desplazamiento total se muestra en rojo.

Solución

Formamos la suma de los desplazamientos y los sumamos como vectores:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{r}}_{\text{Total}} &= \sum \Delta\vec{\mathbf{r}}_i = \Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_3 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_4 \\ &= (2{,}0 - 1{,}0 + 4{,}0 - 3{,}0)\hat{\mathbf{i}} + (1{,}0 + 0 - 2{,}0 + 1{,}0)\hat{\mathbf{j}} + (3{,}0 + 3{,}0 + 1{,}0 + 2{,}0)\hat{\mathbf{k}} \\ &= 2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 9{,}0\hat{\mathbf{k}}\,\mu\text{m}.\end{aligned}$$

Para completar la solución, expresamos el desplazamiento como magnitud y dirección,

$$\left|\Delta\vec{\mathbf{r}}_{\text{Total}}\right| = \sqrt{2{,}0^2 + 0^2 + 9{,}0^2} = 9{,}2\ \mu\text{m}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{2}\right) = 77°,$$

con respecto al eje de la x en el plano xz.

Importancia

En la figura podemos ver que la magnitud del desplazamiento total es menor que la suma de la magnitud de cada uno de los desplazamientos.

Vector de velocidad

En el capítulo anterior encontramos la velocidad instantánea calculando la derivada de la función de posición con respecto al tiempo. Podemos hacer la misma operación en dos y tres dimensiones, pero utilizamos vectores. El **vector de velocidad** instantánea ahora es

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}. \qquad \textbf{4.4}$$

Veamos gráficamente la orientación relativa del vector de posición y del vector de velocidad. En la Figura 4.7 mostramos los vectores $\vec{\mathbf{r}}(t)$ y $\vec{\mathbf{r}}(t + \Delta t)$, que dan la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria representada por la línea gris. Cuando Δt llega a cero, el vector de velocidad, dado por la Ecuación 4.4, se vuelve tangente a la trayectoria de la partícula en el tiempo t.

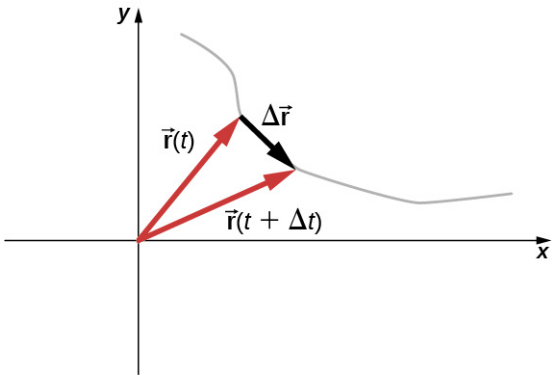


FIGURA 4.7 Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria dada por la línea gris. En el límite cuando Δt se acerca a cero, el vector velocidad se vuelve tangente a la trayectoria de la partícula.

La Ecuación 4.4 también puede escribirse en términos de los componentes de $\vec{\mathbf{v}}(t)$. Dado que

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}},$$

podemos escribir

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}} \tag{4.5}$$

donde

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}. \tag{4.6}$$

Si solo interesa la velocidad media, tenemos el equivalente vectorial de la velocidad media unidimensional para dos y tres dimensiones:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{avg}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{4.7}$$

EJEMPLO 4.3

Calcular el vector de velocidad

La función de posición de una partícula es $\vec{\mathbf{r}}(t) = 2{,}0t^2\hat{\mathbf{i}} + (2{,}0 + 3{,}0t)\hat{\mathbf{j}} + 5{,}0t\hat{\mathbf{k}}$m. (a) ¿Cuál es la velocidad instantánea y la rapidez en t = 2,0 s? (b) ¿Cuál es la velocidad media entre 1,0 s y 3,0 s?

Solución

Utilizando la Ecuación 4.5 y la Ecuación 4.6, y tomando la derivada de la función de posición con respecto al tiempo, encontramos

(a) $v(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 4{,}0t\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 5{,}0\hat{\mathbf{k}}$m/s

$\vec{\mathbf{v}}(2{,}0s) = 8{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 5{,}0\hat{\mathbf{k}}$m/s

Rapidez $\left|\vec{\mathbf{v}}(2{,}0\text{ s})\right| = \sqrt{8^2 + 3^2 + 5^2} = 9{,}9$ m/s.

(b) De la Ecuación 4.7,

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{avg}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(3{,}0\text{ s}) - \vec{\mathbf{r}}(1{,}0\text{ s})}{3{,}0\text{ s} - 1{,}0\text{ s}} = \frac{(18\hat{\mathbf{i}} + 11\hat{\mathbf{j}} + 15\hat{\mathbf{k}})\text{ m} - (2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})\text{ m}}{2{,}0\text{ s}}$$

$$= \frac{(16\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}})\text{ m}}{2{,}0\text{ s}} = 8{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 5{,}0\hat{\mathbf{k}}\text{m/s}.$$

Importancia

Vemos que la velocidad media es la misma que la velocidad instantánea en $t = 2{,}0$ s, como resultado de que la función de velocidad es lineal. En general, esto no debería ser así. De hecho, la mayoría de las veces, las velocidades instantáneas y medias no son las mismas.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.1

La función de posición de una partícula es $\vec{\mathbf{r}}(t) = 3{,}0t^3\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}}$. (a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 3$ s? (b) ¿Es la velocidad media entre 2 s y 4 s igual a la velocidad instantánea en $t = 3$ s?

La independencia de los movimientos perpendiculares

Cuando observamos las ecuaciones tridimensionales de posición y velocidad escritas en notación vectorial unitaria, la Ecuación 4.2 y la Ecuación 4.5, vemos que los componentes de estas ecuaciones son funciones separadas y únicas del tiempo que no dependen unas de otras. El movimiento a lo largo de la dirección de la x no tiene parte de su movimiento a lo largo de las direcciones de la y y la z, y de forma similar para los otros dos ejes de coordenadas. Por lo tanto, el movimiento de un objeto en dos o tres dimensiones puede dividirse en movimientos separados e independientes a lo largo de los ejes perpendiculares del sistema de coordenadas en el que se produce el movimiento.

Para ilustrar este concepto con respecto al desplazamiento, considere a una mujer que camina del punto A al punto B en una ciudad conformada por cuadras. La mujer que toma el trayecto de A a B puede caminar hacia el este durante tantas cuadras y luego hacia el norte (dos direcciones perpendiculares) durante otra serie de cuadras para llegar a B. La distancia que camina hacia el este solo se ve afectada por su movimiento hacia el este. Del mismo modo, la distancia que recorre hacia el norte solo se ve afectada por su movimiento hacia el norte.

Independencia del movimiento

En la descripción cinemática del movimiento, podemos tratar por separado los componentes horizontal y vertical del movimiento. En muchos casos, el movimiento en la dirección horizontal no afecta al movimiento en la dirección vertical, y viceversa.

Un ejemplo que ilustra la independencia de los movimientos verticales y horizontales viene dado por dos pelotas de béisbol. Una pelota de béisbol se deja caer del reposo. En el mismo instante, se lanza otra horizontalmente desde la misma altura y sigue una trayectoria curva. Un estroboscopio capta las posiciones de las pelotas a intervalos de tiempo fijos mientras caen (Figura 4.8).

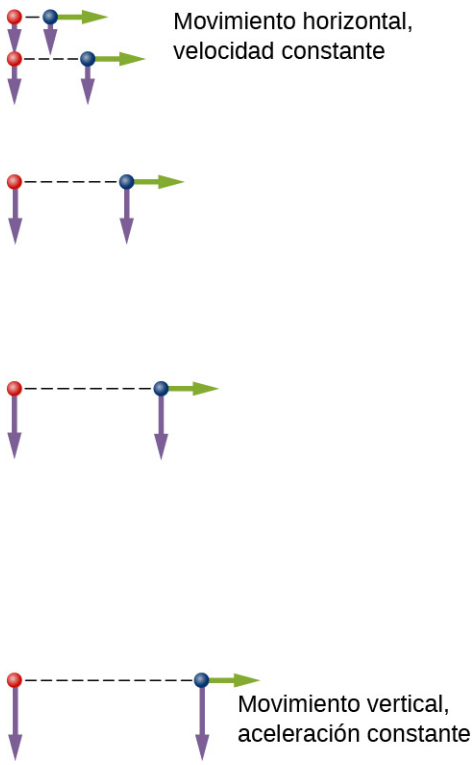


FIGURA 4.8 Un diagrama de los movimientos de dos pelotas idénticas: una cae desde el reposo y la otra tiene una velocidad inicial horizontal. Cada posición posterior es un intervalo de tiempo igual. Las flechas representan las velocidades horizontal y vertical en cada posición. La pelota de la derecha tiene una velocidad horizontal inicial mientras que la de la izquierda no tiene velocidad horizontal. A pesar de la diferencia de velocidades horizontales, las velocidades y posiciones verticales son idénticas para ambas pelotas, lo que demuestra que los movimientos verticales y horizontales son independientes.

Es notable que, para cada destello del estroboscopio, las posiciones verticales de las dos pelotas son las mismas. Esta similitud implica que el movimiento vertical es independiente de si la pelota se mueve horizontalmente. (Suponiendo que no hay resistencia del aire, el movimiento vertical de un objeto que cae está influenciado solo por la gravedad, no por ninguna fuerza horizontal). Un examen minucioso de la pelota lanzada horizontalmente muestra que recorre la misma distancia horizontal entre los destellos. Esto se debe a que no hay fuerzas adicionales sobre la pelota en la dirección horizontal después de su lanzamiento. Este resultado significa que la velocidad horizontal es constante y no se ve afectada ni por el movimiento vertical ni por la gravedad (que es vertical). Tenga en cuenta que este caso solo es válido para condiciones ideales. En el mundo real, la resistencia del aire afecta a la rapidez de las pelotas en ambas direcciones.

La trayectoria curva bidimensional de la pelota lanzada horizontalmente se compone de dos movimientos unidimensionales independientes (horizontal y vertical). La clave para analizar este movimiento, llamado *movimiento de proyectil*, es resolverlo en movimientos a lo largo de direcciones perpendiculares. Resolver el movimiento bidimensional en componentes perpendiculares es posible porque los componentes son independientes.

4.2 Vector de aceleración

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Calcular el vector de aceleración dada la función velocidad en notación vectorial unitaria.
- Describir el movimiento de una partícula con una aceleración constante en tres dimensiones.
- Utilizar las ecuaciones de movimiento unidimensional a lo largo de ejes perpendiculares para resolver un problema en dos o tres dimensiones con una aceleración constante.
- Expresar la aceleración en notación vectorial unitaria.

Aceleración instantánea

Además de obtener los vectores de desplazamiento y velocidad de un objeto en movimiento, a menudo queremos conocer su **vector de aceleración** en cualquier punto del tiempo a lo largo de su trayectoria. Este vector de aceleración es la aceleración instantánea y se puede obtener a partir de la derivada con respecto al tiempo de la función velocidad, como hemos visto en un capítulo anterior. La única diferencia en dos o tres dimensiones es que ahora son cantidades vectoriales. Tomando la derivada con respecto al tiempo $\vec{\mathbf{v}}(t)$, encontramos

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{v}}(t + \Delta t) - \vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt}. \quad 4.8$$

La aceleración en términos de componentes es

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{\mathbf{k}}. \quad 4.9$$

Además, como la velocidad es la derivada de la función de posición, podemos escribir la aceleración en términos de la segunda derivada de la función de posición:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\hat{\mathbf{k}}. \quad 4.10$$

EJEMPLO 4.4

Encontrar un vector de aceleración

Una partícula tiene una velocidad de $\vec{\mathbf{v}}(t) = 5{,}0t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} - 2{,}0t^3\hat{\mathbf{k}}$ m/s. (a) ¿Cuál es la función de aceleración? (b) ¿Cuál es el vector de aceleración en $t = 2{,}0$ s? Halle su magnitud y dirección.

Solución

(a) Tomamos la primera derivada con respecto al tiempo de la función de velocidad para encontrar la aceleración. La derivada se toma componente por componente:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = 5{,}0\hat{\mathbf{i}} + 2{,}0t\hat{\mathbf{j}} - 6{,}0t^2\hat{\mathbf{k}}\,\text{m/s}^2.$$

(b) Evaluar $\vec{\mathbf{a}}(2{,}0\text{ s}) = 5{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}} - 24{,}0\hat{\mathbf{k}}\,\text{m/s}^2$ nos da la dirección en notación vectorial unitaria. La magnitud de la aceleración es $|\vec{\mathbf{a}}(2{,}0\text{ s})| = \sqrt{5{,}0^2 + 4{,}0^2 + (-24{,}0)^2} = 24{,}8\text{ m/s}^2$.

Importancia

En este ejemplo encontramos que la aceleración tiene una dependencia del tiempo y es cambiante a lo largo del movimiento. Consideremos una función de velocidad diferente para la partícula.

EJEMPLO 4.5

Encontrar la aceleración de una partícula

Una partícula tiene una función de posición $\vec{\mathbf{r}}(t) = (10t - t^2)\hat{\mathbf{i}} + 5t\hat{\mathbf{j}} + 5t\ \ \hat{\mathbf{k}}$ m. (a) ¿Cuál es la velocidad? (b) ¿Cuál es la aceleración? (c) Describa el movimiento desde $t = 0$ s.

Estrategia

Podemos entender el problema al observar la función de posición. Es lineal en y y z; por ende, sabemos que la aceleración en estas direcciones es cero cuando tomamos la segunda derivada. Además, observe que la posición en la dirección de la x es cero para $t = 0$ s y $t = 10$ s.

Solución

(a) Tomando la derivada con respecto al tiempo de la función de posición, encontramos

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = (10 - 2t)\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}\ \text{m/s}.$$

La función de velocidad es lineal en el tiempo en la dirección de la *x* y es constante en las direcciones de la *y* y la *z*.

(b) Tomando la derivada de la función de velocidad, encontramos

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = -2\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2.$$

El vector de aceleración es una constante en la dirección de la *x* negativa.

(c) La trayectoria de la partícula puede verse en la Figura 4.9. Veamos primero las direcciones *y* y *z*. La posición de la partícula aumenta constantemente en función del tiempo, a una velocidad constante en estas direcciones. Sin embargo, en la dirección de la *x*, la partícula sigue una trayectoria en la *x* positiva hasta $t = 5$ s, cuando invierte la dirección. Lo sabemos al observar la función de velocidad, que se vuelve cero en este momento y negativa a partir de entonces. También lo sabemos porque la aceleración es negativa y constante, es decir, la partícula desacelera o acelera en sentido negativo. La posición de la partícula alcanza los 25 m, donde entonces invierte la dirección y comienza a acelerar en la dirección de la *x* negativa. La posición llega a cero en $t = 10$ s.

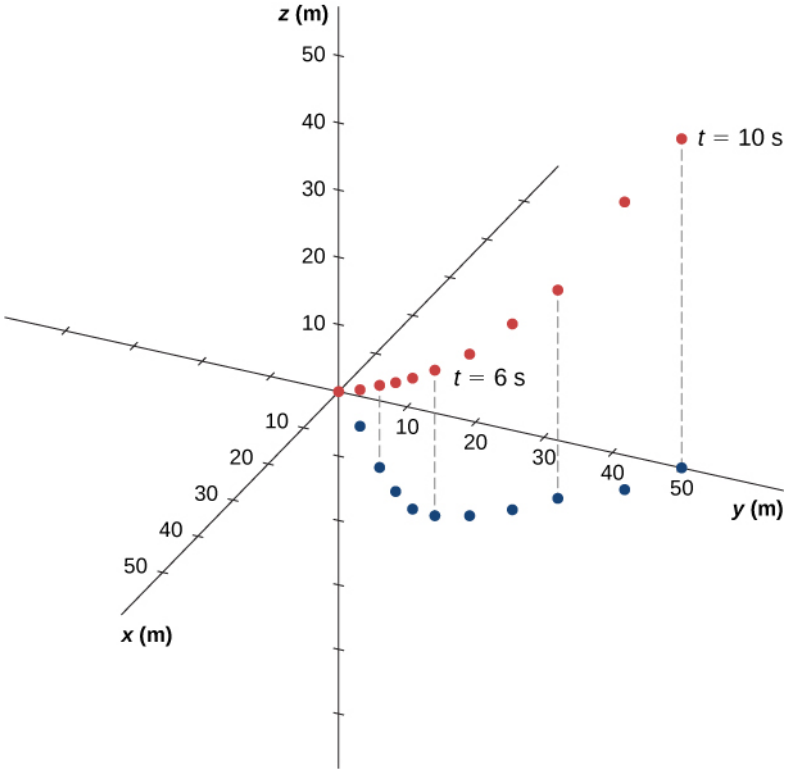


FIGURA 4.9 La partícula comienza en el punto (*x*, *y*, *z*) = (0, 0, 0) con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}} = 0$. Se muestra la proyección de la trayectoria sobre el plano *xy*. Los valores de la *y* y la *z* aumentan linealmente en función del tiempo, mientras que la *x* tiene un punto de inflexión en $t = 5$ s y 25 m, cuando invierte su dirección. En este punto, el componente *x* de la velocidad se vuelve negativo. En $t = 10$ s, la partícula vuelve a estar a 0 m en la dirección *x*.

Importancia

Al graficar la trayectoria de la partícula, podemos entender mejor su movimiento, dado por los resultados numéricos de las ecuaciones cinemáticas.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.2

Supongamos que la función de aceleración tiene la forma $\vec{\mathbf{a}}(t) = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}\text{m/s}^2$, donde a, b y c son constantes. ¿Qué se puede decir de la forma funcional de la función de velocidad?

Aceleración constante

El movimiento multidimensional con aceleración constante puede tratarse de la misma manera que se mostró en el capítulo anterior para el movimiento unidimensional. Anteriormente demostramos que el movimiento tridimensional es equivalente a tres movimientos unidimensionales, cada uno a lo largo de un eje perpendicular a los otros. Para desarrollar las ecuaciones pertinentes en cada dirección, consideremos el problema bidimensional de una partícula que se mueve en el plano xy con aceleración constante; se ignora por el momento el componente z. El vector de aceleración es

$$\vec{\mathbf{a}} = a_{0x}\hat{\mathbf{i}} + a_{0y}\hat{\mathbf{j}}.$$

Cada componente del movimiento tiene un conjunto separado de ecuaciones semejantes a la Ecuación 3.10-Ecuación 3.14 del capítulo anterior sobre el movimiento unidimensional. Solo mostramos las ecuaciones de posición y velocidad en las direcciones de la x y la y. Se podría escribir un conjunto similar de ecuaciones cinemáticas para el movimiento en la dirección z:

$$x(t) = x_0 + (v_x)_{\text{avg}}t \quad \textbf{4.11}$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \quad \textbf{4.12}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \textbf{4.13}$$

$$v_x^2(t) = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad \textbf{4.14}$$

$$y(t) = y_0 + (v_y)_{\text{avg}}t \quad \textbf{4.15}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t \quad \textbf{4.16}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \textbf{4.17}$$

$$v_y^2(t) = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0). \quad \textbf{4.18}$$

Aquí el subíndice 0 denota la posición o velocidad inicial. La Ecuación 4.11 a la Ecuación 4.18 puede sustituirse en la Ecuación 4.2 y la Ecuación 4.5 sin el componente z para obtener el vector de posición y el vector de velocidad en función del tiempo en dos dimensiones:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} \text{ y } \vec{\mathbf{v}}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}}.$$

El siguiente ejemplo ilustra un uso práctico de las ecuaciones cinemáticas en dos dimensiones.

EJEMPLO 4.6

Una esquiadora

La Figura 4.10 muestra a una esquiadora moviéndose con una aceleración de $2{,}1\ \text{m/s}^2$ por una pendiente de $15°$ en $t = 0$. Con el origen del sistema de coordenadas en la parte delantera del albergue, su posición y velocidad iniciales son

$$\vec{\mathbf{r}}(0) = (75{,}0\hat{\mathbf{i}} - 50{,}0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$$

y

$$\vec{\mathbf{v}}(0) = (4{,}1\hat{\mathbf{i}} - 1{,}1\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}.$$

(a) ¿Cuáles son los componentes x y y de la posición y velocidad de la esquiadora en función del tiempo? (b)

¿Cuáles son su posición y velocidad en $t = 10{,}0$ s?

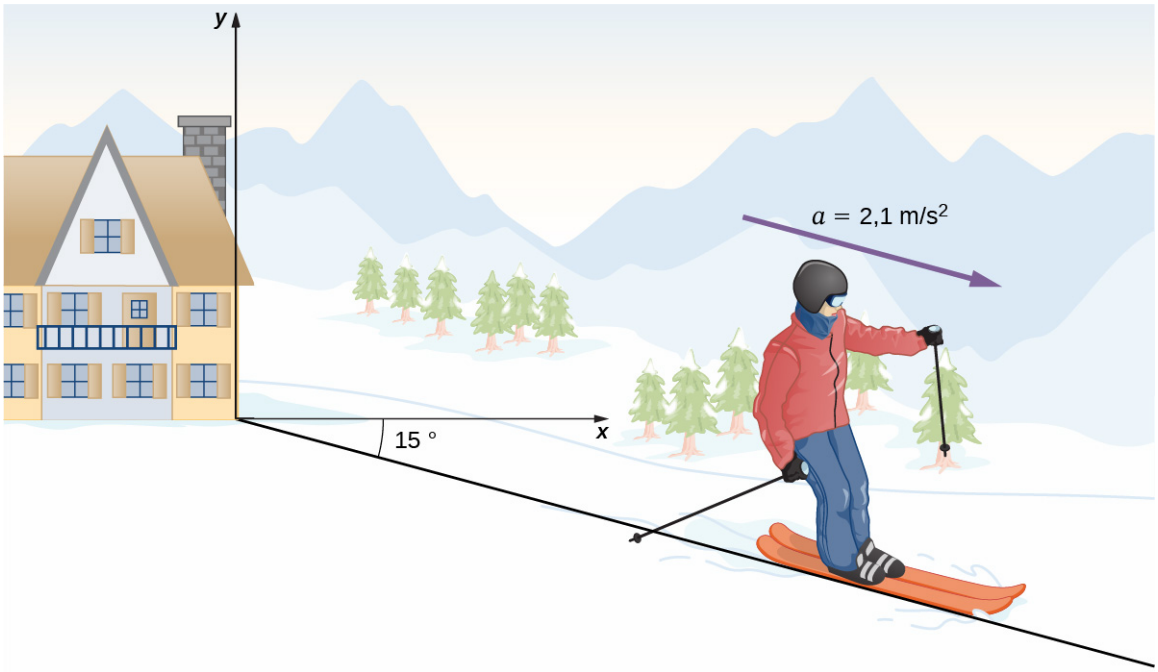


FIGURA 4.10 Una esquiadora tiene una aceleración de $2{,}1\ \text{m/s}^2$ por una pendiente de $15°$. El origen del sistema de coordenadas está en el albergue de esquí.

Estrategia

Dado que estamos evaluando los componentes de las ecuaciones de movimiento en las direcciones x y y, necesitamos encontrar los componentes de la aceleración y ponerlos en las ecuaciones cinemáticas. Los componentes de la aceleración se encuentran en referencia al sistema de coordenadas en la Figura 4.10. Entonces, al agregar los componentes de la posición y la velocidad iniciales en las ecuaciones de movimiento, podemos resolver su posición y velocidad en un tiempo t posterior.

Solución

(a) El origen del sistema de coordenadas se encuentra en la cima de la colina con el eje de la y verticalmente hacia arriba y el eje de la x horizontal. Al observar la trayectoria de la esquiadora, el componente x de la aceleración es positivo y el componente y es negativo. Dado que el ángulo es $15°$ por la pendiente, encontramos

$$a_x = (2{,}1\ \text{m/s}^2)\cos(15°) = 2{,}0\ \text{m/s}^2$$
$$a_y = (-2{,}1\ \text{m/s}^2)\ \text{sen}\ 15° = -0{,}54\ \text{m/s}^2.$$

Al agregar la posición y la velocidad iniciales en la Ecuación 4.12 y la Ecuación 4.13 para x, tenemos

$$x(t) = 75{,}0\ \text{m} + (4{,}1\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(2{,}0\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$v_x(t) = 4{,}1\ \text{m/s} + (2{,}0\ \text{m/s}^2)t.$$

Para y, tenemos

$$y(t) = -50{,}0\ \text{m} + (-1{,}1\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(-0{,}54\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$v_y(t) = -1{,}1\ \text{m/s} + (-0{,}54\ \text{m/s}^2)t.$$

(b) Ahora que tenemos las ecuaciones de movimiento para x y y en función del tiempo, podemos evaluarlas en $t = 10{,}0$ s:

$$x(10{,}0\text{ s}) = 75{,}0\text{ m} + (4{,}1\text{ m/s}^2)(10{,}0\text{ s}) + \frac{1}{2}(2{,}0\text{ m/s}^2)(10{,}0\text{ s})^2 = 216{,}0\text{ m}$$

$$v_x(10{,}0\text{ s}) = 4{,}1\text{ m/s} + (2{,}0\text{ m/s}^2)(10{,}0\text{ s}) = 24{,}1\text{m/s}$$

$$y(10{,}0\text{ s}) = -50{,}0\text{ m} + (-1{,}1\text{ m/s})(10{,}0\text{ s}) + \frac{1}{2}(-0{,}54\text{ m/s}^2)(10{,}0\text{ s})^2 = -88{,}0\text{ m}$$

$$v_y(10{,}0\text{ s}) = -1{,}1\text{ m/s} + (-0{,}54\text{ m/s}^2)(10{,}0\text{ s}) = -6{,}5\text{ m/s}.$$

La posición y la velocidad en $t = 10{,}0$ s son, finalmente,

$$\vec{\mathbf{r}}(10{,}0\text{ s}) = (216{,}0\hat{\mathbf{i}} - 88{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{ m}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(10{,}0\text{ s}) = (24{,}1\hat{\mathbf{i}} - 6{,}5\hat{\mathbf{j}})\text{m/s}.$$

La magnitud de la velocidad de la esquiadora a los 10,0 s es de 25 m/s, lo que supone 60 mi/h.

Importancia

Es útil saber que, dadas las condiciones iniciales de posición, velocidad y aceleración de un objeto, podemos encontrar la posición, velocidad y aceleración en cualquier otro momento.

Con la Ecuación 4.8 y la Ecuación 4.10 hemos completado el conjunto de expresiones para la posición, velocidad y aceleración de un objeto que se mueve en dos o tres dimensiones. Si las trayectorias de los objetos se parecen a las "flechas rojas" de la imagen que abre el capítulo, las expresiones para la posición, la velocidad y la aceleración pueden ser bastante complicadas. En las siguientes secciones examinaremos dos casos especiales de movimiento en dos y tres dimensiones, mediante el análisis del movimiento de proyectil y del movimiento circular.

INTERACTIVO

En esta página web de la Universidad de Colorado Boulder (https://openstax.org/l/21phetmotladyb_es), puede explorar la posición, velocidad y aceleración de una mariquita con una simulación interactiva, que le permite cambiar estos parámetros.

4.3 Movimiento de proyectil

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Utilizar el movimiento unidimensional en direcciones perpendiculares para analizar el movimiento de proyectil.
- Calcular el alcance, el tiempo de vuelo y la altura máxima de un proyectil que se lanza e impacta en una superficie plana y horizontal.
- Encontrar el tiempo de vuelo y la velocidad de impacto de un proyectil que aterriza a una altura diferente a la del lanzamiento.
- Calcular la trayectoria de un proyectil.

El **movimiento de proyectil** es el movimiento de un objeto lanzado o proyectado al aire, sujeto únicamente a la aceleración como resultado de la gravedad. Las aplicaciones del movimiento de proyectil en física e ingeniería son numerosas. Algunos ejemplos son los meteoritos al entrar en la atmósfera terrestre, los fuegos artificiales y el movimiento de cualquier pelota en los deportes. Dichos objetos se denominan *proyectiles* y su recorrido se denomina **trayectoria**. El movimiento de los objetos que caen, tal y como se explica en Movimiento rectilíneo, es un tipo simple de movimiento de proyectil unidimensional en el que no hay movimiento horizontal. En esta sección, consideramos el movimiento bidimensional de proyectil, y nuestro tratamiento descarta los efectos de la resistencia del aire.

El hecho más importante que hay que recordar aquí es que *los movimientos a lo largo de los ejes perpendiculares son independientes* y, por tanto, pueden analizarse por separado. Ya hablamos de este hecho en Vectores de desplazamiento y velocidad, donde vimos que los movimientos verticales y horizontales son

independientes. La clave para analizar el movimiento bidimensional de proyectil es dividirlo en dos movimientos: uno a lo largo del eje horizontal y otro a lo largo del vertical. (Esta elección de ejes es la más sensata porque la aceleración resultante de la gravedad es vertical; por lo tanto, no hay aceleración a lo largo del eje horizontal cuando la resistencia del aire es despreciable). Como es habitual, llamamos al eje horizontal eje de la x y al eje vertical eje de la y. No es necesario que utilicemos esta elección de ejes; simplemente es conveniente en el caso de la aceleración gravitatoria. En otros casos podemos elegir un conjunto diferente de ejes. La Figura 4.11 ilustra la notación para el desplazamiento, donde definimos $\vec{\mathbf{s}}$ como el desplazamiento total, y $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$ son sus vectores componentes a lo largo de los ejes horizontal y vertical, respectivamente. Las magnitudes de estos vectores son s, x y y.

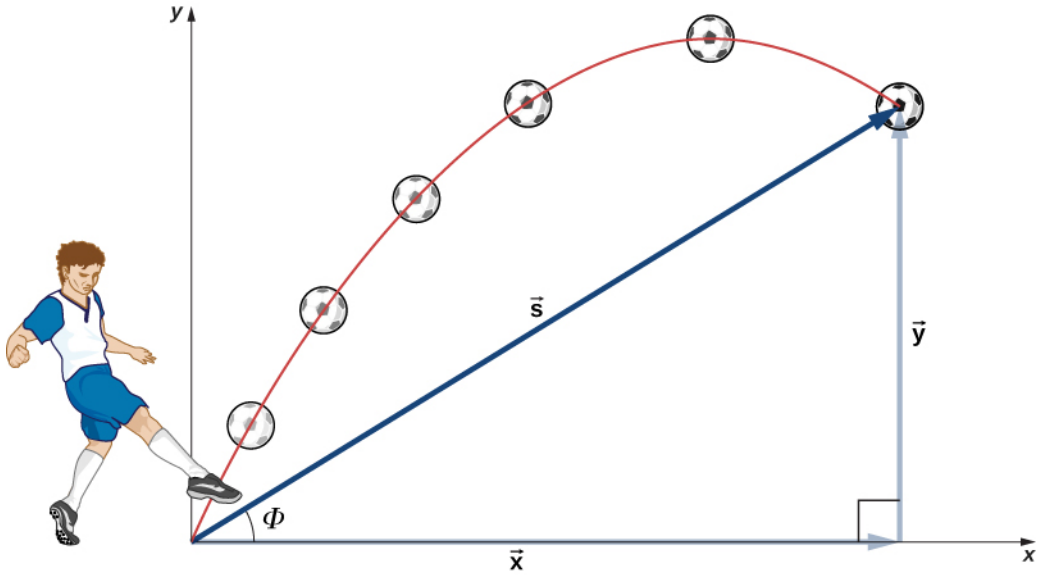


FIGURA 4.11 El desplazamiento total s de un balón de fútbol en un punto de su recorrido. El vector $\vec{\mathbf{s}}$ tiene componentes $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$ a lo largo de los ejes horizontal y vertical. Su magnitud es s y forma un ángulo Φ con la horizontal.

Para describir completamente el movimiento de proyectil, debemos incluir la velocidad y la aceleración, así como el desplazamiento. Debemos encontrar sus componentes a lo largo de los ejes de la x y la y. Supongamos que todas las fuerzas, excepto la gravedad (como la resistencia del aire y la fricción, por ejemplo), son despreciables. Definiendo que la dirección positiva es hacia arriba, los componentes de la aceleración son entonces muy simples:

$$a_y = -g = -9{,}8\ \text{m/s}^2 \quad (-32\ \text{pies/s}^2).$$

Dado que la gravedad es vertical, $a_x = 0$. Si $a_x = 0$, esto significa que la velocidad inicial en la dirección x es igual a la velocidad final en la dirección x, o $v_x = v_{0x}$. Con estas condiciones sobre la aceleración y la velocidad, podemos escribir la cinemática de la Ecuación 4.11 a la Ecuación 4.18 para el movimiento en un campo gravitacional uniforme, incluso el resto de las ecuaciones cinemáticas para una aceleración constante de Movimiento con aceleración constante. Las ecuaciones cinemáticas del movimiento en un campo gravitacional uniforme se convierten en ecuaciones cinemáticas con $a_y = -g, \quad a_x = 0$:

Movimiento horizontal

$$v_{0x} = v_x, \; x = x_0 + v_x t \tag{4.19}$$

Movimiento vertical

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t \tag{4.20}$$

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{4.21}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \textbf{4.22}$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \quad \textbf{4.23}$$

Utilizando este conjunto de ecuaciones, podemos analizar el movimiento de proyectil, teniendo en cuenta algunos puntos importantes.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Movimiento de proyectil

1. Resuelva el movimiento en componentes horizontales y verticales a lo largo de los ejes de la x y la y. Las magnitudes de los componentes del desplazamiento $\vec{\mathbf{s}}$ a lo largo de estos ejes son x y y. Las magnitudes de los componentes de la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ son $v_x = v\cos\theta$ y $v_y = v\text{sen}\,\theta$, donde v es la magnitud de la velocidad y θ es su dirección con respecto a la horizontal, como se muestra en la Figura 4.12.
2. Trate el movimiento como dos movimientos unidimensionales independientes: uno horizontal y otro vertical. Utilice las ecuaciones cinemáticas para el movimiento horizontal y vertical presentadas anteriormente.
3. Resuelva las incógnitas en los dos movimientos separados: uno horizontal y otro vertical. Observe que la única variable común entre los movimientos es el tiempo t. Los procedimientos de resolución de problemas aquí son los mismos que los de la cinemática unidimensional y se ilustran en los siguientes ejemplos resueltos.
4. Recombine las cantidades en las direcciones horizontal y vertical para encontrar el desplazamiento total $\vec{\mathbf{s}}$ y la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. Resuelva la magnitud y la dirección del desplazamiento y la velocidad mediante

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Phi = \tan^{-1}(y/x), \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

donde Φ es la dirección del desplazamiento $\vec{\mathbf{s}}$.

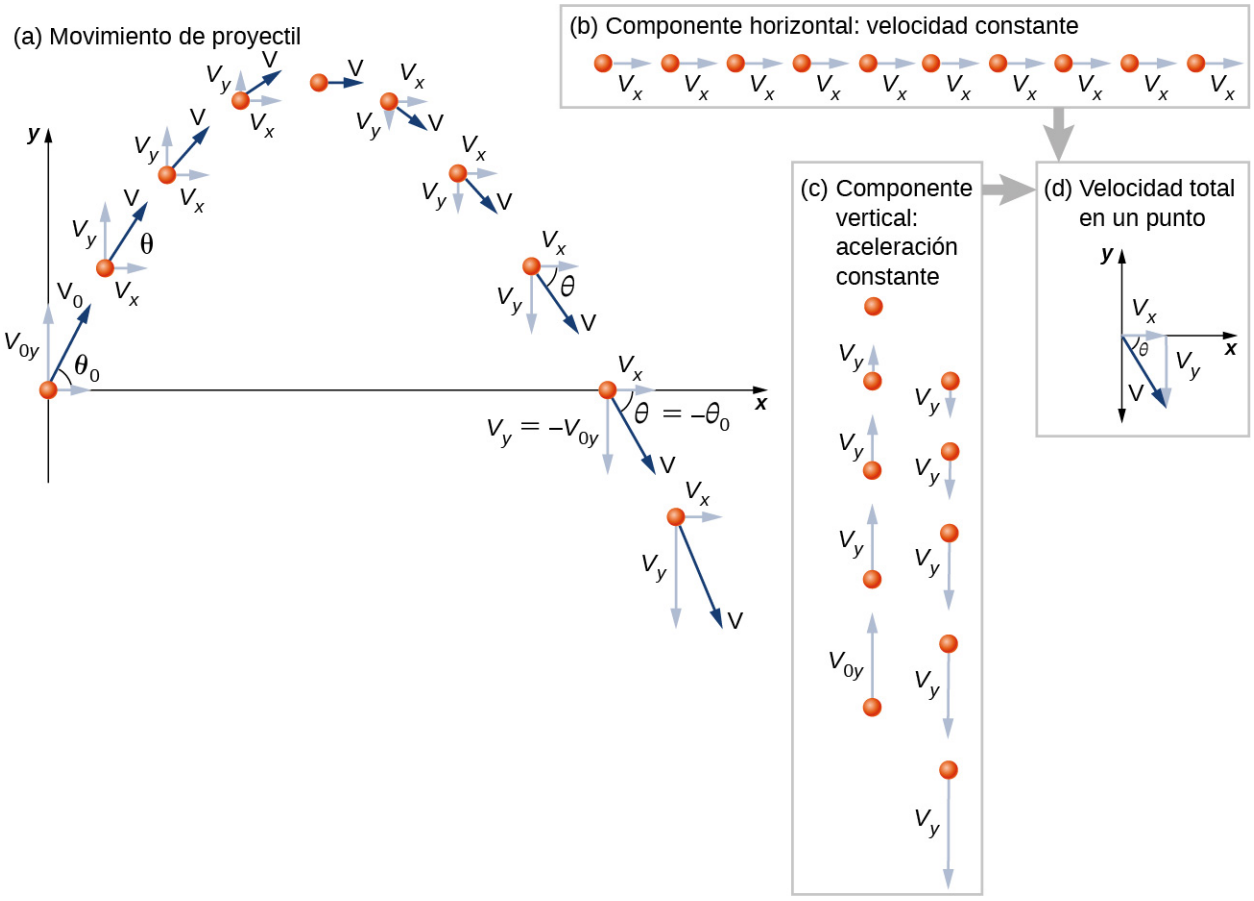


FIGURA 4.12 (a) Analizamos el movimiento bidimensional de proyectil al dividirlo en dos movimientos unidimensionales independientes a lo largo de los ejes vertical y horizontal. (b) El movimiento horizontal es simple, porque $a_x = 0$ y v_x es una constante. (c) La velocidad en la dirección vertical comienza a disminuir a medida que el objeto se eleva. En su punto más alto, la velocidad vertical es cero. A medida que el objeto vuelve a caer hacia la Tierra, la velocidad vertical aumenta de nuevo en magnitud, pero apunta en la dirección opuesta a la velocidad vertical inicial. (d) Los movimientos *x* y *y* se recombinan para obtener la velocidad total en cualquier punto en la trayectoria.

EJEMPLO 4.7

Un proyectil de fuegos artificiales estalla alto y lejos

Durante un espectáculo de fuegos artificiales, se lanza un proyectil al aire con una rapidez inicial de 70,0 m/s con un ángulo de 75,0° por encima de la horizontal, como se ilustra en la Figura 4.13. La mecha está programada para que el proyectil se encienda justo cuando alcance su punto más alto sobre el suelo. (a) Calcule la altura a la que explota el proyectil. (b) ¿Cuánto tiempo transcurre entre el lanzamiento del proyectil y la explosión? (c) ¿Cuál es el desplazamiento horizontal del proyectil cuando estalla? (d) ¿Cuál es el desplazamiento total desde el punto de lanzamiento hasta el punto más alto?

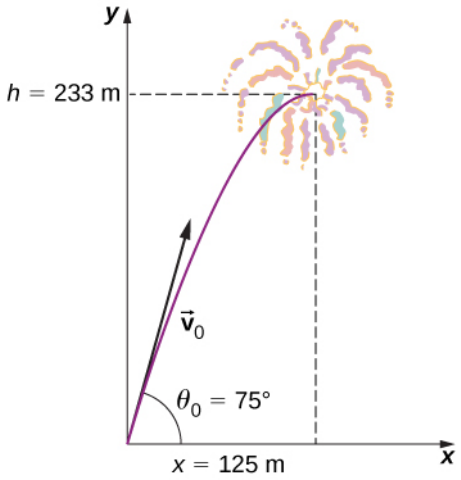


FIGURA 4.13 La trayectoria de un proyectil de fuegos artificiales. La mecha se ajusta para que el proyectil explote en el punto más alto de su trayectoria, que se encuentra a una altura de 233 m y a 125 m de distancia horizontal.

Estrategia

El movimiento puede dividirse en movimientos horizontales y verticales en los que $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Podemos entonces definir x_0 y y_0 como cero y resolver las cantidades deseadas.

Solución

(a) Por "altura" se entiende la altitud o posición vertical y sobre el punto de partida. El punto más alto de cualquier trayectoria, llamado *vértice*, se alcanza cuando $v_y = 0$. Como conocemos las velocidades inicial y final, así como la posición inicial, utilizamos la siguiente ecuación para encontrar y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0).$$

Dado que y_0 y v_y son ambos cero, la ecuación se simplifica a

$$0 = v_{0y}^2 - 2gy.$$

Al resolver y obtenemos

$$y = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Ahora debemos encontrar v_{0y}, el componente de la velocidad inicial en la dirección y. Está dado por $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$, donde v_0 es la velocidad inicial de 70,0 m/s y $\theta_0 = 75°$ es el ángulo inicial. Por lo tanto,

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta = (70{,}0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 75° = 67{,}6 \text{ m/s}$$

y la y es

$$y = \frac{(67{,}6 \text{ m/s})^2}{2(9{,}80 \text{ m/s}^2)}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$y = 233 \text{ m}.$$

Observe que, al ser positivo hacia arriba, la velocidad vertical inicial es positiva, al igual que la altura máxima, pero la aceleración resultante de la gravedad es negativa. Observe también que la altura máxima depende únicamente del componente vertical de la velocidad inicial, de modo que cualquier proyectil con un componente vertical inicial de velocidad de 67,6 m/s alcanza una altura máxima de 233 m (descartando la resistencia del aire). Las cifras de este ejemplo son razonables para los grandes espectáculos pirotécnicos, cuyos proyectiles alcanzan esas alturas antes de estallar. En la práctica, la resistencia del aire no es

completamente despreciable, por lo que la velocidad inicial tendría que ser algo mayor que la dada para alcanzar la misma altura.

(b) Como en muchos problemas de física, hay más de una forma de resolver el tiempo en que el proyectil alcanza su punto más alto. En este caso, el método más sencillo consiste en utilizar $v_y = v_{0y} - gt$. Dado que $v_y = 0$ en el vértice, esta ecuación se reduce simplemente a

$$0 = v_{0y} - gt$$

o

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{67{,}6 \text{ m/s}}{9{,}80 \text{ m/s}^2} = 6{,}90\text{s}.$$

Este tiempo también es razonable para los grandes fuegos artificiales. Si puede ver el lanzamiento de los fuegos artificiales, observe que transcurren varios segundos antes de que el proyectil estalle. Otra forma de encontrar el tiempo es utilizar $y = y_0 + \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t$. Esto se deja como un ejercicio para completar.

(c) Porque la resistencia del aire es despreciable, $a_x = 0$ y la velocidad horizontal es constante, como se ha comentado anteriormente. El desplazamiento horizontal es la velocidad horizontal multiplicada por el tiempo, tal y como viene dada por $x = x_0 + v_x t$, donde x_0 es igual a cero. Por lo tanto,

$$x = v_x t,$$

donde v_x es el componente x de la velocidad, que viene dada por

$$v_x = v_0 \cos\theta = (70{,}0 \text{ m/s})\cos 75^\circ = 18{,}1 \text{ m/s}.$$

El tiempo t para ambos movimientos es el mismo, por lo que x es

$$x = (18{,}1 \text{ m/s})6{,}90 \text{ s} = 125 \text{ m}.$$

El movimiento horizontal es una velocidad constante a falta de resistencia del aire. El desplazamiento horizontal encontrado aquí serviría para evitar que los fragmentos de fuegos artificiales caigan sobre los espectadores. Cuando el proyectil estalla, la resistencia del aire tiene un efecto importante, y muchos fragmentos caen justo por debajo.

(d) Se acaban de calcular los componentes horizontales y verticales del desplazamiento, por lo que lo único que le falta aquí es encontrar la magnitud y la dirección del desplazamiento en el punto más alto:

$$\vec{\mathbf{s}} = 125\hat{\mathbf{i}} + 233\hat{\mathbf{j}}$$

$$|\vec{\mathbf{s}}| = \sqrt{125^2 + 233^2} = 264 \text{ m}$$

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{233}{125}\right) = 61{,}8^\circ.$$

Observe que el ángulo del vector de desplazamiento es menor que el ángulo inicial de lanzamiento. Para ver el porqué de esto, revise la Figura 4.11, que muestra la curvatura de la trayectoria hacia el nivel del suelo.

Al resolver el Ejemplo 4.7(a), la expresión que encontramos para y es válida para cualquier movimiento de proyectil cuando la resistencia del aire es despreciable. Llame a la altura máxima $y = h$. Luego,

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Esta ecuación define la *altura máxima de un proyectil por encima de su posición de lanzamiento* y depende únicamente del componente vertical de la velocidad inicial.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.3

Una roca es lanzada horizontalmente desde un acantilado de 100,0 m de altura con una velocidad de 15,0 m/s.

(a) Defina el origen del sistema de coordenadas. (b) ¿Qué ecuación describe el movimiento horizontal? (c) ¿Qué ecuaciones describen el movimiento vertical? (d) ¿Cuál es la velocidad de la roca en el punto de impacto?

EJEMPLO 4.8

Calcular el movimiento de proyectil: tenista

Un tenista gana un partido en el estadio Arthur Ashe y golpea una pelota hacia las gradas a 30 m/s y a un ángulo de 45° sobre la horizontal (Figura 4.14). En su descenso, un espectador atrapa la pelota a 10 m por encima del punto en el que fue golpeada. (a) Calcule el tiempo que tarda la pelota de tenis en llegar al espectador. (b) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la velocidad de la pelota en el momento del impacto?

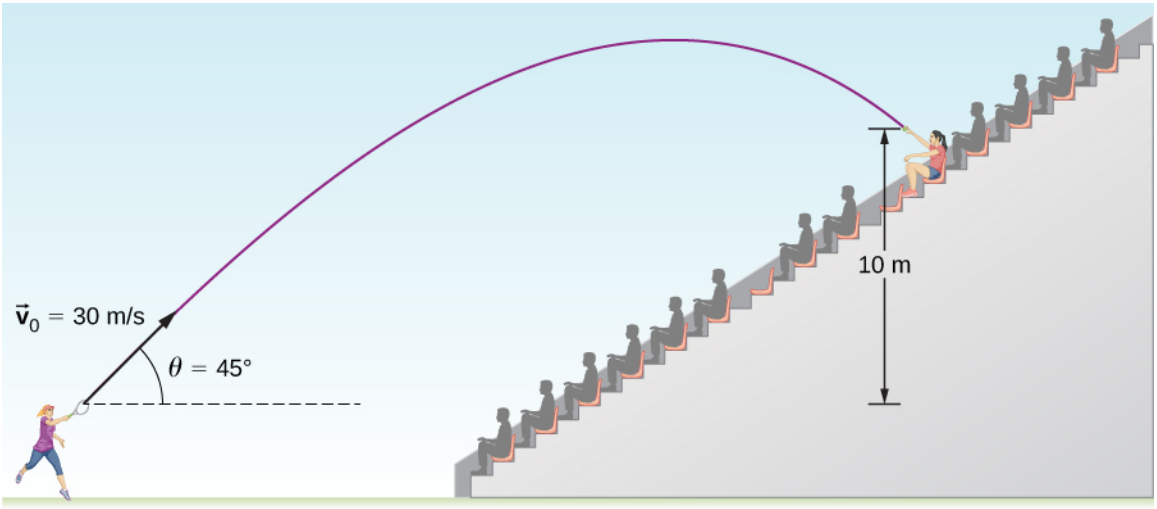


FIGURA 4.14 La trayectoria de una pelota de tenis golpeada hacia las gradas.

Estrategia

De nuevo, la resolución de este movimiento bidimensional en dos movimientos unidimensionales independientes nos permite resolver las cantidades deseadas. El tiempo que un proyectil está en el aire se rige únicamente por su movimiento vertical. Por lo tanto, primero resolvemos t. Mientras la pelota sube y baja verticalmente, el movimiento horizontal continúa a velocidad constante. En este ejemplo se pide la velocidad final. Por lo tanto, recombinamos los resultados verticales y horizontales para obtener $\vec{v}$ en el tiempo final t, determinado en la primera parte del ejemplo.

Solución

(a) Mientras la pelota está en el aire, se eleva y luego cae hasta una posición final 10,0 m más alta que su altitud inicial. Podemos encontrar el tiempo para esto usando la Ecuación 4.22:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Si tomamos la posición inicial y_0 como cero, entonces la posición final es $y = 10$ m. La velocidad vertical inicial es el componente vertical de la velocidad inicial:

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 = (30{,}0 \text{ m/s})\operatorname{sen} 45° = 21{,}2 \text{ m/s}.$$

Sustituyendo en la Ecuación 4.22 para y obtenemos

$$10{,}0 \text{ m} = (21{,}2 \text{ m/s})t - (4{,}90 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Reordenando los términos obtenemos una ecuación cuadrática en t:

$$(4{,}90 \text{ m/s}^2)t^2 - (21{,}2 \text{ m/s})t + 10{,}0 \text{ m} = 0.$$

El uso de la fórmula cuadrática produce $t = 3{,}79$ s y $t = 0{,}54$ s. Dado que la pelota se encuentra a una altura de 10 m en dos tiempos de su trayectoria, una vez al subir y otra al bajar, tomamos la solución más larga para el tiempo que tarda la pelota en llegar al espectador:

$$t = 3{,}79 \text{ s}.$$

El tiempo de movimiento de proyectil está determinado completamente por el movimiento vertical. Por lo tanto, cualquier proyectil que tenga una velocidad vertical inicial de 21,2 m/s y aterrice 10,0 m por debajo de su altitud inicial pasa 3,79 s en el aire.

(b) Podemos encontrar las velocidades horizontales y verticales finales v_x y v_y con el resultado de (a). Luego, podemos combinarlos para encontrar la magnitud del vector de velocidad total $\vec{\mathbf{v}}$ y el ángulo θ que hace con la horizontal. Dado que v_x es constante, podemos resolverla en cualquier posición horizontal. Elegimos el punto de partida porque conocemos tanto la velocidad inicial como el ángulo inicial. Por lo tanto,

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (30 \text{ m/s})\cos 45^\circ = 21{,}2 \text{ m/s}.$$

La velocidad vertical final viene dada por la Ecuación 4.21:

$$v_y = v_{0y} - gt.$$

Dado que v_{0y} se encontró en la parte (a) como 21,2 m/s, tenemos

$$v_y = 21{,}2 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2(3{,}79 \text{ s}) = -15{,}9 \text{ m/s}.$$

La magnitud de la velocidad final $\vec{\mathbf{v}}$ es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(21{,}2 \text{ m/s})^2 + (-150{,}9 \text{ m/s})^2} = 26{,}5 \text{ m/s}.$$

La dirección θ_v se encuentra con la tangente inversa:

$$\theta_v = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15{,}9}{21{,}2}\right) = 36{,}9^\circ.$$

Importancia

(a) Como se mencionó anteriormente, el movimiento vertical determina completamente el tiempo del movimiento de proyectil. Por lo tanto, cualquier proyectil que tenga una velocidad vertical inicial de 21,2 m/s y aterrice 10,0 m por encima de su altitud inicial pasa 3,79 s en el aire. (b) El ángulo negativo significa que la velocidad está $36{,}9^\circ$ por debajo de la horizontal en el punto de impacto. Este resultado es coherente con el hecho de que la pelota impacta en un punto al otro lado del vértice de la trayectoria y, por lo tanto, tiene un componente *y* negativo de velocidad. La magnitud de la velocidad es menor que la magnitud de la velocidad inicial prevista, ya que impacta a 10,0 m por encima de la elevación de lanzamiento.

Tiempo de vuelo, trayectoria y alcance

Son interesantes el tiempo de vuelo, la trayectoria y el alcance de un proyectil lanzado sobre una superficie horizontal plana y que impacta en la misma superficie. En este caso, las ecuaciones cinemáticas dan expresiones útiles para estas cantidades, que se derivan en las siguientes secciones.

Tiempo de vuelo

Podemos resolver el tiempo de vuelo de un proyectil que se lanza e impacta en una superficie plana horizontal al realizar algunas manipulaciones de las ecuaciones cinemáticas. Observamos que la posición y el desplazamiento en *y* deben ser cero en el lanzamiento y en el impacto en una superficie plana. Así, suponemos el desplazamiento en *y* igual a cero y encontramos

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \text{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Factorizando, tenemos

$$t\left(v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - \frac{gt}{2}\right) = 0.$$

Al resolver t obtenemos

$$T_{\text{tof}} = \frac{2(v_0 \operatorname{sen}\theta_0)}{g}. \tag{4.24}$$

Este es el **tiempo de vuelo** para un proyectil tanto lanzado como impactado en una superficie horizontal plana. La Ecuación 4.24 no se aplica cuando el proyectil aterriza a una elevación diferente de la que fue lanzado, como vimos en el Ejemplo 4.8 del tenista que golpeó la pelota hacia las gradas. La otra solución, $t = 0$, corresponde al momento del lanzamiento. El tiempo de vuelo es linealmente proporcional a la velocidad inicial en la dirección y e inversamente proporcional a g. Por lo tanto, en la Luna, donde la gravedad es una sexta parte de la de la Tierra, un proyectil lanzado con la misma velocidad que en la Tierra estaría en el aire seis veces más tiempo.

Trayectoria

La trayectoria de un proyectil se puede encontrar al eliminar la variable de tiempo t de las ecuaciones cinemáticas para un t arbitrario y al resolver para $y(x)$. Tomamos $x_0 = y_0 = 0$ por lo que el proyectil se lanza desde el origen. La ecuación cinemática para x da

$$x = v_{0x}t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}.$$

Sustituyendo la expresión de t en la ecuación de la posición $y = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$ nos da

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2.$$

Reordenando los términos, tenemos

$$y = (\tan\theta_0)x - \left[\frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}\right]x^2. \tag{4.25}$$

Esta ecuación de trayectoria es de la forma $y = ax + bx^2$, que es una ecuación de una parábola con coeficientes

$$a = \tan\theta_0, \quad b = -\frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}.$$

Alcance

A partir de la ecuación de la trayectoria también podemos encontrar el **alcance**, o la distancia horizontal recorrida por el proyectil. Factorizando la Ecuación 4.25, tenemos

$$y = x\left[\tan\theta_0 - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}x\right].$$

La posición de la y es cero tanto para el punto de lanzamiento como para el punto de impacto, ya que de nuevo estamos considerando solo una superficie horizontal plana. Suponiendo que $y = 0$ en esta ecuación se obtienen las soluciones $x = 0$, correspondiente al punto de lanzamiento, y

$$x = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0}{g},$$

correspondiente al punto de impacto. Utilizando la identidad trigonométrica $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$ y asumiendo $x = R$ para el alcance, encontramos

$$R = \frac{v_0^2 \text{sen} 2\theta_0}{g}. \qquad 4.26$$

Observe especialmente que la Ecuación 4.26 solo es válida para el lanzamiento y el impacto sobre una superficie horizontal. Vemos que el alcance es directamente proporcional al cuadrado de la rapidez inicial v_0 y $\text{sen} 2\theta_0$, y es inversamente proporcional a la aceleración de la gravedad. Así, en la Luna, el alcance sería seis veces mayor que en la Tierra para la misma velocidad inicial. Además, vemos en el factor $\text{sen} 2\theta_0$ que el alcance es máximo en $45°$. Estos resultados se muestran en la Figura 4.15. En (a) vemos que cuanto mayor es la velocidad inicial, mayor es el alcance. En (b), vemos que el alcance es máximo en $45°$. Esto es cierto solo para las condiciones en la que se descarta la resistencia del aire. Si se tiene en cuenta la resistencia del aire, el ángulo máximo es algo menor. Es interesante que se encuentre el mismo alcance para dos ángulos de lanzamiento iniciales que suman $90°$. El proyectil lanzado con el ángulo menor tiene un vértice más bajo que el ángulo mayor, pero ambos tienen el mismo alcance.

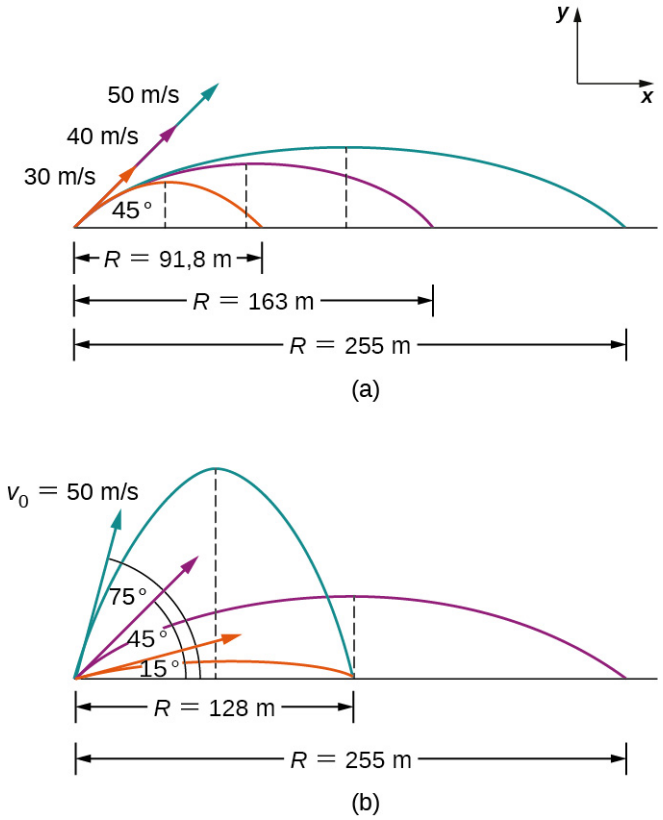


FIGURA 4.15 Trayectorias de proyectiles en terreno llano. (a) Cuanto mayor sea la rapidez inicial v_0, mayor será el alcance para un ángulo inicial dado. (b) El efecto del ángulo inicial θ_0 sobre el alcance de un proyectil con una rapidez inicial determinada. Observe que el alcance es el mismo para los ángulos iniciales de $15°$ y $75°$, aunque las alturas máximas de esas trayectorias son diferentes.

EJEMPLO 4.9

Comparación de tiros de golf

Un golfista se encuentra en dos situaciones diferentes en distintos hoyos. En el segundo hoyo está a 120 m del *green* y quiere golpear la pelota 90 m y dejarla correr hacia el *green*. Angula el tiro bajo al suelo a $30°$ de la horizontal para que la pelota ruede después del impacto. En el cuarto hoyo está a 90 m del *green* y quiere dejar caer la bola con un mínimo de rodadura después del impacto. Aquí, angula el tiro a $70°$ de la horizontal para minimizar la rodadura tras el impacto. Ambos tiros los golpean e impactan en una superficie plana.

(a) ¿Cuál es la rapidez inicial de la bola en el segundo hoyo?

(b) ¿Cuál es la rapidez inicial de la bola en el cuarto hoyo?

(c) Escriba la ecuación de la trayectoria para ambos casos.

(d) Grafique las trayectorias.

Estrategia

Vemos que la ecuación de alcance tiene la rapidez y el ángulo iniciales, por lo que podemos resolver la rapidez inicial tanto para (a) como para (b). Cuando tenemos la rapidez inicial, podemos utilizar este valor para escribir la ecuación de la trayectoria.

Solución

(a) $R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\operatorname{sen} 2\theta_0}} = \sqrt{\frac{90{,}0 \text{ m}(9{,}8 \text{ m/s}^2)}{\operatorname{sen}(2(30°))}} = 31{,}9 \text{ m/s}$

(b) $R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\operatorname{sen} 2\theta_0}} = \sqrt{\frac{90{,}0 \text{ m}(9{,}8 \text{ m/s}^2)}{\operatorname{sen}(2(70°))}} = 37{,}0 \text{ m/s}$

(c)

$$y = x\left[\tan\theta_0 - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}x\right]$$

$$\text{Segundo hoyo: } y = x\left[\tan 30° - \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{2[(31{,}9 \text{ m/s})(\cos 30°)]^2}x\right] = 0{,}58x - 0{,}0064x^2$$

$$\text{Cuarto hoyo: } y = x\left[\tan 70° - \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{2[(37{,}0 \text{ m/s})(\cos 70°)]^2}x\right] = 2{,}75x - 0{,}0306x^2$$

(d) Utilizando una calculadora gráfica, podemos comparar las dos trayectorias, que se muestran en la Figura 4.16.

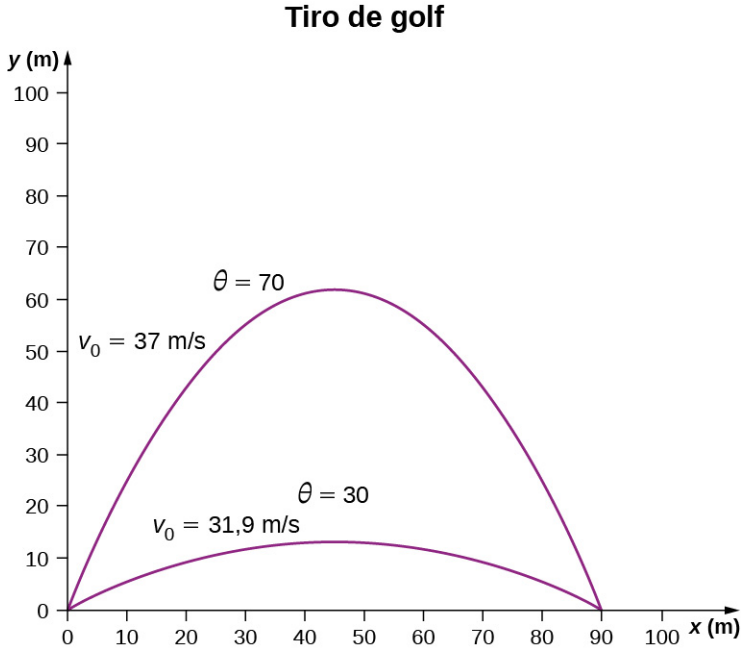


FIGURA 4.16 Dos trayectorias de una pelota de golf con un alcance de 90 m. Los puntos de impacto de ambos

están al mismo nivel que el punto de lanzamiento.

Importancia

La rapidez inicial para el tiro a $70°$ es mayor que la rapidez inicial del tiro a $30°$. Observe en la Figura 4.16 que dos proyectiles lanzados a la misma rapidez, pero con ángulos diferentes, tienen el mismo alcance si los ángulos de lanzamiento suman $90°$. Los ángulos de lanzamiento en este ejemplo se suman para dar un número mayor que $90°$. Por lo tanto, el tiro a $70°$ tiene que tener una mayor rapidez de lanzamiento para alcanzar los 90 m, de lo contrario aterrizaría a una distancia menor.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.4

Si los dos tiros de golf que aparecen en el Ejemplo 4.9 se lanzan a la misma rapidez, ¿qué tiro tendría mayor alcance?

Cuando hablamos del alcance de un proyectil en terreno llano, suponemos que R es muy pequeño comparado con la circunferencia de la Tierra. Sin embargo, si el alcance es grande, la Tierra se curva por debajo del proyectil y la aceleración resultante de la gravedad cambia de dirección a lo largo del recorrido. El alcance es mayor que el predicho por la ecuación de alcance dada anteriormente porque el proyectil tiene más distancia para caer que la que tendría en terreno llano, como se muestra en la Figura 4.17, que se basa en un dibujo de las *leyes* de Newton. Si la rapidez inicial es lo suficientemente grande, el proyectil entra en órbita. La superficie de la Tierra desciende 5 m cada 8000 m. En 1 s un objeto cae 5 m sin resistencia del aire. Por lo tanto, si a un objeto se le da una velocidad horizontal de 8000 m/s (o 18.000 mi/h) cerca de la superficie de la Tierra, entrará en órbita alrededor del planeta porque la superficie se aleja continuamente del objeto. Esta es aproximadamente la rapidez del transbordador espacial en una órbita terrestre baja cuando estaba operativo, o de cualquier satélite en una órbita terrestre baja. Estos y otros aspectos del movimiento orbital, como la rotación de la Tierra, se tratan con mayor profundidad en Gravitación.

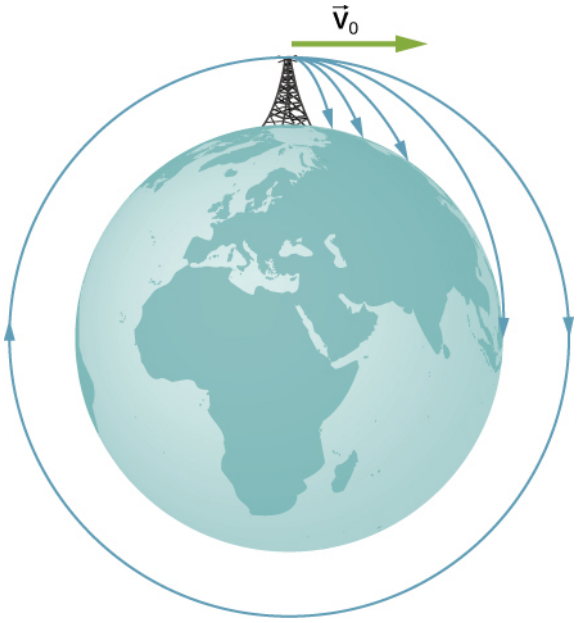


FIGURA 4.17 Proyectil a satélite. En cada uno de los casos mostrados aquí, se lanza un proyectil desde una torre muy alta para evitar la resistencia del aire. Al aumentar la rapidez inicial, el alcance aumenta y se hace más largo de lo que sería en terreno llano porque la Tierra se curva bajo su recorrido. Con una rapidez de 8000 m/s, se alcanza la órbita.

INTERACTIVO

En Exploraciones de PhET: Movimiento de proyectil (https://openstax.org/l/21phetpromot_es), aprenda sobre

el movimiento de proyectil en términos del ángulo de lanzamiento y la velocidad inicial.

4.4 Movimiento circular uniforme

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Resolver la aceleración centrípeta de un objeto que se mueve en una trayectoria circular.
- Utilizar las ecuaciones del movimiento circular para encontrar la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula que ejecuta un movimiento circular.
- Explicar las diferencias entre la aceleración centrípeta y la aceleración tangencial resultante del movimiento circular no uniforme.
- Evaluar la aceleración centrípeta y la aceleración tangencial en un movimiento circular no uniforme, y encontrar el vector de aceleración total.

El movimiento circular uniforme es un tipo específico de movimiento en el que un objeto se desplaza en círculo a una rapidez constante. Por ejemplo, cualquier punto de una hélice que gira a una velocidad constante en un movimiento circular uniforme. Otros ejemplos son las agujas de los segundos, los minutos y las horas de un reloj. Es notable que, los puntos de estos objetos en rotación se aceleren realmente, aunque la velocidad de rotación sea una constante. Para ver esto, debemos analizar el movimiento en términos de vectores.

Aceleración centrípeta

En la cinemática unidimensional, los objetos con rapidez constante tienen una aceleración cero. Sin embargo, en la cinemática bidimensional y tridimensional, aunque la rapidez sea una constante, una partícula puede tener aceleración si se mueve a lo largo de una trayectoria curva, como un círculo. En este caso, el vector de velocidad está cambiando, o $d\vec{\mathbf{v}}/dt \neq 0$. Esto se muestra en la Figura 4.18. A medida que la partícula se desplaza en sentido contrario de las agujas del reloj en el tiempo Δt en la trayectoria circular, su vector de posición se mueve desde $\vec{\mathbf{r}}(t)$ hasta $\vec{\mathbf{r}}(t + \Delta t)$. El vector de velocidad tiene una magnitud constante y es tangente a la trayectoria al pasar de $\vec{\mathbf{v}}(t)$ a $\vec{\mathbf{v}}(t + \Delta t)$, y solo cambia su dirección. Dado que el vector de velocidad $\vec{\mathbf{v}}(t)$ es perpendicular al vector de posición $\vec{\mathbf{r}}(t)$, los triángulos formados por los vectores de posición y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, y los vectores de velocidad y $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ son similares. Además, dado que $\left|\vec{\mathbf{r}}(t)\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}(t + \Delta t)\right|$ y $\left|\vec{\mathbf{v}}(t)\right| = \left|\vec{\mathbf{v}}(t + \Delta t)\right|$, los dos triángulos son isósceles. A partir de estos hechos podemos hacer la afirmación

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \text{ o } \Delta v = \frac{v}{r}\Delta r.$$

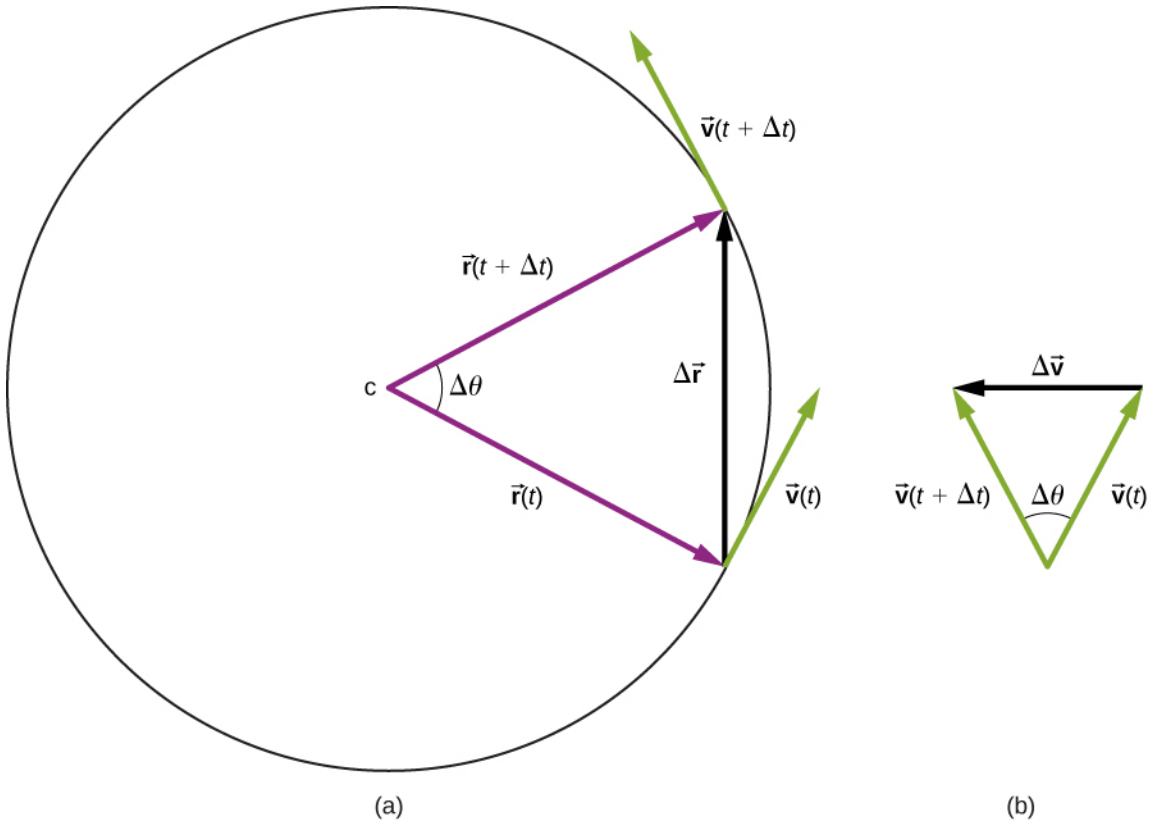


FIGURA 4.18 (a) Una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, con vectores de posición y velocidad en tiempos t y $t + \Delta t$. (b) Vectores de velocidad que forman un triángulo. Los dos triángulos de la figura son similares. El vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ apunta hacia el centro del círculo en el límite $\Delta t \to 0$.

Podemos encontrar la magnitud de la aceleración a partir de

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{v}{r}\left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{r}.$$

La dirección de la aceleración también se puede encontrar observando que como Δt y por lo tanto $\Delta\theta$ se acerca a cero, el vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ se acerca a una dirección perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$. En el límite $\Delta t \to 0$,$\Delta\vec{\mathbf{v}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$. Dado que $\vec{\mathbf{v}}$ es tangente al círculo, la aceleración $d\vec{\mathbf{v}}/dt$ apunta hacia el centro del círculo. En resumen, una partícula que se mueve en un círculo con rapidez constante tiene una aceleración con magnitud

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \qquad 4.27$$

La dirección del vector de aceleración es hacia el centro del círculo (Figura 4.19). Se trata de una aceleración radial y se denomina **aceleración centrípeta**, por lo que le damos el subíndice c. La palabra *centrípeta* viene de las palabras latinas *centrum* (que significa "centro") y *petere* (que significa "buscar"), y por tanto toma el significado de "búsqueda del centro".

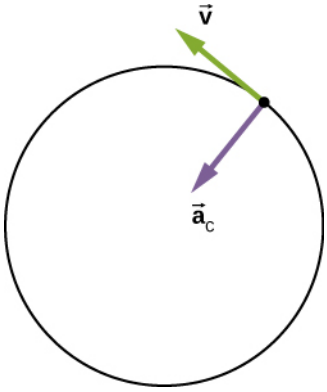


FIGURA 4.19 El vector de aceleración centrípeta apunta hacia el centro de la trayectoria circular del movimiento y es una aceleración en la dirección radial. También se muestra el vector de velocidad, que es tangente al círculo.

Investiguemos algunos ejemplos que ilustren las magnitudes relativas de la velocidad, el radio y la aceleración centrípeta.

EJEMPLO 4.10

Creación de una aceleración de 1 *g*

Un jet vuela a 134,1 m/s en línea recta y realiza un giro en una trayectoria circular a nivel del suelo. ¿Cuál debe ser el radio del círculo para producir una aceleración centrípeta de 1 *g* sobre el piloto y el jet hacia el centro de la trayectoria circular?

Estrategia

Dada la rapidez del jet, podemos resolver el radio del círculo en la expresión de la aceleración centrípeta.

Solución

Establezca la aceleración centrípeta igual a la aceleración de la gravedad: $9{,}8\ \text{m/s}^2 = v^2/r$.

Al resolver el radio, encontramos

$$r = \frac{(134{,}1\ \text{m/s})^2}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 1.835\ \text{m} = 1{,}835\ \text{km}.$$

Importancia

Para crear una aceleración mayor que *g* en el piloto, el jet tendría que disminuir el radio de su trayectoria circular o aumentar su rapidez en su trayectoria existente, o ambas cosas.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.5

Un volante de inercia tiene un radio de 20,0 cm. ¿Cuál es la rapidez de un punto en el borde del volante de inercia si experimenta una aceleración centrípeta de $900{,}0\ \text{cm/s}^2$?

La aceleración centrípeta puede tener una amplia gama de valores, dependiendo de la rapidez y del radio de curvatura de la trayectoria circular. Las aceleraciones centrípetas típicas se indican en la siguiente tabla.

Objeto	Aceleración centrípeta (m/s^2 o factores de *g*)
La Tierra alrededor del Sol	$5{,}93 \times 10^{-3}$
La Luna alrededor de la Tierra	$2{,}73 \times 10^{-3}$

Objeto	Aceleración centrípeta (m/s^2 o factores de g)
Satélite en órbita geosincrónica	0,233
Borde exterior de un CD al reproducirlo	5,78
Jet en un rollo de barril	(2–3 g)
Montaña rusa	(5 g)
Un electrón orbita un protón en un modelo de Bohr simple del átomo	$9{,}0 \times 10^{22}$

TABLA 4.1 Aceleraciones centrípetas típicas

Ecuaciones de movimiento para el movimiento circular uniforme

Una partícula que ejecuta un movimiento circular puede describirse por su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}(t)$. La Figura 4.20 muestra una partícula que ejecuta un movimiento circular en sentido contrario de las agujas del reloj. A medida que la partícula se mueve en el círculo, su vector de posición barre el ángulo θ con el eje de la x. El vector $\vec{\mathbf{r}}(t)$ haciendo un ángulo θ con el eje de la x se muestra con sus componentes a lo largo de los ejes de la x y la y. La magnitud del vector de posición es $A = |\vec{\mathbf{r}}(t)|$ y es también el radio del círculo, por lo que en términos de sus componentes,

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = A\cos\omega t\hat{\mathbf{i}} + A\,\text{sen}\,\omega t\hat{\mathbf{j}}. \qquad 4.28$$

Aquí, ω es una constante llamada **frecuencia angular** de la partícula. La frecuencia angular tiene unidades de radianes (rad) por segundo y es simplemente el número de radianes de medida angular por los que pasa la partícula por segundo. El ángulo θ que tiene el vector de posición en un tiempo determinado es ωt.

Si T es el periodo del movimiento, o el tiempo para completar una revolución (2π rad), entonces

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

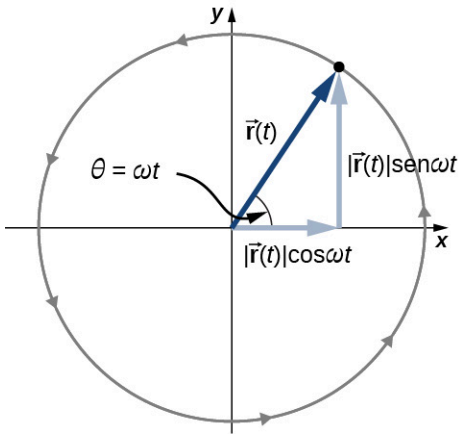


FIGURA 4.20 El vector de posición de una partícula en movimiento circular con sus componentes a lo largo de los ejes de la x y la y. La partícula se mueve en sentido contrario de las agujas del reloj. El ángulo θ es la frecuencia angular ω en radianes por segundo multiplicado por t.

La velocidad y la aceleración pueden obtenerse a partir de la función de posición por diferenciación:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt} = -A\omega \operatorname{sen} \omega t\hat{\mathbf{i}} + A\omega \cos \omega t\hat{\mathbf{j}}. \quad 4.29$$

Se puede demostrar en la Figura 4.20 que el vector de velocidad es tangente al círculo en la ubicación de la partícula, con magnitud $A\omega$. Del mismo modo, el vector de aceleración se encuentra al diferenciar la velocidad:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t\hat{\mathbf{i}} - A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\hat{\mathbf{j}}. \quad 4.30$$

De esta ecuación vemos que el vector de aceleración tiene la magnitud $A\omega^2$ y se dirige en sentido contrario al vector de posición, hacia el origen, porque $\vec{\mathbf{a}}(t) = -\omega^2\vec{\mathbf{r}}(t)$.

EJEMPLO 4.11

Movimiento circular de un protón

Un protón tiene rapidez 5×10^6 m/s y se mueve en un círculo en el plano xy de radio $r = 0{,}175$ m. ¿Cuál es su posición en el plano xy en el tiempo $t = 2{,}0 \times 10^{-7}$ s $= 200$ ¿n? En $t = 0$, la posición del protón es $0{,}175\ \text{m}\hat{\mathbf{i}}$ y da vueltas en sentido contrario de las agujas del reloj. Haga un esquema de la trayectoria.

Solución

A partir de los datos dados, el protón tiene periodo y frecuencia angular:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(0{,}175\ \text{m})}{5{,}0 \times 10^6\ \text{m/s}} = 2{,}20 \times 10^{-7}\ \text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}20 \times 10^{-7}\ \text{s}} = 2{,}856 \times 10^7\ \text{rad/s}.$$

La posición de la partícula en $t = 2{,}0 \times 10^{-7}$ s con $A = 0{,}175$ m es

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}(2{,}0 \times 10^{-7}\text{s}) &= A\cos\omega(2{,}0 \times 10^{-7}\ \text{s})\hat{\mathbf{i}} + A\operatorname{sen}\omega(2{,}0 \times 10^{-7}\ \text{s})\hat{\mathbf{j}}\ \text{m} \\ &= 0{,}175\cos[(2{,}856 \times 10^7\ \text{rad/s})(2{,}0 \times 10^{-7}\ \text{s})]\hat{\mathbf{i}} \\ &\quad + 0{,}175\operatorname{sen}[(2{,}856 \times 10^7\ \text{rad/s})(2{,}0 \times 10^{-7}\ \text{s})]\hat{\mathbf{j}}\ \text{m} \\ &= 0{,}175\cos(5{,}712\ \text{rad})\hat{\mathbf{i}} + 0{,}175\operatorname{sen}(5{,}712\ \text{rad})\hat{\mathbf{j}} = 0{,}147\hat{\mathbf{i}} - 0{,}095\hat{\mathbf{j}}\ \text{m}.\end{aligned}$$

De este resultado vemos que el protón se encuentra ligeramente por debajo del eje de la x. Esto se muestra en la Figura 4.21.

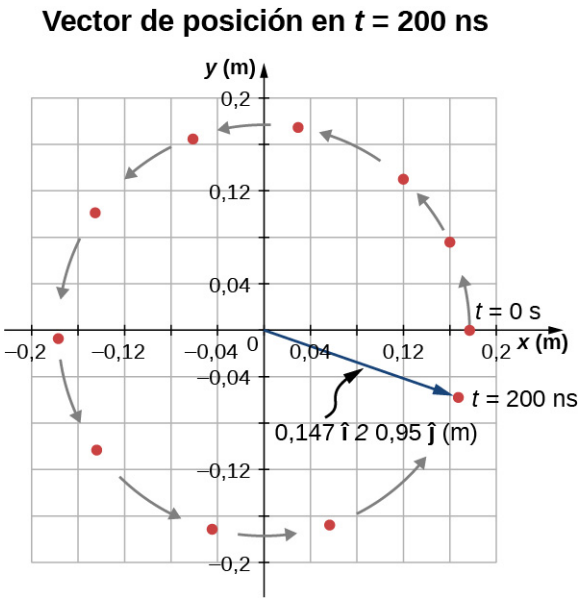


FIGURA 4.21 Vector de posición del protón en $t = 2{,}0 \times 10^{-7}\,\text{s} = 200\,\text{ns}$. Se muestra la trayectoria del protón. El ángulo que recorre el protón a lo largo del círculo es de 5,712 rad, es decir, algo menos de una revolución completa.

Importancia

Elegimos la posición inicial de la partícula para que esté en el eje de la *x*. Esto fue completamente arbitrario. Si se diera una posición inicial diferente, tendríamos otra posición final en $t = 200$ ns.

Movimiento circular no uniforme

El movimiento circular no tiene por qué ser de rapidez constante. Una partícula puede viajar en círculo y acelerar o frenar, lo cual indica aceleración en la dirección del movimiento.

En el movimiento circular uniforme, la partícula que ejecuta el movimiento circular tiene una rapidez constante, mientras que el círculo tiene un radio fijo. Si la rapidez de la partícula también cambia, entonces añadimos una aceleración en la dirección tangencial al círculo. Estas aceleraciones se producen en un punto de un trompo que cambia su velocidad de giro, o en cualquier rotor que se acelere. En Desplazamiento y vectores de velocidad señalamos que la aceleración centrípeta es la tasa de tiempo del cambio de la dirección del vector de velocidad. Si la rapidez de la partícula cambia, entonces tiene una **aceleración tangencial**, que es la tasa de tiempo del cambio de la magnitud de la velocidad:

$$a_\text{T} = \frac{d\left|\vec{\text{v}}\right|}{dt}. \tag{4.31}$$

La dirección de la aceleración tangencial es tangente al círculo, mientras que la dirección de la aceleración centrípeta es radialmente hacia el centro del círculo. Por lo tanto, una partícula en movimiento circular con una aceleración tangencial tiene una **aceleración total**, que es la suma vectorial de las aceleraciones centrípeta y tangencial:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_\text{c} + \vec{\mathbf{a}}_\text{T}. \tag{4.32}$$

Los vectores de aceleración se muestran en la Figura 4.22. Observe que los dos vectores de aceleración $\vec{\mathbf{a}}_\text{c}$ y $\vec{\mathbf{a}}_\text{T}$ son perpendiculares entre sí, con $\vec{\mathbf{a}}_\text{c}$ en la dirección radial y $\vec{\mathbf{a}}_\text{T}$ en la dirección tangencial. La aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ apunta a un ángulo entre $\vec{\mathbf{a}}_\text{c}$ y $\vec{\mathbf{a}}_\text{T}$.

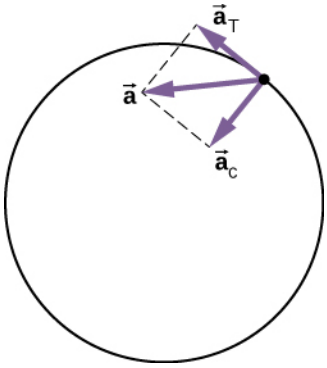


FIGURA 4.22 La aceleración centrípeta apunta hacia el centro del círculo. La aceleración tangencial es tangente al círculo en la posición de la partícula. La aceleración total es la suma vectorial de las aceleraciones tangencial y centrípeta, que son perpendiculares.

EJEMPLO 4.12

Aceleración total durante el movimiento circular

Una partícula se mueve en un círculo de radio $r = 2{,}0$ m. Durante el intervalo comprendido entre $t = 1{,}5$ s y $t = 4{,}0$ s su rapidez varía con el tiempo según

$$v(t) = c_1 - \frac{c_2}{t^2}, \quad c_1 = 4{,}0 \text{ m/s}, \quad c_2 = 6{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}.$$

¿Cuál es la aceleración total de la partícula en $t = 2{,}0$ s?

Estrategia

Nos dan la rapidez de la partícula y el radio del círculo, por lo que podemos calcular fácilmente la aceleración centrípeta. La dirección de la aceleración centrípeta es hacia el centro del círculo. Encontramos la magnitud de la aceleración tangencial al tomar la derivada con respecto al tiempo de $|v(t)|$ utilizando la Ecuación 4.31 y evaluándola en $t = 2{,}0$ s. Usamos esto y la magnitud de la aceleración centrípeta para encontrar la aceleración total.

Solución

La aceleración centrípeta es

$$v(2{,}0\text{s}) = \left(4{,}0 - \frac{6{,}0}{(2{,}0)^2}\right) \text{m/s} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(2{,}5 \text{ m/s})^2}{2{,}0 \text{ m}} = 3{,}1 \text{ m/s}^2$$

dirigida hacia el centro del círculo. La aceleración tangencial es

$$a_T = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{2c_2}{t^3} = \frac{12{,}0}{(2{,}0)^3} \text{m/s}^2 = 1{,}5 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración total es

$$|\vec{a}| = \sqrt{3{,}1^2 + 1{,}5^2} \text{m/s}^2 = 3{,}44 \text{ m/s}^2$$

y $\theta = \tan^{-1}\frac{3{,}1}{1{,}5} = 64°$ de la tangente al círculo. Vea la Figura 4.23.

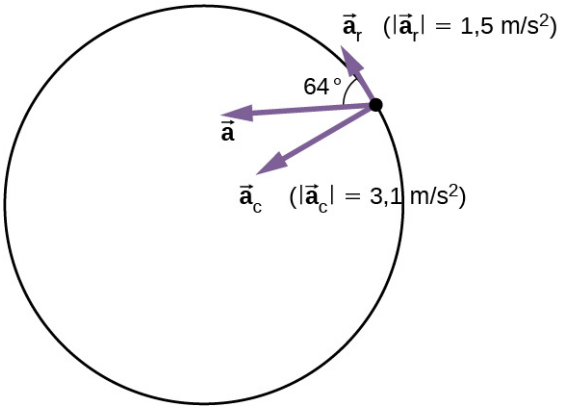


FIGURA 4.23 Los vectores de aceleración tangencial y centrípeta. La aceleración neta $\vec{a}$ es la suma vectorial de las dos aceleraciones.

Importancia

Las direcciones de las aceleraciones centrípeta y tangencial pueden describirse de forma más conveniente en términos de un sistema de coordenadas polares, con vectores unitarios en las direcciones radial y tangencial. Este sistema de coordenadas, que se utiliza para el movimiento a lo largo de trayectorias curvas, se explora en detalle más adelante en el libro.

4.5 Movimiento relativo en una y dos dimensiones

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el concepto de marcos de referencia.
- Escribir las ecuaciones vectoriales de posición y velocidad para el movimiento relativo.
- Dibujar los vectores de posición y velocidad para el movimiento relativo.
- Analizar problemas de movimiento relativo unidimensional y bidimensional con las ecuaciones vectoriales de posición y velocidad.

El movimiento no se produce de forma aislada. Si va en un tren que se mueve a 10 m/s hacia el este, esta velocidad se mide en relación con el suelo sobre el que viaja. Sin embargo, si otro tren le pasa a 15 m/s al este, su velocidad relativa a este otro tren es diferente de su velocidad relativa al suelo. Su velocidad relativa al otro tren es de 5 m/s al oeste. Para profundizar en esta idea, primero tenemos que establecer cierta terminología.

Marcos de referencia

Para abordar el movimiento relativo en una o más dimensiones, primero introducimos el concepto de **marcos de referenciaa**. Cuando decimos que un objeto tiene una determinada velocidad, debemos afirmar que tiene una velocidad con respecto a un determinado marco de referencia. En la mayoría de los ejemplos que hemos examinado hasta ahora, este marco de referencia ha sido la Tierra. Si dice que una persona está sentada en un tren que se mueve a 10 m/s hacia el este, entonces implica que la persona en el tren se desplaza con respecto a la superficie de la Tierra a esta velocidad, y la Tierra es el marco de referencia. Podemos ampliar nuestra visión del movimiento de la persona en el tren y afirmar que la Tierra está girando en su órbita alrededor del Sol, en cuyo caso el movimiento se complica. En este caso, el sistema solar es el marco de referencia. En resumen, todo debate sobre el movimiento relativo deberá definir los marcos de referencia involucrados. Ahora desarrollamos un método para referirse a los marcos de referencia en movimiento relativo.

Movimiento relativo en una dimensión

Primero introducimos el movimiento relativo en una dimensión, porque los vectores de velocidad se simplifican al tener solo dos direcciones posibles. Tomemos el ejemplo de la persona sentada en un tren que avanza hacia el este. Si elegimos el este como dirección positiva y la Tierra como marco de referencia,

entonces podemos escribir la velocidad del tren con respecto a la Tierra como $\vec{\mathbf{v}}_{\text{TE}} = 10\ \text{m/s}\ \hat{\mathbf{i}}$ al este, donde los subíndices TE se refieren al tren y la Tierra. Digamos ahora que la persona se levanta de su asiento y camina hacia la parte trasera del tren a 2 m/s. Esto nos dice que tiene una velocidad relativa al marco de referencia del tren. Como la persona camina hacia el oeste, en dirección negativa, escribimos su velocidad con respecto al tren como $\vec{\mathbf{v}}_{\text{PT}} = -2\ \text{m/s}\ \hat{\mathbf{i}}$. Podemos sumar los dos vectores de velocidad para encontrar la velocidad de la persona con respecto a la Tierra. Esta **velocidad relativa** se escribe como

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{PE}} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{PT}} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{TE}}. \qquad 4.33$$

Observe el orden de los subíndices de los distintos marcos de referencia en la Ecuación 4.33. Los subíndices para el marco de referencia de acoplamiento, que es el tren, aparecen consecutivamente en el lado derecho de la ecuación. La Figura 4.24 muestra el orden correcto de los subíndices al formar la ecuación vectorial.

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{PE}} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{PT}} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{TE}}$$

FIGURA 4.24 Al construir la ecuación vectorial, los subíndices del marco de referencia de acoplamiento aparecen consecutivamente en el interior. Los subíndices del lado izquierdo de la ecuación son los mismos que los dos subíndices exteriores del lado derecho de la ecuación.

Sumando los vectores, encontramos $\vec{\mathbf{v}}_{\text{PE}} = 8\ \text{m/s}\ \hat{\mathbf{i}}$, por lo que la persona se mueve 8 m/s al este con respecto a la Tierra. Gráficamente, esto se muestra en la Figura 4.25.

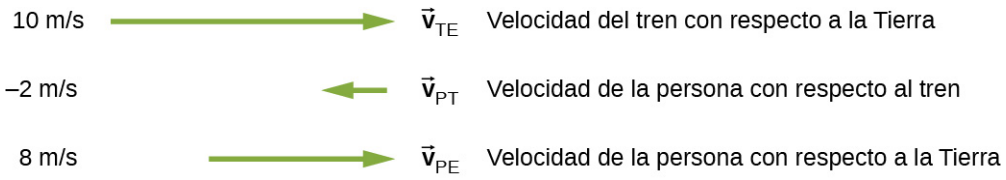


FIGURA 4.25 Vectores de velocidad del tren con respecto a la Tierra, de la persona con respecto al tren y de la persona con respecto a la Tierra.

Velocidad relativa en dos dimensiones

Ahora podemos aplicar estos conceptos para describir el movimiento en dos dimensiones. Consideremos una partícula P y los marcos de referencia S y S', como se muestra en la Figura 4.26. La posición del origen de S' medida en S es $\vec{\mathbf{r}}_{S'S}$, la posición de P medida en S' es $\vec{\mathbf{r}}_{PS'}$, y la posición de P medida en S es $\vec{\mathbf{r}}_{PS}$.

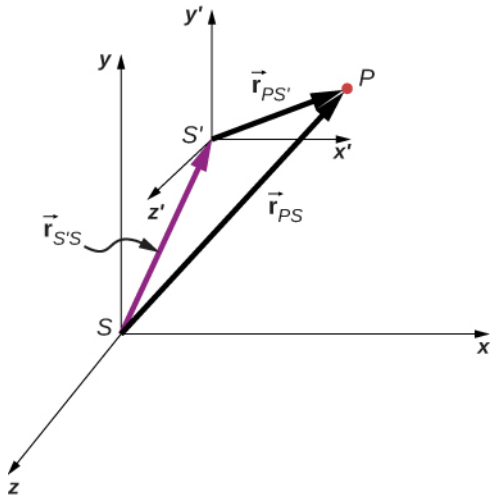


FIGURA 4.26 Las posiciones de la partícula P con respecto a los marcos S y S' son $\vec{\mathbf{r}}_{PS}$ y $\vec{\mathbf{r}}_{PS'}$, respectivamente.

En la Figura 4.26 vemos que

$$\vec{\mathbf{r}}_{PS} = \vec{\mathbf{r}}_{PS'} + \vec{\mathbf{r}}_{S'S}. \qquad 4.34$$

Las velocidades relativas son las derivadas del tiempo de los vectores de posición. Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{v}}_{PS} = \vec{\mathbf{v}}_{PS'} + \vec{\mathbf{v}}_{S'S}. \tag{4.35}$$

La velocidad de una partícula con respecto a S es igual a su velocidad con respecto a S' más la velocidad de S' en relación con S.

Podemos ampliar la Ecuación 4.35 a cualquier número de marcos de referencia. Para la partícula *P* con velocidades $\vec{\mathbf{v}}_{PA}$, $\vec{\mathbf{v}}_{PB}$, y $\vec{\mathbf{v}}_{PC}$ en los marcos *A*, *B* y *C*,

$$\vec{\mathbf{v}}_{PC} = \vec{\mathbf{v}}_{PA} + \vec{\mathbf{v}}_{AB} + \vec{\mathbf{v}}_{BC}. \tag{4.36}$$

También podemos ver cómo se relacionan las aceleraciones observadas en dos marcos de referencia al diferenciar la Ecuación 4.35:

$$\vec{\mathbf{a}}_{PS} = \vec{\mathbf{a}}_{PS'} + \vec{\mathbf{a}}_{S'S}. \tag{4.37}$$

Vemos que si la velocidad de S' con respecto a *S* es una constante, entonces $\vec{\mathbf{a}}_{S'S} = 0$ y

$$\vec{\mathbf{a}}_{PS} = \vec{\mathbf{a}}_{PS'}. \tag{4.38}$$

Esto manifiesta que la aceleración de una partícula es la misma medida por dos observadores que se mueven a una velocidad constante uno respecto del otro.

EJEMPLO 4.13

Movimiento de un auto con respecto a un camión

Un camión viaja hacia el sur a una rapidez de 70 km/h hacia una intersección. Un auto viaja hacia el este en dirección a la intersección a una rapidez de 80 km/h (Figura 4.27). ¿Cuál es la velocidad del auto con respecto al camión?

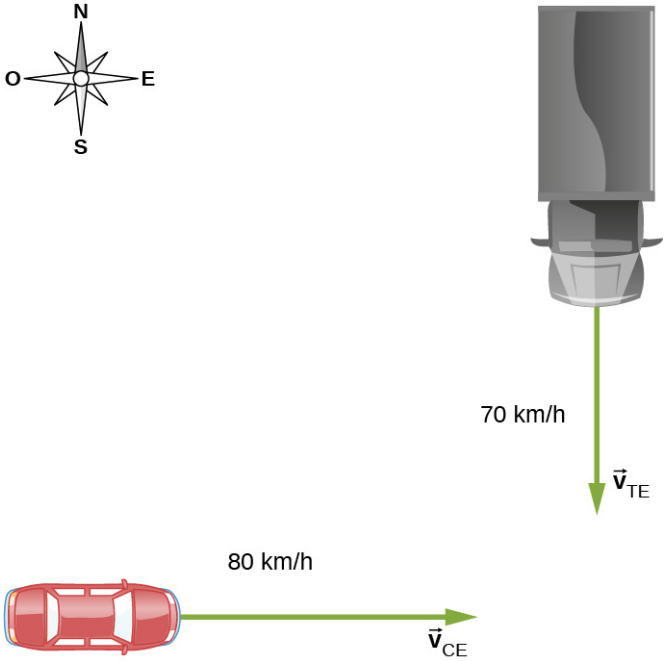


FIGURA 4.27 Un auto viaja hacia el este en dirección a una intersección, mientras que un camión viaja hacia el sur en dirección a la misma intersección.

Estrategia

En primer lugar, debemos establecer el marco de referencia común a ambos vehículos, que es la Tierra. A continuación, escribimos las velocidades de cada uno con respecto al marco de referencia de la Tierra, lo que nos permite formar una ecuación vectorial que relaciona el auto, el camión y la Tierra para resolver la velocidad del auto con respecto al camión.

Solución

La velocidad del auto con respecto a la Tierra es $\vec{\mathbf{v}}_{\text{CE}} = 80\ \text{km/h}\ \hat{\mathbf{i}}$. La velocidad del camión con respecto a la Tierra es $\vec{\mathbf{v}}_{\text{TE}} = -70\ \text{km/h}\ \hat{\mathbf{j}}$. Utilizando la regla de adición de velocidades, la ecuación de movimiento relativo que buscamos es

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CT}} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{CE}} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{ET}}.$$

Aquí, $\vec{\mathbf{v}}_{\text{CT}}$ es la velocidad del auto con respecto al camión, y la Tierra es el marco de referencia de conexión. Como tenemos la velocidad del camión con respecto a la Tierra, el negativo de este vector es la velocidad de la Tierra con respecto al camión: $\vec{\mathbf{v}}_{\text{ET}} = -\vec{\mathbf{v}}_{\text{TE}}$. El diagrama vectorial de esta ecuación se muestra en la Figura 4.28.

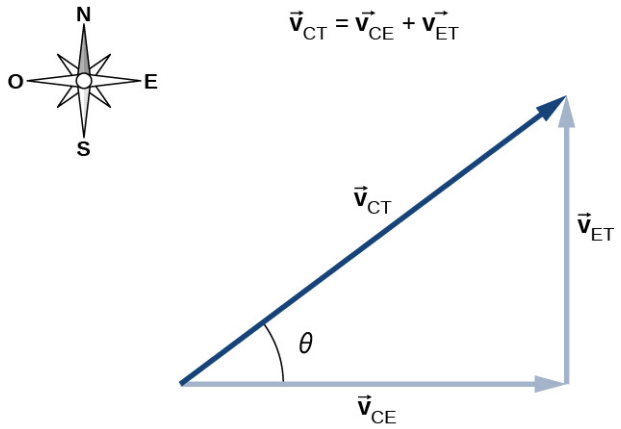


FIGURA 4.28 Diagrama vectorial de la ecuación vectorial $\vec{\mathbf{v}}_{\text{CT}} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{CE}} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{ET}}$.

Ahora podemos resolver la velocidad del auto con respecto al camión:

$$\left|\vec{\mathbf{v}}_{\text{CT}}\right| = \sqrt{(80{,}0\ \text{km/h})^2 + (70{,}0\ \text{km/h})^2} = 106.\ \text{km/h}$$

y

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{70{,}0}{80{,}0}\right) = 41{,}2^\circ \text{ al norte del este.}$$

Importancia

Dibujar un diagrama vectorial que muestre los vectores de velocidad permitiría entender la velocidad relativa de los dos objetos.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 4.6

Un barco se dirige hacia el norte en aguas tranquilas a 4,5 m/s directamente a través de un río que corre hacia el este a 3,0 m/s. ¿Cuál es la velocidad del barco con respecto a la Tierra?

EJEMPLO 4.14

Volar un avión con viento

Un piloto debe volar su avión hacia el norte para llegar a su destino. El avión puede volar a 300 km/h en aire en calma. Un viento sopla del noreste a 90 km/h. (a) ¿Cuál es la rapidez del avión con respecto al suelo? (b) ¿En qué dirección debe dirigir su avión el piloto para volar hacia el norte?

Estrategia

El piloto debe apuntar su avión algo al este del norte para compensar la velocidad del viento. Necesitamos construir una ecuación vectorial que contenga la velocidad del avión con respecto al suelo, la velocidad del avión con respecto al aire y la velocidad del aire con respecto al suelo. Ya que se conocen estas dos últimas cantidades, podemos resolver la velocidad del avión con respecto al suelo. Podemos representar gráficamente los vectores y utilizar este diagrama para evaluar la magnitud de la velocidad del avión con respecto al suelo. El diagrama también nos dirá el ángulo que forma la velocidad del avión con el norte con respecto al aire, que es la dirección en la que el piloto debe dirigir su avión.

Solución

La ecuación vectorial es $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{PG}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{PA}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{AG}}$, donde P = avión, A = aire y G = suelo. A partir de la geometría en la Figura 4.29, podemos resolver fácilmente la magnitud de la velocidad del avión con respecto al suelo y el ángulo del rumbo del avión, θ.

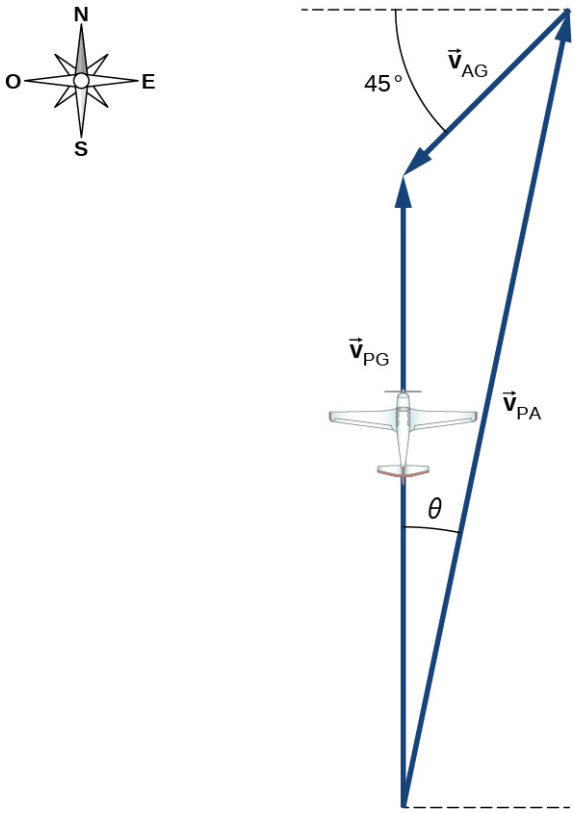


FIGURA 4.29 Diagrama vectorial para la Ecuación 4.34 que muestra los vectores $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{PA}}$, $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{AG}}$, y $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{PG}}$.

(a) Cantidades conocidas:

$$\left|\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{PA}}\right| = 300\ \mathrm{km/h}$$

$$\left|\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{AG}}\right| = 90\ \mathrm{km/h}$$

Al sustituir los valores en la ecuación del movimiento, obtenemos $\left|\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{PG}}\right| = 230\ \mathrm{km/h}$.

(b) El ángulo $\theta = \tan^{-1} \frac{63,64}{300} = 12^\circ$ al este del norte.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

aceleración centrípeta componente de la aceleración de un objeto que se mueve en círculo y que se dirige radialmente hacia el centro del círculo

aceleración tangencial magnitud que es el tiempo del cambio de rapidez. Su dirección es tangente al círculo.

aceleración total suma vectorial de las aceleraciones centrípeta y tangencial

alcance distancia horizontal máxima que recorre un proyectil

frecuencia angular ω, tasa de cambio de un ángulo al que se mueve un objeto en una trayectoria circular

marco de referencia sistema de coordenadas en el que se mide la posición, la velocidad y la aceleración de un objeto en reposo o en movimiento.

movimiento de proyectil movimiento de un objeto sujeto únicamente a la aceleración de la gravedad

tiempo de vuelo tiempo que transcurre un proyectil en el aire

trayectoria recorrido de un proyectil en el aire

vector de aceleración aceleración instantánea que se obtiene al tomar la derivada de la función de velocidad con respecto al tiempo en notación vectorial unitaria

vector de desplazamiento vector desde la posición inicial hasta una posición final en una trayectoria de una partícula

vector de posición vector desde el origen de un sistema de coordenadas elegido hasta la posición de una partícula en el espacio bidimensional o tridimensional

vector de velocidad vector que da la rapidez instantánea y la dirección de una partícula; tangente a la trayectoria

velocidad relativa velocidad de un objeto observado desde un marco de referencia particular, o la velocidad de un marco de referencia con respecto a otro marco de referencia.

Ecuaciones Clave

Vector de posición
$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$$

Vector de desplazamiento
$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)$$

Vector de velocidad
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

Velocidad en términos de componentes
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}}$$

Componentes de la velocidad
$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

Velocidad media
$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{avg}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Aceleración instantánea
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt}$$

Aceleración instantánea, forma de componente
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

Aceleración instantánea como segunda derivada de la posición
$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\hat{\mathbf{k}}$$

Tiempo de vuelo (tof)
$$T_{\text{tof}} = \frac{2(v_0 \operatorname{sen}\theta_0)}{g}$$

Trayectoria	$y = (\tan\theta_0)x - \left[\frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}\right]x^2$
Alcance	$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$
Aceleración centrípeta	$a_C = \frac{v^2}{r}$
Vector de posición, movimiento circular uniforme	$\vec{\mathbf{r}}(t) = A\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + A\operatorname{sen}\omega t\hat{\mathbf{j}}$
Vector de velocidad, movimiento circular uniforme	$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt} = -A\omega\operatorname{sen}\omega t\hat{\mathbf{i}} + A\omega\cos\omega t\hat{\mathbf{j}}$
Vector de aceleración, movimiento circular uniforme	$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t\hat{\mathbf{i}} - A\omega^2\operatorname{sen}\omega t\hat{\mathbf{j}}$
Aceleración tangencial	$a_T = \frac{d\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert}{dt}$
Aceleración total	$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_C + \vec{\mathbf{a}}_T$
Vector de posición en el marco S es el vector de posición en el marco S' más el vector que va del origen de S al origen de S'	$\vec{\mathbf{r}}_{PS} = \vec{\mathbf{r}}_{PS'} + \vec{\mathbf{r}}_{S'S}$
Ecuación de velocidad relativa que conecta dos marcos de referencia	$\vec{\mathbf{v}}_{PS} = \vec{\mathbf{v}}_{PS'} + \vec{\mathbf{v}}_{S'S}$
Ecuación de la velocidad relativa que conecta más de dos marcos de referencia	$\vec{\mathbf{v}}_{PC} = \vec{\mathbf{v}}_{PA} + \vec{\mathbf{v}}_{AB} + \vec{\mathbf{v}}_{BC}$
Ecuación de la aceleración relativa	$\vec{\mathbf{a}}_{PS} = \vec{\mathbf{a}}_{PS'} + \vec{\mathbf{a}}_{S'S}$

Resumen

4.1 Vectores de desplazamiento y velocidad

- La función de posición $\vec{\mathbf{r}}(t)$ da la posición en función del tiempo de una partícula que se mueve en dos o tres dimensiones. Gráficamente, es un vector desde el origen de un sistema de coordenadas elegido hasta el punto en el que se encuentra la partícula en un momento determinado.
- El vector de desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ da la distancia más corta entre dos puntos cualquiera de la trayectoria de una partícula en dos o tres dimensiones.
- La velocidad instantánea da la rapidez y la dirección de una partícula en un momento determinado de su trayectoria en dos o tres dimensiones, y es un vector en dos y tres dimensiones.
- El vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula.
- El desplazamiento $\vec{\mathbf{r}}(t)$ puede escribirse como una suma vectorial de los desplazamientos unidimensionales $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$, $\vec{z}(t)$ a lo largo de las direcciones de la x, la y y la z.
- La velocidad $\vec{\mathbf{v}}(t)$ puede escribirse como una suma vectorial de las velocidades unidimensionales $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ a lo largo de las direcciones de la x, la y y la z.
- El movimiento en una dirección determinada es independiente del movimiento en una dirección perpendicular.

4.2 Vector de aceleración

- En dos y tres dimensiones, el vector de aceleración puede tener una dirección arbitraria y no apunta necesariamente a lo largo de un componente determinado de la velocidad.
- La aceleración instantánea se produce por un cambio de velocidad tomado en un tiempo muy corto (infinitesimal). La aceleración instantánea es un vector en dos o tres dimensiones. Se encuentra al tomar la derivada de la función de velocidad con respecto al tiempo.
- En tres dimensiones, la aceleración $\vec{\mathbf{a}}(t)$ puede escribirse como una suma vectorial de las aceleraciones unidimensionales $a_x(t)$, $a_y(t)$, y $a_z(t)$ a lo largo de los ejes de la x, la y y la z.
- Las ecuaciones cinemáticas para la aceleración constante pueden escribirse como la suma vectorial de las ecuaciones de aceleración constante en las direcciones de la x, la y y la z.

4.3 Movimiento de proyectil

- El movimiento de proyectil es el movimiento de un objeto sometido únicamente a la aceleración de la gravedad, cuando la aceleración es constante, como ocurre cerca de la superficie de la Tierra.
- Para resolver problemas de movimiento de proyectil, analizamos el movimiento del proyectil en las direcciones horizontal y vertical mediante el empleo de las ecuaciones cinemáticas unidimensionales para x y y.
- El tiempo de vuelo de un proyectil lanzado con velocidad vertical inicial v_{0y} en una superficie llana está dado por

$$T_{tof} = \frac{2(v_0 \operatorname{sen}\theta)}{g}.$$

  Esta ecuación es válida únicamente cuando el proyectil cae a la misma altura desde la que se lanzó.
- La distancia horizontal máxima que recorre un proyectil se denomina alcance. Una vez más, la ecuación del alcance es válida únicamente cuando el proyectil cae a la misma altura desde la que se lanzó.

4.4 Movimiento circular uniforme

- El movimiento circular uniforme es el movimiento en un círculo a rapidez constante.
- La aceleración centrípeta $\vec{\mathbf{a}}_C$ es la aceleración que debe tener una partícula para seguir una trayectoria circular. La aceleración centrípeta siempre apunta hacia el centro de rotación y tiene una magnitud $a_C = v^2/r$.
- El movimiento circular no uniforme se produce cuando hay aceleración tangencial de un objeto, que ejecuta un movimiento circular, de tal manera que la rapidez del objeto cambia. Esta aceleración recibe el nombre de aceleración tangencial $\vec{\mathbf{a}}_T$. La magnitud de la aceleración tangencial es la tasa de tiempo del cambio de la magnitud de la velocidad. El vector de aceleración tangencial es tangente al círculo, mientras que el vector de aceleración centrípeta apunta radialmente hacia el centro del círculo. La aceleración total es la suma vectorial de las aceleraciones tangencial y centrípeta.
- Un objeto que ejecuta un movimiento circular uniforme puede describirse con ecuaciones de movimiento. El vector de posición del objeto es $\vec{\mathbf{r}}(t) = A\cos\omega t\hat{\mathbf{i}} + A\operatorname{sen}\omega t\hat{\mathbf{j}}$, donde A es la magnitud $\left|\vec{\mathbf{r}}(t)\right|$, que es también el radio del círculo, y ω es la frecuencia angular.

4.5 Movimiento relativo en una y dos dimensiones

- Al analizar el movimiento de un objeto, es necesario especificar el marco de referencia en términos de posición, velocidad y aceleración.
- La velocidad relativa es la velocidad de un objeto observada desde un marco de referencia concreto, y varía con la elección del marco de referencia.
- Si S y S' son dos marcos de referencia que se mueven uno respecto al otro a velocidad constante, entonces la velocidad de un objeto respecto a S es igual a su velocidad respecto a S' más la velocidad de S' en relación con S.
- Si dos marcos de referencia se mueven uno respecto al otro a velocidad constante, entonces la aceleración de un objeto que se observa en ambos marcos de referencia es igual.

Preguntas Conceptuales

4.1 Vectores de desplazamiento y velocidad

1. ¿Qué forma tiene la trayectoria de una partícula si la distancia de cualquier punto A al punto B es igual a la magnitud del desplazamiento de A a B?

2. Dé un ejemplo de una trayectoria en dos o tres dimensiones causada por movimientos perpendiculares independientes.

3. Si la velocidad instantánea es cero, ¿qué se puede

decir de la pendiente de la función de posición?

4.2 Vector de aceleración

4. Si la función de posición de una partícula es una función lineal del tiempo, ¿qué se puede decir de su aceleración?

5. Si un objeto tiene un componente *x* constante de velocidad y de repente experimenta una aceleración en la dirección de la *y*, ¿cambia el componente *x* de su velocidad?

6. Si un objeto tiene un componente *x* constante de velocidad y de repente experimenta una aceleración con un ángulo de $70°$ en la dirección de la *x*, ¿cambia el componente *x* de velocidad?

4.3 Movimiento de proyectil

7. Responda las siguientes preguntas con respecto al movimiento de proyectil en terreno llano suponiendo que la resistencia del aire es despreciable y que el ángulo inicial no es $0°$ ni $90°$: (a) ¿La velocidad es siempre cero? (b) ¿Cuándo la velocidad es mínima? ¿Y máxima? (c) ¿Puede la velocidad ser alguna vez igual a la velocidad inicial en un tiempo distinto a $t = 0$? (d) ¿Puede la rapidez ser alguna vez igual a la rapidez inicial en un tiempo distinto a $t = 0$?

8. Responda las siguientes preguntas con respecto al movimiento de proyectil en terreno llano suponiendo que la resistencia del aire es despreciable y que el ángulo inicial no es $0°$ ni $90°$: (a) ¿La aceleración es siempre cero? (b) ¿El vector $\vec{\mathbf{v}}$ siempre es paralelo o antiparalelo al vector $\vec{\mathbf{a}}$? (c) ¿El vector v es siempre perpendicular al vector a? Si es así, ¿dónde se encuentra?

9. Se coloca una moneda de diez centavos en el borde de una mesa para que cuelgue ligeramente. Una moneda de 25 centavos se desliza horizontalmente sobre la superficie de la mesa perpendicularmente al borde y golpea la moneda de 10 centavos de frente. ¿Qué moneda cae primero al suelo?

4.4 Movimiento circular uniforme

10. ¿Puede la aceleración centrípeta modificar la rapidez de una partícula en movimiento circular?

11. ¿Puede la aceleración tangencial modificar la rapidez de una partícula en movimiento circular?

4.5 Movimiento relativo en una y dos dimensiones

12. ¿Qué marco o marcos de referencia utiliza instintivamente cuando conduce un auto? ¿Cuando vuela en un avión comercial?

13. Un jugador de baloncesto que regatea en la cancha mantiene la mirada fija en los jugadores que le rodean. Se mueve rápido. ¿Por qué no tiene que mantener la vista en el balón?

14. Si alguien va en la parte trasera de una camioneta y lanza una pelota de sóftbol directamente hacia atrás, ¿es posible que la pelota caiga directamente hacia abajo, vista por una persona que esté parada a un lado de la carretera? ¿En qué condiciones ocurriría esto? ¿Cómo parecería para la persona que la lanzó el movimiento de la pelota?

15. La gorra de un corredor que corre a velocidad constante se le cae de la nuca. Dibuje un esquema que muestre la trayectoria de la gorra en el marco de referencia del corredor. Dibuje su trayectoria vista por un observador inmóvil. Ignore la resistencia del aire.

16. Un terrón de tierra cae de la plataforma de un camión en movimiento. Golpea el suelo directamente debajo del extremo del camión. (a) ¿Cuál es la dirección de su velocidad con respecto al camión justo antes de chocar? (b) ¿Es la misma que la dirección de su velocidad con respecto al suelo justo antes de chocar? Explique sus respuestas.

Problemas

4.1 Vectores de desplazamiento y velocidad

17. Las coordenadas de una partícula en un sistema de coordenadas rectangulares son (1,0, -4,0, 6,0). ¿Cuál es el vector de posición de la partícula?

18. La posición de una partícula cambia de $\vec{\mathbf{r}}_1 = (2{,}0 \quad \hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{cm}$ a $\vec{\mathbf{r}}_2 = (-4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{ cm}$. ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula?

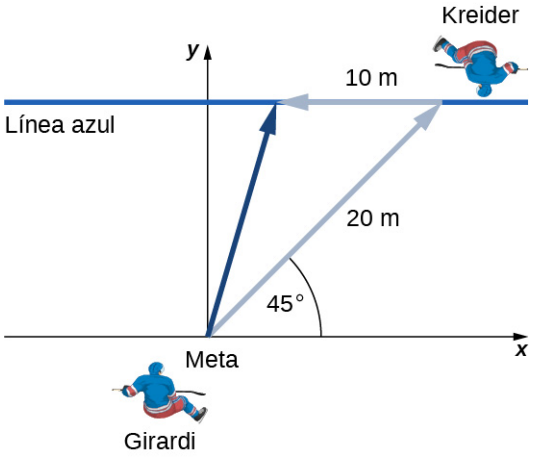
19. El hoyo 18 del campo de golf de Pebble Beach es un *dogleg* a la izquierda de 496,0 m de longitud. La calle desde el *tee* se toma como la dirección de la *x*. Un golfista realiza su golpe del *tee* a una distancia de 300,0 m, lo que corresponde a un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 = 300{,}0\text{ m}\hat{\mathbf{i}}$, y realiza su

segundo golpe a 189,0 m con un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 = 172{,}0\ \text{m}\hat{\mathbf{i}} + 80{,}3\ \text{m}\hat{\mathbf{j}}$. ¿Cuál es el desplazamiento final de la bola de golf desde el *tee*?

20. Un pájaro vuela en línea recta hacia el noreste una distancia de 95,0 km durante 3,0 h. Con el eje de la *x* hacia el este y el eje de la *y* hacia el norte, ¿cuál es el desplazamiento en notación vectorial unitaria del pájaro? ¿Cuál es la velocidad media del viaje?

21. Un ciclista recorre 5,0 km hacia el este y luego 10,0 km a 20° al oeste del norte. Desde este punto recorre 8,0 km hacia el oeste. ¿Cuál es el desplazamiento final desde el punto de partida del ciclista?

22. El defensa de los New York Rangers, Daniel Girardi, se sitúa en la portería y pasa un disco de hockey a 20 m y 45° en línea recta desde el hielo hasta el ala izquierda, donde Chris Kreider esperaba en la línea azul. Kreider espera a que Girardi llegue a la línea azul y le pasa el disco directamente a través del hielo a 10 m de distancia. ¿Cuál es el desplazamiento final del disco? Vea la siguiente figura.



23. La posición de una partícula es $\vec{\mathbf{r}}(t) = 4{,}0t^2\hat{\mathbf{i}} - 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 2{,}0t^3\hat{\mathbf{k}}$m. (a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en 0 s y en 1,0 s? (b) ¿Cuál es la velocidad media entre 0 s y 1,0 s?

24. Clay Matthews, apoyador (*linebacker*) de los Green Bay Packers, puede alcanzar una rapidez de 10,0 m/s. Al comienzo de una jugada, Matthews corre por el campo a 45° con respecto a la línea de 50 yardas y recorre 8,0 m en 1 s. Luego, corre en línea recta por el campo a 90° con respecto a la línea de 50 yardas durante 12 m, con un tiempo transcurrido de 1,2 s. (a) ¿Cuál es el desplazamiento final de Matthews desde el inicio de la jugada? (b) ¿Cuál es su velocidad media?

25. El F-35B Lighting II es un avión de combate de despegue corto y aterrizaje vertical. Si realiza un despegue vertical a 20,00 m de altura sobre el suelo y luego sigue una trayectoria de vuelo en un ángulo de 30° con respecto al suelo durante 20,00 km, ¿cuál es el desplazamiento final?

4.2 Vector de aceleración

26. La posición de una partícula es $\vec{\mathbf{r}}(t) = (3{,}0t^2\hat{\mathbf{i}} + 5{,}0\hat{\mathbf{j}} - 6{,}0t\hat{\mathbf{k}})$ m. (a) Determine su velocidad y aceleración en función del tiempo. (b) ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en el tiempo $t = 0$?

27. La aceleración de una partícula es $(4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{m/s}^2$. En $t = 0$, su posición y velocidad son cero. (a) ¿Cuáles son la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo? (b) Halle la ecuación de la trayectoria de la partícula. Dibuje los ejes de la *x* y la *y* y haga un esquema de la trayectoria de la partícula.

28. Un barco sale del muelle en $t = 0$ y se dirige a un lago con una aceleración de $2{,}0\ \text{m/s}^2\hat{\mathbf{i}}$. Un fuerte viento empuja el barco y le imprime una velocidad adicional de $2{,}0\ \text{m/s}\hat{\mathbf{i}} + 1{,}0\ \text{m/s}\hat{\mathbf{j}}$. (a) ¿Cuál es la velocidad del barco en $t = 10$ s? (b) ¿Cuál es la posición del barco en $t = 10$s? Dibuje un esquema de la trayectoria y posición del barco en $t = 10$ s, mostrando los ejes de la *x* y la *y*.

29. La posición de una partícula para $t > 0$ está dada por $\vec{\mathbf{r}}(t) = (3{,}0t^2\hat{\mathbf{i}} - 7{,}0t^3\hat{\mathbf{j}} - 5{,}0t^{-2}\hat{\mathbf{k}})$ m. (a) ¿Cuál es la velocidad en función del tiempo? (b) ¿Cuál es la aceleración en función del tiempo? (c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 2{,}0$ s? (d) ¿Cuál es su velocidad en $t = 1{,}0$ s y $t = 3{,}0$ s? (e) ¿Cuál es la velocidad media entre $t = 1{,}0$ s y $t = 2{,}0$ s?

30. La aceleración de una partícula es una constante. En $t = 0$ la velocidad de la partícula es $(10\hat{\mathbf{i}} + 20\hat{\mathbf{j}})\text{m/s}$. En $t = 4$ s la velocidad es $10\hat{\mathbf{j}}\text{m/s}$. (a) ¿Cuál es la aceleración de la partícula? (b) ¿Cómo varían la posición y la velocidad con el tiempo? Supongamos que la partícula está inicialmente en el origen.

31. Una partícula tiene una función de posición $\vec{\mathbf{r}}(t) = \cos(1{,}0t)\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}(1{,}0t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$, donde los argumentos de las funciones coseno (cos) y seno (sen) están en radianes. (a) ¿Cuál es el vector velocidad? (b) ¿Cuál es el vector de aceleración?

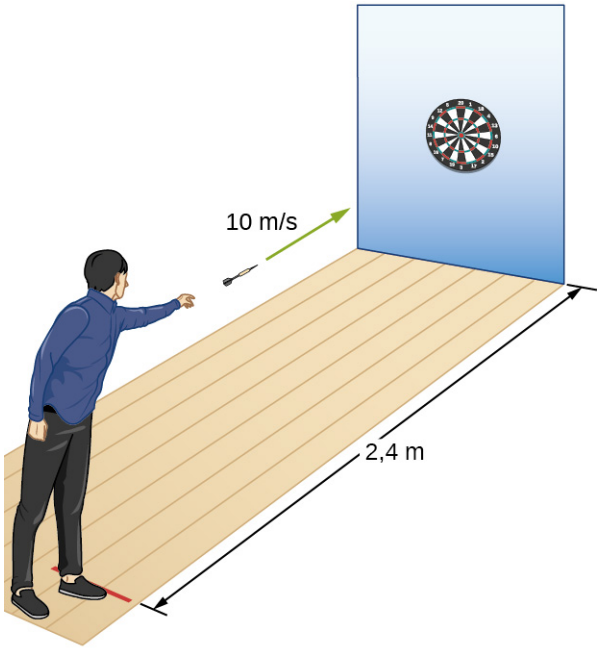
32. Un jet Lockheed Martin F-35 II Lighting despega de un portaaviones con una longitud de pista de 90 m y una rapidez de despegue de 70 m/s al final de la pista. Los jets se catapultan al espacio aéreo desde la cubierta de un portaaviones con dos fuentes de propulsión: la propulsión del jet y la catapulta. En el momento de abandonar la cubierta del portaaviones, la aceleración del F-35 disminuye hasta una constante de $5{,}0\ \text{m/s}^2$ a 30° con respecto a la horizontal. (a) ¿Cuál es la aceleración inicial del F-35 en la cubierta del portaviones para hacerlo volar? (b) Escriba la posición y la velocidad del F-35 en notación vectorial unitaria desde el momento en que abandona la cubierta del portaaviones. (c) ¿A qué altitud se encuentra el avión de combate 5,0 s después de abandonar la cubierta del portaaviones? (d) ¿Cuál es su velocidad y su rapidez en ese momento? (e) ¿Qué distancia ha recorrido horizontalmente?

4.3 Movimiento de proyectil

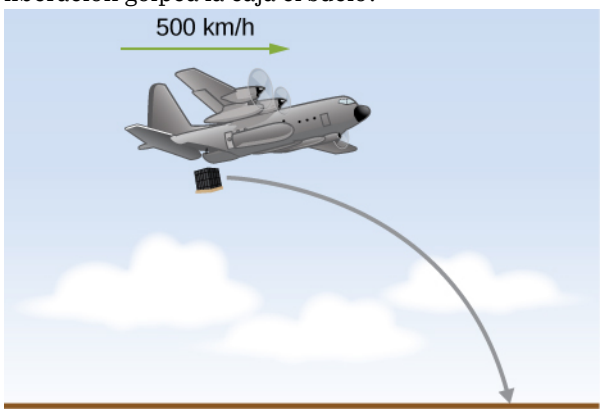
33. Se dispara una bala horizontalmente desde la altura del hombro (1,5 m) con una rapidez inicial de 200 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que la bala toque el suelo? (b) ¿Qué distancia recorre la bala horizontalmente?

34. Una canica rueda desde una mesa de 1,0 m de altura y cae al suelo en un punto situado a 3,0 m del borde de la mesa en dirección horizontal. (a) ¿Cuánto tiempo está la canica en el aire? (b) ¿Cuál es la rapidez de la canica cuando sale del borde de la mesa? (c) ¿Cuál es su rapidez cuando cae al suelo?

35. Se lanza un dardo horizontalmente a una rapidez de 10 m/s a la diana de un tablero de dardos que está a 2,4 m de distancia, como en la siguiente figura. (a) ¿A qué distancia debajo del blanco previsto impacta el dardo? (b) ¿Qué le dice su respuesta sobre cómo lanzan los dardos los jugadores expertos?



36. Un avión que vuela horizontalmente con una rapidez de 500 km/h a una altura de 800 m deja caer una caja de suministros (ver la siguiente figura). Si el paracaídas no se abre, ¿a qué distancia del punto de liberación golpea la caja el suelo?



37. Supongamos que el avión del problema anterior dispara un proyectil horizontalmente en su dirección de movimiento a una rapidez de 300 m/s con respecto al avión. (a) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento impacta el proyectil en el suelo? (b) ¿Cuál es su rapidez cuando impacta en el suelo?

38. Un lanzador de bolas rápidas puede lanzar una bola de béisbol a una rapidez de 40 m/s (90 mi/h). (a) Suponiendo que el lanzador suelte la bola a 16,7 m del plato de home para que la bola se mueva horizontalmente, ¿cuánto tiempo tarda la bola en llegar al plato de home? (b) ¿Qué distancia cae la bola entre la mano del lanzador y el plato de home?

39. Un proyectil se lanza con un ángulo de 30° y

aterriza 20 s después a la misma altura a la que se lanzó. (a) ¿Cuál es la rapidez inicial del proyectil? (b) ¿Cuál es la altitud máxima? (c) ¿Cuál es el alcance? (d) Calcule el desplazamiento desde el punto de lanzamiento hasta la posición en su trayectoria a los 15 s.

40. Un jugador de baloncesto lanza hacia una canasta situada a 6,1 m y a 3,0 m del suelo. Si la pelota se suelta a 1,8 m del suelo con un ángulo de 60° sobre la horizontal, ¿cuál debe ser la rapidez inicial para que pase por la canasta?

41. En un instante determinado, un globo aerostático se encuentra a 100 m de altura y desciende a una rapidez constante de 2,0 m/s. En ese preciso instante, una chica lanza una pelota horizontalmente, con respecto a ella misma, con una rapidez inicial de 20 m/s. Cuando aterrice, ¿dónde encontrará la pelota? Ignore la resistencia del aire.

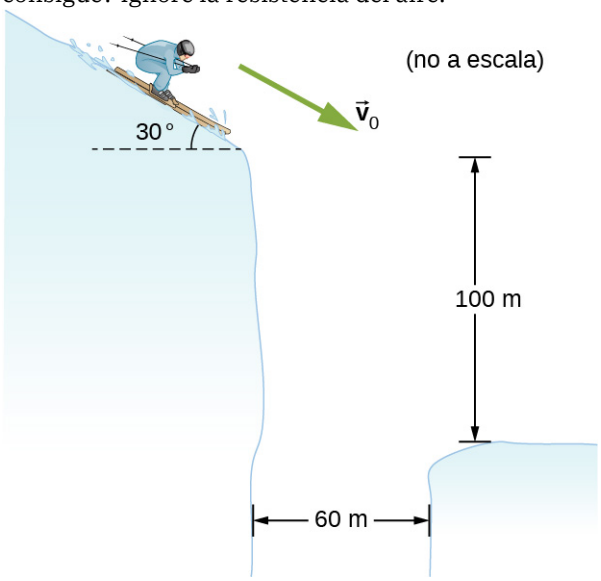
42. Un hombre en una motocicleta que viaja a una rapidez uniforme de 10 m/s lanza una lata vacía directamente hacia arriba con respecto a él con una rapidez inicial de 3,0 m/s. Halle la ecuación de la trayectoria vista por un policía al lado de la carretera. Supongamos que la posición inicial de la lata es el punto donde se lanza. Ignore la resistencia del aire.

43. Un atleta puede saltar una distancia de 8,0 m en el salto largo. ¿Cuál es la distancia máxima que puede saltar el atleta en la Luna, donde la aceleración gravitatoria es una sexta parte de la de la Tierra?

44. La distancia horizontal máxima a la que un niño puede lanzar una pelota es de 50 m. Asuma que puede lanzar con la misma rapidez inicial en todos los ángulos. ¿A qué altura lanza la pelota cuando lo hace directamente hacia arriba?

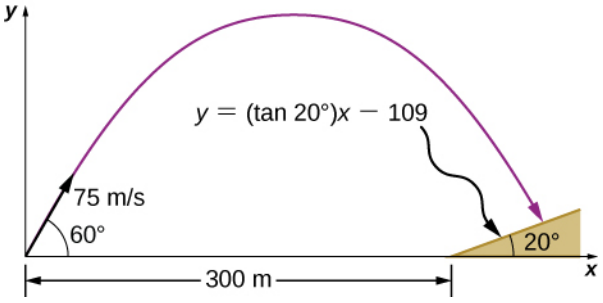
45. Una roca es lanzada desde un acantilado con un ángulo de 53° con respecto a la horizontal. El acantilado tiene 100 m de altura. La rapidez inicial de la roca es de 30 m/s. (a) ¿A qué altura sobre el borde del acantilado se eleva la roca? (b) ¿A qué distancia se ha desplazado horizontalmente cuando se encuentra a la máxima altura? (c) ¿Cuánto tiempo después del lanzamiento golpea el suelo? (d) ¿Cuál es el alcance de la roca? (e) ¿Cuáles son las posiciones horizontal y vertical de la roca con respecto al borde del acantilado en $t = 2{,}0$ s, $t = 4{,}0$ s y $t = 6{,}0$ s?

46. Tratando de escapar de sus perseguidores, un agente secreto esquía por una pendiente inclinada a 30° por debajo de la horizontal a 60 km/h. Para sobrevivir y aterrizar en la nieve 100 m más abajo, debe superar un desfiladero de 60 m de ancho. ¿Lo consigue? Ignore la resistencia del aire.



47. Una golfista en una calle se encuentra a 70 m del *green*, que se encuentra 20 m por debajo del nivel de la calle. Si la golfista golpea la pelota con un ángulo de 40° con una rapidez inicial de 20 m/s, ¿qué tan cerca del *green* llega?

48. Se dispara un proyectil contra una colina cuya base está a 300 m de distancia. El proyectil se dispara a 60° sobre la horizontal con una rapidez inicial de 75 m/s. La colina puede ser aproximada por un plano inclinado a 20° de la horizontal. En relación con el sistema de coordenadas mostrado en la siguiente figura, la ecuación de esta recta es $y = (\tan 20°)x - 109$. ¿En qué parte de la colina cae el proyectil?



49. Un astronauta en Marte patea un balón de fútbol a un ángulo de 45° con una velocidad inicial de 15 m/s. Si la aceleración de la gravedad en Marte es $3{,}7 \text{m/s}^2$, (a) ¿cuál es el alcance del golpe del balón de fútbol en una superficie plana? (b) ¿cuál sería el alcance del mismo golpe en la Luna, donde la gravedad es una sexta parte de la Tierra?

50. Mike Powell ostenta el récord de salto de longitud de 8,95 m, establecido en 1991. Si dejó

el suelo a un ángulo de $15°$, ¿cuál era su rapidez inicial?

51. El guepardo robot del Instituto Tecnológico de Massachusetts (Massachusetts Institute of Technology, MIT) puede saltar obstáculos de 46 cm de altura y tiene una rapidez de 12,0 km/h. (a) Si el robot se lanza en un ángulo de $60°$ a esta rapidez, ¿cuál es su altura máxima? (b) ¿Cuál tendría que ser el ángulo de lanzamiento para alcanzar una altura de 46 cm?

52. El monte Asama, en Japón, es un volcán activo. En 2009, una erupción arrojó rocas volcánicas sólidas que cayeron a 1 km en horizontal desde el cráter. Si las rocas volcánicas fueron lanzadas en un ángulo de $40°$ con respecto a la horizontal y aterrizaron a 900 m por debajo del cráter, (a) ¿cuál sería su velocidad inicial y (b) cuál es su tiempo de vuelo?

53. Drew Brees, de los Saints de Nueva Orleans, puede lanzar un balón de fútbol a 23,0 m/s (50 mph). Si angula el lanzamiento a $10°$ desde la horizontal, ¿qué distancia recorre si debe atraparse a la misma altura a la que se lanzó?

54. El vehículo lunar itinerante que se utilizó en las últimas misiones *Apolo* de la NASA alcanzó una rapidez lunar no oficial de 5,0 m/s por el astronauta Eugene Cernan. Si el rover se moviera a esta rapidez en una superficie lunar plana y golpeara un pequeño bache que lo proyectara fuera de la superficie en un ángulo de $20°$, ¿cuánto tiempo estaría "en el aire" en la Luna?

55. Una portería de fútbol tiene 2,44 m de altura. Un jugador patea el balón a una distancia de 10 m de la portería con un ángulo de $25°$. El balón golpea el travesaño en la parte superior de la portería. ¿Cuál es la rapidez inicial del balón de fútbol?

56. El monte Olimpo de Marte es el mayor volcán del sistema solar, con una altura de 25 km y un radio de 312 km. Si está de pie en la cima, ¿con qué velocidad inicial tendría que disparar un proyectil desde un cañón en horizontal para superar el volcán y aterrizar en la superficie de Marte? Tenga en cuenta que Marte tiene una aceleración de la gravedad de $3,7\ m/s^2$.

57. En 1999, Robbie Knievel fue el primero en saltar el Gran Cañón en moto. En una parte estrecha del cañón (69,0 m de ancho) y viajando a 35,8 m/s desde la rampa de despegue, llegó al otro lado. ¿Cuál era su ángulo de lanzamiento?

58. Usted lanza una pelota de béisbol a una rapidez inicial de 15,0 m/s con un ángulo de $30°$ con respecto a la horizontal. ¿Cuál tendría que ser la rapidez inicial de la pelota a $30°$ en un planeta que tiene el doble de aceleración de la gravedad que la Tierra para lograr el mismo alcance? Considere el lanzamiento y el impacto en una superficie horizontal.

59. Aaron Rodgers lanza un balón de fútbol a 20,0 m/s a su receptor, que corre en línea recta por el campo a 9,4 m/s. Si Aarón lanza el balón cuando el receptor está a 10,0 m delante de él, ¿con qué ángulo tiene que lanzarlo Aarón para que el receptor lo atrape a 20,0 m delante de él?

4.4 Movimiento circular uniforme

60. Un volante de inercia rota a 30 rev/s. ¿Cuál es el ángulo total, en radianes, por el que rota un punto del volante de inercia en 40 s?

61. Una partícula se desplaza en un círculo de radio 10 m, a una rapidez constante de 20 m/s. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración?

62. Cam Newton, de los Panthers de Carolina, lanza una espiral de fútbol americano perfecta a 8,0 rev/s. El radio de un balón de fútbol profesional es de 8,5 cm en el centro del lado corto. ¿Cuál es la aceleración centrípeta de los cordones del balón?

63. Una atracción de un parque de diversiones hace girar a sus ocupantes dentro de un espacio en forma de platillo volador. Si la trayectoria circular horizontal que siguen los ocupantes tiene un radio de 8,00 m, ¿a cuántas revoluciones por minuto se someten los ocupantes a una aceleración centrípeta igual a la de la gravedad?

64. Una corredora que participa en la carrera de 200 metros debe correr alrededor del extremo de una pista que tiene un arco circular con un radio de curvatura de 30,0 m. La corredora comienza la carrera a una rapidez constante. Si culmina la carrera de 200 metros en 23,2 s y corre a una rapidez constante durante toda la carrera, ¿cuál es su aceleración centrípeta al recorrer la parte curva de la pista?

65. ¿Cuál es la aceleración de Venus hacia el Sol, suponiendo una órbita circular?

66. Un cohete experimental a reacción viaja alrededor de la Tierra a lo largo de su ecuador, justo por encima de su superficie. ¿A qué rapidez debe viajar si la magnitud de su aceleración es g?

67. Un ventilador gira a una constante de 360,0 rev/min. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de un punto de una de sus aspas a 10,0 cm del eje

de rotación?

68. Un punto situado en el segundero de un gran reloj tiene una aceleración radial de $0{,}1\,\text{cm/s}^2$. ¿A qué distancia está el punto del eje de rotación del segundero?

4.5 Movimiento relativo en una y dos dimensiones

69. Los ejes de coordenadas del marco de referencia S' permanecen paralelos a los de S, ya que S' se aleja de S a una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{S'}^{S} = (4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 5{,}0\hat{\mathbf{k}})$ m/s. (a) Si en el tiempo $t = 0$ los orígenes coinciden, ¿cuál es la posición del origen O' en el marco S en función del tiempo? (b) ¿Cómo se relaciona la posición de la partícula para $\vec{\mathbf{r}}(t)$ y $\vec{\mathbf{r}}'(t)$, medida en S y S', respectivamente? (c) ¿Cuál es la relación entre las velocidades de las partículas $\vec{\mathbf{v}}(t)$ y $\vec{\mathbf{v}}'(t)$? (d) ¿Cómo están las aceleraciones $\vec{\mathbf{a}}(\text{t})$ y $\vec{\mathbf{a}}'(\text{t})$ relacionadas?

70. Los ejes de coordenadas del marco de referencia S' permanecen paralelos a los de S, ya que S' se aleja de S a una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{S'S} = (1{,}0\hat{\mathbf{i}} + 2{,}0\hat{\mathbf{j}} + 3{,}0\hat{\mathbf{k}})t$ m/s. (a) Si en el tiempo $t = 0$ los orígenes coinciden, ¿cuál es la posición del origen O' en el marco S en función del tiempo? (b) ¿Cómo se relaciona la posición de la partícula para $\vec{\mathbf{r}}(t)$ y $\vec{\mathbf{r}}'(t)$, medida en S y S', respectivamente? (c) ¿Cuál es la relación entre las velocidades de las partículas $\vec{\mathbf{v}}(t)$ y $\vec{\mathbf{v}}'(t)$? (d) ¿Cómo están las aceleraciones $\vec{\mathbf{a}}(\text{t})$ y $\vec{\mathbf{a}}'(\text{t})$ relacionadas?

71. La velocidad de una partícula en el marco de referencia A es $(2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}})$ m/s. La velocidad del marco de referencia A con respecto al marco de referencia B es $4{,}0\hat{\mathbf{k}}\,\text{m/s}$, y la velocidad del marco de referencia B con respecto a C es $2{,}0\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}$. ¿Cuál es la velocidad de la partícula en el marco de referencia C?

72. Las gotas de lluvia caen verticalmente a 4,5 m/s con respecto a la tierra. ¿Qué mide un observador en un auto que se mueve a 22,0 m/s en línea recta como la velocidad de las gotas de lluvia?

73. Una gaviota puede volar a una velocidad de 9,00 m/s en aire en calma. (a) Si el ave tarda 20,0 min en recorrer 6,00 km en línea recta hacia un viento que se aproxima, ¿cuál es la velocidad del viento? (b) Si el ave da la vuelta y vuela con el viento, ¿cuánto tardará en recorrer de vuelta 6,00 km?

74. Un barco zarpa de Rotterdam con rumbo norte a 7,00 m/s respecto al agua. La corriente marina local es de 1,50 m/s en una dirección $40,0°$ al norte del este. ¿Cuál es la velocidad del barco con respecto a la Tierra?

75. Un bote se puede remar a 8,0 km/h en aguas tranquilas. (a) ¿Cuánto tiempo se necesita para remar 1,5 km aguas abajo en un río que se mueve a 3,0 km/h con respecto a la orilla? (b) ¿Cuánto tiempo se necesita para el viaje de vuelta? (c) ¿En qué dirección debe apuntar el bote para remar en línea recta por el río? (d) Supongamos que el río tiene 0,8 km de ancho. ¿Cuál es la velocidad del bote con respecto a la Tierra y cuánto tiempo se necesita para llegar a la orilla opuesta? (e) Supongamos, en cambio, que el bote se dirige directamente al otro lado del río. ¿Cuánto tiempo se necesita para cruzar y a qué distancia aguas abajo está el bote cuando llega a la orilla opuesta?

76. Una avioneta vuela a 200 km/h en aire en calma. Si el viento sopla directamente del oeste a 50 km/h, (a) ¿en qué dirección debe la piloto dirigir su avión para moverse directamente hacia el norte por tierra y (b) cuánto tiempo tarda en alcanzar un punto a 300 km directamente al norte de su punto de partida?

77. Un ciclista que viaja hacia el sureste por una carretera a 15 km/h siente un viento que sopla del suroeste a 25 km/h. Para un observador inmóvil, ¿cuáles son la rapidez y la dirección del viento?

78. Un río se mueve hacia el este a 4 m/s. Un bote parte del muelle en dirección $30°$ al norte del oeste a 7 m/s. Si el río tiene 1.800 m de ancho, (a) ¿cuál es la velocidad del bote con respecto a la Tierra y (b) cuánto tarda el bote en cruzar el río?

Problemas Adicionales

79. Un auto de carreras de Fórmula 1 se desplaza a 89,0 m/s por una pista recta y entra en una curva con un radio de curvatura de 200,0 m. ¿Qué aceleración centrípeta debe tener el auto para mantenerse en la pista?

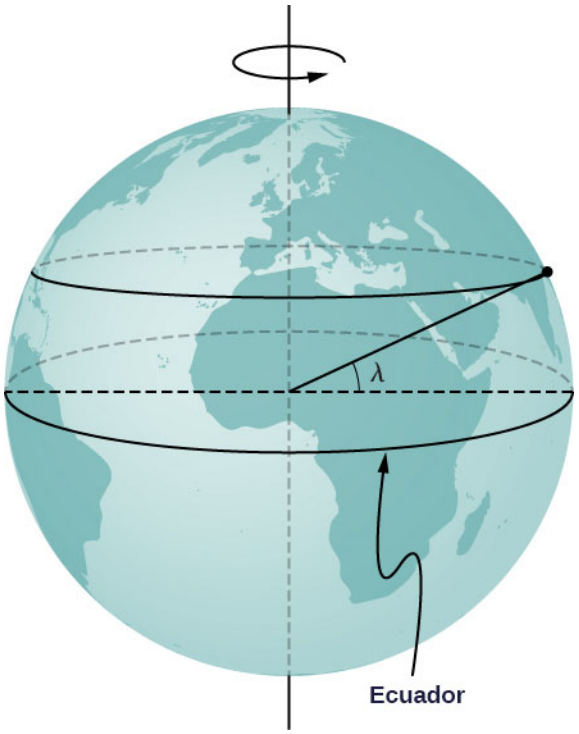
80. Una partícula viaja en una órbita circular de radio de 10 m. Su rapidez cambia a una tasa de $15{,}0\ \text{m/s}^2$ en un instante en que su rapidez es de 40,0 m/s. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la partícula?

81. El conductor de un auto que se mueve a 90,0 km/h pisa el freno cuando el auto entra en una

curva circular de radio de 150,0 m. Si la rapidez del auto disminuye a una tasa de 9,0 km/h cada segundo, ¿cuál es la magnitud de la aceleración del auto en el instante en que su rapidez es de 60,0 km/h?

82. Un auto de carreras que entra en la parte curva de la pista en las 500 millas de Daytona reduce su rapidez de 85,0 m/s a 80,0 m/s en 2,0 s. Si el radio de la parte curva de la pista es de 316,0 m, calcule la aceleración total del auto de carreras al principio y al final de la reducción de rapidez.

83. Un elefante se encuentra en la superficie de la Tierra a una latitud λ. Calcule la aceleración centrípeta del elefante resultante de la rotación de la Tierra alrededor de su eje polar. Exprese su respuesta en términos de λ, el radio R_E de la Tierra, y el tiempo T para una rotación de la Tierra. Compare su respuesta con la g para $\lambda = 40°$.



84. Un protón en un sincrotrón se mueve en un círculo de radio de 1 km y aumenta su rapidez en $v(t) = c_1 + c_2 t^2$, donde $c_1 = 2{,}0 \times 10^5$ m/s, $c_2 = 10^5$ m/s^3. (a) ¿Cuál es la aceleración total del protón en t = 5,0 s? (b) ¿A qué tiempo la expresión de la velocidad deja de ser física?

85. Un aspa de hélice en reposo comienza a girar desde t = 0 s hasta t = 5,0 s con una aceleración tangencial de la punta del aspa a 3,00 m/s^2. La punta del aspa está a 1,5 m del eje de rotación. En t = 5,0 s, ¿cuál es la aceleración total de la punta del aspa?

86. Una partícula ejecuta un movimiento circular con una frecuencia angular constante de $\omega = 4{,}00$ rad/s. Si el tiempo t = 0 corresponde a la posición de la partícula situada en y = 0 m y x = 5 m, (a) ¿cuál es la posición de la partícula en t = 10 s? (b) ¿cuál es su velocidad en este tiempo? (c) ¿cuál es su aceleración?

87. La aceleración centrípeta de una partícula es $a_C = 4{,}0$ m/s^2 en t = 0 s donde se encuentra en el eje de la x y se mueve en sentido contrario de las agujas del reloj en el plano xy. Ejecuta un movimiento circular uniforme en torno a un eje a una distancia de 5,0 m. ¿Cuál es su velocidad en t = 10 s?

88. Una varilla de 3,0 m de longitud rota a 2,0 rev/s en torno a un eje situado en un extremo. Compare las aceleraciones centrípetas en radios de (a) 1,0 m, (b) 2,0 m y (c) 3,0 m.

89. Una partícula situada inicialmente en $(1{,}5\hat{\mathbf{j}} + 4{,}0\hat{\mathbf{k}})$m sufre un desplazamiento de $(2{,}5\hat{\mathbf{i}} + 3{,}2\hat{\mathbf{j}} - 1{,}2\hat{\mathbf{k}})$ m. ¿Cuál es la posición final de la partícula?

90. La posición de una partícula viene dada por $\vec{\mathbf{r}}(t) = (50 \text{ m/s})t\hat{\mathbf{i}} - (4{,}9 \text{ m/s}^2)t^2\hat{\mathbf{j}}$. (a) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo? (b) ¿Cuáles son las condiciones iniciales para producir el movimiento?

91. Una nave espacial viaja a una velocidad constante de $\vec{\mathbf{v}}(t) = 250{,}0\hat{\mathbf{i}}$m/s cuando sus cohetes se activan, lo que le imprime una aceleración de $\vec{\mathbf{a}}(t) = (3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{k}})$m/s^2. ¿Cuál es su velocidad 5 s después de la activación de los cohetes?

92. Una ballesta apunta horizontalmente a un objetivo a 40 m de distancia. La flecha impacta 30 cm por debajo del punto al que estaba dirigida. ¿Cuál es la velocidad inicial de la flecha?

93. Un atleta de salto largo puede saltar una distancia de 8,0 m cuando se eleva a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Suponiendo que pueda saltar con la misma rapidez inicial en todos los ángulos, ¿cuánta distancia pierde al saltar a 30°?

94. En el planeta Arcon, el alcance horizontal máximo de un proyectil lanzado a 10 m/s es de 20 m. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en este planeta?

95. Un ciclista de montaña se topa con un obstáculo en un circuito de carreras que lo lanza por el aire a 60° de la horizontal. Si aterriza a una distancia horizontal de 45,0 m y 20 m por

debajo de su punto de lanzamiento, ¿cuál es su rapidez inicial?

96. ¿Cuál tiene mayor aceleración centrípeta, un auto con una rapidez de 15,0 m/s a lo largo de una pista circular de radio de 100,0 m o un auto con una rapidez de 12,0 m/s a lo largo de una pista circular de radio de 75,0 m?

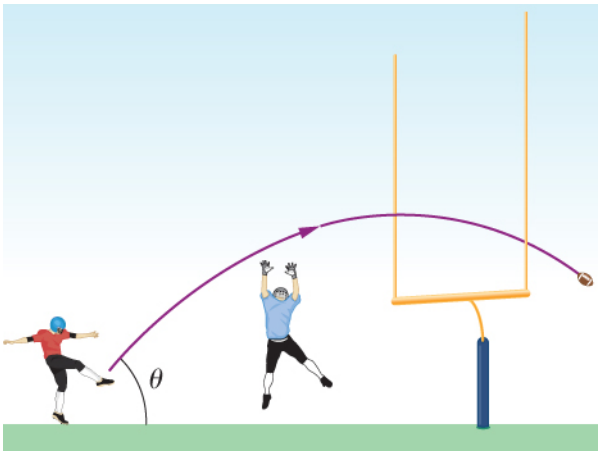
97. Un satélite geosincrónico orbita la Tierra a una distancia de 42.250,0 km y tiene un periodo de 1 día. ¿Cuál es la aceleración centrípeta del satélite?

98. Dos lanchas rápidas viajan a la misma rapidez con respecto al agua en direcciones opuestas en un río en movimiento. Un observador en la orilla del río ve que las lanchas se mueven a 4,0 m/s y 5,0 m/s. (a) ¿Cuál es la rapidez de las lanchas con respecto al río? (b) ¿A qué velocidad se mueve el río con respecto a la orilla?

Problemas De Desafío

99. El par 3 más largo del mundo. El *tee* del par 3 más largo del mundo se encuentra en la cima de la montaña Hanglip de Sudáfrica, a 400,0 m de altura sobre el *green*, y solo se puede llegar a él en helicóptero. La distancia horizontal al *green* es de 359,0 m. Ignore la resistencia del aire y responda a las siguientes preguntas. (a) Si una golfista lanza un tiro que es de $40°$ con respecto a la horizontal, ¿qué velocidad inicial le debe dar a la pelota? (b) ¿Cuál es el tiempo para llegar al *green*?

100. Cuando un goleador de campo patea un balón de fútbol tan fuerte como puede a $45°$ de la horizontal, el balón pasa justo por encima del travesaño de 3 m de altura de los postes de la portería a 45,7 m de distancia. (a) ¿Cuál es la rapidez máxima que el pateador puede impartir al balón? (b) Además de pasar por encima del travesaño, el balón debe estar lo suficientemente alto en el aire durante su vuelo para evitar el alcance del liniero defensivo que se aproxima. Si el liniero está a 4,6 m y tiene un alcance vertical de 2,5 m, ¿puede bloquear el intento de gol de campo de 45,7 m? (c) ¿Y si el liniero está a 1,0 m?



101. Un camión viaja hacia el este a 80 km/h. En una intersección situada a 32 km, un auto circula hacia el norte a 50 km/h. (a) ¿Cuánto tiempo después de este momento estarán los vehículos más cerca el uno del otro? (b) ¿A qué distancia estarán en ese momento?

CAPÍTULO 5
Leyes del movimiento de Newton



Figura 5.1 El puente Golden Gate, una de las mayores obras de la ingeniería moderna, era el puente colgante más largo del mundo en el año de su inauguración, 1937. Al momento de redactar esto, sigue estando entre los 10 puentes colgantes más largos. Al diseñar y construir un puente, ¿qué física debemos tener en cuenta? ¿Qué fuerzas actúan sobre el puente? ¿Qué fuerzas impiden que el puente se caiga? ¿Cómo interactúan las torres, los cables y el suelo para mantener la estabilidad?

ESQUEMA DEL CAPITULO

5.1 Fuerzas
5.2 Primera ley de Newton
5.3 Segunda ley de Newton
5.4 Masa y peso
5.5 Tercera ley de Newton
5.6 Fuerzas comunes
5.7 Dibujar diagramas de cuerpo libre

INTRODUCCIÓN Cuando conduce por un puente, espera que se mantenga estable. También espera acelerar o frenar su auto en respuesta a los cambios de tráfico. En ambos casos, se está lidiando con fuerzas. Las fuerzas sobre el puente están en equilibrio, por lo que se mantiene en su sitio. Por el contrario, la fuerza producida por el motor de su auto provoca un cambio en el movimiento. Isaac Newton descubrió las leyes del movimiento que describen estas situaciones.

Las fuerzas afectan a cada momento de su vida. Su cuerpo está sujeto a la Tierra por la fuerza y se mantiene unido por las fuerzas de las partículas cargadas. Cuando abre una puerta, camina por la calle, levanta el tenedor o toca la cara de un bebé, está aplicando fuerzas. Si nos acercamos más, los átomos del cuerpo se mantienen unidos por fuerzas eléctricas, y el núcleo del átomo se mantiene unido por la fuerza más potente que conocemos: la fuerza nuclear fuerte.

5.1 Fuerzas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Distinguir entre cinemática y dinámica.
- Comprender la definición de fuerza.
- Identificar los diagramas simples de cuerpo libre.
- Definir la unidad de fuerza del SI, el newton.
- Describir la fuerza como un vector.

El estudio del movimiento recibe el nombre de *cinemática*; sin embargo, la cinemática describe solamente la forma en que se mueven los objetos: su velocidad y su aceleración. La **dinámica** es el estudio de cómo las fuerzas inciden en el movimiento de los objetos y sistemas. Considera las causas del movimiento de los objetos y sistemas de interés, donde un sistema es cualquier cosa que se analice. El fundamento de la dinámica son las leyes del movimiento enunciadas por Isaac Newton (1642-1727). Estas leyes son un ejemplo de la amplitud y simplicidad de los principios conforme a los cuales funciona la naturaleza. También son leyes universales, en el sentido de que se aplican a situaciones en la Tierra y en el espacio.

Las leyes del movimiento de Newton fueron apenas una parte de la monumental obra que lo ha hecho legendario (Figura 5.2). El desarrollo de las leyes de Newton marca la transición del Renacimiento a la era moderna. No fue sino hasta la llegada de la física moderna que se descubrió que las leyes de Newton describen adecuadamente el movimiento únicamente cuando los objetos se mueven a velocidades muy inferiores a la de la luz y cuando esos objetos son más grandes que el tamaño de la mayoría de las moléculas (alrededor de 10^{-9} m de diámetro). Estas limitaciones definen el ámbito de la mecánica newtoniana. A principios del siglo XX, Albert Einstein (1879-1955) desarrolló la teoría de la relatividad y, junto con otros muchos científicos, la mecánica cuántica. La mecánica cuántica no tiene las limitaciones presentes en la física newtoniana. Todas las situaciones que consideramos en este capítulo, y todas las que preceden a la introducción de la relatividad en Relatividad (http://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/5-introduction), se sitúan en el ámbito de la física newtoniana.

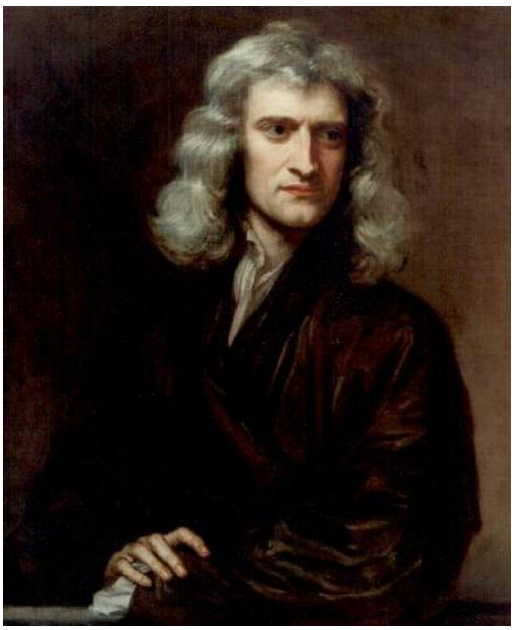


FIGURA 5.2 Isaac Newton (1642-1727) publicó su sorprendente obra, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Principios matemáticos de la filosofía natural)*, en 1687. Propuso leyes científicas que aún hoy se aplican para describir el movimiento de los objetos (las leyes del movimiento). Newton también descubrió la ley de la gravedad, inventó el cálculo e hizo grandes aportaciones a las teorías de la luz y el color.

Definición funcional de fuerza

La dinámica es el estudio de las fuerzas que movilizan los objetos y los sistemas. Para entender esto, necesitamos una definición funcional de fuerza. La definición intuitiva de **fuerza**, es decir, un empujón o tirón, es un buen punto de partida. Sabemos que un empujón o tirón tiene magnitud y dirección (por lo tanto, es una cantidad vectorial), por lo que podemos definir la fuerza como el empujón o tirón sobre un objeto con una magnitud y dirección específicas. La fuerza puede representarse mediante vectores o expresarse como múltiplo de una fuerza estándar.

El empujón o tirón de un objeto puede variar considerablemente en magnitud o dirección. Por ejemplo, un cañón ejerce una gran fuerza sobre una bala de cañón que se lanza al aire. En cambio, la Tierra ejerce únicamente una pequeña fuerza gravitatoria hacia abajo sobre una pulga. Nuestras experiencias cotidianas también nos dan una buena idea de cómo se suman las múltiples fuerzas. Si dos personas empujan en distintas direcciones a una tercera persona, como se ilustra en la Figura 5.3, podríamos esperar que la fuerza total sea en la dirección indicada. Dado que la fuerza es un vector, se suma igual que otros vectores. Las fuerzas, al igual que otros vectores, se representan mediante flechas y pueden sumarse mediante el conocido método de cabeza a cola o los métodos trigonométricos. Estas ideas se desarrollaron en Vectores.

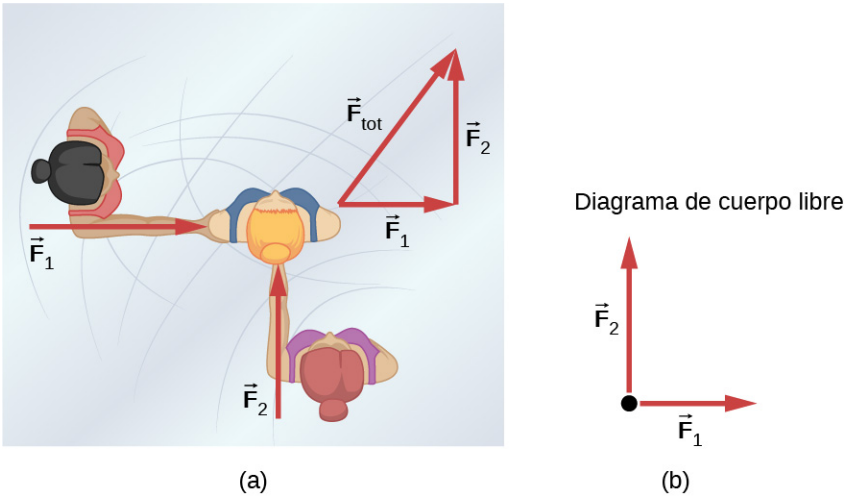


FIGURA 5.3 (a) Vista aérea de dos patinadores sobre hielo que empujan a un tercer patinador. Las fuerzas son vectores y se suman como otros vectores, por lo que la fuerza total sobre el tercer patinador está en la dirección indicada. (b) Diagrama de cuerpo libre que representa las fuerzas que actúan sobre el tercer patinador.

La Figura 5.3(b) es nuestro primer ejemplo de **diagrama de cuerpo libre**; se trata de un esquema que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre un objeto o sistema. El objeto o sistema está representado por un único punto aislado (o cuerpo libre), y solo se muestran las fuerzas que actúan *sobre* este y que se originan fuera del objeto o sistema, es decir, las **fuerzas externas**. (Estas fuerzas son las únicas que se muestran porque solamente las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo libre inciden en su movimiento. Podemos ignorar las fuerzas internas del cuerpo). Las fuerzas están representadas por vectores que se extienden hacia afuera del cuerpo libre.

Los diagramas de cuerpo libre sirven para analizar las fuerzas que actúan sobre un objeto o sistema, y se emplean ampliamente en el estudio y la aplicación de las leyes del movimiento de Newton. Los verá por todo este texto y en todos sus estudios de física. Los siguientes pasos explican brevemente cómo se crea un diagrama de cuerpo libre; examinamos esta estrategia con más detalle en Dibujar diagramas de cuerpo libre.

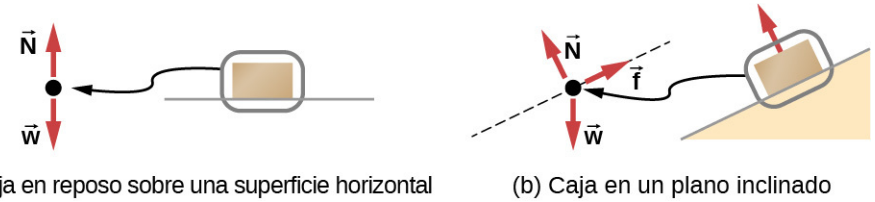
ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Dibujar diagramas de cuerpo libre

1. Dibuje el objeto en cuestión. Si está tratando el objeto como una partícula, represente el objeto como un punto. Sitúe este punto en el origen de un sistema de coordenadas *xy*.

2. Incluya todas las fuerzas que actúan sobre el objeto, represente estas fuerzas como vectores. Sin embargo, no incluya la fuerza neta sobre el objeto ni las fuerzas que este ejerce sobre su entorno.
3. Resuelva todos los vectores de fuerza en componentes *x* y *y*.
4. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada objeto del problema.

Ilustramos esta estrategia con dos ejemplos de diagramas de cuerpo libre (Figura 5.4). Los términos utilizados en esta figura se explican con más detalle más adelante en el capítulo.



(a) Caja en reposo sobre una superficie horizontal (b) Caja en un plano inclinado

FIGURA 5.4 En estos diagramas de cuerpo libre, $\vec{\mathbf{N}}$ es la fuerza normal, $\vec{\mathbf{w}}$ es el peso del objeto, y $\vec{\mathbf{f}}$ es la fricción.

Los pasos que se dan aquí son suficientes para guiarlo en esta importante estrategia de resolución de problemas. La última sección de este capítulo explica con más detalle cómo dibujar diagramas de cuerpo libre cuando se trabaja con las ideas presentadas en este capítulo.

Desarrollo del concepto de fuerza

Una definición cuantitativa de la fuerza puede basarse en alguna fuerza estándar, al igual que la distancia se mide en unidades relativas a una longitud estándar. Una posibilidad es estirar un resorte a una cierta distancia fija (Figura 5.5) y utilizar la fuerza que ejerce para volver a su forma relajada (llamada *fuerza restauradora*) como estándar. La magnitud de todas las demás fuerzas puede considerarse como múltiplos de esta unidad de fuerza estándar. Existen muchas otras posibilidades para las fuerzas estándar. Más adelante en este capítulo se darán algunas otras definiciones de fuerza.

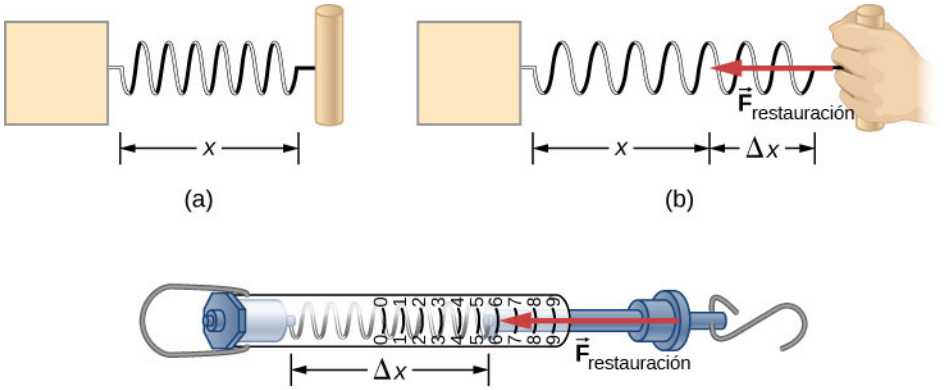


FIGURA 5.5 La fuerza ejercida por un resorte estirado puede utilizarse como unidad de fuerza estándar. (a) Este resorte tiene una longitud *x* cuando está inalterado. (b) Cuando se estira una distancia Δx, el resorte ejerce una fuerza restauradora $\vec{\mathbf{F}}_{\text{restauración}}$, que es reproducible. (c) Una balanza de resorte es un dispositivo que utiliza un resorte para medir la fuerza. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\text{restauración}}$ se ejerce sobre lo que está unido al gancho. Aquí, esta fuerza tiene una magnitud de seis unidades de la fuerza estándar que se está empleando.

Analicemos la fuerza a profundidad. Supongamos que un estudiante de física está sentado en una mesa, y trabaja diligentemente en sus deberes (Figura 5.6). ¿Qué fuerzas externas actúan sobre él? ¿Podemos determinar el origen de estas fuerzas?

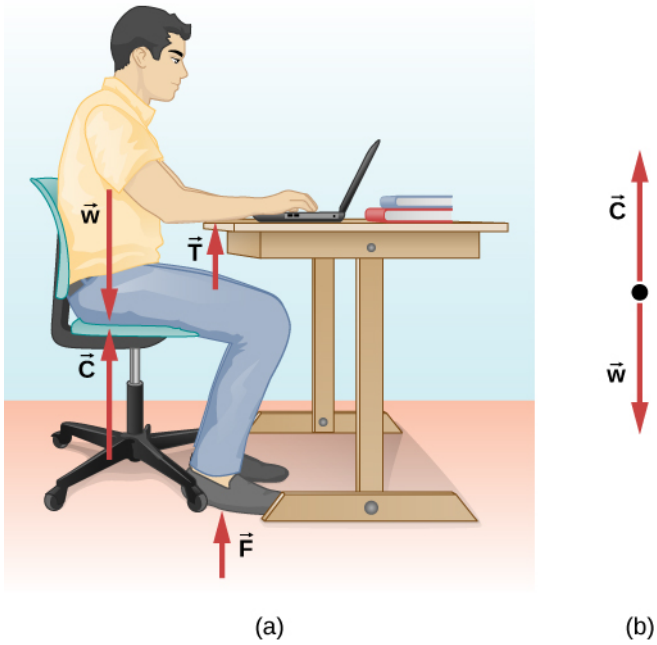


FIGURA 5.6 (a) Las fuerzas que actúan sobre el estudiante se deben a la silla, la mesa, el suelo y la atracción gravitatoria de la Tierra. (b) Al resolver un problema que implique al estudiante, podemos considerar solo las fuerzas que actúan a lo largo de la línea que pasa por su torso. Se muestra un diagrama de cuerpo libre para esta situación.

En la mayoría de las situaciones, las fuerzas se agrupan en dos categorías: *fuerzas de contacto* y *fuerzas de campo*. Como podrá imaginar, las fuerzas de contacto se deben al contacto físico directo entre objetos. Por ejemplo, el estudiante en la Figura 5.6 experimenta las fuerzas de contacto $\vec{\mathbf{C}}$, $\vec{\mathbf{F}}$, y $\vec{\mathbf{T}}$, que ejercen la silla en su parte posterior, el suelo en sus pies y la mesa en sus antebrazos, respectivamente. Sin embargo, las fuerzas de campo actúan sin necesidad de contacto físico entre los objetos. Dependen de la presencia de un "campo" en la región del espacio que rodea al cuerpo en cuestión. Como el estudiante está en el campo gravitatorio de la Tierra, siente una fuerza gravitatoria $\vec{\mathbf{w}}$; en otras palabras, tiene peso.

Se puede pensar en un campo como una propiedad del espacio que detectan las fuerzas que ejerce. Los científicos creen que solo hay cuatro campos de fuerza fundamentales en la naturaleza. Se trata de los campos gravitatorio, electromagnético, nuclear fuerte y débil (consideramos estas cuatro fuerzas en la naturaleza más adelante en este texto). Como se ha señalado para $\vec{\mathbf{w}}$ en la Figura 5.6, el campo gravitatorio es el responsable del peso de un cuerpo. Las fuerzas del campo electromagnético incluyen las de la electricidad estática y el magnetismo. Estas también son responsables de la atracción entre los átomos de la materia en bruto. Tanto el campo de fuerza nuclear fuerte como el campo de fuerza débil son eficaces únicamente en distancias aproximadamente iguales a una longitud de escala no mayor que un núcleo atómico (10^{-15} m). Su alcance es tan pequeño que ninguno de los dos campos tiene influencia en el mundo macroscópico de la mecánica newtoniana.

Las fuerzas de contacto son fundamentalmente electromagnéticas. Mientras el codo del estudiante en la Figura 5.6 está en contacto con la superficie de la mesa, las cargas atómicas de su piel interactúan electromagnéticamente con las cargas de la superficie de la mesa. El resultado neto (total) es la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$. Del mismo modo, cuando la cinta adhesiva se pega a un trozo de papel, los átomos de la cinta se entremezclan con los del papel para provocar una fuerza electromagnética neta entre los dos objetos. Sin embargo, en el contexto de la mecánica newtoniana, el origen electromagnético de las fuerzas de contacto no es ninguna preocupación importante.

Notación vectorial para la fuerza

Como ya se ha mencionado, la fuerza es un vector; tiene magnitud y dirección. La unidad de fuerza del SI se

llama **newton** (abreviado N), y 1 N es la fuerza necesaria para acelerar un objeto con una masa de 1 kg a una tasa de 1 m/s^2: $1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$. Una forma fácil de recordar el tamaño de un newton es imaginar que se sostiene una pequeña manzana; tiene un peso de aproximadamente 1 N.

Por lo tanto, podemos describir una fuerza bidimensional de la forma $\vec{\mathbf{F}} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}$ (los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ indican la dirección de estas fuerzas a lo largo del eje de la *x*y del eje de la *y*, respectivamente) y una fuerza tridimensional de la forma $\vec{\mathbf{F}} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}$. En la Figura 5.3, supongamos que el patinador sobre hielo 1, en el lado izquierdo de la figura, empuja horizontalmente con una fuerza de 30,0 N hacia la derecha; lo representamos como $\vec{\mathbf{F}}_1 = 30{,}0\hat{\mathbf{i}}$ N. Del mismo modo, si el patinador sobre hielo 2 empuja con una fuerza de 40,0 N en la dirección vertical positiva mostrada, escribiríamos $\vec{\mathbf{F}}_2 = 40{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N. La resultante de las dos fuerzas hace que una masa se acelere, en este caso, el tercer patinador sobre hielo. Esta resultante se denomina **fuerza externa neta** $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}$ y se encuentra tomando la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre un objeto o sistema (por lo tanto, también podemos representar la fuerza externa neta como $\sum \vec{\mathbf{F}}$):

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots \qquad 5.1$$

Esta ecuación puede extenderse a cualquier cantidad de fuerzas.

En este ejemplo, tenemos $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = 30{,}0\hat{\mathbf{i}} + 40{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N. La hipotenusa del triángulo mostrado en la Figura 5.3 es la fuerza resultante, o fuerza neta. Es un vector. Para encontrar su magnitud (el tamaño del vector, sin tener en cuenta la dirección), utilizamos la regla dada en Vectores. Tomamos la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes:

$$F_{\text{neta}} = \sqrt{(30{,}0\ \text{N})^2 + (40{,}0\ \text{N})^2} = 50{,}0\ \text{N}.$$

La dirección viene dada por:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{40{,}0}{30{,}0}\right) = 53{,}1^\circ,$$

que se mide desde el eje de la *x* positiva, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre en la Figura 5.3(b).

Supongamos que los patinadores sobre hielo ahora empujan al tercer patinador con $\vec{\mathbf{F}}_1 = 3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 8{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N y $\vec{\mathbf{F}}_2 = 5{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N. ¿Cuál es la resultante de estas dos fuerzas? Debemos reconocer que la fuerza es un vector; por lo tanto, debemos sumar mediante el empleo de las reglas para la adición de vectores:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = \left(3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 8{,}0\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(5{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}}\right) = 8{,}0\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}}\ \text{N}$$

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.1

Halle la magnitud y la dirección de la fuerza neta en el ejemplo del patinador sobre hielo que acabamos de dar.

INTERACTIVO

Vea esta simulación interactiva (https://openstax.org/l/21addvectors) para aprender a sumar vectores. Arrastre vectores a un gráfico, cambie su longitud y ángulo, y súmelos. La magnitud, el ángulo y los componentes de cada vector pueden mostrarse en varios formatos.

5.2 Primera ley de Newton

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la primera ley del movimiento de Newton.
- Reconocer la fricción como una fuerza externa.
- Definir la inercia.
- Identificar los marcos de referencia inerciales.
- Calcular el equilibrio de un sistema.

La experiencia sugiere que un objeto en reposo permanece en reposo si se le deja tal como está y que un objeto en movimiento tiende a reducir su velocidad y a detenerse, a no ser que se haga algún esfuerzo para mantenerlo en movimiento. Sin embargo, la **primera ley de Newton** ofrece una explicación más detallada de esta observación.

> **Primera ley del movimiento de Newton**
>
> Un cuerpo en reposo permanece en reposo o, si está en movimiento, permanece en movimiento a velocidad constante, a menos que actúe sobre este una fuerza externa neta.

Observe el uso reiterado del verbo "permanece". Podemos pensar en esta ley como la preservación del *statu quo* del movimiento. Observe también la expresión "velocidad constante"; esto significa que el objeto mantiene una trayectoria a lo largo de una línea recta, ya que ni la magnitud ni la dirección del vector velocidad cambian. Podemos utilizar la Figura 5.7 para considerar las dos partes de la primera ley de Newton.

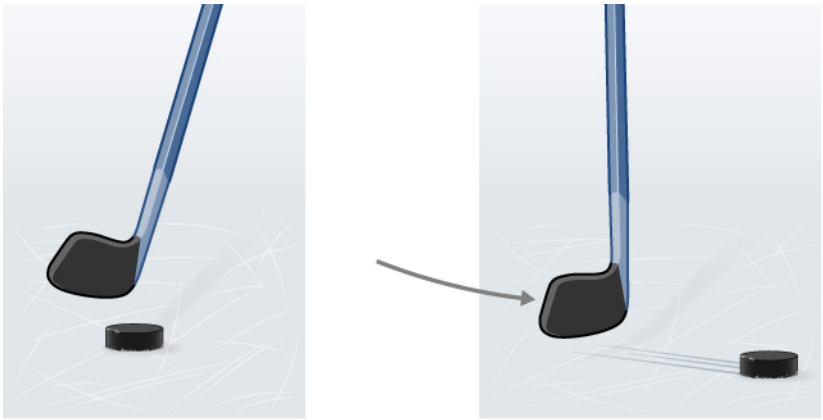


FIGURA 5.7 (a) Se muestra un disco de hockey en reposo; permanece en reposo hasta que una fuerza exterior, como un palo de hockey, cambia su estado de reposo; (b) se muestra un disco de hockey en movimiento; continúa en movimiento rectilíneo hasta que una fuerza exterior le hace cambiar su estado de movimiento. Aunque sea resbaladiza, la superficie de hielo proporciona cierta fricción que frena el disco.

En lugar de contradecir nuestra experiencia, la primera ley de Newton establece que deberá haber una causa para que se produzca cualquier cambio de velocidad (un cambio de magnitud o de dirección). Esta causa es una fuerza externa neta, que hemos definido anteriormente en el capítulo. Un objeto que se desliza por una mesa o el suelo desacelera debido a la fuerza neta de fricción que actúa sobre el objeto. Si la fricción desaparece, ¿el objeto seguirá desacelerando?

La idea de causa y efecto es crucial para describir con precisión lo que ocurre en diversas situaciones. Por ejemplo, considere lo que ocurre con un objeto que se desliza por una superficie horizontal áspera. El objeto se detiene rápidamente. Si rociamos la superficie con talco para hacerla más lisa, el objeto se desliza más lejos. Si hacemos la superficie aún más lisa al frotar aceite lubricante en ella, el objeto se desliza aún más lejos.

Extrapolando a una superficie sin fricción y sin tomar en cuenta la resistencia del aire, podemos imaginar que el objeto se desliza en línea recta indefinidamente. La fricción es, por tanto, la causa de la ralentización (de acuerdo con la primera ley de Newton). El objeto no se frenaría si se eliminara la fricción.

Considere una mesa de hockey de aire (Figura 5.8). Cuando se apaga el aire, el disco se desliza apenas una corta distancia antes de que la fricción lo detenga. Sin embargo, cuando el aire se enciende, crea una superficie casi sin fricción, y el disco se desliza largas distancias sin desacelerar. Además, si sabemos lo suficiente sobre la fricción, podemos predecir con exactitud qué tan rápido el objeto desacelera.

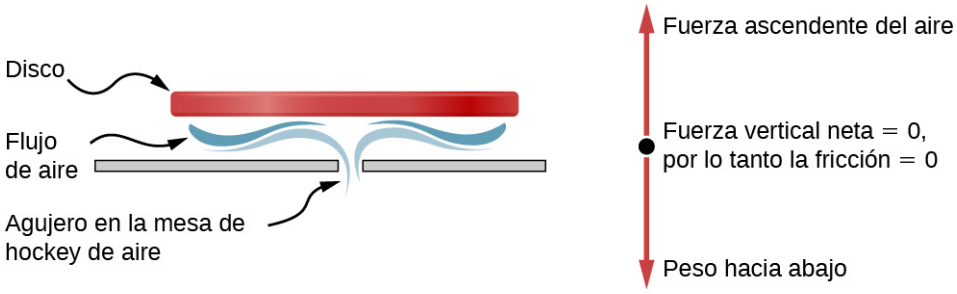


FIGURA 5.8 Una mesa de hockey de aire sirve para ilustrar las leyes de Newton. Cuando el aire está apagado, la fricción frena rápidamente el disco; pero cuando el aire está encendido, minimiza el contacto entre el disco y la mesa de hockey, y el disco se desliza mucho por la mesa.

La primera ley de Newton es general y puede aplicarse a cualquier cosa: desde un objeto que se desliza sobre una mesa hasta un satélite en órbita o la sangre que bombea el corazón. Los experimentos han verificado que cualquier cambio de velocidad (rapidez o dirección) deberá causarlo una fuerza externa. La idea de las *leyes universales o de aplicación general* es importante: es una característica básica de todas las leyes de la física. Identificar estas leyes es como reconocer patrones en la naturaleza a partir de los cuales se pueden descubrir otros patrones. El genio de Galileo, que desarrolló por primera vez la idea de la primera ley del movimiento, y de Newton, que la aclaró, fue plantear la pregunta fundamental: "¿cuál es la causa?". Pensar en términos de causa y efecto es fundamentalmente distinto al enfoque típico de la Grecia antigua, cuando preguntas como "¿por qué un tigre tiene rayas?" se habrían respondido de forma aristotélica, como "esa es la naturaleza de la bestia". La capacidad de pensar en términos de causa y efecto es la capacidad de establecer una conexión entre un comportamiento observado y el mundo circundante.

Gravitación e inercia

Independientemente de la escala de un objeto, ya sea una molécula o una partícula subatómica, hay dos propiedades que siguen siendo válidas y, por ende, de interés para la física: la gravitación y la inercia. Ambas están relacionadas con la masa. A grandes rasgos, la *masa* es una medida de la cantidad de materia que hay en algo. La *gravitación* es la atracción de una masa hacia otra, como la atracción entre usted y la Tierra que mantiene sus pies en el suelo. La magnitud de esta atracción es su peso, y es una fuerza.

La masa también está relacionada con la **inercia**, la capacidad de un objeto para resistir los cambios en su movimiento, es decir, para resistir la aceleración. La primera ley de Newton suele llamarse **ley de la inercia**. Como sabemos por experiencia, algunos objetos tienen más inercia que otros. Es más difícil cambiar el movimiento de una roca grande que el de una pelota de baloncesto, por ejemplo, porque la roca tiene más masa que la pelota. En otras palabras, la inercia de un objeto se mide por su masa. La relación entre la masa y el peso se estudia más adelante en este capítulo.

Marcos de referencia inerciales

Anteriormente, enunciamos la primera ley de Newton como "un cuerpo en reposo permanece en reposo o, si está en movimiento, permanece en movimiento a velocidad constante a menos que actúe sobre este una fuerza externa neta". También puede enunciarse como "todo cuerpo permanece en su estado de movimiento uniforme en línea recta, a no ser que las fuerzas que actúen sobre este lo obliguen a cambiar de estado". Para Newton, el "movimiento uniforme en línea recta" significaba velocidad constante, lo que incluye el caso de la velocidad cero, o reposo. Por lo tanto, la primera ley señala que la velocidad de un objeto permanece constante

si la fuerza neta sobre este es cero.

La primera ley de Newton suele considerarse una afirmación sobre los marcos de referencia. Proporciona un método para identificar un tipo especial de marco de referencia: el **marco de referencia inercial**. En principio, podemos hacer que la fuerza neta sobre un cuerpo sea cero. Si su velocidad relativa a un marco determinado es constante, entonces se dice que ese marco es inercial. Así que, por definición, un marco de referencia inercial es aquel en el que la primera ley de Newton es válida. La primera ley de Newton se aplica a los objetos a velocidad constante. De este hecho, podemos deducir la siguiente afirmación.

Marco de referencia inercial

Un marco de referencia que se mueve a velocidad constante con respecto a un marco inercial es también inercial. Un marco de referencia que acelera con respecto a un marco inercial no es inercial.

¿Son comunes los marcos inerciales en la naturaleza? Resulta que, dentro del error experimental, un marco de referencia en reposo con respecto a las estrellas más lejanas, o "fijas", es inercial. Todos los marcos que se mueven uniformemente con respecto a este marco de estrella fija son también inerciales. Por ejemplo, un marco de referencia no rotativo y unido al Sol es, a efectos prácticos, inercial, porque su velocidad con respecto a las estrellas fijas no varía en más de una parte en 10^{10}. La Tierra acelera con respecto a las estrellas fijas porque gira sobre su eje y alrededor del Sol; de allí que un marco de referencia unido a su superficie no sea inercial. Sin embargo, para la mayoría de los problemas, dicho marco sirve como una aproximación suficientemente precisa a un marco inercial, ya que la aceleración de un punto en la superficie de la Tierra con respecto a las estrellas fijas es bastante pequeña ($< 3{,}4 \times 10^{-2}$ m/s^2). Así, a menos que se indique lo contrario, consideramos que los marcos de referencia fijados en la Tierra son inerciales.

Por último, ningún marco inercial particular es más especial que otro. En cuanto a las leyes de la naturaleza, todos los marcos inerciales son equivalentes. Al analizar un problema, elegimos un marco inercial en lugar de otro simplemente por conveniencia.

La primera ley de Newton y el equilibrio

La primera ley de Newton nos habla del equilibrio de un sistema, que es el estado en el que las fuerzas sobre el sistema están balanceadas. Volviendo a las fuerzas y a los patinadores sobre hielo en la Figura 5.3, sabemos que las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ se combinan para formar una fuerza resultante, o la fuerza externa neta: $\vec{\mathbf{F}}_\text{R} = \vec{\mathbf{F}}_\text{neta} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2$. Para crear el equilibrio, necesitamos una fuerza de equilibrio que produzca una fuerza neta de cero. Esta fuerza deberá ser igual en magnitud pero opuesta en dirección a $\vec{\mathbf{F}}_\text{R}$, lo que significa que el vector deberá ser $-\vec{\mathbf{F}}_\text{R}$. En referencia a los patinadores sobre hielo, para los que encontramos que $\vec{\mathbf{F}}_\text{R}$ era $30{,}0\hat{\mathbf{i}} + 40{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N, podemos determinar la fuerza de equilibrio simplemente al encontrar $-\vec{\mathbf{F}}_\text{R} = -30{,}0\hat{\mathbf{i}} - 40{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N. Vea el diagrama de cuerpo libre en la Figura 5.3(b).

Podemos dar la primera ley de Newton en forma vectorial:

$$\vec{\mathbf{v}} = \text{constante cuando } \vec{\mathbf{F}}_\text{neta} = \vec{\mathbf{0}}\,\text{N}. \tag{5.2}$$

Esta ecuación señala que una fuerza neta de cero implica que la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ del objeto es constante. (La palabra "constante" puede indicar velocidad cero).

La primera ley de Newton es aparentemente sencilla. Si un auto está en reposo, las únicas fuerzas que actúan sobre el auto son el peso y la fuerza de contacto del pavimento que empuja hacia arriba en el auto (Figura 5.9). Es fácil entender que se requiere una fuerza neta distinta a cero para cambiar el estado de movimiento del auto. Cuando un auto se desplaza a velocidad constante, la fricción lo impulsa hacia delante y se opone a la fuerza de arrastre contra este.

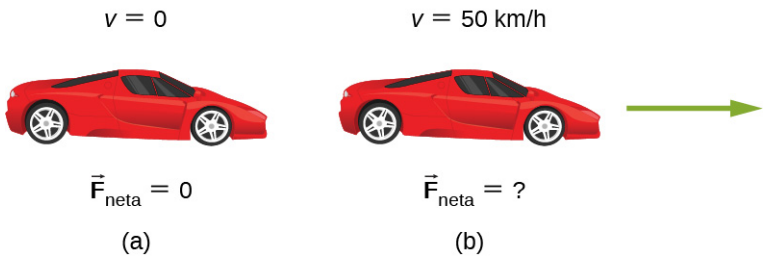


FIGURA 5.9 Se muestra un auto (a) estacionado y (b) en movimiento a velocidad constante. ¿Cómo se aplican las leyes de Newton al auto estacionado? ¿Qué nos dice el saber que el auto se mueve a velocidad constante sobre la fuerza horizontal neta sobre el auto?

EJEMPLO 5.1

¿Cuándo se aplica la primera ley de Newton a su auto?

Las leyes de Newton pueden aplicarse a todos los procesos físicos en los que intervienen la fuerza y el movimiento, incluso a algo tan mundano como conducir un auto.

(a) Su auto está estacionado en la puerta de su casa. ¿Se aplica la primera ley de Newton en esta situación? ¿Por qué sí por qué no?

(b) Su auto se mueve a velocidad constante por la calle. ¿Se aplica la primera ley de Newton en esta situación? ¿Por qué sí por qué no?

Estrategia

En (a), estamos considerando la primera parte de la primera ley de Newton, que trata de un cuerpo en reposo; en (b), vemos la segunda parte de la primera ley de Newton para un cuerpo en movimiento.

Solución

a. Cuando su auto está estacionado, todas las fuerzas sobre el auto deben estar equilibradas; la suma vectorial es 0 N. Así, la fuerza neta es cero, y se aplica la primera ley de Newton. La aceleración del auto es cero y, en este caso, la velocidad también es cero.
b. Cuando su auto se mueve a velocidad constante por la calle, la fuerza neta también debe ser cero según la primera ley de Newton. La fuerza de fricción del auto entre la carretera y los neumáticos se opone a la fuerza de arrastre del auto con la misma magnitud, lo que produce una fuerza neta de cero. El cuerpo continúa en su estado de velocidad constante hasta que la fuerza neta se hace distinta de cero. Dese cuenta de que *una fuerza neta de cero significa que un objeto está en reposo o se mueve con velocidad constante, es decir, no está acelerando.* ¿Qué cree que pasa cuando el auto acelera? Exploramos esta idea en la siguiente sección.

Importancia

Como muestra este ejemplo, hay dos tipos de equilibrio. En (a), el auto está en reposo; decimos que está en *equilibrio estático*. En (b), las fuerzas sobre el auto están equilibradas, pero el auto se mueve; decimos que está en *equilibrio dinámico*. (Examinamos esta idea con más detalle en Equilibrio estático y elasticidad) De nuevo, es posible que dos (o más) fuerzas actúen sobre un objeto y que éste se mueva. Además, una fuerza neta de cero no puede producir aceleración.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.2

Un paracaidista abre su paracaídas y, poco después, se mueve a velocidad constante. (a) ¿Qué fuerzas actúan sobre él? (b) ¿Qué fuerza es mayor?

INTERACTIVO

Realice esta simulación (https://openstax.org/l/21forcemotion_es) para predecir, cualitativamente, cómo una fuerza externa incidirá en la rapidez y dirección del movimiento de un objeto. Explique los efectos con la ayuda de un diagrama de cuerpo libre. Utilice los diagramas de cuerpo libre para dibujar gráficos de posición, velocidad, aceleración y fuerza, y viceversa. Explique cómo se relacionan los gráficos entre sí. Dado un escenario o un gráfico, haga un esquema de los cuatro gráficos.

5.3 Segunda ley de Newton

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Distinguir entre fuerzas externas e internas.
- Describir la segunda ley del movimiento de Newton.
- Explicar la dependencia de la aceleración de la fuerza neta y la masa.

La segunda ley de Newton está estrechamente relacionada con su primera ley. Proporciona matemáticamente la relación causa y efecto entre la fuerza y los cambios en el movimiento. La segunda ley de Newton es cuantitativa y se utiliza mucho para calcular lo que ocurre en situaciones que implican una fuerza. Antes de poder escribir la segunda ley de Newton como una ecuación sencilla que dé la relación exacta de fuerza, masa y aceleración, tenemos que afinar algunas ideas que hemos mencionado antes.

Fuerza y aceleración

En primer lugar, ¿qué entendemos por un cambio de movimiento? La respuesta es que un cambio de movimiento equivale a un cambio de velocidad. Un cambio de velocidad significa, por definición, que hay aceleración. La primera ley de Newton establece que una fuerza externa neta provoca un cambio en el movimiento; por lo tanto, vemos que una *fuerza externa neta provoca una aceleración distinta de cero*.

En Fuerzas definimos la fuerza externa como la fuerza que actúa sobre un objeto o sistema y que se origina fuera del objeto o sistema. Analicemos más a fondo este concepto. Una noción intuitiva de lo *externo* es correcta: está fuera del sistema de interés. Por ejemplo, en la Figura 5.10(a), el sistema de interés es el auto más la persona que está dentro. Las dos fuerzas ejercidas por los dos estudiantes son fuerzas externas. En cambio, una fuerza interna actúa entre los elementos del sistema. Por lo tanto, la fuerza que ejerce la persona en el auto para agarrarse al volante es una fuerza interna entre elementos del sistema de interés. Solo las fuerzas externas afectan el movimiento de un sistema, según la primera ley de Newton. (Las fuerzas internas se anulan entre sí, como se explica en la siguiente sección). Por lo tanto, debemos definir los límites del sistema antes de poder determinar qué fuerzas son externas. A veces, el sistema es obvio, mientras que otras veces, identificar los límites de un sistema es más sutil. El concepto de sistema es fundamental en muchas áreas de la física, así como la correcta aplicación de las leyes de Newton. Este concepto se repite muchas veces en el estudio de la física.

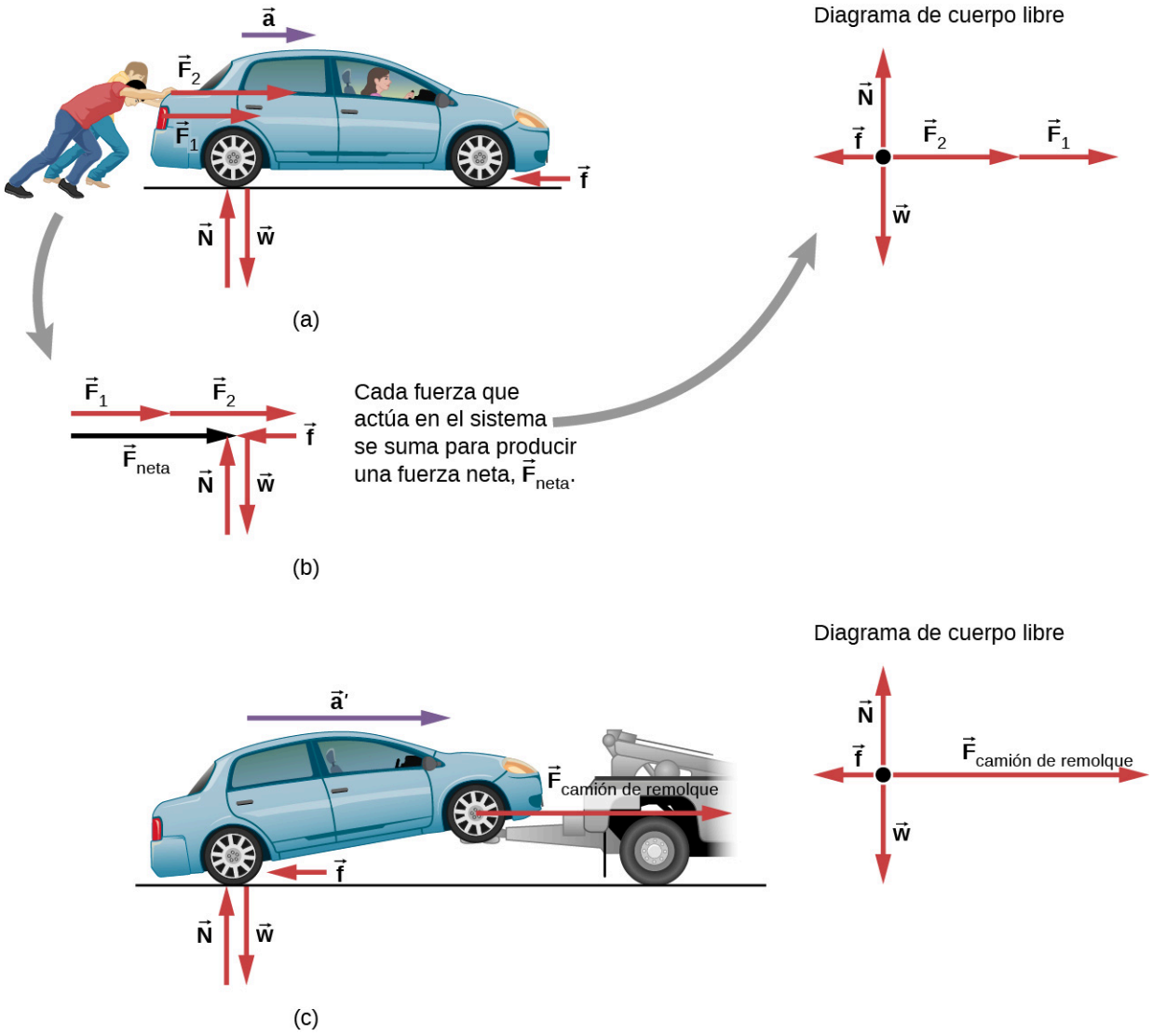


FIGURA 5.10 Diferentes fuerzas ejercidas sobre una misma masa producen diferentes aceleraciones. (a) Dos estudiantes empujan un auto detenido. Se muestran todas las fuerzas externas que actúan sobre el auto. (b) Las fuerzas que actúan sobre el auto se transfieren a un plano de coordenadas (diagrama de cuerpo libre) para simplificar el análisis. (c) La grúa puede producir una mayor fuerza externa sobre la misma masa y, por lo tanto, una mayor aceleración.

En este ejemplo puede ver que diferentes fuerzas ejercidas sobre la misma masa producen diferentes aceleraciones. En la Figura 5.10(a), los dos estudiantes empujan un auto con un conductor dentro. Se muestran las flechas que representan todas las fuerzas externas. El sistema de interés es el auto y su conductor. El peso $\vec{\mathbf{w}}$ del sistema y el soporte del suelo $\vec{\mathbf{N}}$ también se muestran para completar y se supone que se cancelan (porque no hubo movimiento vertical y no hubo desequilibrio de fuerzas en la dirección vertical para crear un cambio en el movimiento). El vector $\vec{\mathbf{f}}$ representa la fricción que actúa sobre el auto, y actúa hacia la izquierda, en oposición al movimiento del auto. (En el próximo capítulo hablaremos de la fricción con más detalle). En la Figura 5.10(b), todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema se suman para generar la fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}$. El diagrama de cuerpo libre muestra todas las fuerzas que actúan sobre el sistema en cuestión. El punto representa el centro de masa del sistema. Cada vector de fuerza se extiende desde este punto. Como hay dos fuerzas que actúan a la derecha, los vectores se muestran colinealmente. Finalmente, en la Figura 5.10(c), una mayor fuerza externa neta produce una mayor aceleración ($\vec{\mathbf{a}'} > \vec{\mathbf{a}}$) cuando la grúa remolca el auto.

Parece razonable que la aceleración sea directamente proporcional y en la misma dirección que la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema. Esta suposición se ha verificado experimentalmente y se ilustra en la Figura 5.10. Para obtener una ecuación de la segunda ley de Newton, primero escribimos la relación de la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ y la fuerza externa neta $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}$ como la proporcionalidad

$$\vec{\mathbf{a}} \propto \vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}$$

donde el símbolo $\propto$ significa "proporcional a" (recordemos en Fuerzas que la fuerza externa neta es la suma vectorial de todas las fuerzas externas y a veces se indica como $\sum \vec{\mathbf{F}}$). Esta proporcionalidad muestra lo que hemos dicho en palabras: la aceleración es directamente proporcional a la fuerza externa neta. Una vez elegido el sistema en cuestión, identifique las fuerzas externas e ignore las internas. Es una tremenda simplificación prescindir de las numerosas fuerzas internas que actúan entre los objetos del sistema, como las fuerzas musculares dentro del cuerpo de los estudiantes, por no hablar de las innumerables fuerzas entre los átomos de los objetos. Aun así, esta simplificación nos permite resolver algunos problemas complejos.

También parece razonable que la aceleración sea inversamente proporcional a la masa del sistema. En otras palabras, cuanto mayor sea la masa (la inercia), menor será la aceleración producida por una fuerza determinada. Como se ilustra en la Figura 5.11, la misma fuerza externa neta aplicada a un balón de baloncesto produce una aceleración mucho menor cuando se aplica a un vehículo todoterreno. La proporcionalidad se escribe como

$$a \propto \frac{1}{m},$$

donde m es la masa del sistema y a es la magnitud de la aceleración. Los experimentos han demostrado que la aceleración es exactamente inversamente proporcional a la masa, al igual que es directamente proporcional a la fuerza externa neta.

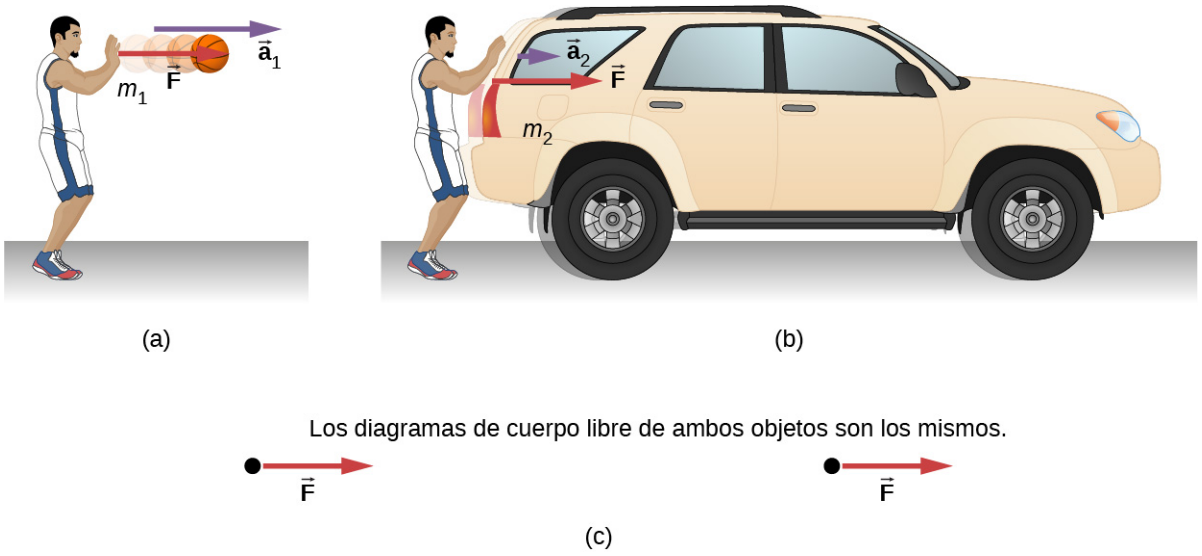


FIGURA 5.11 La misma fuerza ejercida sobre sistemas de masas diferentes produce aceleraciones diferentes. (a) Un jugador de baloncesto empuja el balón para hacer un pase (ignore el efecto de la gravedad sobre el balón). (b) El mismo jugador ejerce una fuerza idéntica en un vehículo todoterreno detenido y produce una aceleración mucho menor. (c) Los diagramas de cuerpo libre son idénticos, lo que permite comparar directamente las dos situaciones. Una serie de patrones para los diagramas de cuerpo libre surgirá a medida que haga más problemas y aprenda a dibujarlos en Dibujar diagramas de cuerpo libre.

Se ha comprobado que la aceleración de un objeto depende únicamente de la fuerza externa neta y de la masa del objeto. Combinando las dos proporciones que acabamos de dar produce la **segunda ley de Newton**.

Segunda ley del movimiento de Newton

La aceleración de un sistema es directamente proporcional y en la misma dirección que la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema y es inversamente proporcional a su masa. En forma de ecuación, la segunda ley de Newton es

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}}{m},$$

donde $\vec{\mathbf{a}}$ es la aceleración, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}$ es la fuerza neta, y m es la masa. Esto se escribe a menudo en la forma más familiar

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}, \qquad 5.3$$

pero la primera ecuación permite comprender mejor el significado de la segunda ley de Newton. Cuando solo se considera la magnitud de la fuerza y la aceleración, esta ecuación puede escribirse en la forma escalar más simple:

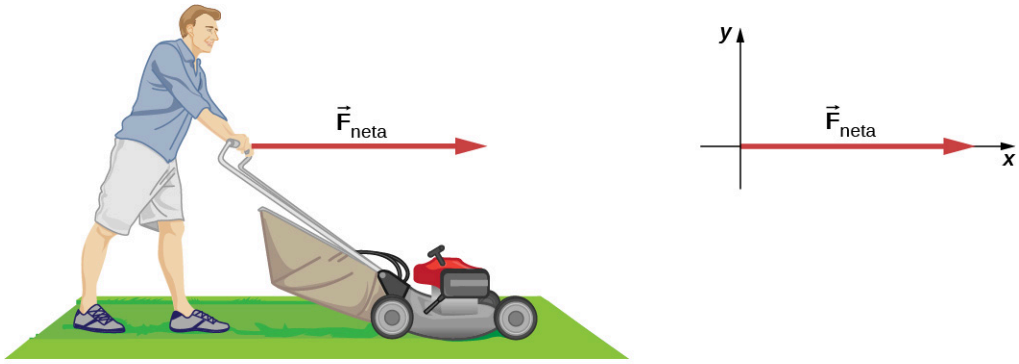
$$F_{\text{neta}} = ma. \qquad 5.4$$

La ley es una relación de causa y efecto entre tres cantidades que no se basa simplemente en sus definiciones. La validez de la segunda ley se basa en la verificación experimental. El diagrama de cuerpo libre, que aprenderá a dibujar en Dibujar diagramas de cuerpo libre, es la base para escribir la segunda ley de Newton.

EJEMPLO 5.2

¿Qué aceleración puede producir una persona al empujar un cortacésped?

Supongamos que la fuerza externa neta (empujón menos fricción) que se ejerce sobre un cortacésped es de 51 N (aproximadamente 11 lb) paralela al suelo (Figura 5.12). La masa del cortacésped es de 24 kg. ¿Cuál es su aceleración?



(a) (b)

FIGURA 5.12 (a) La fuerza neta sobre un cortacésped es de 51 N hacia la derecha. ¿A qué proporción acelera el cortacésped hacia la derecha? (b) Se muestra el diagrama de cuerpo libre para este problema.

Estrategia

Este problema implica solo el movimiento en la dirección horizontal; también se nos da la fuerza neta, indicada por el vector único, pero podemos suprimir la naturaleza vectorial y concentrarnos en aplicar la segunda ley de Newton. Dado que F_{neta} y m se han dado, la aceleración se puede calcular directamente a partir de la segunda ley de Newton como $F_{\text{neta}} = ma$.

Solución

La magnitud de la aceleración a es $a = F_{\text{neta}}/m$. Introduciendo los valores conocidos se obtiene

$$a = \frac{51\ \text{N}}{24\ \text{kg}}.$$

Sustituyendo la unidad de kilogramos por metros por segundo al cuadrado por newtons produce

$$a = \frac{51\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{24\ \text{kg}} = 2{,}1\ \text{m/s}^2.$$

Importancia

La dirección de la aceleración es la misma que la de la fuerza neta, que es paralela al suelo. Esto es resultado de la relación vectorial expresada en la segunda ley de Newton, es decir, el vector que representa la fuerza neta es el múltiplo escalar del vector aceleración. En este ejemplo no se da información sobre las fuerzas externas individuales que actúan sobre el sistema, pero podemos decir algo sobre su magnitud relativa. Por ejemplo, la fuerza ejercida por la persona que empuja el cortacésped debe ser mayor que la fricción que se opone al movimiento (ya que sabemos que el cortacésped se ha movido hacia delante), y las fuerzas verticales deben anularse porque no se produce ninguna aceleración en la dirección vertical (el cortacésped se mueve solo horizontalmente). La aceleración encontrada es lo suficientemente pequeña como para ser razonable para una persona que empuja un cortacésped. Tal esfuerzo no duraría demasiado, porque la velocidad máxima de la persona se alcanzaría pronto.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.3

En el momento de su lanzamiento, el RMS *Titanic* era el objeto móvil más grande jamás construido, con una masa de $6{,}0 \times 10^7$ kg. Si una fuerza de 6 MN (6×10^6 N) se aplicara al barco, ¿qué aceleración experimentaría?

En el ejemplo anterior, hemos tratado únicamente la fuerza neta para simplificar. Sin embargo, varias fuerzas actúan sobre el cortacésped. El peso $\vec{\mathbf{w}}$ (que se analiza en detalle en Masa y peso) ejerce una fuerza gravitatoria hacia abajo del cortacésped, hacia el centro de la Tierra; esto produce una fuerza de contacto en el suelo. El suelo debe ejercer una fuerza ascendente sobre el cortacésped, conocida como fuerza normal $\vec{\mathbf{N}}$, que definimos en Fuerzas comunes. Estas fuerzas están equilibradas y, por lo tanto, no producen ninguna aceleración vertical. En el siguiente ejemplo, mostramos ambas fuerzas. A medida que resuelva problemas con la segunda ley de Newton, muestre varias fuerzas.

EJEMPLO 5.3

¿Qué fuerza es mayor?

(a) El auto que se muestra en la Figura 5.13 se mueve a una rapidez constante. ¿Qué fuerza es mayor, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{fricción}}$ o $\vec{\mathbf{F}}_{\text{arrastre}}$? Explique.

(b) El mismo auto acelera ahora hacia la derecha. ¿Qué fuerza es mayor, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{fricción}}$ o $\vec{\mathbf{F}}_{\text{arrastre}}$? Explique.

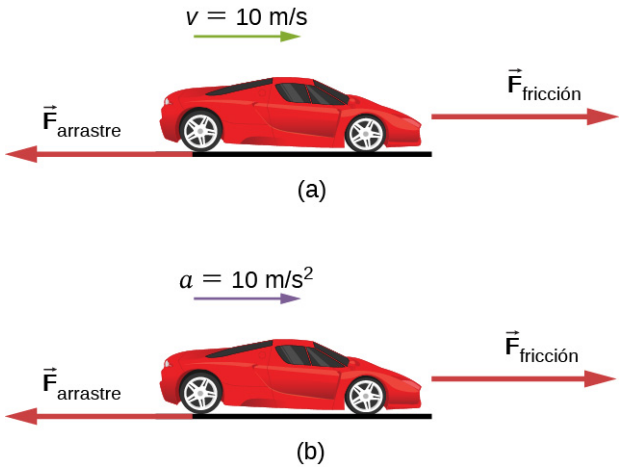


FIGURA 5.13 Se muestra un auto (a) que se desplaza a una rapidez constante y (b) que acelera. ¿Cómo se comparan las fuerzas que actúan en el auto en cada caso? (a) ¿Qué nos dice el conocimiento de que el auto se mueva a velocidad constante acerca de la fuerza horizontal neta sobre el auto, en comparación con la fuerza de fricción? (b) ¿Qué nos dice el conocimiento de que el auto acelere acerca de la fuerza horizontal sobre el auto, en comparación con la fuerza de fricción?

Estrategia

Debemos tener en cuenta la primera y la segunda ley de Newton para analizar la situación. Tenemos que decidir qué ley se aplica; esto, a su vez, nos indicará la relación entre las fuerzas.

Solución

a. Las fuerzas son iguales. Según la primera ley de Newton, si la fuerza neta es cero, la velocidad es constante.
b. En este caso, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{fricción}}$ deberá ser mayor que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{arrastre}}$. Según la segunda ley de Newton, se requiere una fuerza neta para provocar la aceleración.

Importancia

Estas preguntas pueden parecer triviales, pero suelen responderse incorrectamente. Para que un auto o cualquier otro objeto se mueva, debe acelerarse desde el reposo hasta la rapidez deseada; para ello es necesario que la fuerza de fricción sea mayor que la de arrastre. Una vez que el auto se mueva a velocidad constante, la fuerza neta deberá ser cero; de lo contrario, el auto se acelerará (ganará rapidez). Para resolver problemas en los que intervienen las leyes de Newton, debemos entender si hay que aplicar la primera ley de Newton (donde $\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$) o la segunda ley de Newton (donde $\sum \vec{\mathbf{F}}$ no es cero). Esto será evidente a medida que vea más ejemplos e intente resolver los problemas por su cuenta.

EJEMPLO 5.4

¿Qué empuje de cohete acelera este trineo?

Antes de los vuelos espaciales que transportaban astronautas, los trineos de cohetes se utilizaban para probar aeronaves, equipos de misiles y los efectos fisiológicos en el ser humano a altas velocidades. Consistían en una plataforma montada sobre uno o dos rieles e impulsada por varios cohetes.

Calcule la magnitud de la fuerza ejercida por cada cohete, llamada su empuje T, para el sistema de propulsión de cuatro cohetes mostrado en la Figura 5.14. La aceleración inicial del trineo es $49\ \text{m/s}^2$, la masa del sistema es de 2.100 kg, y la fuerza de fricción que se opone al movimiento es de 650 N.

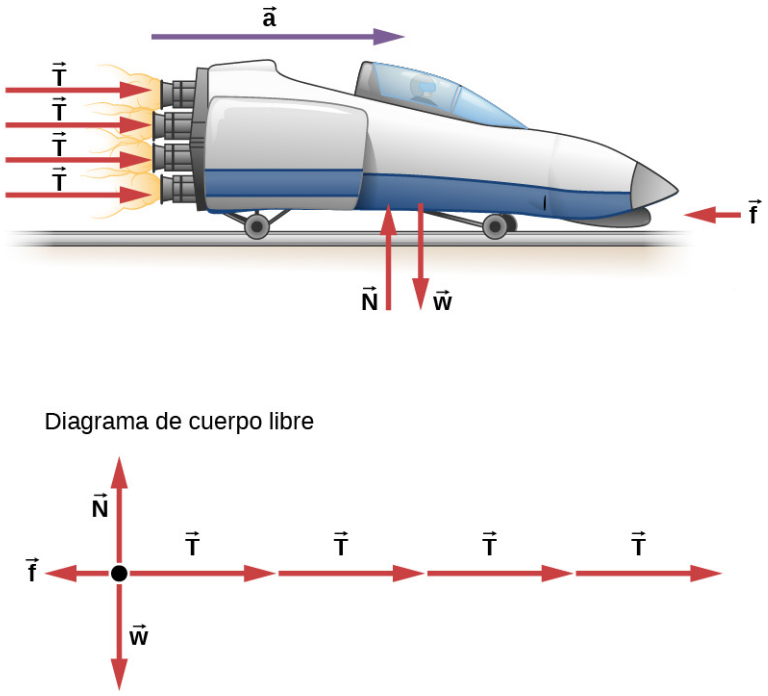


FIGURA 5.14 Un trineo experimenta el empuje de un cohete que lo acelera hacia la derecha. Cada cohete crea un empuje idéntico *T*. El sistema aquí es el trineo, sus cohetes y su conductor, por lo que no se considera ninguna de las fuerzas entre estos objetos. La flecha que representa la fricción ($\vec{\mathbf{f}}$) se dibuja más grande que la escala.

Estrategia

Aunque las fuerzas actúan tanto vertical como horizontalmente, suponemos que las fuerzas verticales se cancelan porque no hay aceleración vertical. Esto nos deja solo con las fuerzas horizontales y un problema unidimensional más simple. Las direcciones se indican con signos de más o menos, tomándose la derecha como la dirección positiva. Vea el diagrama de cuerpo libre en la Figura 5.14.

Solución

Como la aceleración, la masa y la fuerza de fricción están dadas, partimos de la segunda ley de Newton y buscamos la forma de encontrar el empuje de los motores. Hemos definido la dirección de la fuerza y la aceleración como actuando "hacia la derecha", por lo que necesitamos considerar solo la magnitud de estas cantidades en los cálculos. Por lo tanto, comenzamos con

$$F_{\text{neta}} = ma$$

donde F_{neta} es la fuerza neta a lo largo de la dirección horizontal. Podemos ver en la figura que los empujes del motor se suman, mientras que la fricción se opone al empuje. En forma de ecuación, la fuerza externa neta es

$$F_{\text{neta}} = 4T - f.$$

Sustituyendo esto en la segunda ley de Newton obtenemos

$$F_{\text{neta}} = ma = 4T - f.$$

Utilizando un poco de álgebra, resolvemos el empuje total $4T$:

$$4T = ma + f.$$

Sustituyendo los valores conocidos produce

$$4T = ma + f = (2.100\ \text{kg})\left(49\ \text{m/s}^2\right) + 650\ \text{N}.$$

Por lo tanto, el empuje total es

$$4T = 1{,}0 \times 10^5\ \text{N},$$

y los empujes individuales son

$$T = \frac{1{,}0 \times 10^5 \text{ N}}{4} = 2{,}5 \times 10^4 \text{ N}.$$

Importancia

Las cifras son bastante grandes, por lo que el resultado podría sorprenderle. Este tipo de experimentos se realizaron a principios de la década de los años 60 del siglo XX para probar los límites de la resistencia humana, y el montaje se diseñó para proteger a los sujetos humanos en las eyecciones de emergencia de los jets de combate. Se obtuvieron valores de rapidez de 1.000 km/h, con aceleraciones de 45 *g*. (Recordemos que *g*, la aceleración debida a la gravedad, es $9{,}80 \text{ m/s}^2$. Cuando decimos que la aceleración es de 45 *g*, significa $45 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2$, que es aproximadamente 440 m/s^2). Aunque ya no se utilizan sujetos vivos, se ha obtenido una rapidez terrestre de 10.000 km/h con un trineo de cohetes.

En este ejemplo, como en el anterior, el sistema de interés es evidente. En ejemplos posteriores veremos que la elección del sistema de interés es crucial, y la elección no siempre es obvia.

La segunda ley de Newton es más que una definición; es una relación entre aceleración, fuerza y masa. Nos permite hacer predicciones. Cada una de esas cantidades físicas puede definirse de forma independiente, por lo que la segunda ley nos dice algo básico y universal sobre la naturaleza.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.4

Un auto deportivo de 550 kg choca con un camión de 2.200 kg, y durante la colisión, la fuerza neta sobre cada vehículo es la fuerza ejercida por el otro. Si la magnitud de la aceleración del camión es 10 m/s^2, ¿cuál es la magnitud de la aceleración del auto deportivo?

Forma de los componentes de la segunda ley de Newton

Hemos desarrollado la segunda ley de Newton y la hemos presentado como una ecuación vectorial en la Ecuación 5.3. Esta ecuación vectorial puede escribirse como ecuaciones de tres componentes:

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_x = m\vec{\mathbf{a}}_x, \ \sum \vec{\mathbf{F}}_y = m\vec{\mathbf{a}}_y, \text{ y } \sum \vec{\mathbf{F}}_z = m\vec{\mathbf{a}}_z. \qquad 5.5$$

La segunda ley es una descripción de cómo un cuerpo responde mecánicamente a su entorno. La influencia del entorno es la fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}$, la respuesta del cuerpo es la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$, y la fuerza de la respuesta es inversamente proporcional a la masa *m*. Cuanto mayor sea la masa de un objeto, menor será su respuesta (su aceleración) a la influencia del entorno (una fuerza neta determinada). Por lo tanto, la masa de un cuerpo es una medida de su inercia, como explicamos en la Primera ley de Newton.

EJEMPLO 5.5

Fuerza sobre un balón de fútbol

Un jugador patea a través del campo un balón de fútbol de 0,400 kg; este experimenta una aceleración dada por $\vec{\mathbf{a}} = 3{,}00\hat{\mathbf{i}} + 7{,}00\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$. Halle (a) la fuerza resultante que actúa sobre el balón y (b) la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

Estrategia

Los vectores en formato $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, que indican la dirección de la fuerza a lo largo del eje de la *x* y del eje de la *y*, respectivamente, están involucrados, por lo que aplicamos la segunda ley de Newton en forma vectorial.

Solución

a. Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = m\vec{\mathbf{a}} = (0{,}400\ \text{kg})\left(3{,}00\hat{\mathbf{i}} + 7{,}00\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2\right) = 1{,}20\hat{\mathbf{i}} + 2{,}80\hat{\mathbf{j}}\ \text{N}.$$

b. La magnitud y la dirección se encuentran con los componentes de $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}$:

$$F_{\text{neta}} = \sqrt{(1{,}20\ \text{N})^2 + (2{,}80\ \text{N})^2} = 3{,}05\ \text{N y } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}80}{1{,}20}\right) = 66{,}8°.$$

Importancia

Debemos recordar que la segunda ley de Newton es una ecuación vectorial. En (a), estamos multiplicando un vector por un escalar para determinar la fuerza neta en forma vectorial. Aunque la forma vectorial ofrece una representación compacta del vector de fuerza, no nos dice lo "grande" que es, ni a dónde va, en términos intuitivos. En (b), estamos determinando el tamaño real (magnitud) de esta fuerza y la dirección en la que viaja.

EJEMPLO 5.6

Masa de un auto

Halle la masa de un auto si una fuerza neta de $-600{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N produce una aceleración de $-0{,}2\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2.

Estrategia

La división vectorial no está definida, por lo que $m = \vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}/\vec{\mathbf{a}}$ no se puede realizar. Sin embargo, la masa m es un escalar, por lo que podemos utilizar la forma escalar de la segunda ley de Newton, $m = F_{\text{neta}}/a$.

Solución

Utilizamos $m = F_{\text{neta}}/a$ y sustituimos la magnitud de los dos vectores: $F_{\text{neta}} = 600{,}0$ N y $a = 0{,}2$ m/s^2. Por lo tanto,

$$m = \frac{F_{\text{neta}}}{a} = \frac{600{,}0\ \text{N}}{0{,}2\ \text{m/s}^2} = 3.000\ \text{kg}.$$

Importancia

La fuerza y la aceleración se dieron en formato $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, pero la respuesta, la masa m, es un escalar y, por ende, no se da en forma de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$.

EJEMPLO 5.7

Varias fuerzas sobre una partícula

Una partícula de masa $m = 4{,}0$ kg está sometida a la acción de cuatro fuerzas de magnitud $F_1 = 10{,}0$ N, $F_2 = 40{,}0$ N, $F_3 = 5{,}0$ N, y $F_4 = 2{,}0$ N, con las direcciones indicadas en el diagrama de cuerpo libre en la Figura 5.15. ¿Cuál es la aceleración de la partícula?

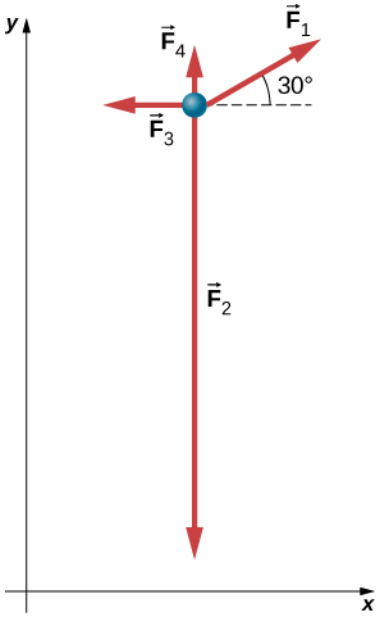


FIGURA 5.15 Se aplican cuatro fuerzas en el plano *xy* a una partícula de 4,0 kg.

Estrategia

Como se trata de un problema bidimensional, debemos utilizar un diagrama de cuerpo libre. Primero, $\vec{\mathbf{F}}_1$ debe resolverse en componentes x y y. Entonces podemos aplicar la segunda ley en cada dirección.

Solución

Dibujamos un diagrama de cuerpo libre como se muestra en la Figura 5.15. Ahora aplicamos la segunda ley de Newton. Consideramos todos los vectores resueltos en componentes de x y y:

$$\sum F_x = ma_x$$
$$F_{1x} - F_{3x} = ma_x$$
$$F_1 \cos 30° - F_{3x} = ma_x$$
$$(10{,}0\ \text{N})\,(\cos 30°) - 5{,}0\ \text{N} = (4{,}0\ \text{kg})\,a_x$$
$$a_x = 0{,}92\ \text{m/s}^2.$$

$$\sum F_y = ma_y$$
$$F_{1y} + F_{4y} - F_{2y} = ma_y$$
$$F_1 \operatorname{sen} 30° + F_{4y} - F_{2y} = ma_y$$
$$(10{,}0\ \text{N})\,(\operatorname{sen} 30°) + 2{,}0\ \text{N} - 40{,}0\ \text{N} = (4{,}0\ \text{kg})\,a_y$$
$$a_y = -8{,}3\ \text{m/s}^2.$$

Así, la aceleración neta es

$$\vec{\mathbf{a}} = \left(0{,}92\hat{\mathbf{i}} - 8{,}3\hat{\mathbf{j}}\right)\ \text{m/s}^2,$$

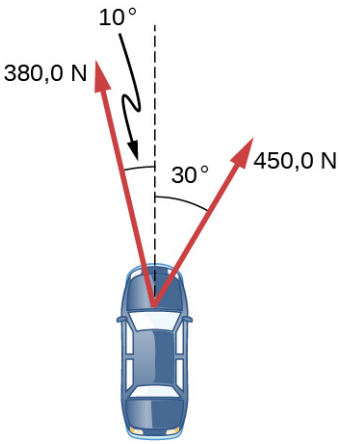
que es un vector de magnitud $8{,}4\ \text{m/s}^2$ dirigido a $276°$ al eje de la x positiva.

Importancia

Se pueden encontrar numerosos ejemplos en la vida cotidiana que implican tres o más fuerzas que actúan sobre un mismo objeto, como los cables que van desde el puente Golden Gate o un jugador de fútbol que es abordado por tres defensores. Podemos ver que la solución de este ejemplo es solo una extensión de lo que ya hemos hecho.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.5

Un auto tiene fuerzas que actúan sobre él, como se muestra a continuación. La masa del auto es de 1.000,0 kg. La carretera está resbaladiza, por lo que se puede ignorar la fricción. (a) ¿Cuál es la fuerza neta sobre el auto? (b) ¿Cuál es la aceleración del auto?



Segunda ley de Newton y el momento

En realidad, Newton planteó su segunda ley en términos de momento: "La tasa instantánea a la que cambia el momento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo" ("tasa instantánea" implica que la derivada está involucrada). Esto puede estar dado por la ecuación vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}. \tag{5.6}$$

Esto significa que la segunda ley de Newton aborda la pregunta central del movimiento: ¿qué causa un cambio en el movimiento de un objeto? Newton describió el momento como "cantidad de movimiento", una forma de combinar la velocidad de un objeto y su masa. Dedicamos Momento lineal y colisiones al estudio del momento.

Por ahora, basta con definir el *momento* $\vec{\mathbf{p}}$ como el producto de la masa del objeto m y su velocidad $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}. \tag{5.7}$$

Ya que la velocidad es un vector, también lo es el momento.

Es fácil visualizar el momento. Un tren que se mueve a 10 m/s tiene más momento que uno que se mueve a 2 m/s. En la vida cotidiana, hablamos de que un equipo deportivo "tiene momento" cuando anota puntos contra el equipo contrario.

Si sustituimos la Ecuación 5.7 en la Ecuación 5.6, obtenemos

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)}{dt}.$$

Cuando m es constante, tenemos

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = m\frac{d\left(\vec{\mathbf{v}}\right)}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}.$$

Así, vemos que la forma del momento de la segunda ley de Newton se reduce a la forma dada anteriormente en esta sección.

INTERACTIVO

Explore las fuerzas que actúan (https://openstax.org/l/21forcesatwork) al halar un carro (https://openstax.org/l/21pullacart) o al empujar un refrigerador, una caja o una persona. Cree una fuerza aplicada (https://openstax.org/l/21forcemotion_es) y vea cómo hace que los objetos se muevan. Ponga un objeto en una rampa (https://openstax.org/l/21ramp) y vea cómo afecta a su movimiento.

5.4 Masa y peso

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la diferencia entre masa y peso.
- Explicar por qué los objetos que caen en la Tierra nunca están realmente en caída libre.
- Describir el concepto de ingravidez.

La masa y el peso se utilizan a menudo indistintamente en la conversación cotidiana. Por ejemplo, nuestra historia clínica suele indicar nuestro peso en kilogramos, pero nunca en las unidades correctas de newtons. Sin embargo, en la física hay una distinción importante. El peso es la fuerza gravitatoria de la Tierra sobre un objeto. Depende de la distancia al centro de la Tierra. A diferencia del peso, la masa no varía con la ubicación. La masa de un objeto es la misma en la Tierra, en órbita o en la superficie de la Luna.

Unidades de fuerza

La ecuación $F_{\text{neta}} = ma$ se utiliza para definir la fuerza neta en términos de masa, longitud y tiempo. Como se ha explicado anteriormente, la unidad de fuerza del SI es el newton. Dado que $F_{\text{neta}} = ma$,

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

Aunque casi todo el mundo utiliza el newton como unidad de fuerza, en los Estados Unidos la unidad de fuerza más conocida es la libra (lb), donde 1 N = 0,225 lb. Por lo tanto, una persona de 225 lb pesa 1000 N.

Peso y fuerza gravitatoria

Cuando un objeto se deja caer, se acelera hacia el centro de la Tierra. La segunda ley de Newton establece que una fuerza neta sobre un objeto es responsable por su aceleración. Si la resistencia del aire es despreciable, la fuerza neta sobre un objeto que cae es la fuerza gravitatoria, comúnmente llamada su **peso** $\vec{\mathbf{w}}$, o su fuerza debida a la gravedad que actúa sobre un objeto de masa m. El peso puede denotarse como un vector porque tiene una dirección; *hacia abajo* es, por definición, la dirección de la gravedad, y por lo tanto, el peso es una fuerza descendente. La magnitud del peso se indica como w. Galileo contribuyó a demostrar que, en ausencia de resistencia del aire, todos los objetos caen con la misma aceleración g. Utilizando el resultado de Galileo y la segunda ley de Newton, podemos derivar una ecuación para el peso.

Consideremos un objeto con masa m que cae hacia la Tierra. Experimenta solamente la fuerza de gravedad descendente, que es el peso $\vec{\mathbf{w}}$. La segunda ley de Newton establece que la magnitud de la fuerza externa neta sobre un objeto es $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = m\vec{\mathbf{a}}$. Sabemos que la aceleración de un objeto debida a la gravedad es $\vec{\mathbf{g}}$, o $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$. Al sustituir esto en la segunda ley de Newton obtenemos las siguientes ecuaciones.

Peso

La fuerza gravitatoria sobre una masa es su peso. Podemos escribirlo en forma de vector, donde $\vec{\mathbf{w}}$ es el peso y m es la masa, ya que

$$\vec{\mathbf{w}} = m\vec{\mathbf{g}}. \qquad 5.8$$

En forma escalar, podemos escribir

$$w = mg. \qquad 5.9$$

Dado que $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$ en la Tierra, el peso de un objeto de 1,00 kg en la Tierra es de 9,80 N:

$$w = mg = (1{,}00\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 9{,}80\ \text{N}.$$

Cuando la fuerza externa neta sobre un objeto es su peso, decimos que está en **caída libre**, es decir, que la única fuerza que actúa sobre el objeto es la gravedad. Sin embargo, cuando los objetos en la Tierra caen hacia abajo, nunca están realmente en caída libre porque siempre hay alguna fuerza de resistencia hacia arriba del aire que actúa sobre el objeto.

La aceleración debida a la gravedad g varía ligeramente sobre la superficie de la Tierra, por lo que el peso de un objeto depende de su ubicación y no es una propiedad intrínseca del objeto. El peso varía drásticamente si salimos de la superficie de la Tierra. En la Luna, por ejemplo, la aceleración debida a la gravedad es solo $1{,}67\ \text{m/s}^2$. Así, una masa de 1,0 kg tiene un peso de 9,8 N en la Tierra y solo unos 1,7 N en la Luna.

La definición más amplia de peso en este sentido es que el peso de un objeto es la fuerza gravitatoria que ejerce sobre este el cuerpo grande más cercano, como la Tierra, la Luna o el Sol. Esta es la definición más común y útil de peso en física. Sin embargo, difiere radicalmente de la definición de peso utilizada por la NASA y los medios de comunicación en relación con los viajes y la exploración espacial. Cuando hablan de "ingravidez" y "microgravedad", se refieren al fenómeno que en física denominamos "caída libre". Utilizamos la definición anterior de peso, la fuerza $\vec{\mathbf{w}}$ debida a la gravedad que actúa sobre un objeto de masa m, y distinguimos cuidadosamente entre caída libre e ingravidez real.

Tenga en cuenta que el peso y la masa son magnitudes físicas diferentes, aunque están estrechamente relacionadas. La masa es una propiedad intrínseca de un objeto: Es una cantidad de materia. La cantidad de materia de un objeto viene determinada por el número de átomos y moléculas de distintos tipos que contiene. Como estos números no varían, en la física newtoniana, la masa no varía; por lo tanto, su respuesta a una fuerza aplicada no varía. En cambio, el peso es la fuerza gravitatoria que actúa sobre un objeto, por lo que sí varía en función de la gravedad. Por ejemplo, una persona más cercana al centro de la Tierra, en una cota baja como Nueva Orleans, pesa ligeramente más que una persona que se encuentra en la cota más alta de Denver, aunque tengan la misma masa.

Es tentador equiparar la masa al peso, porque la mayoría de nuestros ejemplos se presenta en la Tierra, donde el peso de un objeto varía solo un poco, dependiendo de su ubicación. Además, es difícil contar e identificar todos los átomos y moléculas de un objeto, por lo que la masa rara vez se determina de esta manera. Si consideramos situaciones en las que $\vec{\mathbf{g}}$ es una constante en la Tierra, vemos que el peso $\vec{\mathbf{w}}$ es directamente proporcional a la masa m, ya que $\vec{\mathbf{w}} = m\vec{\mathbf{g}}$, es decir, cuanta más masa tiene un objeto, más pesa. Desde el punto de vista operativo, las masas de los objetos se determinan por comparación con el kilogramo estándar, tal y como comentamos en Unidades y medidas. No obstante, al comparar un objeto en la Tierra con uno en la Luna, podemos ver fácilmente una variación en el peso, pero no en la masa. Por ejemplo, en la Tierra, un objeto de 5,0 kg pesa 49 N; en la Luna, donde g es $1{,}67\ \text{m/s}^2$, el objeto pesa 8,4 N. Sin embargo, la masa del objeto sigue siendo de 5,0 kg en la Luna.

EJEMPLO 5.8

Despejar un campo

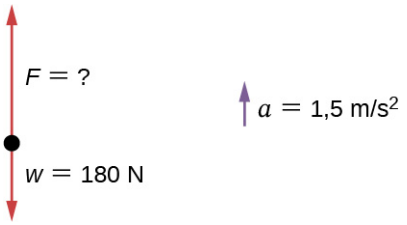
Un agricultor levanta algunas rocas moderadamente pesadas de un campo para plantar cultivos. Alza una piedra que pesa 40,0 libras (unos 180 N). ¿Qué fuerza ejerce si la piedra acelera a una tasa de $1{,}5\ \text{m/s}^2$?

Estrategia

Nos dieron el peso de la piedra, que utilizamos para encontrar la fuerza neta sobre la piedra. Sin embargo, también necesitamos conocer su masa para aplicar la segunda ley de Newton, por lo que debemos aplicar la ecuación del peso, $w = mg$, para determinar la masa.

Solución

No hay fuerzas que actúen en la dirección horizontal, por lo que podemos concentrarnos en las fuerzas verticales, como se muestra en el siguiente diagrama de cuerpo libre. Marcamos la aceleración hacia el lado; técnicamente, no forma parte del diagrama de cuerpo libre, aunque sirve para recordar que el objeto acelera hacia arriba (por lo que la fuerza neta es hacia arriba).



$$\begin{aligned} w &= mg \\ m &= \frac{w}{g} = \frac{180\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 18\ \text{kg} \\ \sum F &= ma \\ F - w &= ma \\ F - 180\ \text{N} &= (18\ \text{kg})(1{,}5\ \text{m/s}^2) \\ F - 180\ \text{N} &= 27\ \text{N} \\ F &= 207\ \text{N} = 210\ \text{N para dos cifras significativas} \end{aligned}$$

Importancia

Para aplicar la segunda ley de Newton como ecuación principal en la resolución de un problema, a veces tenemos que apoyarnos en otras ecuaciones, como la del peso o una de las ecuaciones cinemáticas, para completar la solución.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.6

Para el Ejemplo 5.8, calcule la aceleración cuando la fuerza aplicada por el agricultor es de 230,0 N.

INTERACTIVO

¿Usted puede evitar el campo de rocas y aterrizar con seguridad justo antes de que se le acabe el combustible, como hizo Neil Armstrong en 1969? Esta versión del clásico videojuego (https://openstax.org/l/21lunarlander) simula con precisión el movimiento real del módulo de aterrizaje lunar, con la masa, el empuje, el índice de consumo de combustible y la gravedad lunar correctos. El módulo de aterrizaje lunar real es difícil de controlar.

5.5 Tercera ley de Newton

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Enunciar la tercera ley del movimiento de Newton.
- Identificar las fuerzas de acción y reacción en diferentes situaciones.
- Aplicar la tercera ley de Newton para definir sistemas y resolver problemas de movimiento.

Hasta ahora hemos considerado la fuerza como un empujón o un tirón; sin embargo, si lo piensa, se dará cuenta de que ningún empujón o tirón se produce por sí mismo. Cuando empuja una pared, esta le devuelve el empujón. Esto nos lleva a la **tercera ley de Newton**.

Tercera ley del movimiento de Newton

Cada vez que un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo, el primer cuerpo experimenta una fuerza de magnitud igual y dirección opuesta a la que ejerce. Matemáticamente, si un cuerpo *A* ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el cuerpo *B*, entonces *B* ejerce simultáneamente una fuerza $-\vec{\mathbf{F}}$ en *A*, o en forma de ecuación vectorial,

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{AB}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{BA}}. \quad 5.10$$

La tercera ley de Newton representa cierta simetría en la naturaleza: las fuerzas siempre se producen por parejas, y un cuerpo no puede ejercer una fuerza sobre otro sin experimentar una fuerza él mismo. A veces nos referimos a esta ley de forma imprecisa como "acción y reacción", donde la fuerza ejercida es la acción y la fuerza experimentada como consecuencia es la reacción. La tercera ley de Newton tiene usos prácticos para analizar el origen de las fuerzas y comprender qué fuerzas son externas a un sistema.

Podemos ver fácilmente de qué manera la tercera ley de Newton se pone en práctica al observar cómo se mueven las personas. Considere la posibilidad de que una nadadora se impulse desde el lado de una piscina (Figura 5.16). Se impulsa desde la pared de la piscina con los pies y acelera en la dirección opuesta a la de su empuje. La pared ha ejercido una fuerza igual y opuesta sobre la nadadora. Podría pensarse que dos fuerzas iguales y opuestas se anulan, pero no es así, *porque actúan sobre sistemas diferentes*. En este caso, hay dos sistemas que podríamos investigar: la nadadora y la pared. Si seleccionamos a la nadadora como sistema de interés, como en la figura, entonces $F_{\text{pared en los pies}}$ es una fuerza externa sobre este sistema y afecta a su movimiento. La nadadora se mueve en la dirección de esta fuerza. En cambio, la fuerza $F_{\text{pies en la pared}}$ actúa sobre la pared, no sobre nuestro sistema de interés. Por lo tanto, $F_{\text{pies en la pared}}$ no afecta directamente el movimiento del sistema y no anula $F_{\text{pared en los pies}}$. La nadadora empuja en la dirección opuesta a la que desea moverse. La reacción a su empujón va, pues, en la dirección deseada. En un diagrama de cuerpo libre, como el que se muestra en la Figura 5.16, nunca incluimos las dos fuerzas de un par acción y reacción; en este caso, solamente utilizamos $F_{\text{pared en los pies}}$, no $F_{\text{pies en la pared}}$.

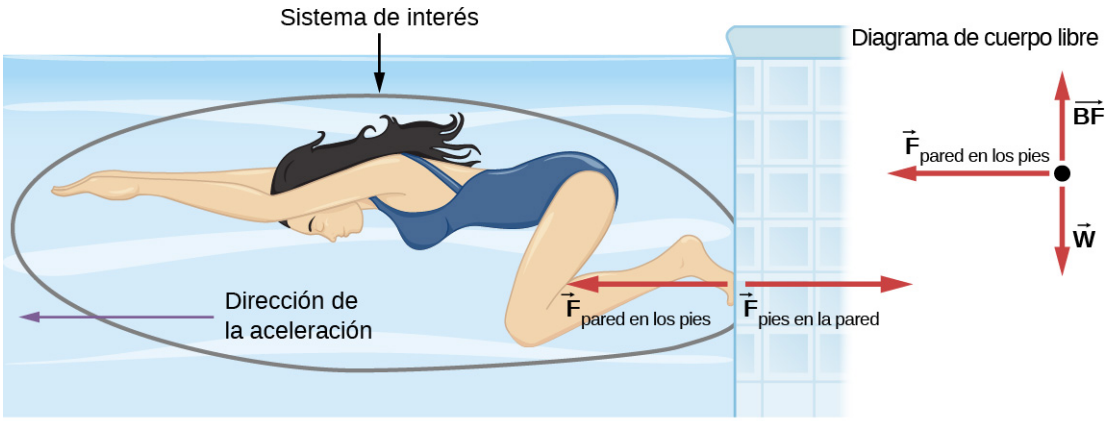


FIGURA 5.16 Cuando la nadadora ejerce una fuerza sobre la pared, acelera en la dirección opuesta; es decir, la fuerza externa neta sobre ella es en la dirección opuesta a $F_{\text{pies en la pared}}$. Esta oposición se produce porque, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la pared ejerce una fuerza $F_{\text{pared en los pies}}$ sobre la nadadora que es de igual magnitud, pero en la dirección opuesta a la que ella ejerce sobre la pared. La línea que rodea a la nadadora indica el sistema de interés. Por lo tanto, el diagrama de cuerpo libre solo muestra $F_{\text{pared en los pies}}$, *w* (la fuerza gravitatoria), y *BF*, que es la fuerza de flotación del agua que soporta el peso de la nadadora. Las fuerzas verticales *w* y *BF* se anulan porque no hay aceleración vertical.

Es fácil encontrar otros ejemplos de la tercera ley de Newton:

- Mientras un profesor se pasea delante de una pizarra, ejerce una fuerza hacia atrás en el suelo. El suelo ejerce una fuerza de reacción hacia delante, sobre el profesor, que le hace acelerar hacia delante.
- Un auto acelera hacia delante porque el suelo empuja hacia delante las ruedas motrices, en reacción a que las ruedas motrices empujan hacia atrás sobre el suelo. Puede ver la evidencia de las ruedas empujando hacia atrás cuando los neumáticos giran en un camino de grava y lanzan las piedras hacia atrás.
- Los cohetes avanzan expulsando gas hacia atrás a gran velocidad. Esto significa que el cohete ejerce una

gran fuerza hacia atrás, sobre el gas en la cámara de combustión del cohete; por lo tanto, el gas ejerce una gran fuerza de reacción hacia adelante, sobre el cohete. Esta fuerza de reacción, que empuja un cuerpo hacia adelante en respuesta a una fuerza hacia atrás, se denomina **empuje**. Es un error común pensar que los cohetes se propulsan empujando el suelo o sobre el aire que hay detrás de ellos. De hecho, funcionan mejor en el vacío, donde pueden expulsar más fácilmente los gases de escape.

- Los helicópteros crean sustentación empujando el aire hacia abajo, por lo que experimentan una fuerza de reacción hacia arriba.
- Los pájaros y los aviones también vuelan ejerciendo una fuerza sobre el aire, en dirección opuesta a la que necesitan. Por ejemplo, las alas de un pájaro fuerzan el aire hacia abajo y hacia atrás para conseguir sustentación y avanzar.
- Un pulpo se propulsa en el agua expulsando agua a través de un embudo de su cuerpo, similar a una moto acuática.
- Cuando una persona hala hacia abajo una cuerda vertical, la cuerda hala hacia arriba a la persona (Figura 5.17).



FIGURA 5.17 Cuando el escalador hala hacia abajo la cuerda, la cuerda hala hacia arriba al escalador (créditos de la izquierda: modificación de la obra de Cristian Bortes).

La tercera ley de Newton tiene dos características importantes. En primer lugar, las fuerzas ejercidas (la acción y la reacción) son siempre de igual magnitud, pero en sentido contrario. En segundo lugar, estas fuerzas actúan sobre diferentes cuerpos o sistemas: la fuerza de *A* actúa sobre *B* y la fuerza de *B* actúa sobre *A*. En otras palabras, las dos fuerzas son fuerzas distintas que no actúan sobre el mismo cuerpo. Por lo tanto, no se anulan entre sí.

Para la situación mostrada en la Figura 5.6, la tercera ley indica la forma en que la silla empuja hacia arriba al niño con fuerza $\vec{\mathbf{C}}$, él empuja hacia abajo, sobre la silla, con fuerza $-\vec{\mathbf{C}}$. Del mismo modo, empuja hacia abajo con fuerzas $-\vec{\mathbf{F}}$ y $-\vec{\mathbf{T}}$ sobre el suelo y sobre la mesa, respectivamente. Finalmente, ya que la Tierra ejerce una fuerza gravitatoria hacia abajo del niño con fuerza $\vec{\mathbf{w}}$, él hala hacia arriba de la Tierra con fuerza $-\vec{\mathbf{w}}$. Si ese estudiante golpeara con rabia la mesa en señal de frustración, aprendería rápidamente la dolorosa lección (lo que se evita si estudiara las leyes de Newton) de que la mesa devuelve los golpes con la misma fuerza.

Una persona que camina o corre aplica instintivamente la tercera ley de Newton. Por ejemplo, el corredor en la Figura 5.18 empuja hacia atrás sobre el suelo para que este le empuje hacia delante.



FIGURA 5.18 El corredor experimenta la tercera ley de Newton. (a) El corredor ejerce una fuerza sobre el suelo. (b) La fuerza de reacción del suelo sobre el corredor le empuja hacia delante (créditos "corredor": modificación de la obra de "Greenwich Photography"/Flickr).

EJEMPLO 5.9

Fuerzas sobre un objeto inmóvil

El paquete en la Figura 5.19 reposa en una báscula. Las fuerzas sobre el paquete son $\vec{\mathbf{S}}$, que se debe a la báscula, y $-\vec{\mathbf{w}}$, que se debe al campo gravitatorio de la Tierra. Las fuerzas de reacción que ejerce el paquete son $-\vec{\mathbf{S}}$ sobre la báscula y $\vec{\mathbf{w}}$ sobre la Tierra. Debido a que el paquete no se acelera, la aplicación de la segunda ley produce

$$\vec{\mathbf{S}} - \vec{\mathbf{w}} = m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}},$$

así que

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{w}}.$$

Por lo tanto, la lectura de la báscula da la magnitud del peso del paquete. Sin embargo, la báscula no mide el peso del paquete, sino la fuerza $-\vec{\mathbf{S}}$ en su superficie. Si el sistema se acelera, $\vec{\mathbf{S}}$ y $-\vec{\mathbf{w}}$ no serían iguales, como se explica en Aplicaciones de las leyes de Newton.

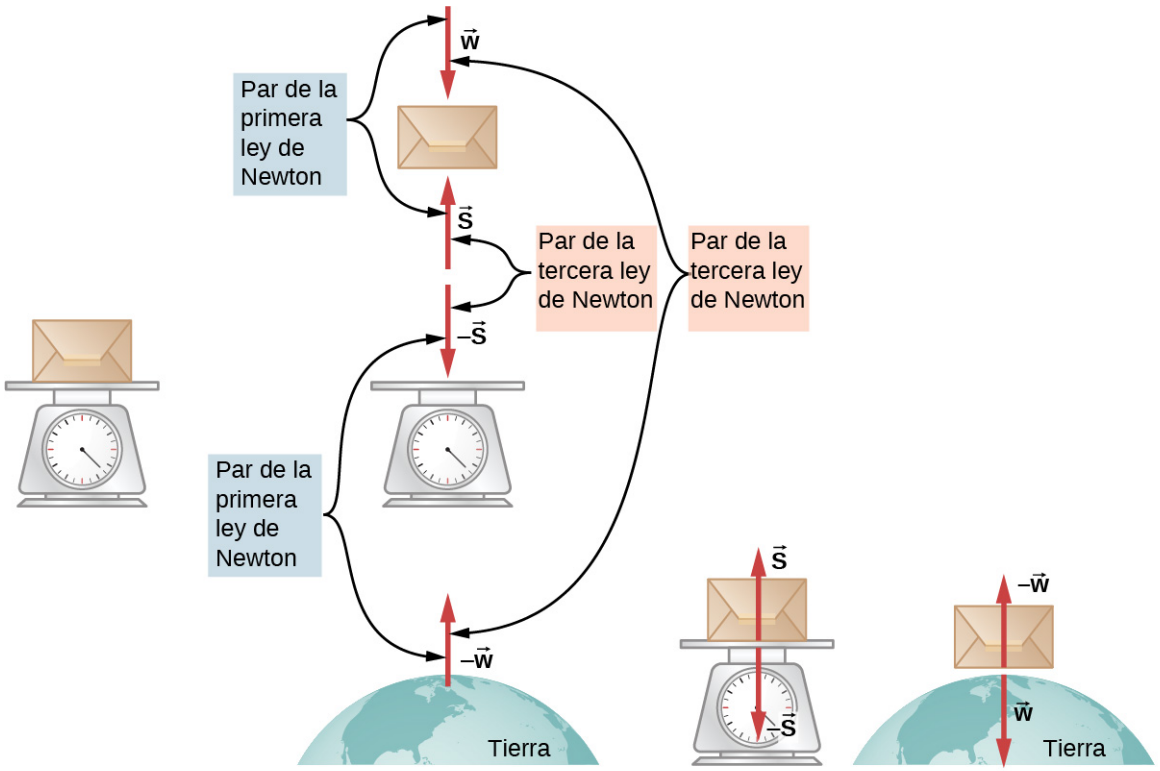


FIGURA 5.19 (a) Las fuerzas sobre un paquete que reposa en una báscula, junto con sus fuerzas de reacción. La fuerza $\vec{w}$ es el peso del paquete (la fuerza debida a la gravedad terrestre) y $\vec{S}$ es la fuerza de la báscula sobre el paquete. (b) El aislamiento del sistema del paquete y la báscula y del sistema del paquete y la Tierra hace que los pares de acción y reacción sean claros.

EJEMPLO 5.10

Ponerse al día: elegir el sistema correcto

Una profesora de física empuja un carro con equipos de demostración hacia una sala de conferencias (Figura 5.20). Su masa es de 65,0 kg, la masa del carro es de 12,0 kg y la masa del equipo es de 7,0 kg. Calcule la aceleración producida cuando la profesora ejerce una fuerza hacia atrás de 150 N sobre el suelo. Todas las fuerzas que se oponen al movimiento, como la fricción en las ruedas del carro y la resistencia del aire, suman 24,0 N.

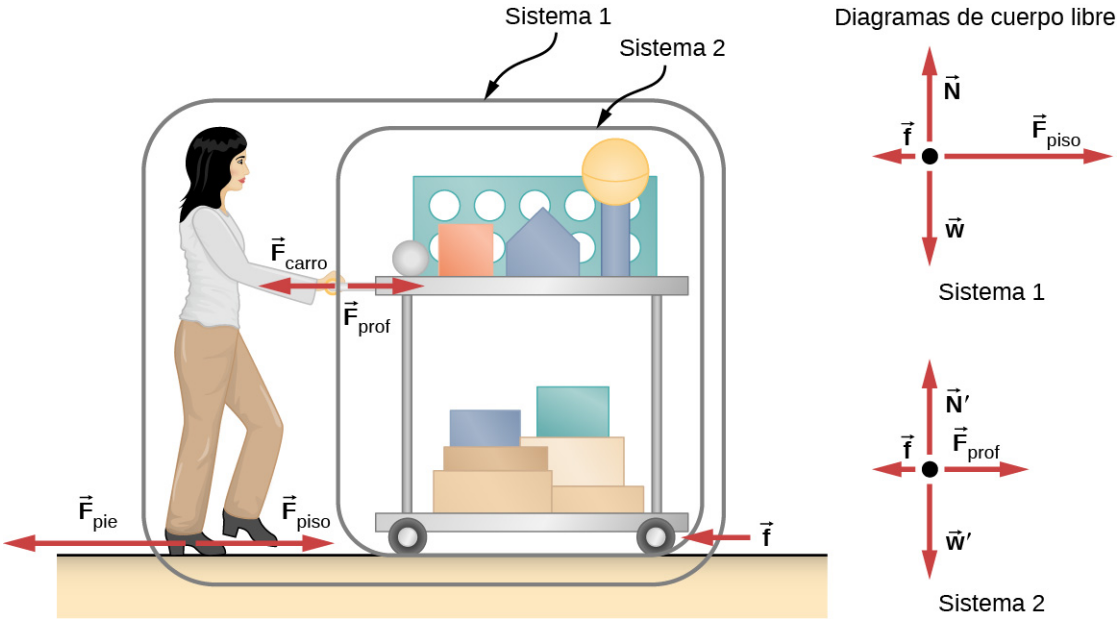


FIGURA 5.20 Una profesora empuja el carro con su equipo de demostración. Las longitudes de las flechas son proporcionales a las magnitudes de las fuerzas (excepto para $\vec{\mathbf{f}}$, porque es demasiado pequeña para dibujarla a escala). El Sistema 1 es apropiado para este ejemplo, porque pide la aceleración de todo el grupo de objetos. Solo $\vec{\mathbf{F}}_{\text{suelo}}$ y $\vec{\mathbf{f}}$ son fuerzas externas que actúan sobre el Sistema 1 a lo largo de la línea de movimiento. Todas las demás fuerzas se anulan o actúan sobre el mundo exterior. Para el siguiente ejemplo se ha elegido el Sistema 2, entonces $\vec{\mathbf{F}}_{\text{prof}}$ es una fuerza externa y entra en la segunda ley de Newton. Los diagramas de cuerpo libre, que sirven de base a la segunda ley de Newton, varían según el sistema elegido.

Estrategia

Dado que aceleran como una unidad, definimos el sistema como la profesora, el carro y el equipo. Este es el Sistema 1 en la Figura 5.20. La profesora empuja hacia atrás con una fuerza F_{pie} de 150 N. Según la tercera ley de Newton, el suelo ejerce una fuerza de reacción hacia delante F_{suelo} de 150 N en el Sistema 1. Como todo el movimiento es horizontal, podemos suponer que no hay fuerza neta en la dirección vertical. Por lo tanto, el problema es unidimensional a lo largo de la dirección horizontal. Como se ha señalado, la fricción f se opone al movimiento y, por ende, está en la dirección opuesta a F_{suelo}. No incluimos las fuerzas F_{prof} o F_{carro} porque son fuerzas internas, y no incluimos F_{pie} porque actúa sobre el suelo, no sobre el sistema. No hay otras fuerzas significativas que actúen sobre el Sistema 1. Si, a partir de toda esta información, se puede encontrar la fuerza externa neta, podemos utilizar la segunda ley de Newton para encontrar la aceleración como se pide. Vea el diagrama de cuerpo libre en la figura.

Solución

La segunda ley de Newton viene dada por

$$a = \frac{F_{\text{neta}}}{m}.$$

La fuerza externa neta sobre el Sistema 1 se deduce de la Figura 5.20 y del análisis anterior, que es

$$F_{\text{neta}} = F_{\text{suelo}} - f = 150\,\text{N} - 24{,}0\,\text{N} = 126\,\text{N}.$$

La masa del Sistema 1 es

$$m = (65{,}0 + 12{,}0 + 7{,}0)\ \text{kg} = 84\,\text{kg}.$$

Estos valores de F_{neta} y m producen una aceleración de

$$a = \frac{F_{\text{neta}}}{m} = \frac{126\ \text{N}}{84\ \text{kg}} = 1{,}5\ \text{m/s}^2.$$

Importancia

Ninguna de las fuerzas entre los componentes del Sistema 1, como por ejemplo entre las manos de la profesora y el carro, contribuyen a la fuerza externa neta porque son internas al Sistema 1. Otra forma de ver esto es que las fuerzas entre los componentes de un sistema se anulan porque son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Por ejemplo, la fuerza ejercida por la profesora sobre el carro tiene como resultado una fuerza igual y opuesta sobre la profesora. En este caso, ambas fuerzas actúan sobre el mismo sistema y, por ende, se anulan. Así, las fuerzas internas (entre los componentes de un sistema) se anulan. La elección del Sistema 1 fue crucial para resolver este problema.

EJEMPLO 5.11

Fuerza sobre el carro: elegir un nuevo sistema

Calcule la fuerza que la profesora ejerce sobre el carro en la Figura 5.20; utilice los datos del ejemplo anterior, si es necesario.

Estrategia

Si definimos el sistema de interés como el carro más el equipo (Sistema 2 en la Figura 5.20), entonces la fuerza externa neta sobre el Sistema 2 es la fuerza que la profesora ejerce sobre el carro menos la fricción. La fuerza que ejerce sobre el carro, F_{prof}, es una fuerza externa que actúa sobre el Sistema 2. F_{prof} era interna al Sistema 1, pero es externa al Sistema 2 y, por ende, entra en la segunda ley de Newton para este sistema.

Solución

La segunda ley de Newton se puede utilizar para encontrar F_{prof}. Empezamos con

$$a = \frac{F_{\text{neta}}}{m}.$$

La magnitud de la fuerza externa neta sobre el Sistema 2 es

$$F_{\text{neta}} = F_{\text{prof}} - f.$$

Resolvemos F_{prof}, la cantidad deseada:

$$F_{\text{prof}} = F_{\text{neta}} + f.$$

El valor de f está dado, por lo que debemos calcular el valor neto F_{neta}. Esto se puede hacer porque se conocen tanto la aceleración como la masa del Sistema 2. Utilizando la segunda ley de Newton, vemos que

$$F_{\text{neta}} = ma,$$

donde la masa del Sistema 2 es de 19,0 kg ($m = 12{,}0\ \text{kg} + 7{,}0\ \text{kg}$) y su aceleración resultó ser $a = 1{,}5\ \text{m/s}^2$ en el ejemplo anterior. Así,

$$F_{\text{neta}} = ma = (19{,}0\ \text{kg})\left(1{,}5\ \text{m/s}^2\right) = 29\ \text{N}.$$

Ahora podemos encontrar la fuerza deseada:

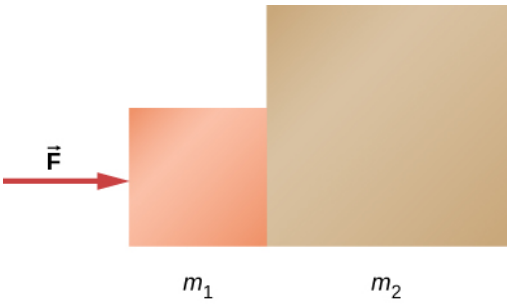
$$F_{\text{prof}} = F_{\text{neta}} + f = 29\ \text{N} + 24{,}0\ \text{N} = 53\ \text{N}.$$

Importancia

Esta fuerza es significativamente menor que la fuerza de 150 N que la profesora ejerció hacia atrás sobre el suelo. No toda esa fuerza de 150 N se transmite al carro; parte de esta acelera a la profesora. La elección de un sistema es un paso analítico importante tanto para resolver problemas como para comprender a fondo la física de la situación (que no son necesariamente las mismas cosas).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.7

Dos bloques están en reposo y en contacto sobre una superficie sin fricción, como se muestra a continuación, con $m_1 = 2{,}0\,\text{kg}$, $m_2 = 6{,}0\,\text{kg}$, y una fuerza aplicada de 24 N. (a) Calcule la aceleración del sistema de bloques. (b) Supongamos que los bloques se separan posteriormente. ¿Qué fuerza dará al segundo bloque, con una masa de 6,0 kg, la misma aceleración que el sistema de bloques?



INTERACTIVO

Vea este video (https://openstax.org/l/21actionreact) con ejemplos de acción y reacción.

INTERACTIVO

Vea este video (https://openstax.org/l/21NewtonsLaws) con ejemplos de las leyes de Newton y de las fuerzas internas y externas.

5.6 Fuerzas comunes

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Definir las fuerzas normales y de tensión.
- Distinguir entre fuerzas reales y ficticias.
- Aplicar las leyes del movimiento de Newton para resolver problemas que impliquen una variedad de fuerzas.

Las fuerzas reciben muchos nombres, como empujón, tirón, empuje y peso. Tradicionalmente, las fuerzas se han agrupado en varias categorías y han recibido nombres relacionados con su origen, su forma de transmisión o sus efectos. En esta sección se analizan varias de estas categorías, junto con algunas aplicaciones interesantes. Más adelante, en este mismo texto, se comentan otros ejemplos de fuerzas.

Un catálogo de fuerzas: normal, tensión y otros ejemplos de fuerzas

El catálogo de fuerzas nos servirá de referencia a la hora de resolver diversos problemas relacionados con la fuerza y el movimiento. Estas fuerzas incluyen la fuerza normal, la tensión, la fricción y la fuerza de resorte.

Fuerza normal

El peso (también llamado fuerza de gravedad) es una fuerza omnipresente que actúa en todo momento y que debe contrarrestarse para evitar que un objeto caiga. Debe soportar el peso de un objeto pesado empujándolo hacia arriba cuando lo mantiene fijo, como se ilustra en la Figura 5.21(a). ¿Cómo soportan los objetos inanimados, como una mesa, el peso de una masa colocada sobre ellos, como se muestra en la Figura 5.21(b)? Cuando se coloca la bolsa de comida para perros sobre la mesa, esta cede ligeramente bajo la carga. Esto se notaría si la carga se colocara sobre una mesa de juego, pero incluso una mesa de roble resistente se deforma cuando se le aplica una fuerza. A menos que un objeto se deforme más allá de su límite, ejercerá una fuerza restauradora muy parecida a la de un resorte deformado (o un trampolín). Cuanto mayor sea la deformación, mayor será la fuerza restauradora. Así, cuando se coloca la carga sobre la mesa, esta cede hasta que la fuerza restauradora es tan grande como el peso de la carga. En este punto, la fuerza externa neta sobre la carga es

cero. Esta es la situación cuando la carga está estacionaria en la mesa. La mesa cede rápidamente y el hundimiento es leve, por lo que no lo notamos. Sin embargo, es semejante al hundimiento de un trampolín cuando se sube a esta.

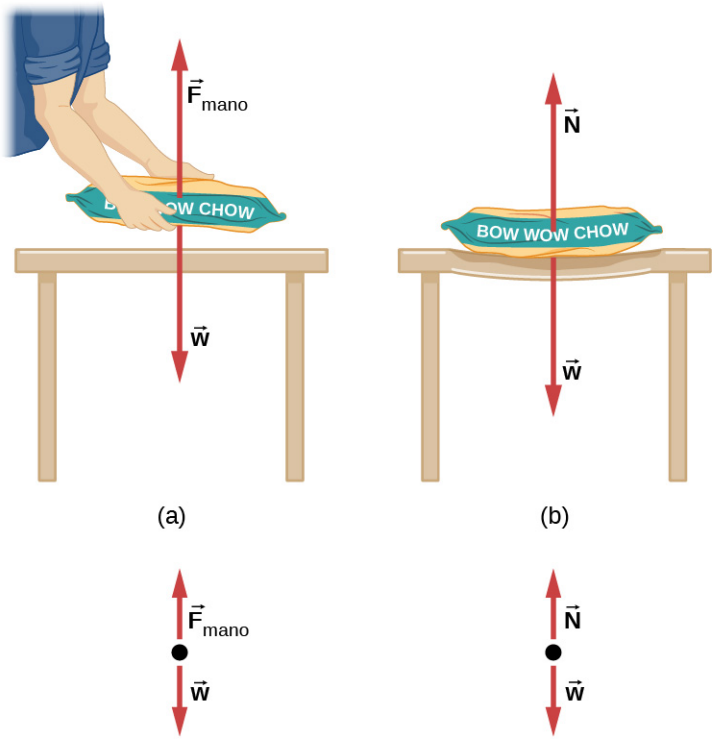


FIGURA 5.21 (a) La persona que sostiene la bolsa de comida para perros debe suministrar una fuerza ascendente $\vec{\mathbf{F}}_{\text{mano}}$ de magnitud igual y dirección contraria al peso del alimento $\vec{\mathbf{w}}$ para que no se caiga al suelo. (b) La mesa de juego cede cuando se coloca la comida para perros sobre ella, como si fuera un trampolín rígido. Las fuerzas restauradoras elásticas en la mesa crecen a medida que se hunde hasta que suministran una fuerza $\vec{\mathbf{N}}$ de magnitud igual y dirección contraria al peso de la carga.

Debemos concluir que cualquier cosa que soporte una carga, sea animada o no, deberá suministrar una fuerza ascendente igual al peso de la carga, como hemos supuesto en algunos de los ejemplos anteriores. Si la fuerza que soporta el peso de un objeto, o una carga, es perpendicular a la superficie de contacto entre la carga y su soporte, se define como **fuerza normal** y aquí viene dada por el símbolo $\vec{\mathbf{N}}$. (No es la unidad de newton para la fuerza, o N.) La palabra *normal* significa perpendicular a una superficie. Esto significa que la fuerza normal experimentada por un objeto que descansa sobre una superficie horizontal puede expresarse en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\vec{\mathbf{N}} = -m\vec{\mathbf{g}}. \tag{5.11}$$

En forma escalar, esto se convierte en

$$N = mg. \tag{5.12}$$

La fuerza normal puede ser menor que el peso del objeto si este se encuentra en una pendiente.

EJEMPLO 5.12

Peso en una inclinación

Considere la esquiadora en la pendiente en la Figura 5.22. Su masa, incluso el equipo, es de 60,0 kg. (a) ¿Cuál es su aceleración si la fricción es despreciable? (b) ¿Cuál es su aceleración si la fricción es de 45,0 N?

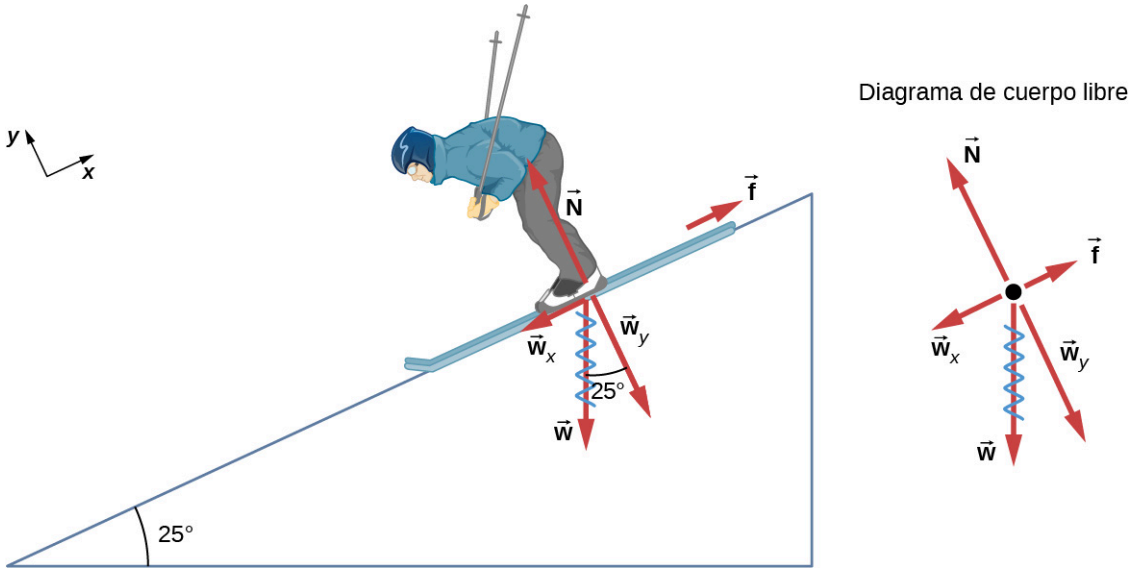


FIGURA 5.22 Dado que la aceleración es paralela a la pendiente y actúa hacia abajo, lo más conveniente es proyectar todas las fuerzas sobre un sistema de coordenadas en el que un eje es paralelo a la pendiente y el otro es perpendicular a esta (ejes mostrados a la izquierda de la esquiadora). $\vec{\mathbf{N}}$ es perpendicular a la pendiente y $\vec{\mathbf{f}}$ es paralela a la pendiente, pero $\vec{\mathbf{w}}$ tiene componentes a lo largo de ambos ejes, es decir: w_y y w_x. Aquí, $\vec{\mathbf{w}}$ tiene una línea ondulada para mostrar que ha sido sustituido por estos componentes. La fuerza $\vec{\mathbf{N}}$ es igual en magnitud a w_y, por lo que no hay aceleración perpendicular a la pendiente, pero *f* es menor que w_x, por lo que se produce una aceleración dirigida hacia abajo (a lo largo del eje paralelo a la pendiente).

Estrategia

Se trata de un problema bidimensional, ya que no todas las fuerzas sobre la esquiadora (el sistema de interés) son paralelas. El enfoque que hemos utilizado en la cinemática bidimensional también funciona bien aquí. Elija un sistema de coordenadas conveniente y proyecte los vectores sobre sus ejes, para crear dos problemas unidimensionales por resolver. El sistema de coordenadas más conveniente para el movimiento en una pendiente es aquel que tiene una coordenada paralela a la pendiente y otra perpendicular. (Los movimientos a lo largo de ejes mutuamente perpendiculares son independientes). Utilizamos la *x* y la *y* para las direcciones paralela y perpendicular, respectivamente. Esta elección de ejes simplifica este tipo de problemas, porque no hay movimiento perpendicular a la pendiente y la aceleración se dirige hacia abajo. En cuanto a las fuerzas, la fricción se dibuja en oposición al movimiento (la fricción siempre se opone al avance) y siempre es paralela a la pendiente, w_x se dibuja en paralelo a la pendiente y dirigida hacia abajo (provoca el movimiento de la esquiadora hacia abajo de la pendiente), y w_y se dibuja como el componente del peso perpendicular a la pendiente. Entonces, podemos considerar los problemas separados de las fuerzas paralelas a la pendiente y las fuerzas perpendiculares a la pendiente.

Solución

La magnitud del componente del peso paralelo a la pendiente es

$$w_x = w \operatorname{sen} 25^\circ = mg \operatorname{sen} 25^\circ,$$

y la magnitud del componente del peso perpendicular a la pendiente es

$$w_y = w \cos 25^\circ = mg \cos 25^\circ.$$

a. Ignore la fricción. Dado que la aceleración es paralela a la pendiente, solo debemos considerar las fuerzas paralelas. (Las fuerzas perpendiculares a la pendiente suman cero, ya que no hay aceleración en esa dirección). Las fuerzas paralelas a la pendiente son el componente del peso de la esquiadora paralelo a la pendiente w_x y la fricción f. Utilizando la segunda ley de Newton, con subíndices para denotar las cantidades paralelas a la pendiente,

$$a_x = \frac{F_{\text{neta } x}}{m}$$

donde $F_{\text{neta } x} = w_x - mg \operatorname{sen} 25°$, asumiendo que no hay fricción para esta parte. Por lo tanto,

$$a_x = \frac{F_{\text{neta } x}}{m} = \frac{mg \operatorname{sen} 25°}{m} = g \operatorname{sen} 25°$$
$$\left(9{,}80 \text{ m/s}^2\right)(0{,}4226) = 4{,}14 \text{ m/s}^2$$

es la aceleración.

b. Incluya la fricción. Tenemos un valor dado para la fricción, y sabemos que su dirección es paralela a la pendiente y que se opone al movimiento entre superficies en contacto. Así que la fuerza externa neta es

$$F_{\text{neta } x} = w_x - f.$$

Al sustituir esto en la segunda ley de Newton, $a_x = F_{\text{neta } x}/m$, da

$$a_x = \frac{F_{\text{neta } x}}{m} = \frac{w_x - f}{m} = \frac{mg \operatorname{sen} 25° - f}{m}.$$

Sustituimos los valores conocidos para obtener

$$a_x = \frac{(60{,}0 \text{ kg})\left(9{,}80 \text{ m/s}^2\right)(0{,}4226) - 45{,}0 \text{ N}}{60{,}0 \text{ kg}}.$$

Esto nos da

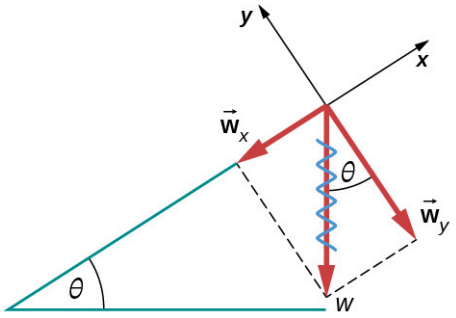
$$a_x = 3{,}39 \text{ m/s}^2,$$

que es la aceleración paralela a la pendiente cuando hay 45,0 N de fricción opuesta.

Importancia

Como la fricción siempre se opone al movimiento entre superficies, la aceleración es menor cuando hay fricción. Es un resultado general que, si la fricción en una pendiente es despreciable, entonces la aceleración hacia abajo de la pendiente es $a = g \operatorname{sen} \theta$, independientemente de la masa. Como se ha comentado anteriormente, todos los objetos caen con la misma aceleración en ausencia de resistencia del aire. Del mismo modo, todos los objetos, independientemente de su masa, se deslizan por una pendiente sin fricción con la misma aceleración (si el ángulo es el mismo).

Cuando un objeto se apoya en una pendiente que forma un ángulo θ con la horizontal, la fuerza de gravedad que actúa sobre el objeto se divide en dos componentes: una fuerza que actúa perpendicularmente al plano, w_y, y una fuerza que actúa paralela al plano, w_x (Figura 5.23). La fuerza normal $\vec{\mathbf{N}}$ suele ser de igual magnitud y de dirección opuesta al componente perpendicular del peso w_y. La fuerza que actúa paralela al plano, w_x, hace que el objeto se acelere por la pendiente.



$$w_x = w\,\text{sen}(\theta) = mg\,\text{sen}(\theta)$$
$$w_y = w\cos(\theta) = mg\cos(\theta)$$

FIGURA 5.23 Un objeto se apoya en una pendiente que forma un ángulo θ con la horizontal.

Tenga cuidado al resolver el peso del objeto en componentes. Si la inclinación es en ángulo θ a la horizontal, entonces las magnitudes de los componentes del peso son

$$w_x = w\,\text{sen}\,\theta = mg\,\text{sen}\,\theta$$

y

$$w_y = w\cos\theta = mg\cos\theta.$$

Utilizamos la segunda ecuación para escribir la fuerza normal que experimenta un objeto en reposo sobre un plano inclinado:

$$N = mg\cos\theta. \qquad \textbf{5.13}$$

En lugar de memorizar estas ecuaciones, es útil poder determinarlas a partir de la razón. Para ello, dibujamos el ángulo recto formado por los tres vectores de peso. El ángulo θ de la inclinación es igual al ángulo formado entre w y w_y. Conociendo esta propiedad, podemos utilizar la trigonometría para determinar la magnitud de los componentes del peso:

$$\cos\theta = \frac{w_y}{w}, \quad w_y = w\cos\theta = mg\cos\theta$$
$$\text{sen}\,\theta = \frac{w_x}{w}, \quad w_x = w\,\text{sen}\,\theta = mg\,\text{sen}\,\theta.$$

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.8

Una fuerza de 1.150 N actúa en paralelo a una rampa para empujar una caja fuerte de armas de 250 kg hacia una furgoneta en movimiento. La rampa no tiene fricción y está inclinada a 17°. (a) ¿Cuál es la aceleración de la caja fuerte al subir la rampa? (b) Si consideramos la fricción en este problema, con una fuerza de fricción de 120 N, ¿cuál es la aceleración de la caja fuerte?

Tensión

La **tensión** es una fuerza a lo largo de un medio; en particular, es una fuerza de tracción que actúa a lo largo de un conector flexible estirado, como una cuerda o un cable. La palabra "tensión" proviene de la palabra latina que significa "estirar". No por casualidad, las cuerdas flexibles que llevan las fuerzas musculares a otras partes del cuerpo se llaman *tendones*.

Cualquier conector flexible, como un cordel, una cuerda, una cadena, un alambre o un cable, solo puede ejercer un tirón paralelo a su longitud; por lo tanto, una fuerza transportada por un conector flexible es una tensión con una dirección paralela al conector. La tensión es un tirón en un conector. Considere la frase: "No puede empujar una cuerda". En cambio, la fuerza de tensión hala hacia afuera a lo largo de los dos extremos de una cuerda.

Considere a una persona que sostiene una masa en una cuerda, como se muestra en la Figura 5.24. Si la masa de 5,00 kg de la figura está inmóvil, su aceleración es cero y la fuerza neta es cero. Las únicas fuerzas externas

que actúan sobre la masa son su peso y la tensión suministrada por la cuerda. Por lo tanto,

$$F_{\text{neta}} = T - w = 0,$$

donde T y w son las magnitudes de la tensión y el peso, respectivamente, y sus signos indican la dirección, y es positivo hacia arriba. Como hemos demostrado con la segunda ley de Newton, la tensión es igual al peso de la masa apoyada:

$$T = w = mg. \tag{5.14}$$

Por lo tanto, para una masa de 5,00 kg (descartando la masa de la cuerda), vemos que

$$T = mg = (5{,}00\ \text{kg})\left(9{,}80\ \text{m/s}^2\right) = 49{,}0\ \text{N}.$$

Si cortamos la cuerda e introducimos un resorte, este se extendería en una longitud correspondiente a una fuerza de 49,0 N, lo cual proporciona una observación y medida directa de la fuerza de tensión en la cuerda.

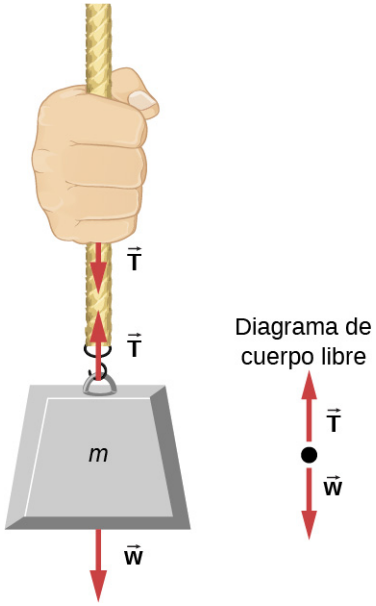


FIGURA 5.24 Cuando un conector perfectamente flexible (que no requiere fuerza para doblarlo) como esta cuerda transmite una fuerza $\vec{\mathbf{T}}$, esa fuerza deberá ser paralela a la longitud de la cuerda, como se muestra. Por la tercera ley de Newton, la cuerda hala con igual fuerza, pero en direcciones opuestas de la mano y de la masa apoyada (descartando el peso de la cuerda). La cuerda es el medio que transporta las fuerzas iguales y opuestas entre los dos objetos. La tensión en cualquier parte de la cuerda entre la mano y la masa es igual. Una vez que haya determinado la tensión en un lugar, habrá determinado la tensión en todos los lugares a lo largo de la cuerda.

Los conectores flexibles se utilizan a menudo para transmitir fuerzas en las esquinas, como en un sistema de tracción hospitalaria, un tendón o un cable de freno de bicicleta. Si no hay fricción, la transmisión de la tensión no disminuye, solamente cambia de dirección, y siempre es paralela al conector flexible, como se muestra en la Figura 5.25.

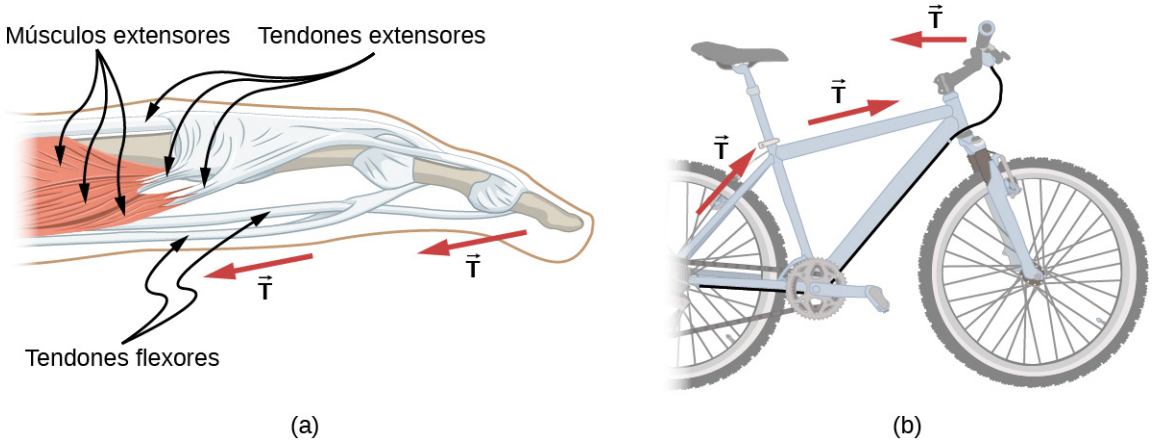


FIGURA 5.25 (a) Los tendones del dedo transportan la fuerza *T* desde los músculos a otras partes del dedo; normalmente cambia la dirección de la fuerza, pero no su magnitud (los tendones están relativamente sin fricción). (b) El cable de freno de una bicicleta transporta la tensión *T* desde la palanca de freno del manillar hasta el mecanismo de freno. Una vez más, cambia la dirección, pero no la magnitud de *T*.

EJEMPLO 5.13

¿Qué es la tensión en la cuerda floja?

Calcule la tensión en el alambre que sostiene al equilibrista de 70,0 kg que se muestra en la Figura 5.26.

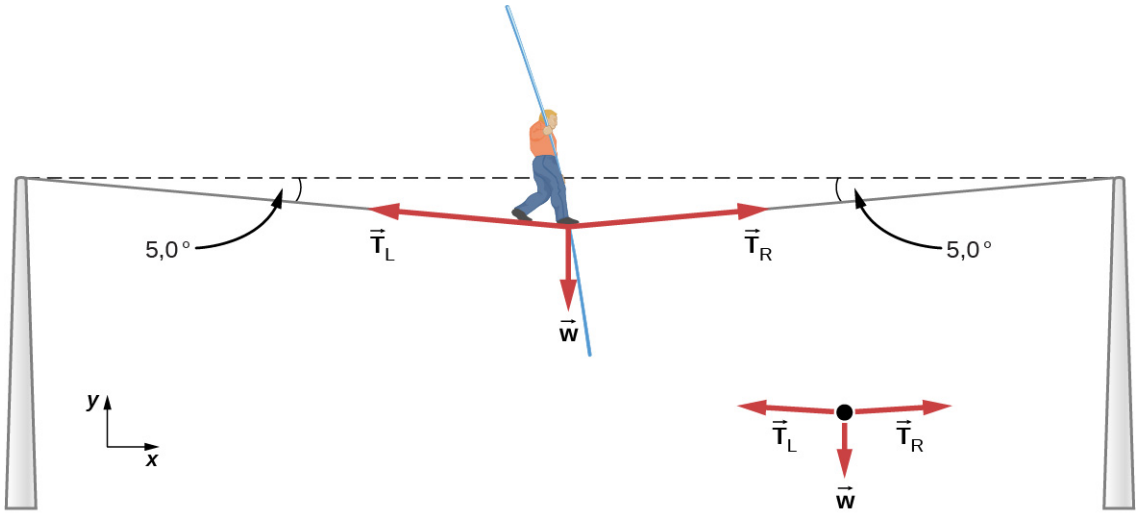


FIGURA 5.26 El peso de un equilibrista hace que el alambre se hunda en $5{,}0°$. El sistema de interés es el punto del alambre en el que se encuentra el equilibrista.

Estrategia

Como puede ver en la Figura 5.26, el alambre se dobla bajo el peso de la persona. Por lo tanto, la tensión a ambos lados de la persona tiene un componente ascendente que soporta su peso. Como es habitual, las fuerzas son vectores representados pictóricamente por flechas que tienen la misma dirección que las fuerzas y longitudes proporcionales a sus magnitudes. El sistema es el equilibrista, y las únicas fuerzas externas que actúan sobre él son su peso $\vec{\mathbf{w}}$ y las dos tensiones $\vec{\mathbf{T}}_L$ (tensión izquierda) y $\vec{\mathbf{T}}_R$ (tensión derecha). Es razonable descartar el peso del alambre. La fuerza externa neta es cero, porque el sistema es estático. Podemos utilizar la trigonometría para encontrar las tensiones. Una conclusión es posible desde el principio: podemos ver en la Figura 5.26(b) que las magnitudes de las tensiones T_L y T_R deben ser iguales. Lo sabemos porque no hay aceleración horizontal en la cuerda y las únicas fuerzas que actúan a la izquierda y a la derecha son T_L y T_R. Por lo tanto, la magnitud de esos componentes horizontales de las fuerzas deberá ser igual para que se anulen

mutuamente.

Cuando tenemos problemas vectoriales bidimensionales en los que no hay dos vectores paralelos, el método más sencillo de solución es elegir un sistema de coordenadas conveniente y proyectar los vectores sobre sus ejes. En este caso, el mejor sistema de coordenadas tiene un eje horizontal (x) y un eje vertical (y).

Solución

En primer lugar, tenemos que resolver los vectores de tensión en sus componentes horizontal y vertical. Es útil observar un nuevo diagrama de cuerpo libre que muestre todos los componentes horizontales y verticales de cada fuerza que actúa sobre el sistema (Figura 5.27).

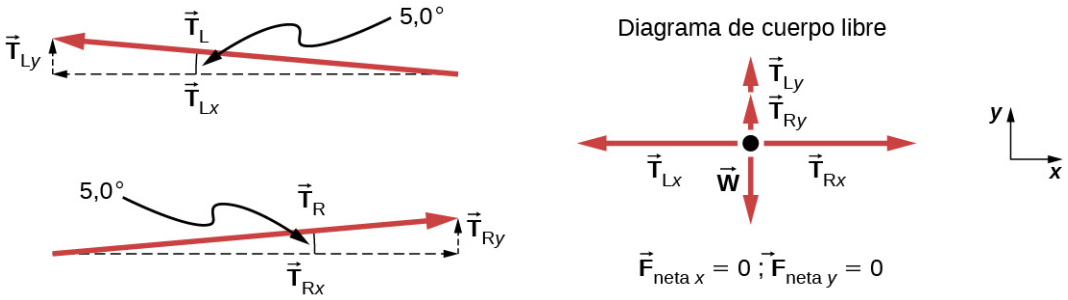


FIGURA 5.27 Cuando los vectores se proyectan sobre los ejes vertical y horizontal, sus componentes a lo largo de estos ejes deben sumar cero, ya que el equilibrista está inmóvil. El pequeño ángulo hace que T sea mucho mayor que w.

Consideremos los componentes horizontales de las fuerzas (denotadas con un subíndice x):

$$F_{\text{neta } x} = T_{\text{R}x} - T_{\text{L}x}.$$

La fuerza horizontal externa neta $F_{\text{neta } x} = 0$, ya que la persona está inmóvil. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_{\text{neta } x} &= 0 = T_{\text{R}x} - T_{\text{L}x} \\ T_{\text{L}x} &= T_{\text{R}x}. \end{aligned}$$

Ahora observe la Figura 5.27. Puede utilizar la trigonometría para determinar la magnitud de T_{L} y T_{R}:

$$\begin{aligned} \cos 5{,}0^\circ &= \frac{T_{\text{L}x}}{T_{\text{L}}}, \quad T_{\text{L}x} = T_{\text{L}} \cos 5{,}0^\circ \\ \cos 5{,}0^\circ &= \frac{T_{\text{R}x}}{T_{\text{R}}}, \quad T_{\text{R}x} = T_{\text{R}} \cos 5{,}0^\circ. \end{aligned}$$

Igualando $T_{\text{L}x}$ y $T_{\text{R}x}$:

$$T_{\text{L}} \cos 5{,}0^\circ = T_{\text{R}} \cos 5{,}0^\circ.$$

Por lo tanto,

$$T_{\text{L}} = T_{\text{R}} = T,$$

como se predijo. Ahora, considerando los componentes verticales (denotadas por un subíndice y), podemos resolver T. De nuevo, dado que la persona está inmóvil, la segunda ley de Newton implica que $F_{\text{neta } y} = 0$. Por lo tanto, como se ilustra en el diagrama de cuerpo libre,

$$F_{\text{neta } y} = T_{\text{L}y} + T_{\text{R}y} - w = 0.$$

Podemos utilizar la trigonometría para determinar las relaciones entre $T_{\text{L}y}$, $T_{\text{R}y}$, y T. Como determinamos a partir del análisis en la dirección horizontal, $T_{\text{L}} = T_{\text{R}} = T$:

$$\begin{aligned}\text{sen } 5{,}0^\circ &= \frac{T_{\text{L}y}}{T_{\text{L}}},\ T_{\text{L}y} = T_{\text{L}} \text{sen } 5{,}0^\circ = T \text{ sen } 5{,}0^\circ \\ \text{sen } 5{,}0^\circ &= \frac{T_{\text{R}y}}{T_{\text{R}}},\ T_{\text{R}y} = T_{\text{R}} \text{sen } 5{,}0^\circ = T \text{ sen } 5{,}0^\circ.\end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir los valores por T_{Ly} y T_{Ry}, en la ecuación de la fuerza neta en la dirección vertical:

$$\begin{aligned}F_{\text{neta } y} &= T_{\text{L}y} + T_{\text{R}y} - w = 0 \\ F_{\text{neta } y} &= T \text{ sen } 5{,}0^\circ + T \text{ sen } 5{,}0^\circ - w = 0 \\ 2T \text{ sen } 5{,}0^\circ - w &= 0 \\ 2T \text{ sen } 5{,}0^\circ &= w\end{aligned}$$

y

$$T = \frac{w}{2 \text{ sen } 5{,}0^\circ} = \frac{mg}{2 \text{ sen } 5{,}0^\circ},$$

así que

$$T = \frac{(70{,}0 \text{ kg})\left(9{,}80 \text{ m/s}^2\right)}{2\,(0{,}0872)},$$

y la tensión es

$$T = 3.930 \text{ N}.$$

Importancia

La tensión vertical en el alambre actúa como una fuerza que soporta el peso del equilibrista. La tensión es casi seis veces superior al peso de 686 N del equilibrista. Como el alambre es casi horizontal, el componente vertical de su tensión es apenas una fracción de la tensión en el alambre. Los grandes componentes horizontales están en direcciones opuestas y se anulan, por lo que la mayor parte de la tensión del alambre no se utiliza para soportar el peso del equilibrista.

Si queremos crear una gran tensión, basta con ejercer una fuerza perpendicular a un conector flexible tenso, como se ilustra en la Figura 5.26. Como vimos en el Ejemplo 5.13, el peso del equilibrista actúa como una fuerza perpendicular a la cuerda. Hemos visto que la tensión de la cuerda está relacionada con el peso del equilibrista de la siguiente manera:

$$T = \frac{w}{2 \text{ sen } \theta}.$$

Podemos extender esta expresión para describir la tensión T creada cuando una fuerza perpendicular ($F_\perp$) se ejerce en el centro de un conector flexible:

$$T = \frac{F_\perp}{2 \text{ sen } \theta}.$$

El ángulo entre la horizontal y el conector doblado está representado por θ. En este caso, T se agranda a medida que θ se acerca a cero. Incluso el peso relativamente pequeño de cualquier conector flexible hará que se hunda, ya que se produciría una tensión infinita si estuviera horizontal (es decir, $\theta = 0$ y sen de $\theta = 0$). Por ejemplo, la Figura 5.28 muestra una situación en la que queremos sacar un auto del barro cuando no hay grúa disponible. Cada vez que el auto avanza, la cadena se tensa para mantenerla lo más recta posible. La tensión en la cadena viene dada por $T = \frac{F_\perp}{2 \text{ sen } \theta}$, y dado que θ es pequeño, T es grande. Esta situación es análoga a la del equilibrista, salvo que las tensiones que se muestran aquí son las que se transmiten al auto y al árbol, en lugar de las que actúan en el punto donde $F_\perp$ se aplica.

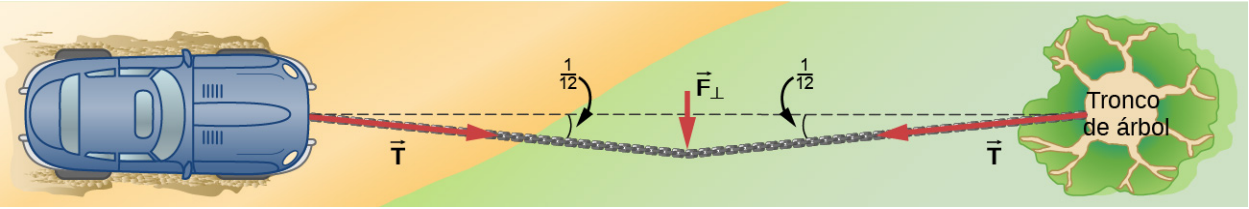


FIGURA 5.28 Podemos crear una gran tensión en la cadena, y posiblemente un gran desastre, al empujarla perpendicularmente a su longitud, como se muestra.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.9

El extremo de una cuerda de 3,0 m está atado a un árbol; el otro extremo está atado a un auto atascado en el barro. El conductor hala lateralmente del punto medio de la cuerda, para desplazarla una distancia de 0,25 m. Si ejerce una fuerza de 200,0 N en estas condiciones, determine la fuerza ejercida sobre el auto.

En Aplicaciones de las leyes de Newton, ampliamos el debate sobre la tensión en un cable para incluir casos en los que los ángulos indicados no son iguales.

Fricción

La fricción es una fuerza de resistencia que se opone al movimiento o a su tendencia. Imagine un objeto en reposo sobre una superficie horizontal. La fuerza neta que actúa sobre el objeto debe ser cero, lo que lleva a la igualdad del peso y la fuerza normal, que actúan en direcciones opuestas. Si la superficie está inclinada, la fuerza normal equilibra el componente del peso perpendicular a la superficie. Si el objeto no se desliza hacia abajo, el componente del peso paralelo al plano inclinado se equilibra por la fricción. La fricción se trata con más detalle en el siguiente capítulo.

Fuerza del resorte

Un resorte es un medio especial con una estructura atómica específica que tiene la capacidad de recuperar su forma, si se deforma. Para recuperar su forma, el resorte ejerce una fuerza restauradora proporcional y en el sentido contrario al que se estira o comprime. Este es el enunciado de una ley conocida como ley de Hooke, que tiene la forma matemática

$$\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{x}}.$$

La constante de proporcionalidad k es una medida de la rigidez del resorte. La línea de acción de esta fuerza es paralela al eje del resorte, y el sentido de la fuerza está en la dirección opuesta al vector de desplazamiento (Figura 5.29). El desplazamiento deberá medirse desde la posición de relajación $x = 0$ cuando el resorte está relajado.

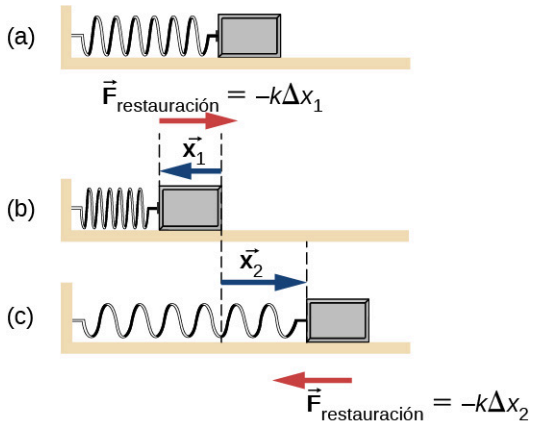


FIGURA 5.29 Un resorte ejerce su fuerza de forma proporcional a un desplazamiento, tanto si está comprimido como estirado. (a) El resorte está en posición relajada y no ejerce ninguna fuerza sobre el bloque. (b) El resorte está comprimido por el desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{x}}_1$ del objeto y ejerce una fuerza restauradora $-k\Delta\vec{\mathbf{x}}_1$. (c) El resorte está

estirado por el desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{x}}_2$ del objeto y ejerce una fuerza restauradora $-k\Delta\vec{\mathbf{x}}_2$.

Fuerzas reales y marcos inerciales

Hay otra distinción entre las fuerzas: algunas fuerzas son reales, mientras que otras no lo son. Las *fuerzas reales* tienen algún origen físico, como la fuerza gravitatoria. Por el contrario, las *fuerzas ficticias* surgen simplemente porque un observador se encuentra en un marco de referencia acelerado o no inercial, como uno rotativo (como un carrusel) o que experimenta una aceleración lineal (como un auto que frena). Por ejemplo, si un satélite se dirige hacia el norte sobre el hemisferio norte de la Tierra, a un observador en la Tierra le parecerá que experimenta una fuerza hacia el oeste que no tiene origen físico. En su lugar, la Tierra rota hacia el este y se mueve hacia el este bajo el satélite. En el marco de la Tierra, esto parece una fuerza hacia el oeste sobre el satélite, o puede interpretarse como una violación de la primera ley de Newton (la ley de la inercia). Podemos identificar una fuerza ficticia con la pregunta: "¿Cuál es la fuerza de reacción?" Si no podemos nombrar la fuerza de reacción, entonces la fuerza que estamos considerando es ficticia. En el ejemplo del satélite, la fuerza de reacción tendría que ser una fuerza hacia el este de la Tierra. Recordemos que un marco de referencia inercial es aquel en el que todas las fuerzas son reales y, por ende, aquel en el que las leyes de Newton tienen las formas simples dadas en este capítulo.

La rotación planetaria es lo suficientemente lenta como para que la Tierra sea casi un marco inercial. Normalmente debe realizar experimentos precisos para observar las fuerzas ficticias y las ligeras desviaciones de las leyes de Newton, como el efecto que acabamos de describir. A gran escala, como en el caso de la rotación de los sistemas meteorológicos y las corrientes oceánicas, los efectos pueden observarse fácilmente (Figura 5.30).



FIGURA 5.30 Se muestra al huracán Fran que se dirigió hacia la costa sureste de Estados Unidos en septiembre de 1996. Observe la característica forma de "ojo" del huracán. Esto es resultado del efecto Coriolis, que es la desviación de los objetos (en este caso, el aire), cuando se consideran en un marco de referencia rotativo, como el giro de la Tierra. Este huracán muestra una rotación en sentido contrario de las agujas del reloj, porque se trata de una tormenta de baja presión.

El factor crucial para determinar si un marco de referencia es inercial es si acelera o rota con respecto a un marco inercial conocido. A menos que se indique lo contrario, todos los fenómenos que se tratan en este texto están en marcos inerciales.

Las fuerzas analizadas en esta sección son fuerzas reales, aunque no son las únicas. La sustentación y el empuje, por ejemplo, son fuerzas reales más especializadas. En la larga lista de fuerzas, ¿hay algunas más básicas que otras? ¿Son algunas manifestaciones diferentes de la misma fuerza subyacente? La respuesta a ambas preguntas es afirmativa, como se verá en el tratamiento de la física moderna más adelante en el texto.

INTERACTIVO

Explore las fuerzas y el movimiento en esta simulación interactiva (https://openstax.org/l/21ramp) mientras empuja objetos domésticos hacia arriba y hacia abajo en una rampa. Baje y suba la rampa para ver cómo afecta el ángulo de inclinación a las fuerzas paralelas. Los gráficos muestran las fuerzas, la energía y el trabajo.

INTERACTIVO

Estire y comprima resortes en esta actividad (https://openstax.org/l/21hookeslaw) para explorar las relaciones entre la fuerza, la constante del resorte y el desplazamiento. Investigue qué ocurre cuando se conectan dos resortes en serie y en paralelo.

5.7 Dibujar diagramas de cuerpo libre

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar las reglas para dibujar un diagrama de cuerpo libre.
- Construir diagramas de cuerpo libre para diferentes situaciones.

El primer paso en la descripción y el análisis de la mayoría de los fenómenos de la física consiste en dibujar cuidadosamente un diagrama de cuerpo libre. En los ejemplos de este capítulo se han utilizado diagramas de cuerpo libre. Recuerde que un diagrama de cuerpo libre solo debe incluir las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo de interés. Una vez que hemos dibujado un diagrama de cuerpo libre preciso, podemos aplicar la primera ley de Newton si el cuerpo está en equilibrio (fuerzas equilibradas; es decir, $F_{\text{neta}} = 0$) o la segunda ley de Newton si el cuerpo está acelerando (fuerza desequilibrada; es decir, $F_{\text{neta}} \neq 0$).

En Fuerzas, dimos una breve estrategia de resolución de problemas para ayudarle a entender los diagramas de cuerpo libre. Aquí añadimos algunos detalles a la estrategia que le ayudarán a construir estos diagramas.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Construcción de diagramas de cuerpo libre

Observe las siguientes reglas cuando construya un diagrama de cuerpo libre:

1. Dibuje el objeto en cuestión; no es necesario que sea artístico. Al principio, puede dibujar un círculo alrededor del objeto de interés para asegurarse de que se centra en marcar las fuerzas que actúan sobre el objeto. Si está tratando el objeto como una partícula (sin tamaño ni forma y sin rotación), represente el objeto como un punto. Solemos situar este punto en el origen de un sistema de coordenadas *xy*.
2. Incluya todas las fuerzas que actúan sobre el objeto, represente estas fuerzas como vectores. Considere los tipos de fuerzas descritas en Fuerzas comunes, fuerza normal, fricción, tensión y fuerza de resorte, así como el peso y la fuerza aplicada. No incluya la fuerza neta sobre el objeto. A excepción de la gravedad, todas las fuerzas de las que hemos hablado requieren un contacto directo con el objeto. Sin embargo, no deben incluirse las fuerzas que el objeto ejerce sobre su entorno. Nunca incluimos las dos fuerzas de un par de acción y reacción.
3. Convierta el diagrama de cuerpo libre en un diagrama más detallado que muestre los componentes *x* y *y* de una fuerza dada (esto sirve cuando se resuelve un problema utilizando la primera o segunda ley de Newton). En este caso, coloque una línea ondulada a través del vector original para mostrar que ya no está en juego, sino que ha sido reemplazado por sus componentes *x* y *y*.
4. Si hay dos o más objetos, o cuerpos, en el problema, dibuje un diagrama de cuerpo libre separado para cada objeto.

Nota: Si hay aceleración, no la incluimos directamente en el diagrama de cuerpo libre; sin embargo, valdría la pena indicar la aceleración fuera del diagrama de cuerpo libre. Puede marcarla con un color diferente para indicar que está separada del diagrama de cuerpo libre.

Apliquemos la estrategia de resolución de problemas al dibujar un diagrama de cuerpo libre para un trineo. En la Figura 5.31(a), un trineo es halado por la fuerza **P** con un ángulo de 30°. En la parte (b), mostramos un diagrama de cuerpo libre para esta situación, tal como se describe en los pasos 1 y 2 de la estrategia de resolución de problemas. En la parte (c), mostramos todas las fuerzas en términos de sus componentes *x* y *y*, de acuerdo con el paso 3.

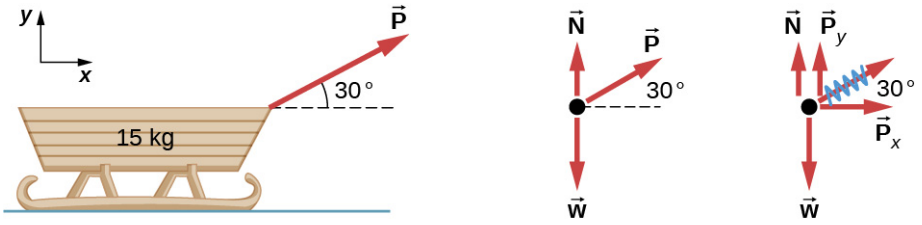


FIGURA 5.31 (a) Un trineo en movimiento se muestra como (b) un diagrama de cuerpo libre y (c) un diagrama de cuerpo libre con componentes de fuerza.

EJEMPLO 5.14

Dos bloques en un plano inclinado

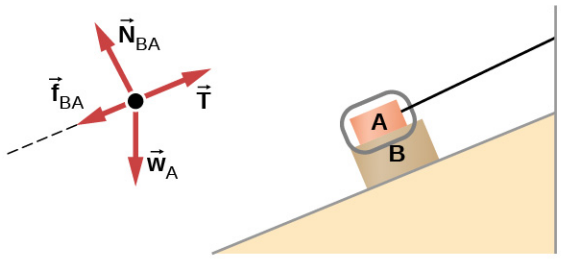
Construya el diagrama de cuerpo libre para el objeto A y el objeto B en la Figura 5.32.

Estrategia

Seguimos los cuatro pasos indicados en la estrategia de resolución de problemas.

Solución

Comenzamos creando un diagrama para el primer objeto de interés. En la Figura 5.32(a), el objeto A está aislado (encerrado por un círculo) y representado por un punto.



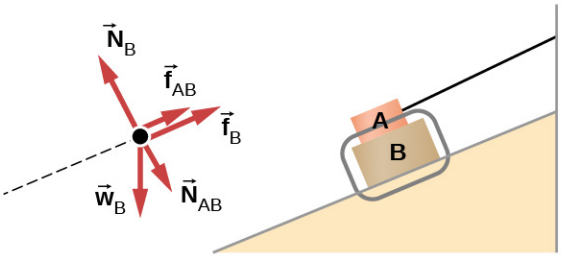
$\vec{w}_A$ = peso del bloque A

$\vec{T}$ = tensión

$\vec{N}_{BA}$ = fuerza normal ejercida por B sobre A

$\vec{f}_{BA}$ = fuerza de fricción ejercida por B sobre A

(a)



$\vec{w}_B$ = peso del bloque B

$\vec{N}_{AB}$ = fuerza normal ejercida por A sobre B

$\vec{N}_B$ = fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre B

$\vec{f}_{AB}$ = fuerza de fricción ejercida por A sobre B

$\vec{f}_B$ = fuerza de fricción ejercida por el plano inclinado sobre B

(b)

FIGURA 5.32 (a) El diagrama de cuerpo libre para el objeto aislado A. (b) El diagrama de cuerpo libre para el objeto aislado B. Comparando los dos dibujos, vemos que la fricción actúa en sentido contrario en las dos figuras. Como el objeto A experimenta una fuerza que tiende a halar de este hacia la derecha, la fricción debe actuar hacia la izquierda. Debido a que el objeto B experimenta un componente de su peso que lo hala hacia la izquierda, hacia

abajo de la pendiente, la fuerza de fricción debe oponerse y actuar hacia arriba de la rampa. La fricción siempre actúa en sentido contrario a la dirección del movimiento.

Ahora incluimos cualquier fuerza que actúe sobre el cuerpo. Aquí no hay presente ninguna fuerza aplicada. El peso del objeto actúa como una fuerza que apunta verticalmente hacia abajo, y la presencia de la cuerda indica una fuerza de tensión que apunta hacia fuera del objeto. El objeto A tiene una interfaz y, por tanto, experimenta una fuerza normal, dirigida hacia fuera de la interfaz. La fuente de esta fuerza es el objeto B, y esta fuerza normal está marcada en consecuencia. Como el objeto B tiene tendencia a deslizarse hacia abajo, el objeto A tiene tendencia a deslizarse hacia arriba con respecto a la interfaz, por lo que la fricción f_{BA} se dirige hacia abajo en paralelo al plano inclinado.

Como se indica en el paso 4 de la estrategia de resolución de problemas, a continuación construimos el diagrama de cuerpo libre en la Figura 5.32(b) utilizando el mismo enfoque. El objeto B experimenta dos fuerzas normales y dos fuerzas de fricción debido a la presencia de dos superficies de contacto. La interfaz con el plano inclinado ejerce fuerzas externas de N_{B} y f_{B}, y la interfaz con el objeto B ejerce la fuerza normal N_{AB} y la fricción f_{AB}; N_{AB} está dirigida lejos del objeto B, y f_{AB} se opone a la tendencia del movimiento relativo del objeto B con respecto al objeto A.

Importancia

El objeto en cuestión en cada parte de este problema estaba encerrado por un círculo gris. Cuando esté aprendiendo a dibujar diagramas de cuerpo libre, le resultará útil encerrar en un círculo el objeto antes de decidir qué fuerzas actúan sobre ese objeto en particular. Esto centra su atención, ya que se abstiene de considerar fuerzas que no estén actuando en el cuerpo.

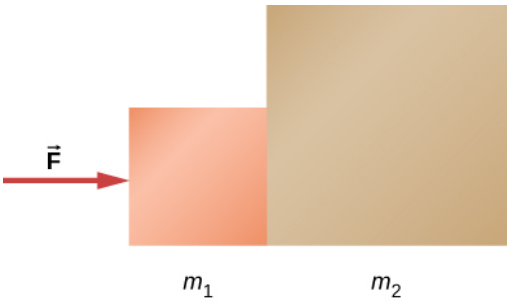
EJEMPLO 5.15

Dos bloques en contacto

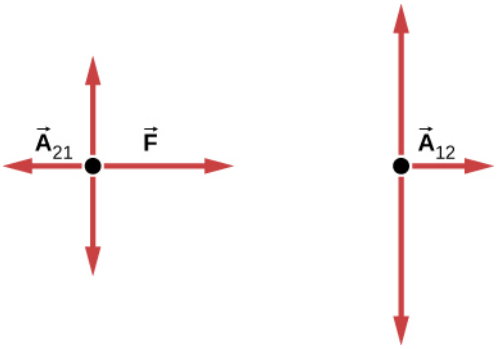
Se aplica una fuerza a dos bloques en contacto, como se muestra.

Estrategia

Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. Tenga en cuenta la tercera ley de Newton en la interfaz donde se tocan los dos bloques.



Solución



Importancia

$\vec{A}_{21}$ es la fuerza de acción del bloque 2 sobre el bloque 1. $\vec{A}_{12}$ es la fuerza de reacción del bloque 1 sobre el bloque 2. Utilizamos estos diagramas de cuerpo libre en Aplicaciones de las leyes de Newton.

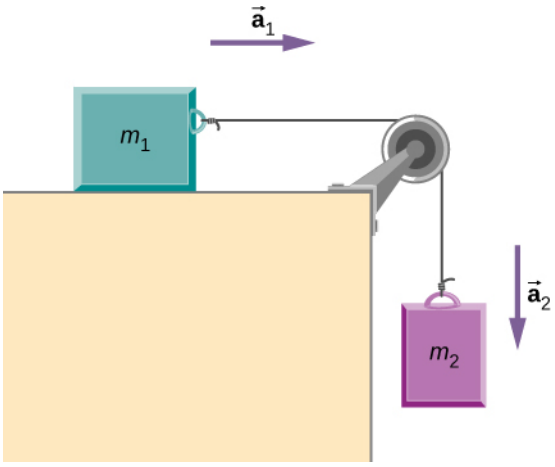
EJEMPLO 5.16

Bloque en la mesa (bloques acoplados)

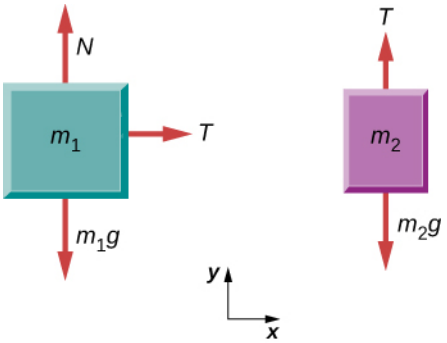
Un bloque descansa sobre la mesa, como se muestra. Una cuerda ligera está unida a él y pasa por encima de una polea. El otro extremo de la cuerda se sujeta a un segundo bloque. Se dice que los dos bloques están acoplados. Bloque m_2 ejerce una fuerza debida a su peso, que hace que el sistema (dos bloques y una cuerda) se acelere.

Estrategia

Suponemos que la cuerda no tiene masa para no tener que considerarla como un objeto separado. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque.



Solución

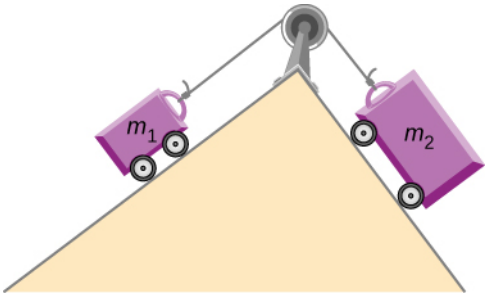


Importancia

Cada bloque acelera (observe las marcas que se muestran para $\vec{\mathbf{a}}_1$ y $\vec{\mathbf{a}}_2$); sin embargo, suponiendo que la cuerda permanece tensa, las magnitudes de la aceleración son iguales. Por lo tanto, tenemos $|\vec{\mathbf{a}}_1| = |\vec{\mathbf{a}}_2|$. Si queremos seguir resolviendo el problema, podríamos simplemente llamar la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$. Además, utilizamos dos diagramas de cuerpo libre porque normalmente estamos encontrando la tensión T, lo que requeriría que utilicemos un sistema de dos ecuaciones en este tipo de problemas. La tensión es la misma en ambos m_1 y m_2.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 5.10

(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre para la situación mostrada. (b) Vuelva a dibujarlo mostrando los componentes; utilice los ejes de la x paralelos a las dos rampas.



INTERACTIVO

Vea esta simulación (https://openstax.org/l/21forcemotion_es) para predecir, cualitativamente, cómo una fuerza externa afectará a la rapidez y dirección del movimiento de un objeto. Explique los efectos con la ayuda de un diagrama de cuerpo libre. Utilice los diagramas de cuerpo libre para dibujar gráficos de posición, velocidad, aceleración y fuerza, y viceversa. Explique cómo se relacionan los gráficos entre sí. Dado un escenario o un gráfico, haga un esquema de los cuatro gráficos.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

caída libre situación en la que la única fuerza que actúa sobre un objeto es la gravedad
diagrama de cuerpo libre esquema que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre un objeto o sistema; el sistema está representado por un único punto aislado, y las fuerzas están representadas por vectores que se extienden hacia fuera desde ese punto
dinámica estudio de cómo las fuerzas inciden en el movimiento de los objetos y sistemas
empuje fuerza de reacción que empuja un cuerpo hacia adelante en respuesta a una fuerza hacia atrás.
fuerza empujón o tirón de un objeto con una magnitud y dirección específicas; puede representarse mediante vectores o expresarse como múltiplo de una fuerza estándar
fuerza externa fuerza que actúa sobre un objeto o sistema y que se origina fuera del objeto o sistema
fuerza externa neta suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre un objeto o sistema; hace que una masa se acelere
fuerza normal fuerza que soporta el peso de un objeto, o una carga, que es perpendicular a la superficie de contacto entre la carga y su soporte; la superficie aplica esta fuerza a un objeto para soportar su peso
inercia capacidad de un objeto para resistir cambios en su movimiento
ley de Hooke en un resorte, una fuerza restauradora proporcional y en sentido contrario al desplazamiento impuesto
ley de la inercia consulte la primera ley del movimiento de Newton
marco de referencia inercial un marco de referencia que se mueve a velocidad constante con respecto a un marco inercial también es inercial; un marco de referencia que acelera con respecto a un marco inercial no es inercial
newton unidad de fuerza del SI; 1 N es la fuerza necesaria para acelerar un objeto con una masa de 1 kg a una tasa de 1 m/s^2
peso fuerza $\vec{\mathbf{w}}$ debido a la gravedad que actúa sobre un objeto de masa m
primera ley del movimiento de Newton un cuerpo en reposo permanece en reposo o, si está en movimiento, permanece en movimiento a velocidad constante, a menos que actúe sobre este una fuerza externa neta; también se conoce como ley de la inercia
segunda ley del movimiento de Newton la aceleración de un sistema es directamente proporcional y en la misma dirección que la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema y es inversamente proporcional a su masa
tensión fuerza de tracción que actúa a lo largo de un conector flexible estirado, como una cuerda o un cable
tercera ley del movimiento de Newton cada vez que un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo cuerpo, el primer cuerpo experimenta una fuerza de magnitud igual y de dirección opuesta a la fuerza que ejerce

Ecuaciones Clave

Fuerza externa neta	$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots$
Primera ley de Newton	$\vec{\mathbf{v}} =$ constante cuando $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \vec{\mathbf{0}}\,\text{N}$
Segunda ley de Newton, forma vectorial	$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$
Segunda ley de Newton, forma escalar	$F_{\text{neta}} = ma$
Segunda ley de Newton, forma de los componentes	$\sum \vec{\mathbf{F}}_x = m\vec{\mathbf{a}}_x$, $\sum \vec{\mathbf{F}}_y = m\vec{\mathbf{a}}_y$, y $\sum \vec{\mathbf{F}}_z = m\vec{\mathbf{a}}_z$.
Segunda ley de Newton, forma del momento	$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$

Definición de peso, forma vectorial	$\vec{\mathbf{w}} = m\vec{\mathbf{g}}$
Definición de peso, forma escalar	$w = mg$
Tercera ley de Newton	$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{AB}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{BA}}$
Fuerza normal sobre un objeto que descansa sobre una superficie horizontal, forma vectorial	$\vec{\mathbf{N}} = -m\vec{\mathbf{g}}$
Fuerza normal sobre un objeto que descansa sobre una superficie horizontal, forma escalar	$N = mg$
Fuerza normal sobre un objeto que descansa en un plano inclinado, forma escalar	$N = mg\cos\theta$
Tensión en un cable que soporta un objeto de masa m en reposo, forma escalar	$T = w = mg$

Resumen

5.1 Fuerzas

- La dinámica es el estudio de cómo las fuerzas inciden en el movimiento de los objetos, mientras que la cinemática simplemente describe la forma en que se mueven los objetos.
- La fuerza es un empujón o tirón, que puede definirse en términos de varias normas, y es un vector que tiene tanto magnitud como dirección.
- Las fuerzas externas son cualquier fuerza exterior que actúe sobre un cuerpo. Un diagrama de cuerpo libre es un dibujo de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo.
- La unidad de fuerza del SI es el newton (N).

5.2 Primera ley de Newton

- Según la primera ley de Newton, deberá haber una causa para que se produzca cualquier cambio de velocidad (un cambio de magnitud o de dirección). Esta ley también se conoce como la ley de la inercia.
- La fricción es una fuerza externa que hace que un objeto desacelere.
- La inercia es la tendencia de un objeto a permanecer en reposo o en movimiento. La inercia está relacionada con la masa de un objeto.
- Si la velocidad de un objeto con respecto a un marco determinado es constante, entonces el marco es inercial. Esto significa que, en un marco de referencia inercial, la primera ley de Newton es válida.
- El equilibrio se alcanza cuando las fuerzas sobre un sistema están equilibradas.
- Una fuerza neta cero significa que un objeto está en reposo o se mueve con velocidad constante; es decir, no acelera.

5.3 Segunda ley de Newton

- Una fuerza externa actúa sobre un sistema desde fuera, a diferencia de las fuerzas internas, que actúan entre los componentes del sistema.
- La segunda ley del movimiento de Newton establece que la fuerza externa neta sobre un objeto con una determinada masa es directamente proporcional y en la misma dirección que la aceleración del objeto.
- La segunda ley de Newton también puede describir la fuerza neta como la tasa de cambio instantáneo del momento. Por lo tanto, una fuerza externa neta provoca una aceleración distinta a cero.

5.4 Masa y peso

- La masa es la cantidad de materia de una sustancia.
- El peso de un objeto es la fuerza neta sobre un objeto que cae, o su fuerza gravitatoria. El objeto experimenta una aceleración debida a la gravedad.
- Una fuerza de resistencia ascendente del aire actúa sobre todos los objetos que caen en la

Tierra, por lo que nunca pueden estar realmente en caída libre.
- Hay que distinguir cuidadosamente entre la caída libre y la ingravidez mediante la definición de peso como fuerza debida a la gravedad que actúa sobre un objeto de cierta masa.

5.5 Tercera ley de Newton

- La tercera ley del movimiento de Newton representa una simetría básica en la naturaleza, con una fuerza experimentada igual en magnitud y opuesta en dirección a una fuerza ejercida.
- Dos fuerzas iguales y opuestas no se anulan porque actúan sobre sistemas diferentes.
- Los pares de acción y reacción incluyen a una nadadora que se impulsa desde una pared, a los helicópteros que crean sustentación al empujar el aire hacia abajo y a un pulpo que se propulsa hacia adelante expulsando agua de su cuerpo. Una fuerza de reacción de empuje impulsa los cohetes, los aviones y los autos hacia delante.
- La elección de un sistema es un paso analítico importante para comprender la física de un problema y resolverlo.

5.6 Fuerzas comunes

- Cuando un objeto descansa en una superficie, esta aplica una fuerza al objeto que soporta su peso. Esta fuerza de soporte actúa de forma perpendicular y alejada de la superficie. Se denomina fuerza normal.
- Cuando un objeto descansa sobre una superficie horizontal no acelerada, la magnitud de la fuerza normal es igual al peso del objeto.
- Cuando un objeto descansa en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la superficie horizontal, el peso del objeto puede resolverse en componentes que actúan perpendicular y paralelamente a la superficie del plano.
- La fuerza de tracción que actúa a lo largo de un conector flexible estirado, como una cuerda o un cable, se llama tensión. Cuando una cuerda soporta el peso de un objeto en reposo, la tensión en la cuerda es igual al peso del objeto. Si el objeto está acelerando, la tensión es mayor que el peso, y si está desacelerando, la tensión es menor que el peso.
- La fuerza de fricción es una fuerza que experimenta un objeto en movimiento (o un objeto que tiene tendencia a moverse) paralela a la interfaz que se opone al movimiento (o a su tendencia).
- La fuerza desarrollada en un resorte obedece a la ley de Hooke, según la cual su magnitud es proporcional al desplazamiento y tiene un sentido en la dirección opuesta al desplazamiento.
- Las fuerzas reales tienen un origen físico, mientras que las fuerzas ficticias se producen porque el observador se encuentra en un marco de referencia acelerado o no inercial.

5.7 Dibujar diagramas de cuerpo libre

- Para dibujar un diagrama de cuerpo libre, dibujamos el objeto de interés, dibujamos todas las fuerzas que actúan sobre ese objeto y resolvemos todos los vectores de fuerza en componentes x y y. Debemos dibujar un diagrama de cuerpo libre distinto para cada objeto del problema.
- El diagrama de cuerpo libre sirve para describir y analizar todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo con el fin de determinar el equilibrio, según la primera ley de Newton, o la aceleración, según la segunda ley de Newton.

Preguntas Conceptuales

5.1 Fuerzas

1. ¿Qué propiedades tienen las fuerzas que nos permiten clasificarlas como vectores?

5.2 Primera ley de Newton

2. Tomando como inercial un marco unido a la Tierra, ¿cuáles de los siguientes objetos no pueden tener marcos inerciales unidos a ellos y cuáles son marcos de referencia inerciales?
(a) Un auto que se mueve a velocidad constante.
(b) Un auto que acelera.
(c) Un elevador en caída libre.
(d) Una cápsula espacial que orbita la Tierra.
(e) Un elevador que desciende uniformemente.

3. Una mujer transportaba una caja abierta de magdalenas a una fiesta escolar. El auto frente a ella se detuvo repentinamente; ella frenó de inmediato. Llevaba el cinturón de seguridad y no sufrió ninguna lesión (solo una gran vergüenza), pero las magdalenas volaron hacia el tablero y se convirtieron en "pasteles aplastados". Explique lo que pasó.

5.3 Segunda ley de Newton

4. ¿Por qué no podemos tener en cuenta fuerzas como las que mantienen un cuerpo unido cuando aplicamos la segunda ley de Newton?

5. Una piedra se lanza hacia arriba. En la parte superior de la trayectoria, la velocidad es momentáneamente cero. ¿Esto implica que la fuerza que actúa sobre el objeto es cero? Razone su respuesta.

5.4 Masa y peso

6. ¿Cuál es la relación entre el peso y la masa? ¿Cuál es la propiedad intrínseca e inmutable de un cuerpo?

7. ¿Cuánto pesa una astronauta de 70 kg en el espacio, lejos de cualquier cuerpo celeste? ¿Cuál es su masa en este lugar?

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
(a) La masa y el peso son la misma cosa, expresada en unidades diferentes.
(b) Si un objeto no tiene peso, no debe tener masa.
(c) Si el peso de un objeto varía, también debe hacerlo su masa.
(d) La masa y la inercia son conceptos diferentes.
(e) El peso es siempre proporcional a la masa.

9. Cuando se para en la Tierra, sus pies empujan contra ella con una fuerza igual a su peso. ¿Por qué la Tierra no acelera lejos de usted?

10. ¿Cómo daría el valor de $\vec{\mathbf{g}}$ en forma de vector?

5.5 Tercera ley de Newton

11. Identifique las fuerzas de acción y reacción en las siguientes situaciones: (a) la Tierra atrae a la Luna, (b) un niño patea un balón de fútbol, (c) un cohete acelera hacia arriba, (d) un auto acelera hacia delante, (e) un atleta de salto alto salta, y (f) una pistola dispara una bala.

12. Suponga que tiene una taza de café en la mano. Identifique todas las fuerzas sobre la taza y la reacción a cada fuerza.

13. (a) ¿Por qué un rifle ordinario retrocede (tira hacia atrás) cuando se dispara? (b) El cañón de un rifle sin retroceso está abierto en ambos extremos. Describa cómo se aplica la tercera ley de Newton cuando se dispara uno. (c) ¿Puede situarse con seguridad detrás de uno cuando se dispara?

5.6 Fuerzas comunes

14. Se coloca una mesa sobre una alfombra. A continuación, se coloca un libro sobre la mesa. ¿Sobre qué ejerce el suelo una fuerza normal?

15. Una partícula se desplaza hacia la derecha. (a) ¿Puede la fuerza sobre ella estar actuando hacia la izquierda? En caso afirmativo, ¿qué ocurriría? (b) ¿Puede esa fuerza actuar hacia abajo? En caso afirmativo, ¿por qué?

5.7 Dibujar diagramas de cuerpo libre

16. Al completar la solución de un problema de fuerzas, ¿qué hacemos después de construir el diagrama de cuerpo libre? Es decir, ¿qué aplicamos?

17. Si un libro está situado sobre una mesa, ¿cuántas fuerzas deben mostrarse en un diagrama de cuerpo libre del libro? Descríbalas.

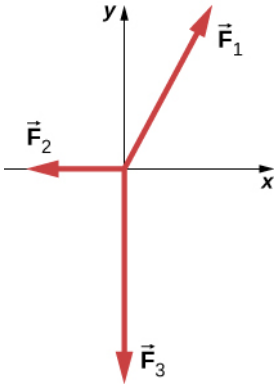
18. Si el libro de la pregunta anterior está en caída libre, ¿cuántas fuerzas deberían mostrarse en un diagrama de cuerpo libre del libro? Descríbalas.

Problemas

5.1 Fuerzas

19. Dos cuerdas están atadas a un árbol, y las fuerzas de $\vec{\mathbf{F}}_1 = 2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N y $\vec{\mathbf{F}}_2 = 3{,}0\hat{\mathbf{i}} + 6{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N se aplican. Las fuerzas son coplanarias (en el mismo plano). (a) ¿Cuál es la resultante (fuerza neta) de estos dos vectores de fuerza? (b) Halle la magnitud y dirección de esta fuerza neta.

20. Un poste telefónico tiene tres cables que halan como se muestra desde arriba, con $\vec{\mathbf{F}}_1 = \left(300{,}0\hat{\mathbf{i}} + 500{,}0\hat{\mathbf{j}}\right)$, $\vec{\mathbf{F}}_2 = -200{,}0\hat{\mathbf{i}}$, y $\vec{\mathbf{F}}_3 = -800{,}0\hat{\mathbf{j}}$. (a) Halle la fuerza neta sobre el poste telefónico en forma de componentes. (b) Halle la magnitud y la dirección de esta fuerza neta.



21. Dos adolescentes halan unas cuerdas atadas a un árbol. El ángulo entre las cuerdas es 30,0°. David hala con una fuerza de 400,0 N y Stephanie hala con una fuerza de 300,0 N. (a) Halle la forma de componentes de la fuerza neta. (b) Halle la magnitud de la fuerza resultante (neta) sobre el árbol y el ángulo que forma con la cuerda de David.

5.2 Primera ley de Newton

22. Dos fuerzas de $\vec{\mathbf{F}}_1 = \frac{75{,}0}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\right)$ N y $\vec{\mathbf{F}}_2 = \frac{150{,}0}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\right)$ N actúan sobre un objeto. Halle la tercera fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$ que se necesita para equilibrar las dos primeras fuerzas.

23. Mientras deslizan un sofá por el suelo, Andrea y Jennifer ejercen fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{A}$ y $\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{J}$ sobre el sofá. La fuerza de Andrea se dirige hacia el norte con una magnitud de 130,0 N y la fuerza de Jennifer es a 32° al este del norte a una magnitud de 180,0 N. (a) Halle la fuerza neta en forma de componentes. (b) Halle la magnitud y la dirección de la fuerza neta. (c) Si los compañeros de vivienda de Andrea y Jennifer, David y Stephanie, no están de acuerdo con el movimiento y quieren impedir su traslado, ¿con qué fuerza combinada $\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{DS}$ deben empujar para que el sofá no se mueva?

5.3 Segunda ley de Newton

24. Andrea, una velocista de 63,0 kg, comienza una carrera con una aceleración de 4,200 m/s^2. ¿Cuál es la fuerza externa neta sobre ella?

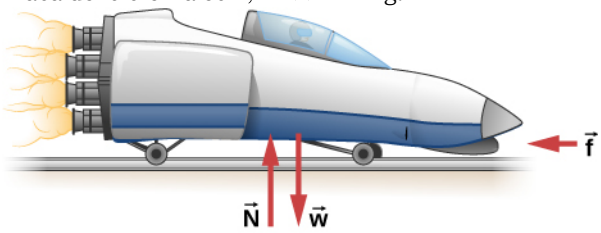
25. Si la velocista del problema anterior acelera a ese ritmo durante 20,00 m y luego mantiene esa velocidad durante el resto de una carrera de 100,00 m, ¿cuál será su tiempo en la carrera?

26. Un limpiador empuja un carro de lavandería de 4,50 kg de manera que la fuerza externa neta sobre él es de 60,0 N. Calcule la magnitud de la aceleración de su carro.

27. Los astronautas en órbita son aparentemente ingrávidos. Esto significa que se necesita un método inteligente de medición de la masa de los astronautas para controlar sus ganancias o pérdidas de masa y ajustar su dieta. Una forma de hacerlo es ejercer una fuerza conocida sobre un astronauta y medir la aceleración producida. Supongamos que se ejerce una fuerza externa neta de 50,0 N y que la aceleración de una astronauta se mide en 0,893 m/s^2. (a) Calcule su masa. (b) Al ejercer una fuerza sobre la astronauta, el vehículo en el que orbita experimenta una fuerza igual y opuesta. Utilice este conocimiento para encontrar una ecuación para la aceleración del sistema (astronauta y nave espacial) que sería medida por un observador cercano. (c) Explique cómo afectaría esto la medición de la aceleración de la astronauta. Proponga un método para evitar el retroceso del vehículo.

28. En la Figura 5.12, la fuerza externa neta sobre el cortacésped de 24 kg es de 51 N. Si la fuerza de fricción que se opone al movimiento es de 24 N, ¿qué fuerza F (en newtons) ejerce la persona sobre el cortacésped? Supongamos que el cortacésped se mueve a 1,5 m/s cuando se elimina la fuerza F. ¿Qué distancia recorrerá el cortacésped antes de detenerse?

29. El trineo de cohetes que se muestra a continuación desacelera a una velocidad de 196 m/s^2. ¿Qué fuerza es necesaria para producir esta desaceleración? Supongamos que los cohetes están apagados. La masa del sistema es $2{,}10 \times 10^3$ kg.

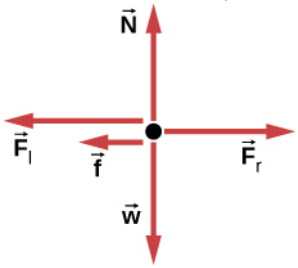


30. Si el trineo de cohetes mostrado en el problema anterior comienza con un solo cohete encendido, ¿cuál es la magnitud de esta aceleración? Supongamos que la masa del sistema es $2{,}10 \times 10^3$ kg, el empuje T es $2{,}40 \times 10^4$ N, y la fuerza de fricción que se opone al movimiento es de 650,0 N. (b) ¿Por qué la aceleración no es una cuarta parte de lo que es con todos los cohetes encendidos?

31. ¿Cuál es la desaceleración del trineo de cohetes si se detiene en 1,10 s desde una rapidez de

1.000,0 km/h? (Esta desaceleración hizo que un sujeto de prueba se desmayara y tuviera ceguera temporal).

32. Supongamos que dos niños empujan horizontalmente, pero en direcciones exactamente opuestas, a un tercer niño en un vagón. El primer niño ejerce una fuerza de 75,0 N, el segundo ejerce una fuerza de 90,0 N, la fricción es de 12,0 N, y la masa del tercer niño más el vagón es de 23,0 kg. (a) ¿Cuál es el sistema en cuestión si se quiere calcular la aceleración del niño en el vagón? (Vea el diagrama de cuerpo libre). (b) Calcule la aceleración. (c) ¿Cuál sería la aceleración si la fricción fuera de 15,0 N?



33. Una moto potente puede producir una aceleración de $3{,}50\ \text{m/s}^2$ mientras viaja a 90,0 km/h. A esa rapidez, las fuerzas que se resisten al movimiento, incluso la fricción y la resistencia del aire, suman 400,0 N. (La resistencia del aire es análoga a la fricción del aire. Siempre se opone al movimiento de un objeto). ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que la motocicleta ejerce hacia atrás sobre el suelo para producir su aceleración si la masa de la motocicleta con el conductor es de 245 kg?

34. Un auto con una masa de 1.000,0 kg acelera de 0 a 90,0 km/h en 10,0 s. (a) ¿Cuál es su aceleración? (b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre el auto?

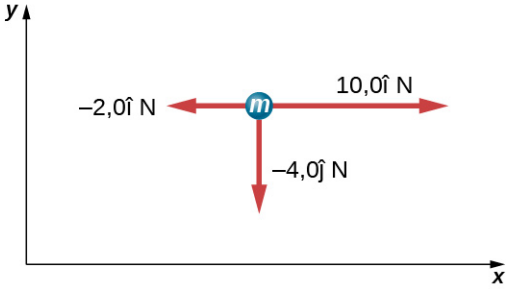
35. El conductor del problema anterior aplica los frenos cuando el auto se desplaza a 90,0 km/h, y el auto se detiene después de recorrer 40,0 m. ¿Cuál es la fuerza neta sobre el auto durante su desaceleración?

36. Un pasajero de 80,0 kg va en un vehículo todoterreno que viaja a $1{,}00 \times 10^2$ km/h lleva el cinturón de seguridad. El conductor pisa el freno y el vehículo todoterreno se detiene en 45,0 m. Halle la fuerza del cinturón de seguridad sobre el pasajero.

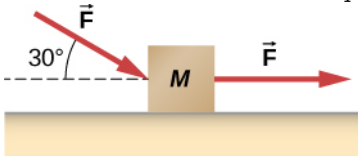
37. Sobre una partícula de masa 2,0 kg actúa una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1 = 18\hat{\mathbf{i}}$ N. (a) ¿Cuál es la aceleración de la partícula? (b) Si la partícula comienza en reposo, ¿qué distancia recorre en los primeros 5,0 s?

38. Supongamos que la partícula del problema anterior también experimenta fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_2 = -15\hat{\mathbf{i}}$ N y $\vec{\mathbf{F}}_3 = 6{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N. ¿Cuál es su aceleración en este caso?

39. Calcule la aceleración del cuerpo de masa 5,0 kg que se muestra a continuación.



40. En la siguiente figura, la superficie horizontal sobre la que se desliza este bloque no tiene fricción. Si las dos fuerzas que actúan sobre este tienen cada una una magnitud $F = 30{,}0$ N y $M = 10{,}0$ kg, ¿cuál es la magnitud de la aceleración resultante del bloque?



5.4 Masa y peso

41. El peso de un astronauta más su traje espacial en la Luna es de solo 250 N. (a) ¿Cuánto pesa el astronauta con su traje en la Tierra? (b) ¿Cuál es la masa en la Luna? ¿Y en la Tierra?

42. Supongamos que la masa de un módulo completamente cargado en el que los astronautas despegan de la Luna es $1{,}00 \times 10^4$ kg. El empuje de sus motores es $3{,}00 \times 10^4$ N. (a) Calcule la magnitud de la aceleración del módulo en un despegue vertical desde la Luna. (b) ¿Podría despegar desde la Tierra? Si no, ¿por qué no? Si fuera posible, calcule la magnitud de su aceleración.

43. Un trineo de cohetes acelera a una tasa de $49{,}0\ \text{m/s}^2$. Su pasajero tiene una masa de 75,0 kg. (a) Calcule el componente horizontal de la fuerza que el asiento ejerce contra su cuerpo. Compárelo con su peso mediante una razón. (b) Calcule la dirección y la magnitud de la fuerza total que el asiento ejerce contra su cuerpo.

44. Repita el problema anterior para una situación en la que el trineo de cohetes desacelera a una tasa de $201\ \text{m/s}^2$. En este problema, el asiento y el cinturón de seguridad ejercen las fuerzas.

45. Una fuerza vertical de 25,0 N empuja a un cuerpo de masa 2,00 kg. ¿Cuál es su aceleración?

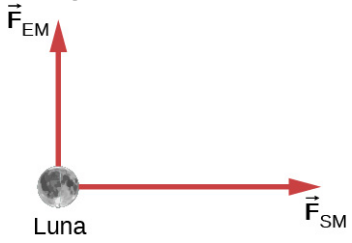
46. Un auto que pesa 12.500 N parte del reposo y acelera a 83,0 km/h en 5,00 s. La fuerza de fricción es de 1.350 N. Halle la fuerza aplicada que genera el motor.

47. Se supone que un cuerpo con una masa de 10,0 kg está en el campo gravitatorio de la Tierra con $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$. ¿Cuál es la fuerza neta sobre el cuerpo si no hay otras fuerzas externas que actúen sobre el objeto?

48. Un bombero tiene una masa m; oye la alarma de incendios y se desliza por el poste con una aceleración a (cuya magnitud es inferior a g). (a) Escriba una ecuación que dé la fuerza vertical que debe aplicar al poste. (b) Si su masa es de 90,0 kg y acelera a $5{,}00\ \text{m/s}^2$, ¿cuál es la magnitud de su fuerza aplicada?

49. Un receptor de béisbol realiza una maniobra para un anuncio de televisión. Atrapará una pelota de béisbol (con una masa de 145 g), lanzada desde una altura de 60,0 m por encima de su guante. Su guante detiene la pelota en 0,0100 s. ¿Cuál es la fuerza que ejerce su guante sobre la pelota?

50. Cuando la Luna está directamente encima al atardecer, la fuerza de la Tierra sobre la Luna, F_{EM}, está esencialmente a 90° de la fuerza del Sol sobre la Luna, F_{SM}, como se muestra a continuación. Dado que $F_{\text{EM}} = 1{,}98 \times 10^{20}$ N y $F_{\text{SM}} = 4{,}36 \times 10^{20}$ N, todas las demás fuerzas sobre la Luna son despreciables, y la masa de la Luna es $7{,}35 \times 10^{22}$ kg, determina la magnitud de la aceleración de la Luna.

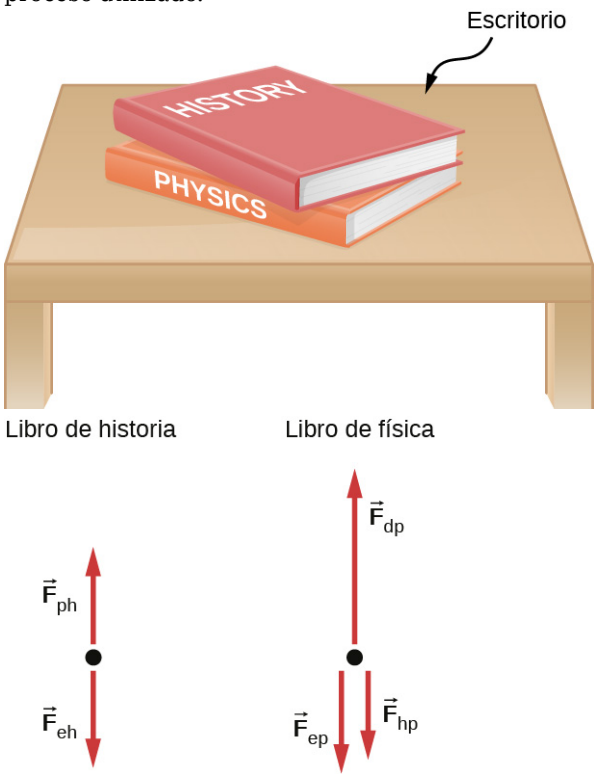


5.5 Tercera ley de Newton

51. (a) ¿Qué fuerza externa neta se ejerce sobre un casquillo de artillería de 1.100,0 kg disparado desde un acorazado si el casquillo se acelera a $2{,}40 \times 10^4\ \text{m/s}^2$? (b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza ejercida sobre el barco por el casquillo de artillería, y por qué?

52. Un jugador contrario, quien ejerce una fuerza de 800,0 N, empuja hacia atrás a un temerario jugador de rugby. La masa del jugador perdedor más el equipo es de 90,0 kg, y él acelera hacia atrás a $1{,}20\ \text{m/s}^2$. (a) ¿Cuál es la fuerza de fricción entre los pies del jugador perdedor y el césped? (b) ¿Qué fuerza ejerce el jugador ganador sobre el suelo para avanzar si su masa más el equipo es de 110,0 kg?

53. Un libro de historia está encima de un libro de física en un escritorio, como se muestra a continuación; también se muestra un diagrama de cuerpo libre. Los libros de historia y física pesan 14 N y 18 N, respectivamente. Identifique cada fuerza sobre cada libro con una notación de doble subíndice (por ejemplo, la fuerza de contacto del libro de historia presionando contra el libro de física puede describirse como $\vec{\mathbf{F}}_{\text{HP}}$), y determine el valor de cada una de estas fuerzas; explique en qué consiste el proceso utilizado.

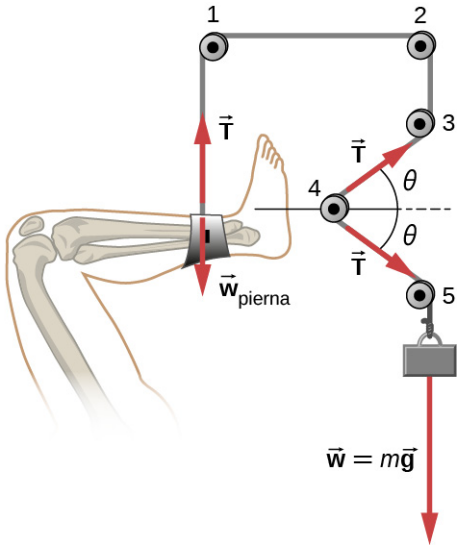


54. Un camión choca con un auto, y durante la colisión, la fuerza neta sobre cada vehículo es esencialmente la fuerza ejercida por el otro. Supongamos que la masa del auto es de 550 kg, la masa del camión es de 2200 kg, y la magnitud de la aceleración del camión es $10\ \text{m/s}^2$. Halle la magnitud de la aceleración del auto.

5.6 Fuerzas comunes

55. Una pierna está suspendida en un sistema de tracción, como se muestra a continuación. (a)

¿Qué polea de la figura se utiliza para calcular la fuerza ejercida sobre el pie? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? Aquí $\vec{\mathbf{T}}$ es la tensión, $\vec{\mathbf{w}}_{\text{pierna}}$ es el peso de la pierna, y $\vec{\mathbf{w}}$ es el peso de la carga que proporciona la tensión.



56. Supongamos que la tibia en la imagen anterior fuera un fémur en una configuración de tracción para un hueso fracturado, con poleas y cuerda disponibles. ¿Cómo podríamos aumentar la fuerza a lo largo del fémur con el mismo peso?

57. Un equipo de nueve miembros en un edificio alto hala una cuerda atada a una gran roca en una superficie helada. La roca tiene una masa de 200 kg y la halan con una fuerza de 2.350 N. (a) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración? (b) ¿Qué fuerza sería necesaria para producir una velocidad constante?

58. ¿Qué fuerza tiene que aplicar un trampolín a Jennifer, una gimnasta de 45,0 kg, para acelerarla directamente hacia arriba a $7{,}50\ \text{m/s}^2$? La respuesta es independiente de la velocidad de la gimnasta: puede estar moviéndose hacia arriba o hacia abajo o puede estar instantáneamente inmóvil.

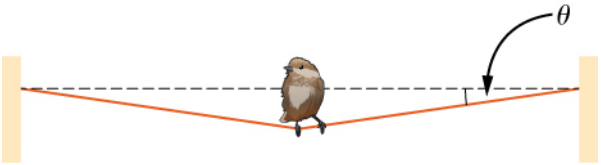
59. (a) Calcule la tensión en un hilo vertical de telaraña si una araña de masa $2{,}00 \times 10^{-5}\ \text{kg}$ cuelga inmóvil en ella. (b) Calcule la tensión en un hilo horizontal de telaraña si la misma araña se posa inmóvil en medio de ella como el equilibrista en la Figura 5.26. El hilo cede en un ángulo de $12°$ por debajo de la horizontal. Compárelo con la tensión del hilo vertical (halle el cociente).

60. Supongamos que Kevin, un gimnasta de 60,0 kg, sube por una cuerda. (a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda si sube a una rapidez constante? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda si acelera hacia arriba a una tasa de $1{,}50\ \text{m/s}^2$?

61. Demuestre que, como se explica en el texto, una fuerza $F_\perp$ ejercida sobre un medio flexible en su centro y perpendicular a su longitud (como en el alambre de la cuerda floja en la Figura 5.26) ocasiona una tensión de magnitud $T = F_\perp/2 \operatorname{sen}(\theta)$.

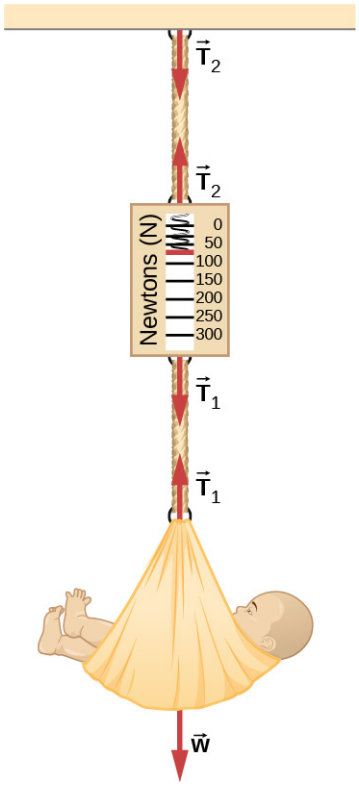
62. Considere la Figura 5.28. La conductora intenta sacar el auto del barro al ejercer una fuerza perpendicular de 610,0 N, y la distancia que empuja en medio de la cuerda es de 1,00 m mientras se sitúa a 6,00 m del auto a la izquierda y a 6,00 m del árbol a la derecha. ¿Cuál es la tensión T de la cuerda y cómo se encuentra la respuesta?

63. Un pájaro tiene una masa de 26 g y se posa en medio de una línea telefónica estirada. (a) Demuestre que la tensión en la línea puede calcularse mediante la ecuación $T = \frac{mg}{2 \operatorname{sen}\theta}$. Determine la tensión cuando (b) $\theta = 5°$ y (c) $\theta = 0{,}5°$. Supongamos que cada mitad de la línea es recta.

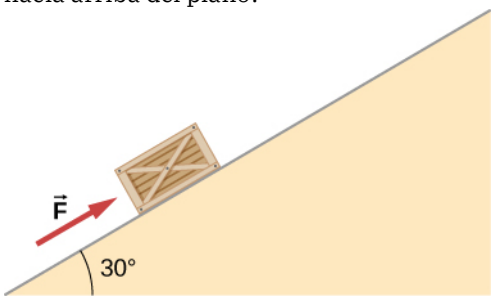


64. El extremo de una cuerda de 30 metros se ata a un árbol; el otro extremo se ata a un auto atascado en el barro. El conductor hala lateralmente del punto medio de la cuerda, para desplazarla a una distancia de 2 m. Si ejerce una fuerza de 80 N en estas condiciones, determine la fuerza ejercida sobre el auto.

65. Considere el bebé que se pesa en la siguiente figura. (a) ¿Cuál es la masa del bebé y de la cesta si se observa una lectura de la báscula de 55 N? (b) ¿Cuál es la tensión T_1 en la cuerda que sujeta al bebé a la báscula? c) ¿Cuál es la tensión T_2 en la cuerda que sujeta la báscula al techo, si la báscula tiene una masa de 0,500 kg? (d) Trace un esquema de la situación, donde se indique el sistema de interés utilizado para resolver cada parte. Las masas de los cordones son despreciables.



66. ¿Qué fuerza deberá aplicarse a una caja de 100,0 kg en un plano sin fricción inclinado a 30° para provocar una aceleración de 2,0 m/s^2 hacia arriba del plano?



67. Un bloque de 2,0 kg está en una rampa perfectamente lisa que hace un ángulo de 30° con la horizontal. (a) ¿Cuál es la aceleración del bloque por la rampa hacia abajo y la fuerza de la rampa sobre el bloque? (b) ¿Qué fuerza aplicada hacia arriba a lo largo y en paralelo a la rampa permitiría al bloque moverse con velocidad constante?

5.7 Dibujar diagramas de cuerpo libre

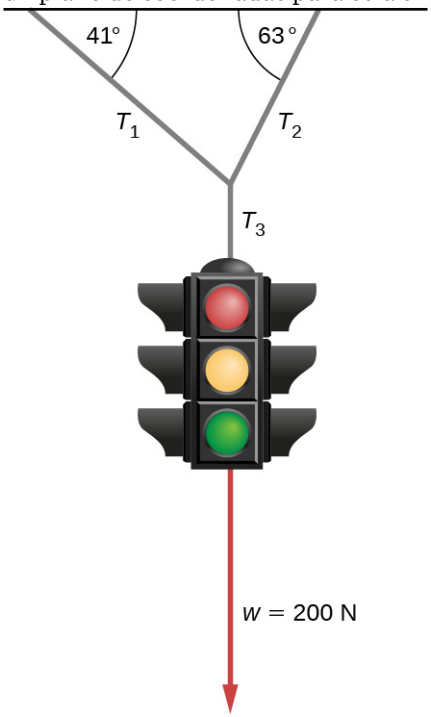
68. Una pelota de masa *m* cuelga en reposo, suspendida por una cuerda. (a) Haga un esquema de todas las fuerzas. (b) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la pelota.

69. Un auto se mueve por una carretera horizontal. Dibuje un diagrama de cuerpo libre; incluya la fricción de la carretera que se opone al movimiento de avance del auto.

70. Un corredor empuja contra la pista, como se muestra. (a) Realice un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas sobre el corredor. (*Pista:* Coloque todas las fuerzas en el centro de su cuerpo e incluya su peso). (b) Presente un diagrama revisado que muestre la forma de los componentes *xy* (créditos: modificación del trabajo de "Greenwich Photography"/Flickr).



71. El semáforo cuelga de los cables como se muestra. Dibuje un diagrama de cuerpo libre en un plano de coordenadas para esta situación.



Problemas Adicionales

72. Dos pequeñas fuerzas, $\vec{\mathbf{F}}_1 = -2{,}40\hat{\mathbf{i}} - 6{,}10\hat{\mathbf{j}}$ N y $\vec{\mathbf{F}}_2 = 8{,}50\hat{\mathbf{i}} - 9{,}70\hat{\mathbf{j}}$ N, son ejercidas sobre un asteroide errante por un par de tractores espaciales. (a) Halle la fuerza neta. (b) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza neta? (c) Si la masa del asteroide es de 125 kg, ¿qué aceleración experimenta (en forma vectorial)? (d) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la aceleración?

73. Sobre un objeto actúan dos fuerzas de 25 y 45 N. Sus direcciones difieren en $70°$. La aceleración resultante tiene una magnitud de $10{,}0\ \text{m/s}^2$. ¿Cuál es la masa del cuerpo?

74. Una fuerza de 1600 N actúa en paralelo a una rampa para empujar un piano de 300 kg hacia un furgón en movimiento. La rampa está inclinada a $20°$. (a) ¿Cuál es la aceleración del piano al subir la rampa? (b) ¿Cuál es la velocidad del piano al llegar a la cima si la rampa tiene 4,0 m de longitud y el piano parte del reposo?

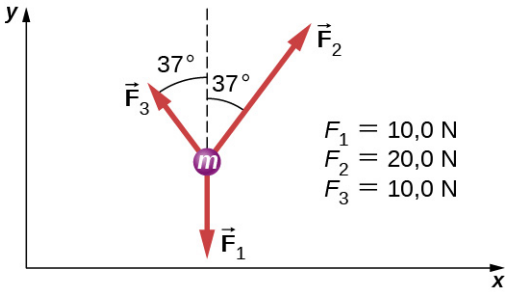
75. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de un buceador que ha entrado en el agua, se ha desplazado hacia abajo y sobre él actúa una fuerza ascendente debida al agua que equilibra el peso (es decir, el buceador está suspendido).

76. Para una nadadora que acaba de saltar de un trampolín, suponga que la resistencia del aire es despreciable. La nadadora tiene una masa de 80,0 kg y salta desde un trampolín a 10,0 m por encima del agua. Tres segundos después de entrar en el agua, su movimiento descendente se detiene. ¿Qué fuerza media hacia arriba ha ejercido el agua sobre ella?

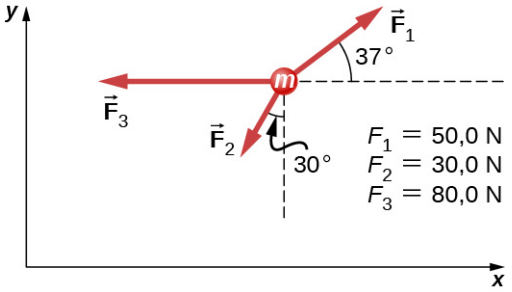
77. (a) Halle la ecuación para determinar la magnitud de la fuerza neta necesaria para detener un auto de masa m, dado que la rapidez inicial del auto es v_0 y la distancia de parada es x. (b) Halle la magnitud de la fuerza neta si la masa del auto es de 1.050 kg, la rapidez inicial es de 40,0 km/h y la distancia de parada es de 25,0 m.

78. Un velero tiene una masa de $1{,}50 \times 10^3$ kg y sobre este actúa una fuerza de $2{,}00 \times 10^3$ N hacia el este, mientras que el viento actúa detrás de las velas con una fuerza de $3{,}00 \times 10^3$ N en una dirección de $45°$ al norte del este. Halle la magnitud y la dirección de la aceleración resultante.

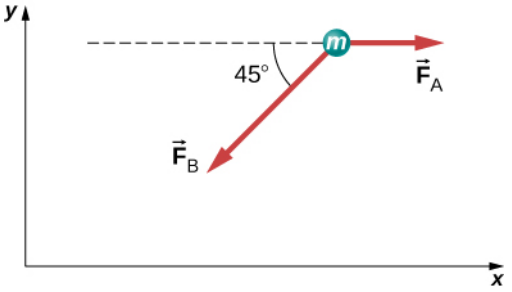
79. Halle la aceleración del cuerpo de masa 10,0 kg que se muestra a continuación.



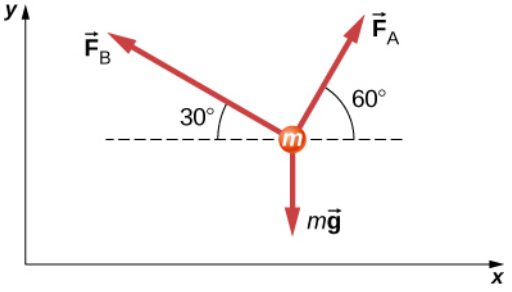
80. Un cuerpo de masa 2,0 kg se mueve a lo largo del eje de la x con una rapidez de 3,0 m/s en el instante representado a continuación. (a) ¿Cuál es la aceleración del cuerpo? (b) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo 10,0 s después? (c) ¿Cuál es su desplazamiento después de 10,0 s?



81. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_\text{B}$ tiene el doble de magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_\text{A}$. Halle la dirección en la que se acelera la partícula en esta figura.



82. A continuación, se muestra un cuerpo de masa 1,0 kg bajo la influencia de las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{A}$, $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{B}$, y $m\vec{\mathbf{g}}$. Si el cuerpo acelera hacia la izquierda a $20\ \text{m/s}^2$, ¿que son $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{A}$ y $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{B}$?



83. Una fuerza actúa sobre un auto de masa m de forma que la rapidez v del auto aumenta con la

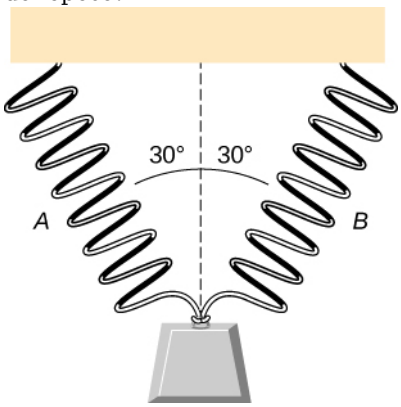
posición x como $v = kx^2$, donde k es constante y todas las cantidades están en unidades del SI. Halle la fuerza que actúa sobre el auto en función de la posición.

84. Se aplica una fuerza de 7,0 N paralela a una inclinación a una caja de 1,0 kg. La rampa está inclinada a $20°$ y no tiene fricción. (a) ¿Cuál es la aceleración de la caja? (b) Si todas las demás condiciones son iguales pero la rampa tiene una fuerza de fricción de 1,9 N, ¿cuál es la aceleración?

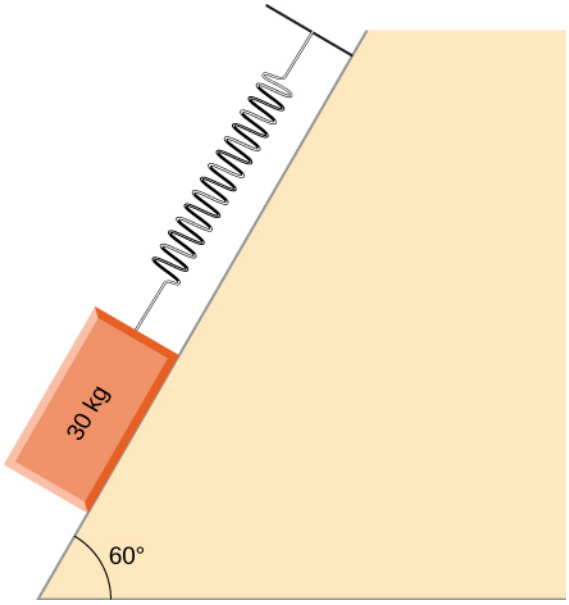
85. Dos cajas, A y B, están en reposo. La caja A está en un terreno llano, mientras que la caja B descansa en un plano inclinado con un ángulo θ con la horizontal. (a) Escriba expresiones para la fuerza normal que actúa sobre cada bloque. (b) Compare las dos fuerzas; es decir, diga cuál es mayor o si son iguales en magnitud. (c) Si el ángulo de inclinación es $10°$, ¿qué fuerza es mayor?

86. Una masa de 250,0 g está suspendida de un resorte que cuelga verticalmente. El resorte se estira 6,00 cm. ¿Cuánto se estirará el resorte si la masa suspendida es de 530,0 g?

87. Como se muestra a continuación, dos resortes idénticos, cada uno con la constante del resorte 20 N/m, soportan un peso de 15,0 N. (a) ¿Cuál es la tensión del resorte A? (b) ¿Cuál es la cantidad de estiramiento del resorte A desde la posición de reposo?

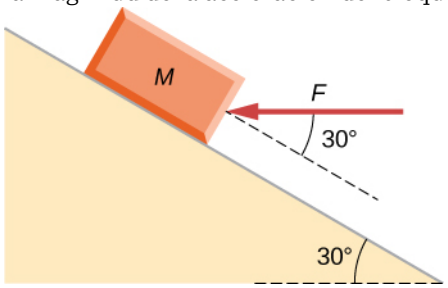


88. A continuación, se muestra un bloque de 30,0 kg que descansa sobre una rampa sin fricción inclinada a $60°$ de la horizontal. El bloque está sujeto por un resorte que se estira 5,0 cm. ¿Cuál es la constante de fuerza del resorte?



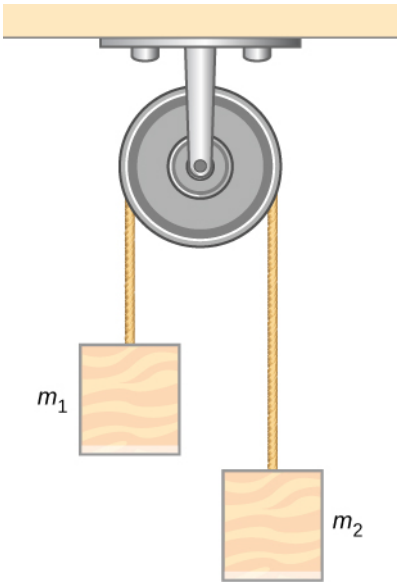
89. Los carpinteros que construyen una casa utilizan clavos de una caja grande. La caja se suspende de un resorte dos veces durante el día para medir el uso de los clavos. Al principio del día, el resorte se estira 50 cm. Al final del día, el resorte se estira 30 cm. ¿Qué fracción o porcentaje de los clavos se ha utilizado?

90. Se aplica una fuerza a un bloque para que suba $30°$ de inclinación. La inclinación es sin fricción. Si $F = 65{,}0\ \text{N}$ y $M = 5{,}00\ \text{kg}$, ¿cuál es la magnitud de la aceleración del bloque?



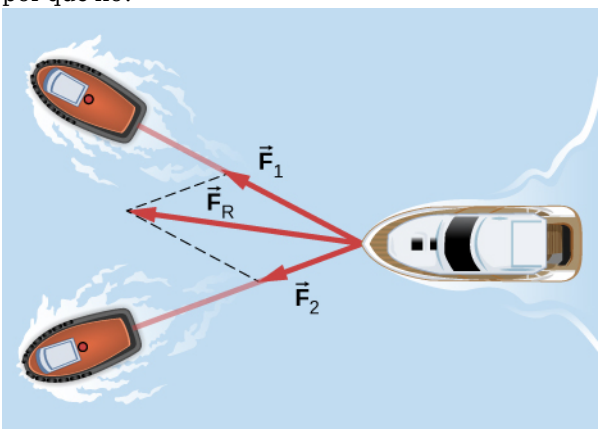
91. Se aplican dos fuerzas a un objeto de 5,0 kg y este se acelera a una tasa de $2{,}0\ \text{m/s}^2$ en la dirección de la y positiva. Si una de las fuerzas actúa en la dirección de la x positiva con una magnitud de 12,0 N, halle la magnitud de la otra fuerza.

92. El bloque de la derecha que se muestra a continuación tiene más masa que el bloque de la izquierda ($m_2 > m_1$). Dibuje diagramas de cuerpo libre para cada bloque.



Problemas De Desafío

93. Si dos remolcadores halan de un barco averiado, como se muestra aquí en una vista aérea, se remolcará el barco a lo largo de la dirección indicada por el resultado de las fuerzas ejercidas. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el barco. Suponga que no hay fuerzas de fricción o arrastre que afecten al barco. (b) ¿Incluyó todas las fuerzas de la vista aérea en su diagrama de cuerpo libre? ¿Por qué sí por qué no?



94. Un objeto de 10,0 kg se mueve inicialmente hacia el este a 15,0 m/s. Luego, una fuerza actúa sobre este durante 2,00 s, tras lo cual se mueve hacia el noroeste, también a 15,0 m/s. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza media que ha actuado sobre el objeto en el intervalo de 2,00 s?

95. El 25 de junio de 1983, el lanzador de peso Udo Beyer, de Alemania Oriental, lanzó el tiro de 7,26 kg a 22,22 m, lo que en aquel momento constituía un récord mundial. (a) Si el tiro se lanzó a una altura de 2,20 m con un ángulo de proyección de $45{,}0°$, ¿cuál era su velocidad inicial? (b) Si mientras estaba en la mano de Beyer el disparo se aceleró uniformemente a lo largo de una distancia de 1,20 m, ¿cuál era la fuerza neta sobre él?

96. Un cuerpo de masa m se mueve en una dirección horizontal tal que en el tiempo t su posición viene dada por $x(t) = at^4 + bt^3 + ct$, donde a, b y c son constantes. (a) ¿Cuál es la aceleración del cuerpo? (b) ¿Cuál es la fuerza dependiente del tiempo que actúa sobre el cuerpo?

97. Un cuerpo de masa m tiene una velocidad inicial v_0 en la dirección de la x positiva. Sobre este actúa una fuerza constante F durante un tiempo t hasta que la velocidad se hace cero; la fuerza sigue actuando sobre el cuerpo hasta que su velocidad se hace $-v_0$ en la misma cantidad de tiempo. Escriba una expresión para la distancia total que recorre el cuerpo en términos de las variables indicadas.

98. Las velocidades de un objeto de 3,0 kg en $t = 6{,}0$ s y $t = 8{,}0$ s son $(3{,}0\hat{\mathbf{i}} - 6{,}0\hat{\mathbf{j}} + 4{,}0\hat{\mathbf{k}})$ m/s y $(-2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{k}})$ m/s, respectivamente. Si el objeto se mueve con una aceleración constante, ¿cuál es la fuerza que actúa sobre este?

99. Un astronauta de 120 kg viaja en un trineo de cohetes que se desliza por un plano inclinado. El trineo tiene un componente horizontal de aceleración de $5{,}0\ \text{m/s}^2$ y un componente descendente de $3{,}8\ \text{m/s}^2$. Calcule la magnitud de la fuerza ejercida por el trineo sobre el conductor. (*Pista*: Recuerde que hay que tener

en cuenta la aceleración gravitatoria).

100. Dos fuerzas actúan sobre un objeto de 5,0 kg que se mueve con aceleración de $2{,}0\ \text{m/s}^2$ en la dirección de la *y* positiva. Si una de las fuerzas actúa en la dirección de la *x* positiva y tiene una magnitud de 12 N, ¿cuál es la magnitud de la otra fuerza?

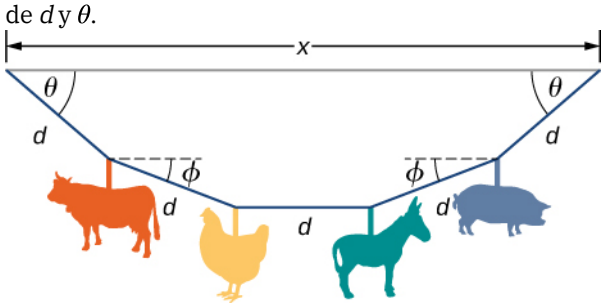
101. Suponga que está viendo un partido de fútbol desde un helicóptero sobre el campo de juego. Dos jugadores de fútbol patean simultáneamente un balón de fútbol inmóvil en el campo plano; el balón de fútbol tiene una masa de 0,420 kg. El primer jugador patea con fuerza de 162 N a $9{,}0°$ al norte del oeste. En el mismo instante, el segundo jugador patea con fuerza de 215 N a $15°$ al este del sur. Halle la aceleración del balón en la forma de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$.

102. Una masa de 10,0 kg cuelga de un resorte cuya constante es de 535 N/m. Halle la posición del extremo del resorte alejado de su posición de reposo (utilice $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$).

103. Un par de dados de peluche de 0,0502 kg se sujeta al espejo retrovisor de un auto mediante una cuerda corta. El auto acelera a proporción constante, y los dados cuelgan en un ángulo de $3{,}20°$ de la vertical debido a la aceleración del auto. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración del auto?

104. En un circo, un burro hala de un trineo que lleva un pequeño payaso con una fuerza dada por $2{,}48\hat{\mathbf{i}} + 4{,}33\hat{\mathbf{j}}$ N. Un caballo hala del mismo trineo, ayudando al desventurado burro, con una fuerza de $6{,}56\hat{\mathbf{i}} + 5{,}33\hat{\mathbf{j}}$ N. La masa del trineo es de 575 kg. Utilizando la forma $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ para la respuesta a cada problema, calcule: (a) la fuerza neta sobre el trineo cuando los dos animales actúan juntos, (b) la aceleración del trineo, y (c) la velocidad después de 6,50 s.

105. Colgando del techo sobre una cuna, bien lejos del alcance del bebé, hay una cuerda con formas de plástico, como se muestra aquí. La cuerda está tensa (no queda floja), como muestran los segmentos rectos. Cada forma plástica tiene la misma masa *m*, y están igualmente espaciadas por una distancia *d*, como se muestra. Los ángulos marcados θ describen el ángulo formado por el extremo de la cuerda y el techo en cada extremo. La longitud central de la cuerda es horizontal. Los dos segmentos restantes forman cada uno un ángulo con la horizontal, marcados como ϕ. Supongamos que T_1 sea la tensión en la sección más a la izquierda de la cuerda, T_2 sea la tensión en la sección adyacente, y T_3 sea la tensión en el segmento horizontal. (a) Halle una ecuación para la tensión en cada sección de la cuerda en términos de las variables *m*, *g* y θ. (b) Halle el ángulo ϕ en términos del ángulo θ. (c) Si $\theta = 5{,}10°$, cuál es el valor de ϕ? (d) Calcule la distancia *x* entre los puntos extremos en términos de *d* y θ.



106. Una bala disparada por un rifle tiene una masa de 10,0 g y se desplaza hacia la derecha a 350 m/s. Golpea un objetivo, un gran saco de arena, penetrando en él una distancia de 34,0 cm. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza retardadora que frena y detiene la bala.

107. Tres fuerzas simultaneas actúan sobre un objeto: $\vec{\mathbf{F}}_1 = \left(-3{,}00\hat{\mathbf{i}} + 2{,}00\hat{\mathbf{j}}\right)$ N, $\vec{\mathbf{F}}_2 = \left(6{,}00\hat{\mathbf{i}} - 4{,}00\hat{\mathbf{j}}\right)$ N, y $\vec{\mathbf{F}}_3 = \left(2{,}00\hat{\mathbf{i}} + 5{,}00\hat{\mathbf{j}}\right)$ N. El objeto experimenta una aceleración de $4{,}23\ \text{m/s}^2$. (a) Halle el vector de aceleración en términos de *m*. (b) Halle la masa del objeto. (c) Si el objeto parte del reposo, halle su rapidez después de 5,00 s. (d) Halle los componentes de la velocidad del objeto después de 5,00 s.

108. En un acelerador de partículas, un protón tiene masa $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y una rapidez inicial de $2{,}00 \times 10^5$ m/s. Se mueve en línea recta, y su rapidez aumenta a $9{,}00 \times 10^5$ m/s en una distancia de 10,0 cm. Supongamos que la aceleración es constante. Halle la magnitud de la fuerza ejercida sobre el protón.

109. Un dron es dirigido a través de un lago cubierto de hielo sin fricción. La masa del dron es de 1,50 kg, y su velocidad es $3{,}00\hat{\mathbf{i}}$m/s. Después de 10,0 s, la velocidad es $9{,}00\hat{\mathbf{i}} + 4{,}00\hat{\mathbf{j}}$m/s. Si una fuerza constante en la dirección horizontal causa este cambio en el movimiento, calcule: (a) los componentes de la fuerza y (b) la magnitud de la fuerza.

CAPÍTULO 6
Aplicaciones de las leyes de Newton



Figura 6.1 Autos de serie corriendo en la carrera de la División Grand National en la Iowa Speedway en mayo de 2015. Los autos alcanzan a menudo velocidades de 200 millas por hora (mph) (320 kilómetros por hora [km/h]) (créditos: modificación del trabajo de Erik Schneider/Marina de los EE. UU.).

ESQUEMA DEL CAPITULO

6.1 Resolución de problemas con las leyes de Newton
6.2 Fricción
6.3 Fuerza centrípeta
6.4 Fuerza de arrastre y velocidad límite

INTRODUCCIÓN Las carreras de autos han ganado popularidad en los últimos años. A medida que cada auto se mueve en una trayectoria alrededor de la curva, sus ruedas también giran rápidamente. Las ruedas completan muchas revoluciones mientras que el auto solo hace parte de una (un arco circular). ¿Cómo podemos describir las velocidades, las aceleraciones y las fuerzas implicadas? ¿Qué fuerza impide que un auto de carreras haga un trompo y choque contra el muro que bordea la pista? ¿Qué proporciona esta fuerza? ¿Por qué la pista tiene peralte? En este capítulo responderemos todas estas preguntas mientras ampliamos nuestra consideración de las leyes del movimiento de Newton.

6.1 Resolución de problemas con las leyes de Newton

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Aplicar técnicas de resolución de problemas para resolver cantidades en sistemas de fuerzas más complejos.
- Utilizar los conceptos de la cinemática para resolver problemas mediante el empleo de las leyes del movimiento de Newton.
- Resolver problemas de equilibrio más complejos.
- Resolver problemas de aceleración más complejos.
- Aplicar el cálculo a problemas de dinámica más avanzados.

El éxito en la resolución de problemas es necesario para comprender y aplicar los principios físicos. En las Leyes del movimiento de Newton desarrollamos un patrón para analizar y plantear las soluciones a los problemas que involucran las leyes de Newton. En este capítulo, continuamos abordando estas estrategias y aplicando un proceso paso a paso.

Estrategias de resolución de problemas

Aquí seguimos los fundamentos de la resolución de problemas presentados anteriormente en este texto. Sin embargo, hacemos hincapié en las estrategias específicas que son útiles para aplicar las leyes del movimiento de Newton. Una vez que identifique los principios físicos implicados en el problema y determine que incluyen las leyes del movimiento de Newton, puede aplicar estos pasos para encontrar una solución. Estas técnicas también refuerzan conceptos que son útiles en muchas otras áreas de la física. Muchas de las estrategias de resolución de problemas se exponen directamente en los ejemplos trabajados, por lo que las siguientes técnicas deberían reforzar las habilidades que ya ha empezado a desarrollar.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplicación de las leyes del movimiento de Newton

1. Identifique los principios físicos implicados; enumere los datos dados y las cantidades por calcular.
2. Haga un esquema de la situación; utilice flechas para representar todas las fuerzas.
3. Determine el sistema de interés. El resultado es un diagrama de cuerpo libre, que es esencial para resolver el problema.
4. Aplique la segunda ley de Newton para resolver el problema. Si es necesario, aplique las correspondientes ecuaciones cinemáticas del capítulo sobre el movimiento rectilíneo.
5. Compruebe si la solución es razonable.

Apliquemos esta estrategia de resolución de problemas al reto de subir un piano de cola a un segundo piso. Una vez que hayamos determinado que las leyes del movimiento de Newton están implicadas (si el problema implica fuerzas), es especialmente importante trazar un esquema pormenorizado de la situación. Este esquema se muestra en la Figura 6.2(a). Entonces, como en la Figura 6.2(b), podemos representar todas las fuerzas con flechas. Siempre que exista información suficiente, es mejor etiquetar estas flechas minuciosamente y hacer que la longitud y la dirección de cada una se correspondan con la fuerza representada.

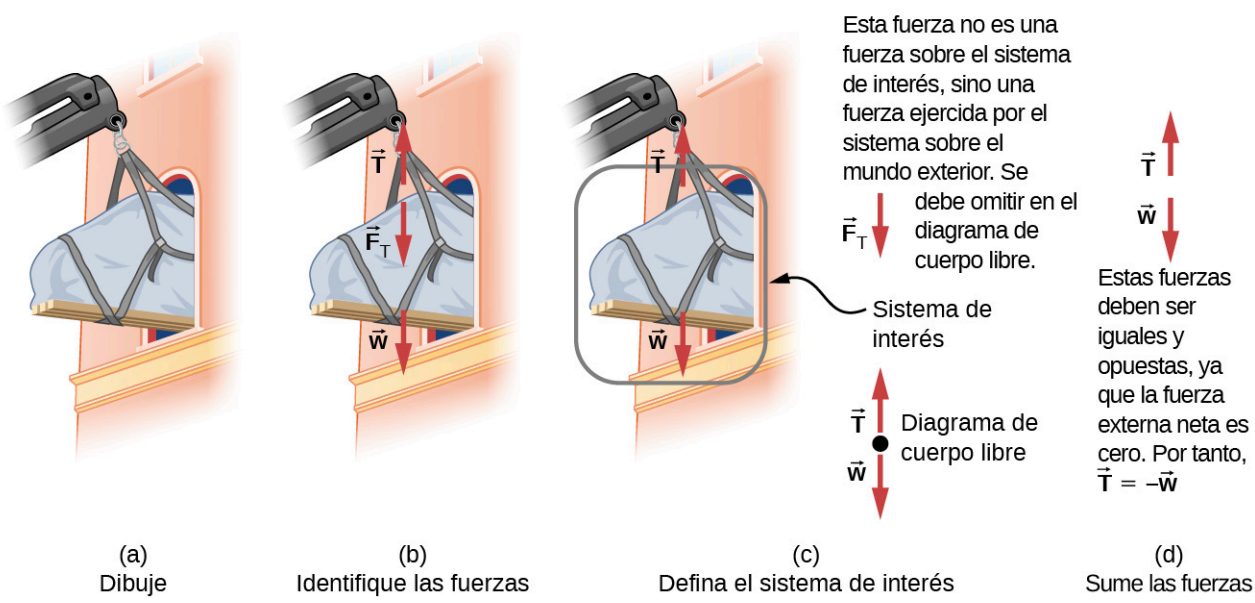


FIGURA 6.2 (a) Un piano de cola se sube a un segundo piso. (b) Se utilizan flechas para representar todas las fuerzas: $\vec{\mathbf{T}}$ es la tensión en la cuerda sobre el piano, $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{T}}$ es la fuerza que el piano ejerce sobre la cuerda, y $\vec{\mathbf{w}}$ es el peso del piano. Todas las demás fuerzas, como el empuje de una brisa, se suponen despreciables. (c) Supongamos que nos dan la masa del piano y nos indican que encontremos la tensión en la cuerda. A continuación, definimos el sistema de interés como se muestra y dibujamos un diagrama de cuerpo libre. Ahora $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{T}}$ ya no se muestra, porque no es una fuerza que actúe sobre el sistema de interés; mejor dicho, $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{T}}$ actúa sobre el mundo exterior. (d) Mostrando solo las flechas, se utiliza el método de suma de cabeza a cola. Es evidente que si el piano está inmóvil, $\vec{\mathbf{T}} = -\vec{\mathbf{w}}$.

Como en la mayoría de los problemas, a continuación hay que identificar lo que hay que determinar y lo que se sabe o se puede deducir del problema tal y como está planteado, es decir, hacer una lista de los valores conocidos y las incógnitas. Es especialmente importante identificar el sistema de interés, ya que la segunda ley de Newton solo implica fuerzas externas. Así podemos determinar cuáles fuerzas son externas y cuáles son internas, lo que es un paso necesario para emplear la segunda ley de Newton. (Ver la Figura 6.2(c)). La tercera ley de Newton puede utilizarse para identificar si las fuerzas se ejercen entre los componentes de un sistema (internas) o entre el sistema y algo exterior (externas). Como se ilustra en las Leyes del movimiento de Newton, el sistema de interés depende de la pregunta a la que debemos responder. En los diagramas de cuerpo libre solo se muestran las fuerzas, no la aceleración ni la velocidad. Hemos dibujado varios diagramas de cuerpo libre en los ejemplos de trabajo anteriores. La Figura 6.2(c) muestra un diagrama de cuerpo libre para el sistema de interés. Tenga en cuenta que en un diagrama de cuerpo libre no se muestran las fuerzas internas.

Una vez dibujado el diagrama de cuerpo libre, aplicamos la segunda ley de Newton. Esto se hace en la Figura 6.2(d) para una situación particular. En general, una vez que las fuerzas externas están claramente identificadas en los diagramas de cuerpo libre, debería ser una tarea sencilla ponerlas en forma de ecuación y resolver la incógnita, como se hizo en todos los ejemplos anteriores. Si el problema es unidimensional, es decir, si todas las fuerzas son paralelas, pueden manejarse algebraicamente. Si el problema es bidimensional, hay que descomponerlo en un par de problemas unidimensionales. Para ello, proyectamos los vectores de fuerza sobre un conjunto de ejes elegidos por conveniencia. Como se aprecia en los ejemplos anteriores, la elección de los ejes puede simplificar el problema. Por ejemplo, cuando se trata de una inclinación, lo más conveniente es un conjunto de ejes con un eje paralelo a la inclinación y otro perpendicular a ella. Casi siempre es conveniente hacer un eje paralelo a la dirección del movimiento, si se conoce. En general, basta con escribir la segunda ley de Newton en componentes a lo largo de las diferentes direcciones. Entonces, tiene las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y.$$

(Si, por ejemplo, el sistema está acelerando horizontalmente, entonces se puede establecer $a_y = 0$). Necesitamos esta información para determinar las fuerzas desconocidas que actúan sobre un sistema.

Como siempre, debemos comprobar la solución. En algunos casos, es fácil saber si la solución es razonable. Por ejemplo, es razonable encontrar que la fricción hace que un objeto se deslice por una inclinación de forma más lenta que cuando no existe fricción. En la práctica, la intuición se desarrolla gradualmente a través de la resolución de problemas; con la experiencia, se facilita paulatinamente juzgar si una respuesta es razonable. Otra forma de comprobar una solución es verificar las unidades. Si estamos resolviendo la fuerza y terminamos con unidades de milímetros por segundo, entonces hemos cometido un error.

Hay muchas aplicaciones interesantes de las leyes del movimiento de Newton, algunas de las cuales se presentan en esta sección. También sirven para ilustrar otras sutilezas de la física y para desarrollar la capacidad de resolución de problemas. En primer lugar, estudiaremos los problemas relacionados con el equilibrio de las partículas, que hacen uso de la primera ley de Newton, y después consideraremos la aceleración de las partículas, que implica la segunda ley de Newton.

Equilibrio de partículas

Recordemos que una partícula en equilibrio es aquella para la que las fuerzas externas están equilibradas. El equilibrio estático implica objetos en reposo, y el equilibrio dinámico implica objetos en movimiento sin aceleración. Sin embargo, es importante recordar que estas condiciones son relativas. Por ejemplo, un objeto puede estar en reposo cuando se ve desde nuestro marco de referencia, pero el mismo objeto parecería estar en movimiento cuando lo ve alguien que se mueve a una velocidad constante. A continuación, utilizaremos los conocimientos adquiridos en las Leyes del movimiento de Newton, relativos a los diferentes tipos de fuerzas y al uso de los diagramas de cuerpo libre, para resolver problemas adicionales de equilibrio de partículas.

EJEMPLO 6.1

Diferentes tensiones en diferentes ángulos

Considere el semáforo (con una masa de 15,0 kg) suspendido de dos alambres, como se muestra en la Figura 6.3. Halle la tensión en cada alambre; ignore las masas de los alambres.

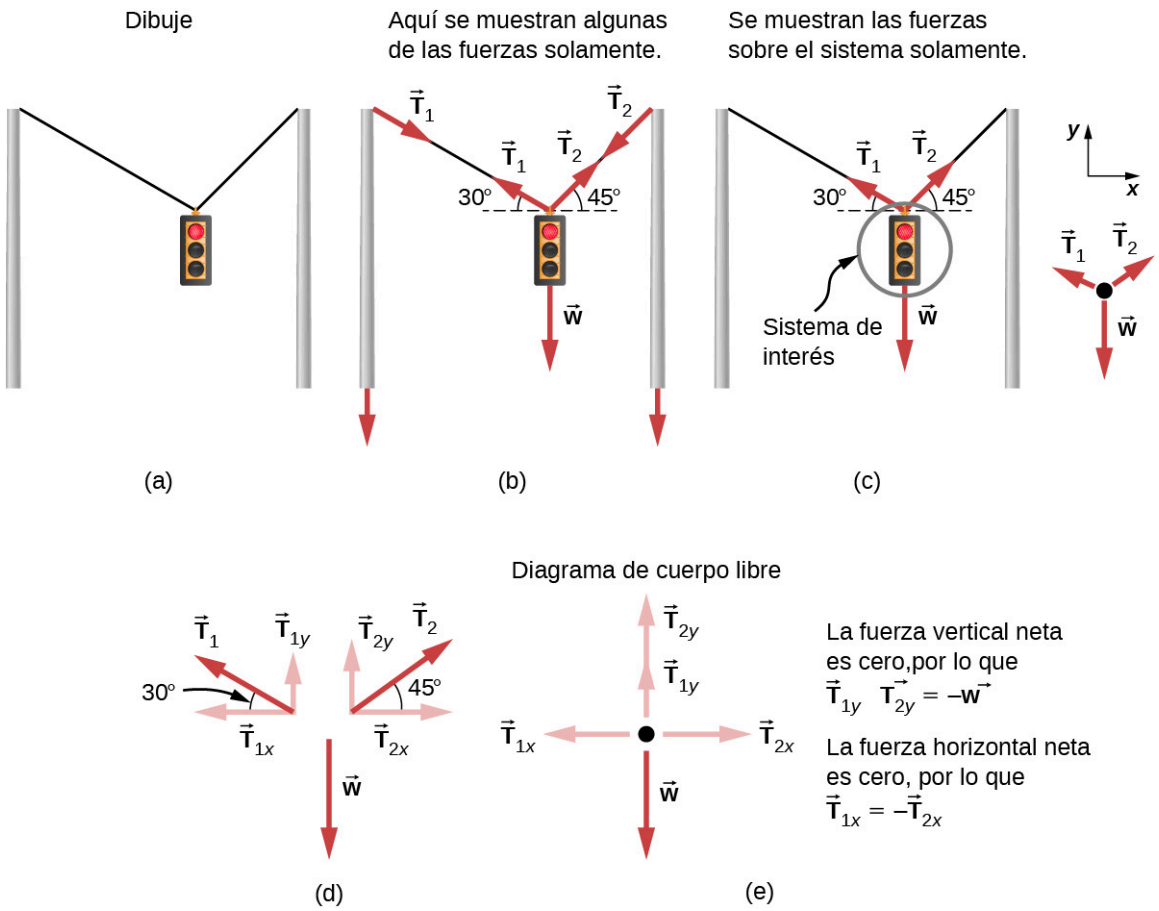


FIGURA 6.3 Un semáforo está suspendido de dos alambres. (b) Algunas de las fuerzas implicadas. (c) Solo se muestran las fuerzas que actúan sobre el sistema. También se muestra el diagrama de cuerpo libre del semáforo. (d) Las fuerzas proyectadas sobre los ejes vertical (y) y horizontal (x). Los componentes horizontales de las tensiones deben anularse, y la suma de los componentes verticales de las tensiones debe ser igual al peso del semáforo. (e) El diagrama de cuerpo libre muestra las fuerzas verticales y horizontales que actúan sobre el semáforo.

Estrategia

El sistema de interés es el semáforo, y su diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura 6.3(c). Las tres fuerzas implicadas no son paralelas, por lo que deben proyectarse en un sistema de coordenadas. El sistema de coordenadas más conveniente tiene un eje vertical y otro horizontal, y las proyecciones vectoriales sobre este se muestran en la Figura 6.3(d). Hay dos incógnitas en este problema (T_1 y T_2), por lo que se necesitan dos ecuaciones para encontrarlas. Estas dos ecuaciones provienen de la aplicación de la segunda ley de Newton a lo largo de los ejes vertical y horizontal; se observa que la fuerza externa neta es cero a lo largo de cada eje porque la aceleración es cero.

Solución

En primer lugar, considere el eje horizontal o x:

$$F_{\text{neta } x} = T_{2x} + T_{1x} = 0.$$

Por lo tanto, como es de esperar,

$$|T_{1x}| = |T_{2x}|.$$

Esto nos da la siguiente relación:

$$T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 45^\circ.$$

Por lo tanto,

$$T_2 = 1{,}225T_1.$$

Observe que T_1 y T_2 no son iguales en este caso porque los ángulos de ambos lados no son iguales. Es razonable que T_2 acabe siendo mayor que T_1 porque se ejerce más verticalmente que T_1.

Consideremos ahora los componentes de la fuerza a lo largo del eje vertical o eje de la *y*:

$$F_{\text{neta } y} = T_{1y} + T_{2y} - w = 0.$$

Esto implica

$$T_{1y} + T_{2y} = w.$$

Al sustituir las expresiones de los componentes verticales se obtiene

$$T_1 \operatorname{sen} 30° + T_2 \operatorname{sen} 45° = w.$$

Hay dos incógnitas en esta ecuación, pero si se sustituye la expresión de T_2 en términos de T_1 la reduce a una ecuación con una incógnita:

$$T_1(0{,}500) + (1{,}225T_1)(0{,}707) = w = mg,$$

que produce

$$1{,}366T_1 = (15{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2).$$

Al resolver esta última ecuación se obtiene la magnitud de T_1 que es

$$T_1 = 108\ \text{N}.$$

Por último, encontramos la magnitud de T_2 utilizando la relación entre ellos, $T_2 = 1{,}225T_1$, que se encontró anteriormente. Por lo tanto, obtenemos

$$T_2 = 132\ \text{N}.$$

Importancia

Ambas tensiones serían mayores si los dos alambres estuvieran más horizontales, y serán iguales si y solo si los ángulos de ambos lados son iguales (como lo eran en el ejemplo anterior de un equilibrista en las Leyes de movimiento de Newton.

Aceleración de partículas

Hemos dado varios ejemplos de partículas en equilibrio. Ahora nos centramos en los problemas de aceleración de partículas, que son el resultado de una fuerza neta distinta a cero. Vuelva a consultar los pasos dados al principio de esta sección y observe cómo se aplican a los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6.2

Fuerza de arrastre en una barcaza

Dos remolcadores empujan una barcaza en diferentes ángulos (Figura 6.4). El primer remolcador ejerce una fuerza de $2{,}7 \times 10^5$ N en la dirección de la *x*, y el segundo remolcador ejerce una fuerza de $3{,}6 \times 10^5$ N en la dirección de la *y*. La masa de la barcaza es $5{,}0 \times 10^6$ kg y su aceleración se observa que es $7{,}5 \times 10^{-2}$ m/s^2 en la dirección indicada. ¿Cuál es la fuerza de arrastre del agua sobre la barcaza que se resiste al movimiento? (*Nota:* La fuerza de arrastre es una fuerza de fricción ejercida por los fluidos, como el aire o el agua. La fuerza de arrastre se opone al movimiento del objeto. Como la barcaza tiene un fondo plano, podemos suponer que la fuerza de arrastre está en la dirección opuesta al movimiento de la barcaza).

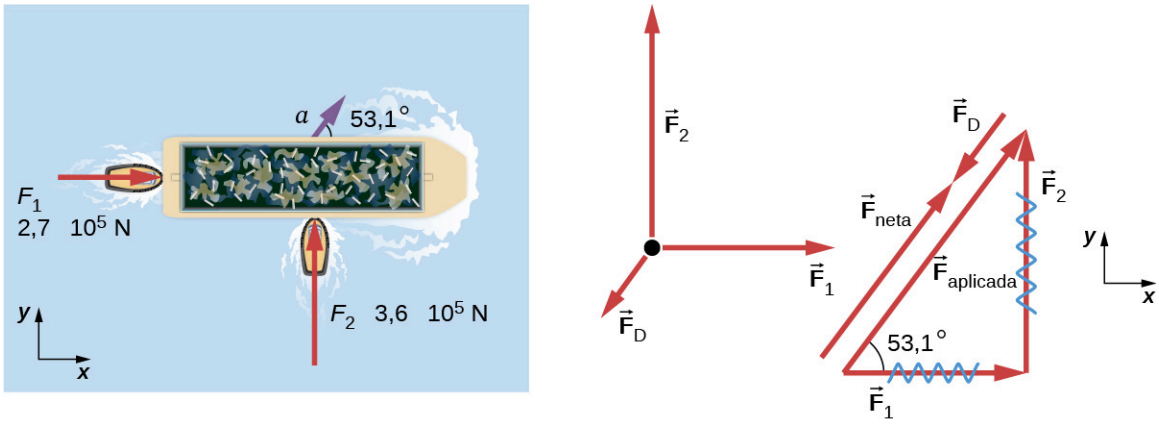


FIGURA 6.4 (a) Vista desde arriba de dos remolcadores que empujan una barcaza. (b) El diagrama de cuerpo libre del barco contiene solo las fuerzas que actúan en el plano del agua. Omite las dos fuerzas verticales, el peso de la barcaza y la fuerza de flotación del agua que la sostiene, pues se anulan y no se muestran. Observe que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$ es la fuerza total aplicada de los remolcadores.

Estrategia

Las direcciones y magnitudes de la aceleración y las fuerzas aplicadas se indican en la Figura 6.4(a). Definimos la fuerza total de los remolcadores sobre la barcaza como $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$ de modo que

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2.$$

El arrastre del agua $\vec{\mathbf{F}}_{\text{D}}$ está en la dirección opuesta a la dirección del movimiento del bote; por lo tanto, esta fuerza trabaja contra $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre en la Figura 6.4(b). El sistema de interés aquí es la barcaza, ya que se dan las fuerzas sobre ella y su aceleración. Como las fuerzas aplicadas son perpendiculares, los ejes de la x y la y están en la misma dirección que $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$. El problema se convierte rápidamente en unidimensional en la dirección de $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$, ya que la fricción va en sentido contrario a $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$. Nuestra estrategia consiste en encontrar la magnitud y la dirección de la fuerza neta aplicada $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$ y luego aplicar la segunda ley de Newton para resolver la fuerza de arrastre $\vec{\mathbf{F}}_{\text{D}}$.

Solución

Dado que F_x y F_y son perpendiculares, podemos encontrar la magnitud y la dirección de $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$ directamente. En primer lugar, la magnitud resultante viene dada por el teorema de Pitágoras:

$$F_{\text{aplicada}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(2{,}7 \times 10^5 \text{N})^2 + (3{,}6 \times 10^5 \text{ N})^2} = 4{,}5 \times 10^5 \text{ N}.$$

El ángulo viene dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}6 \times 10^5 \text{ N}}{2{,}7 \times 10^5 \text{ N}}\right) = 53{,}1°.$$

Por la primera ley de Newton, sabemos que esta es la misma dirección que la aceleración. También sabemos que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{D}}$ está en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$, ya que actúa para frenar la aceleración. Por lo tanto, la fuerza externa neta está en la misma dirección que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$, pero su magnitud es ligeramente inferior a $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$. El problema es ahora unidimensional. A partir del diagrama de cuerpo libre, podemos ver que

$$F_{\text{neta}} = F_{\text{aplicada}} - F_{\text{D}}.$$

Sin embargo, la segunda ley de Newton establece que

$$F_{\text{neta}} = ma.$$

Por lo tanto,

$$F_{\text{aplicada}} - F_{\text{D}} = ma.$$

Esto se puede resolver para la magnitud de la fuerza de arrastre del agua F_{D} en términos de cantidades conocidas:

$$F_{\text{D}} = F_{\text{aplicada}} - ma.$$

Al sustituir los valores conocidos se obtiene

$$F_{\text{D}} = \left(4{,}5 \times 10^5 \text{ N}\right) - \left(5{,}0 \times 10^6 \text{ kg}\right)\left(7{,}5 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2\right) = 7{,}5 \times 10^4 \text{ N}.$$

La dirección de $\vec{\mathbf{F}}_{\text{D}}$ ya se ha determinado que está en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$, o en un ángulo de 53° al sur del oeste.

Importancia

Las cifras utilizadas en este ejemplo son razonables para una barcaza moderadamente grande. Ciertamente, es difícil obtener aceleraciones mayores con los remolcadores, y es deseable poca rapidez para evitar que la barcaza se estrelle contra los muelles. El arrastre es relativamente pequeño para un casco bien diseñado a rapidez baja, de acuerdo con la respuesta a este ejemplo, donde F_{D} es menos de 1/600 del peso del barco.

En las Leyes del movimiento de Newton, hablamos de la fuerza normal, que es una fuerza de contacto que actúa normal a la superficie para que un objeto no tenga una aceleración perpendicular a la superficie. La báscula de baño es un excelente ejemplo de una fuerza normal que actúa sobre un cuerpo. Proporciona una lectura cuantitativa de cuánto debe empujar hacia arriba para soportar el peso de un objeto. Sin embargo, ¿podría predecir lo que vería en el dial de una báscula de baño si se subiera a ella durante un viaje en elevador? ¿Verá un valor superior a su peso cuando el elevador se ponga en marcha? ¿Y cuando el elevador se mueve hacia arriba a una rapidez constante? Haga una estimación antes de leer el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.3

¿Qué indica la báscula de baño en un elevador?

La Figura 6.5 muestra a un hombre de 75,0 kg (con un peso de aproximadamente 165 lb) subido a una báscula de baño en un elevador. Calcule la lectura de la báscula: (a) si el elevador acelera hacia arriba a una tasa de $1{,}20 \text{ m/s}^2$, y (b) si el elevador se mueve hacia arriba a una rapidez constante de 1 m/s.

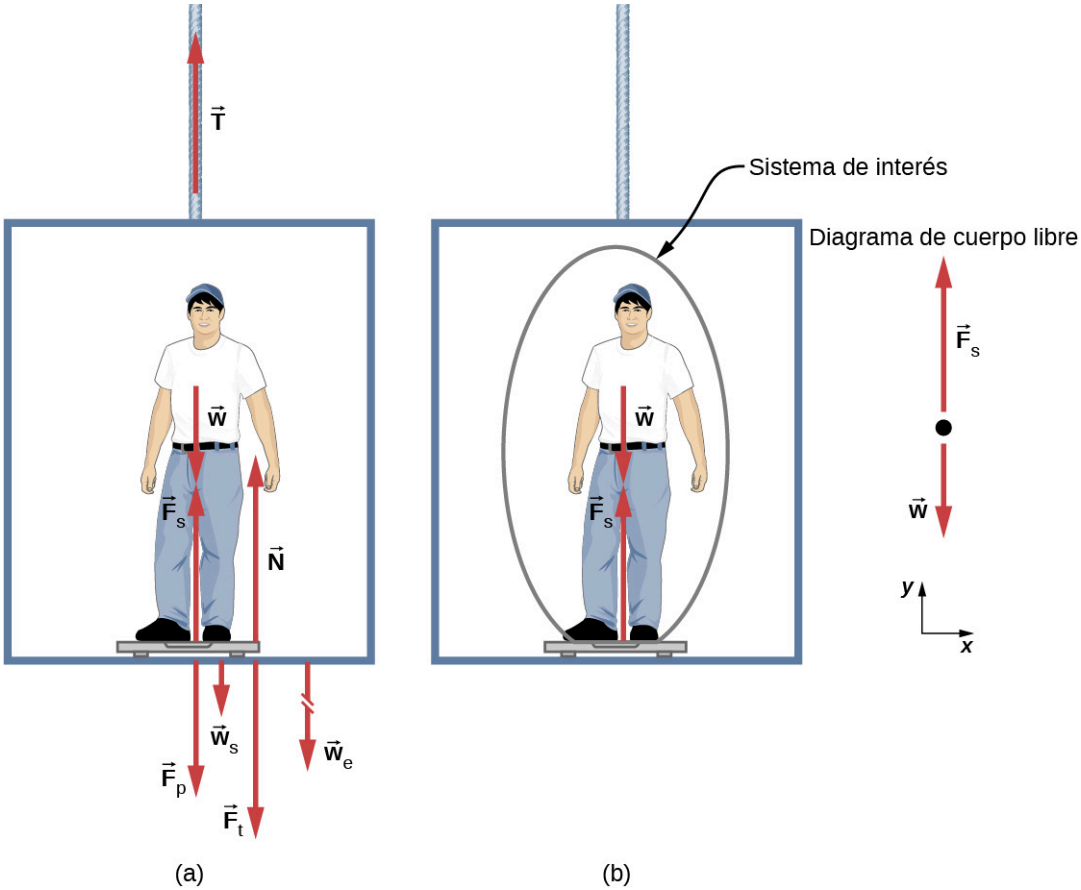


FIGURA 6.5 a) Las distintas fuerzas que actúan cuando una persona se sube a una báscula de baño en un elevador. Las flechas son aproximadamente correctas para cuando el elevador acelera hacia arriba; las flechas rotas representan fuerzas demasiado grandes para dibujarse a escala $\vec{\mathbf{T}}$ es la tensión en el cable de soporte, $\vec{\mathbf{w}}$ es el peso de la persona, $\vec{\mathbf{w}}_\text{s}$ es el peso de la báscula, $\vec{\mathbf{w}}_\text{e}$ es el peso del elevador, $\vec{\mathbf{F}}_\text{s}$ es la fuerza de la báscula sobre la persona, $\vec{\mathbf{F}}_\text{p}$ es la fuerza de la persona en la báscula, $\vec{\mathbf{F}}_\text{t}$ es la fuerza de la báscula en el suelo del elevador, y $\vec{\mathbf{N}}$ es la fuerza del suelo hacia arriba sobre la báscula. (b) El diagrama de cuerpo libre muestra únicamente las fuerzas externas que actúan *sobre* el sistema de interés designado (la persona) y es el diagrama que utilizamos para la solución del problema.

Estrategia

Si la báscula en reposo es precisa, su lectura es igual a $\vec{\mathbf{F}}_\text{p}$, la magnitud de la fuerza que la persona ejerce hacia abajo sobre ella. La Figura 6.5(a) muestra las numerosas fuerzas que actúan sobre el elevador, la báscula y la persona. Hace que este problema unidimensional parezca mucho más formidable que si se elige a la persona como sistema de interés y se dibuja un diagrama de cuerpo libre, como en la Figura 6.5(b). El análisis del diagrama de cuerpo libre mediante el empleo de las leyes de Newton puede dar respuesta a los dos apartados (a) y (b) de la Figura 6.5 de este ejemplo, así como a otras preguntas que puedan surgir. Las únicas fuerzas que actúan sobre la persona son su peso $\vec{\mathbf{w}}$ y la fuerza ascendente de la báscula $\vec{\mathbf{F}}_\text{s}$. Según la tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{F}}_\text{p}$ y $\vec{\mathbf{F}}_\text{s}$ son iguales en magnitud y opuestos en dirección, por lo que necesitamos encontrar F_s para encontrar lo que marca la báscula. Podemos hacerlo, como siempre, aplicando la segunda ley de Newton,

$$\vec{\mathbf{F}}_\text{neta} = m\vec{\mathbf{a}}.$$

A partir del diagrama de cuerpo libre, vemos que $\vec{\mathbf{F}}_\text{neta} = \vec{\mathbf{F}}_s - \vec{\mathbf{w}}$, por lo que tenemos

$$F_\text{s} - w = ma.$$

Al resolver F_s nos da una ecuación con una sola incógnita:

$$F_s = ma + w,$$

o, dado que $w = mg$, simplemente

$$F_s = ma + mg.$$

No se han hecho suposiciones sobre la aceleración, por lo que esta solución debería ser válida para una variedad de aceleraciones además de las de esta situación. (*Nota:* Consideramos el caso en que el elevador acelera hacia arriba. Si el elevador acelera hacia abajo, la segunda ley de Newton se convierte en $F_s - w = -ma$.)

Solución

a. Tenemos $a = 1{,}20\ \text{m/s}^2$, de modo que

$$F_s = (75{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) + (75{,}0\ \text{kg})(1{,}20\ \text{m/s}^2)$$

que produce

$$F_s = 825\ \text{N}.$$

b. Ahora, ¿qué sucede cuando el elevador alcanza una velocidad constante hacia arriba? ¿La báscula seguirá marcando más que su peso? Para cualquier velocidad constante (hacia arriba, hacia abajo o inmóvil), la aceleración es cero porque $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ y $\Delta v = 0$. Por lo tanto,

$$F_s = ma + mg = 0 + mg$$

o

$$F_s = (75{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2),$$

que da

$$F_s = 735\ \text{N}.$$

Importancia

La lectura de la báscula en la Figura 6.5(a) es de aproximadamente 185 lb. ¿Qué habría leído la báscula si estuviera inmóvil? Como su aceleración sería cero, la fuerza de la báscula sería igual a su peso:

$$F_{\text{neta}} = ma = 0 = F_s - w$$

$$F_s = w = mg$$

$$F_s = (75{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 735\ \text{N}.$$

Por lo tanto, la lectura de la báscula en el elevador es mayor que su peso de 735 N (165 libras). Esto significa que la báscula empuja hacia arriba sobre la persona con una fuerza mayor que su peso, como debe ser, para acelerarla hacia arriba. Evidentemente, cuanto mayor sea la aceleración del elevador, mayor será la lectura de la báscula, en consonancia con lo que se siente en los elevadores de aceleración rápida frente a los de aceleración lenta. En la Figura 6.5(b), la lectura de la báscula es de 735 N, que equivale al peso de la persona. Este es el caso siempre que el elevador tenga una velocidad constante, ya sea subiendo, bajando o inmóvil.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.1

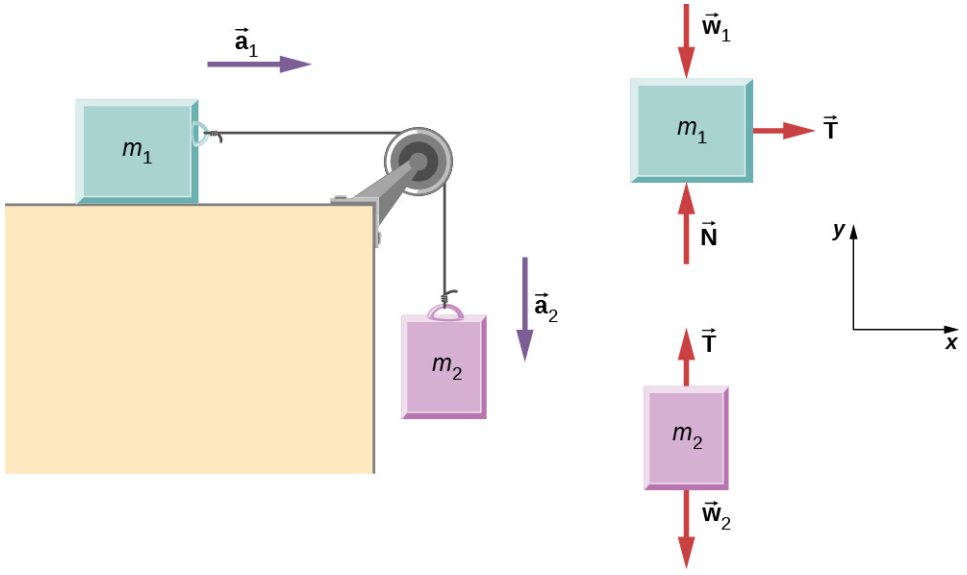
Calcule ahora la lectura de la báscula cuando el elevador acelera hacia abajo a una velocidad de $1{,}20\ \text{m/s}^2$.

La solución del ejemplo anterior también se aplica a un elevador que acelera hacia abajo, como se ha mencionado. Cuando un elevador acelera hacia abajo, *a* es negativa, y la lectura de la báscula es *menor* que el peso de la persona. Si se alcanza una velocidad constante hacia abajo, la lectura de la báscula vuelve a ser igual al peso de la persona. Si el elevador está en caída libre y acelera hacia abajo a *g*, entonces la lectura de la báscula es cero y la persona parece no tener peso.

EJEMPLO 6.4

Dos bloques sujetados

La Figura 6.6 muestra un bloque de masa m_1 en una superficie horizontal sin fricción. Se hala de una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción ni masa. El otro extremo de la cuerda está conectado a un bloque de masa m_2. Halle la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda en términos de $m_1, m_2,$ y g.



(a) (b)

FIGURA 6.6 (a) El bloque 1 está unido por una cuerda ligera al bloque 2. (b) Los diagramas de cuerpo libre de los bloques.

Estrategia

Dibujamos un diagrama de cuerpo libre para cada masa por separado, como se muestra en la Figura 6.6. A continuación, analizamos cado uno de ellos para encontrar las incógnitas necesarias. Las fuerzas sobre el bloque 1 son la fuerza gravitatoria, la fuerza de contacto de la superficie y la tensión de la cuerda. El bloque 2 está sometido a la fuerza gravitatoria y a la tensión de la cuerda. La segunda ley de Newton se aplica a cada uno, por lo que escribimos dos ecuaciones vectoriales:

Para el bloque 1: $\vec{\mathbf{T}} + \vec{\mathbf{w}}_1 + \vec{\mathbf{N}} = m_1\vec{\mathbf{a}}_1$

Para el bloque 2: $\vec{\mathbf{T}} + \vec{\mathbf{w}}_2 = m_2\vec{\mathbf{a}}_2$.

Observe que $\vec{\mathbf{T}}$ es el mismo para ambos bloques. Como la cuerda y la polea tienen una masa despreciable, y como no hay fricción en la polea, la tensión es la misma en toda la cuerda. Ahora podemos escribir las ecuaciones de los componentes de cada bloque. Todas las fuerzas son horizontales o verticales, por lo que podemos utilizar el mismo sistema de coordenadas horizontales/verticales para ambos objetos.

Solución

Las ecuaciones de los componentes se derivan de las ecuaciones vectoriales anteriores. Vemos que el bloque 1 tiene las fuerzas verticales equilibradas, así que las pasamos por alto y escribimos una ecuación que relacione los componentes de x. No hay fuerzas horizontales en el bloque 2, por lo que se escribe únicamente la ecuación de y. Obtenemos estos resultados:

Bloque 1	**Bloque 2**
$\sum F_x = ma_x$	$\sum F_y = ma_y$
$T_x = m_1 a_{1x}$	$T_y - m_2 g = m_2 a_{2y}$.

Cuando el bloque 1 se mueve hacia la derecha, el bloque 2 se desplaza a una distancia igual hacia abajo; por lo tanto, $a_{1x} = -a_{2y}$. Al escribir la aceleración común de los bloques como $a = a_{1x} = -a_{2y}$, ahora tenemos

$$T = m_1 a$$

y

$$T - m_2 g = -m_2 a.$$

A partir de estas dos ecuaciones, podemos expresar a y T en términos de las masas m_1 y m_2, y g :

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

y

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Importancia

Observe que la tensión de la cuerda es *menor* que el peso del bloque que cuelga de su extremo. Un error común en este tipo de problemas es establecer $T = m_2 g$. Se puede ver del diagrama de cuerpo libre del bloque 2 que no es correcto si el bloque acelera.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.2

Calcule la aceleración del sistema, y la tensión en la cuerda, cuando las masas son $m_1 = 5{,}00\ \text{kg}$ y $m_2 = 3{,}00\ \text{kg}$.

EJEMPLO 6.5

Máquina de Atwood

Un problema clásico de la física, similar al que acabamos de resolver, es el de la máquina de Atwood, que consiste en una cuerda que pasa por una polea, con dos objetos de diferente masa unidos. Sirve especialmente para comprender la conexión entre fuerza y movimiento. En la Figura 6.7, $m_1 = 2{,}00\ \text{kg}$ y $m_2 = 4{,}00\ \text{kg}$. Considere que la polea no tiene fricción. (a) Si m_2 se libera, ¿cuál será su aceleración? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

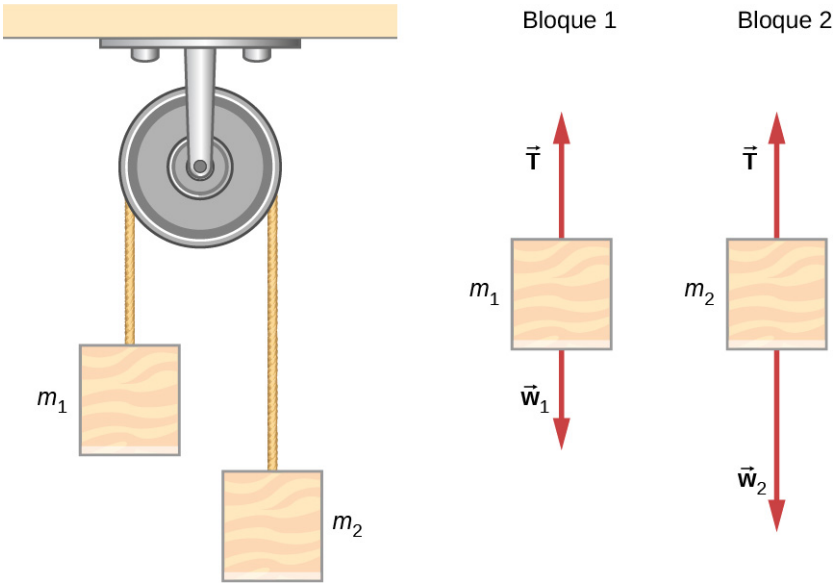


FIGURA 6.7 Una máquina de Atwood y diagramas de cuerpo libre para cada uno de los dos bloques.

Estrategia

Dibujamos un diagrama de cuerpo libre para cada masa por separado, como se muestra en la figura. A continuación, analizamos cada diagrama para encontrar las incógnitas necesarias. Esto puede implicar la solución de ecuaciones simultáneas. También es importante señalar la similitud con el ejemplo anterior. Como el bloque 2 acelera con aceleración a_2 hacia abajo, el bloque 1 acelera hacia arriba con aceleración a_1. Por lo tanto, $a = a_1 = -a_2$.

Solución

a. Tenemos

$$\text{Para } m_1, \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a. \qquad \text{Para } m_2, \sum F_y = T - m_2 g = -m_2 a.$$

(El signo negativo delante de $m_2 a$ indica que m_2 acelera hacia abajo; ambos bloques aceleran a la misma velocidad, pero en direcciones opuestas). Resuelva las dos ecuaciones simultáneamente (réstelas) y el resultado es

$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a.$$

Al resolver a:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{4\text{ kg} - 2\text{ kg}}{4\text{ kg} + 2\text{ kg}}(9{,}8\text{ m/s}^2) = 3{,}27\text{ m/s}^2.$$

b. Al observar el primer bloque, vemos que

$$T - m_1 g = m_1 a$$
$$T = m_1(g + a) = (2\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2 + 3{,}27\text{ m/s}^2) = 26{,}1\text{ N}.$$

Importancia

El resultado de la aceleración dado en la solución puede interpretarse como la razón de la fuerza desequilibrada sobre el sistema, $(m_2 - m_1)g$, a la masa total del sistema, $m_1 + m_2$. También podemos utilizar la máquina de Atwood para medir la intensidad del campo gravitatorio local.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.3

Determine una fórmula general en términos de m_1, m_2 y g para calcular la tensión en la cuerda para la máquina de Atwood mostrada arriba.

Leyes del movimiento y cinemática de Newton

La física es más interesante y poderosa cuando se aplica a situaciones generales que implican algo más que un estrecho conjunto de principios físicos. Las leyes del movimiento de Newton también pueden integrarse con otros conceptos que se han tratado anteriormente en este texto para resolver problemas de movimiento. Por ejemplo, las fuerzas producen aceleración, un tema de la cinemática, y de ahí la relevancia de los capítulos anteriores.

Al abordar problemas que implican varios tipos de fuerzas, aceleración, velocidad o posición, la enumeración de las cantidades dadas y de las que hay que calcular le permitirá identificar los principios implicados. A continuación, puede consultar los capítulos que tratan un tema concreto y resolver el problema con las estrategias indicadas en el texto. El siguiente ejemplo trabajado ilustra cómo se aplica la estrategia de resolución de problemas, dada anteriormente en este capítulo, así como las estrategias presentadas en otros capítulos, a un problema de concepto integrado.

EJEMPLO 6.6

¿Qué fuerza debe ejercer una jugadora de fútbol para alcanzar la velocidad máxima?

Una jugadora de fútbol comienza en reposo y acelera hacia delante, y alcanza una velocidad de 8,00 m/s en 2,50 s. (a) ¿Cuál es su aceleración media? (b) ¿Qué fuerza media ejerce el suelo hacia delante sobre la corredora para que alcance esta aceleración? La masa de la jugadora es de 70,0 kg y la resistencia del aire es despreciable.

Estrategia

Para encontrar las respuestas a este problema, utilizamos la estrategia de resolución de problemas, dada anteriormente en este capítulo. Las soluciones de cada parte del ejemplo ilustran cómo aplicar los pasos específicos de la resolución de problemas. En este caso, no es necesario utilizar todos los pasos. Simplemente identificamos los principios físicos y, por lo tanto, los valores conocidos y las incógnitas; aplicamos la segunda ley de Newton y comprobamos si la respuesta es razonable.

Solución

a. Se nos dan las velocidades inicial y final (cero y 8,00 m/s hacia adelante); por lo tanto, el cambio de velocidad es $\Delta v = 8{,}00$ m/s. Nos dan el tiempo transcurrido, así que $\Delta t = 2{,}50$ s. La incógnita es la aceleración, que se puede encontrar a partir de su definición:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Al sustituir los valores conocidos se tiene

$$a = \frac{8{,}00 \text{ m/s}}{2{,}50 \text{ s}} = 3{,}20 \text{ m/s}^2.$$

b. Aquí se nos pide que encontremos la fuerza media que el suelo ejerce sobre la corredora para producir esta aceleración. (Recuerde que se trata de la fuerza o fuerzas que actúan sobre el objeto de interés). Esta es la fuerza de reacción a la que ejerce la jugadora hacia atrás contra el suelo, por la tercera ley de Newton. Al ignorar la resistencia del aire, esto sería igual en magnitud a la fuerza externa neta sobre la jugadora, ya que esta fuerza causa su aceleración. Como ahora conocemos la aceleración de la jugadora y tenemos su masa, podemos utilizar la segunda ley de Newton para encontrar la fuerza ejercida. Eso es,

$$F_{\text{neta}} = ma.$$

Al sustituir los valores conocidos de m y a obtenemos

$$F_{\text{neta}} = (70{,}0 \text{ kg})(3{,}20 \text{ m/s}^2) = 224 \text{ N}.$$

Este es un resultado razonable: la aceleración es alcanzable para un atleta en buenas condiciones. La fuerza es de aproximadamente 50 libras, una fuerza media razonable.

Importancia

Este ejemplo ilustra cómo aplicar las estrategias de resolución de problemas a situaciones que incluyen temas de diferentes capítulos. El primer paso es identificar los principios físicos, los valores conocidos y las incógnitas del problema. El segundo paso es resolver la incógnita, en este caso con la segunda ley de Newton. Por último, comprobamos nuestra respuesta para asegurarnos de que sea razonable. Estas técnicas de problemas de conceptos integrados serán útiles en aplicaciones de la física fuera de un curso de física, como en su profesión, en otras disciplinas científicas y en la vida cotidiana.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.4

La jugadora de fútbol se detiene tras realizar la jugada descrita anteriormente, pero ahora se da cuenta de que la pelota se puede robar. Si ahora experimenta una fuerza de 126 N para intentar robar la pelota, que está a 2,00 m de ella, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a la pelota?

EJEMPLO 6.7

¿Qué fuerza actúa sobre un modelo de helicóptero?

Un modelo de helicóptero de 1,50 kg tiene una velocidad de $5{,}00\hat{\mathbf{j}}$ m/s a $t = 0$. Se acelera a una tasa constante durante dos segundos (2,00 s) después de lo cual tiene una velocidad de $\left(6{,}00\hat{\mathbf{i}} + 12{,}00\hat{\mathbf{j}}\right)$ m/s. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre el helicóptero durante este intervalo?

Estrategia

Podemos establecer fácilmente un sistema de coordenadas en el que el eje de la x ($\hat{\mathbf{i}}$) es horizontal, y el eje de la y ($\hat{\mathbf{j}}$) es vertical. Sabemos que $\Delta t = 2{,}00s$ y $\Delta v = (6{,}00\hat{\mathbf{i}} + 12{,}00\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}) - (5{,}00\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})$. A partir de esto, podemos calcular la aceleración por la definición; entonces podemos aplicar la segunda ley de Newton.

Solución

Tenemos

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(6{,}00\hat{\mathbf{i}} + 12{,}00\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}) - (5{,}00\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})}{2{,}00\ \text{s}} = 3{,}00\hat{\mathbf{i}} + 3{,}50\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}^2$$

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = (1{,}50\ \text{kg})(3{,}00\hat{\mathbf{i}} + 3{,}50\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2) = 4{,}50\hat{\mathbf{i}} + 5{,}25\hat{\mathbf{j}}\ \text{N}.$$

La magnitud de la fuerza se encuentra ahora fácilmente:

$$F = \sqrt{(4{,}50\ \text{N})^2 + (5{,}25\ \text{N})^2} = 6{,}91\ \text{N}.$$

Importancia

El problema original se planteó en términos de componentes vectoriales $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$, por lo que utilizamos métodos vectoriales. Compare este ejemplo con el anterior.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.5

Halle la dirección de la resultante para el modelo de helicóptero de 1,50 kg.

EJEMPLO 6.8

Tractor de equipaje

La Figura 6.8(a) muestra un tractor de equipaje que hala los carros portaequipajes de un avión. El tractor tiene

una masa de 650,0 kg, mientras que el carro A tiene una masa de 250,0 kg y el carro B tiene una masa de 150,0 kg. La fuerza motriz que actúa durante un breve lapso acelera el sistema desde el reposo y actúa durante 3,00 s. (a) Si esta fuerza motriz está dada por $F = (820{,}0t)$ N, halle la rapidez después de 3,00 segundos. (b) ¿Cuál es la fuerza horizontal que actúa sobre el cable de conexión entre el tractor y el carro A en este instante?

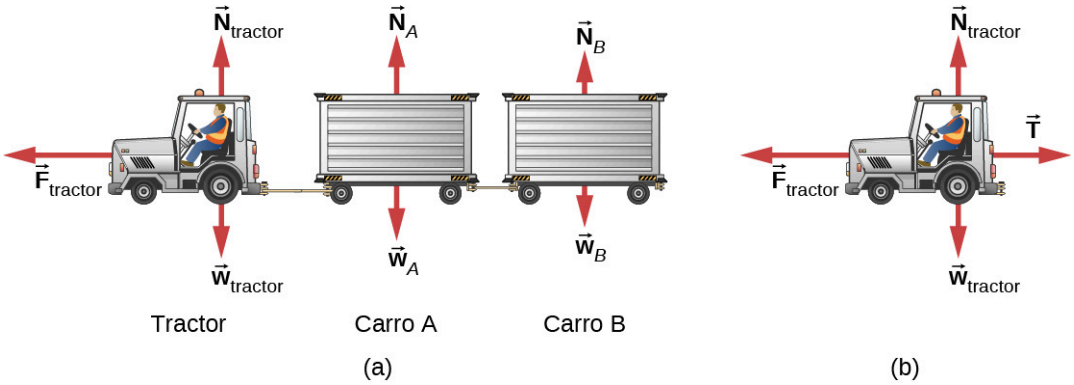


FIGURA 6.8 (a) Se muestra un diagrama de cuerpo libre que indica todas las fuerzas externas sobre el sistema formado por el tractor y los carros portaequipajes para transportar el equipaje de la aerolínea. (b) Se muestra un diagrama de cuerpo libre solo del tractor aislado para calcular la tensión en el cable a los carros.

Estrategia

Un diagrama de cuerpo libre muestra la fuerza motriz del tractor, que da al sistema su aceleración. Solo tenemos que considerar el movimiento en la dirección horizontal. Las fuerzas verticales se equilibran entre sí y no es necesario considerarlas. Para la parte b, utilizamos un diagrama de cuerpo libre del tractor solo para determinar la fuerza entre este y el carro A. Esto expone la fuerza de acoplamiento $\vec{\mathbf{T}}$, que es nuestro objetivo.

Solución

a. $\sum F_x = m_{\text{sistema}}\, a_x$ y $\sum F_x = 820{,}0t$, así que

$$\begin{aligned} 820{,}0t &= (650{,}0 + 250{,}0 + 150{,}0)a \\ a &= 0{,}7809t. \end{aligned}$$

Dado que la aceleración es una función del tiempo, podemos determinar la velocidad del tractor mediante $a = \frac{dv}{dt}$ con la condición inicial de que $v_0 = 0$ a $t = 0$. Integramos desde $t = 0$ a $t = 3$:

$$dv = adt, \quad \int_0^3 dv = \int_0^{3{,}00} adt = \int_0^{3{,}00} 0{,}7809t\,dt, \quad v = 0{,}3905t^2\Big]_0^{3{,}00} = 3{,}51 \text{ m/s}.$$

b. Consulte el diagrama de cuerpo libre en la Figura 6.8(b).

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_{\text{tractor}}\, a_x \\ 820{,}0t - T &= m_{\text{tractor}}(0{,}7805)t \\ (820{,}0)(3{,}00) - T &= (650{,}0)(0{,}7805)(3{,}00) \\ T &= 938 \text{ N}. \end{aligned}$$

Importancia

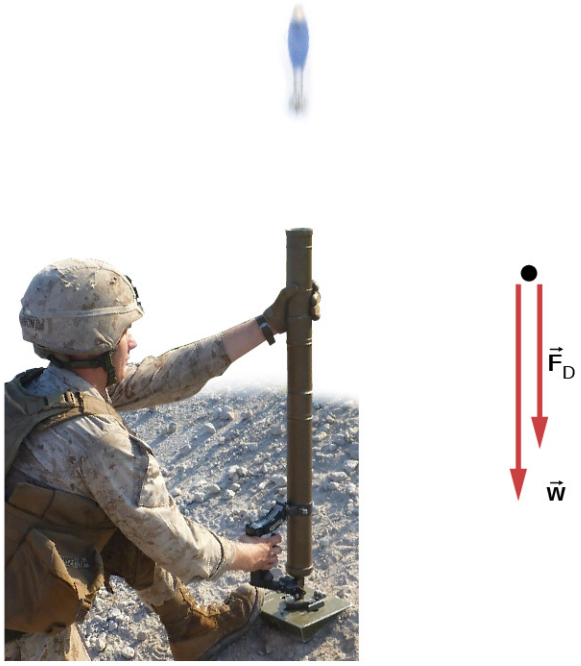
Como la fuerza varía con el tiempo, debemos utilizar el cálculo para resolver este problema. Observe cómo la masa total del sistema era importante para resolver la (a) Figura 6.8, mientras que solo la masa del camión (ya que suministraba la fuerza) era útil en la Figura 6.8(b).

Recuerde que $v = \frac{ds}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt}$. Si la aceleración es una función del tiempo, podemos utilizar las formas de cálculo desarrolladas en Movimiento en línea recta, como se muestra en este ejemplo. Sin embargo, a veces la aceleración es una función del desplazamiento. En este caso, podemos derivar un resultado importante de estas relaciones de cálculo. Al resolver dt en cada uno, tenemos $dt = \frac{ds}{v}$ y $dt = \frac{dv}{a}$. Ahora, al igualar estas expresiones, tenemos $\frac{ds}{v} = \frac{dv}{a}$. Podemos reordenar esto para obtener $ads = vdv$.

EJEMPLO 6.9

Movimiento de un proyectil disparado verticalmente

Un proyectil de mortero de 10,0 kg se dispara verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 50,0 m/s (ver la Figura 6.9). Determine la altura máxima que recorrerá si la resistencia atmosférica se mide como $F_{\mathrm{D}} = (0{,}0100v^2)$ N, donde v es la rapidez en cualquier instante.



(a) (b)

FIGURA 6.9 (a) El mortero dispara un proyectil en línea recta hacia arriba; consideramos la fuerza de fricción proporcionada por el aire. (b) Se muestra un diagrama de cuerpo libre que indica todas las fuerzas sobre el proyectil de mortero (créditos: a. modificación del trabajo de OS541/DoD. La información visual del Departamento de Defensa (Department of Defense, DoD) de los EE. UU. no implica ni constituye el respaldo del DoD).

Estrategia

La fuerza conocida sobre el proyectil de mortero puede relacionarse con su aceleración mediante el empleo de las ecuaciones del movimiento. La cinemática puede utilizarse entonces para relacionar la aceleración del proyectil de mortero con su posición.

Solución

Inicialmente, $y_0 = 0$ y $v_0 = 50{,}0$ m/s. En la altura máxima $y = h$, $v = 0$. El diagrama de cuerpo libre muestra F_{D} actúa hacia abajo, porque frena el movimiento ascendente del proyectil de mortero. Así, podemos escribir

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\begin{aligned} -F_{\mathrm{D}} - w &= ma_y \\ -0{,}0100v^2 - 98{,}0 &= 10{,}0a \\ a &= -0{,}00100v^2 - 9{,}80. \end{aligned}$$

La aceleración depende de v y, por tanto, es variable. Dado que $a = f(v)$, podemos relacionar a con v mediante el reordenamiento descrito anteriormente,

$$ads = vdv.$$

Sustituimos ds por dy porque se trata de la dirección vertical,

$$ady = vdv, \quad (-0{,}00100v^2 - 9{,}80)dy = vdv.$$

Ahora separamos las variables (v y dv por un lado; dy por otro):

$$\int_0^h dy = \int_{50{,}0}^0 \frac{vdv}{(-0{,}00100v^2 - 9{,}80)}$$

$$\int_0^h dy = -\int_{50{,}0}^0 \frac{vdv}{(0{,}00100v^2 + 9{,}80)} = (-5 \times 10^3)\ln(0{,}00100v^2 + 9{,}80)\Big|_{50{,}0}^0.$$

Por lo tanto, $h = 114$ m.

Importancia

Observe la necesidad de aplicar el cálculo, ya que la fuerza no es constante, lo que significa también que la aceleración no es constante. Por si fuera poco, la fuerza depende de v (no de t), por lo que debemos utilizar el truco explicado antes del ejemplo. La respuesta para la altura indica una menor elevación si hubiera resistencia del aire. Trataremos los efectos de la resistencia del aire y otras fuerzas de arrastre con más detalle en Fuerza de arrastre y velocidad límite.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.6

Si se ignora la resistencia atmosférica, halle la altura máxima del proyectil de mortero. ¿Es necesario el cálculo para esta solución?

INTERACTIVO

Explore las fuerzas que actúan en esta simulación (https://openstax.org/l/21forcesatwork) cuando intenta empujar un archivador. Cree una fuerza aplicada y vea la fuerza de fricción resultante y la fuerza total que actúa sobre el archivador. Los gráficos muestran las fuerzas, la posición, la velocidad y la aceleración frente al tiempo. Visualice un diagrama de cuerpo libre de todas las fuerzas (inclusive las fuerzas gravitacionales y normales).

6.2 Fricción

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir las características generales de la fricción.
- Enumerar los distintos tipos de fricción.
- Calcular la magnitud de la fricción estática y cinética, y utilizarlas en problemas que impliquen las leyes del movimiento de Newton.

Cuando un cuerpo está en movimiento, tiene resistencia porque el cuerpo interactúa con su entorno. Esta resistencia es una fuerza de fricción. La fricción se opone al movimiento relativo entre sistemas en contacto, pero también nos permite movernos, un concepto que se hace evidente si se intenta caminar sobre el hielo. La fricción es una fuerza común, aunque compleja, y su comportamiento aún no se comprende del todo. Aun así, es posible entender las circunstancias en las que se comporta.

Fricción estática y cinética

La definición básica de **fricción** es relativamente sencilla de enunciar.

Fricción

La fricción es una fuerza que se opone al movimiento relativo entre sistemas en contacto.

Hay varias formas de fricción. Una de las características más sencillas de la fricción por deslizamiento es que es paralela a las superficies de contacto entre los sistemas y siempre está en una dirección que se opone al movimiento o intento de movimiento de los sistemas entre sí. Si dos sistemas están en contacto y se mueven uno respecto al otro, la fricción entre ellos se denomina fricción cinética. Por ejemplo, la fricción frena el deslizamiento de un disco de hockey sobre el hielo. Cuando los objetos están inmóviles, la fricción estática puede actuar entre ellos; la fricción estática suele ser mayor que la fricción cinética entre dos objetos.

Fricción estática y cinética

Si dos sistemas están en contacto y estacionarios uno respecto al otro, la fricción entre ellos se denomina **fricción estática**. Si dos sistemas están en contacto y se mueven uno respecto al otro, la fricción entre ellos se denomina **fricción cinética**.

Imagine, por ejemplo, que intenta deslizar una caja pesada por un piso de hormigón: podría empujar muy fuerte la caja y no moverla en absoluto. Esto significa que la fricción estática responde a lo que usted hace: aumenta para ser igual y en la dirección opuesta a su empujón. Si finalmente empuja lo suficientemente fuerte, la caja parece deslizarse de repente y comienza a moverse. Ahora la fricción estática da paso a la fricción cinética. Una vez en movimiento, es más fácil mantenerla en movimiento que lo que fue ponerla en marcha, lo que indica que la fuerza de fricción cinética es menor que la fuerza de fricción estática. Si se añade masa a la caja, por ejemplo, si coloca una caja encima, hay que empujar aún más fuerte para ponerla en marcha y también para mantenerla en movimiento. Además, si aceitara el hormigón le resultaría más fácil poner la caja en marcha y mantenerla en marcha (como es lógico).

La Figura 6.10 es una burda representación pictórica de cómo se produce la fricción en la interfaz entre dos objetos. La inspección de cerca de estas superficies muestra que son ásperas. Por lo tanto, cuando empuja para que un objeto se mueva (en este caso, una caja), debe alzar el objeto hasta que pueda saltar con solo las puntas de la superficie golpeando, romper las puntas, o ambas cosas. La fricción puede resistir una fuerza considerable, sin movimiento aparente. Cuanto más fuerte se empujen las superficies entre sí (por ejemplo, si se coloca otra caja sobre la caja), más fuerza se necesitará para moverlas. Una parte de la fricción se debe a las fuerzas adhesivas entre las moléculas de la superficie de los dos objetos, lo que explica la dependencia de la fricción de la naturaleza de las sustancias. Por ejemplo, los zapatos con suela de goma resbalan menos que los que tienen suela de cuero. La adhesión varía con las sustancias en contacto y es un aspecto complicado de la física de las superficies. Una vez que el objeto está en movimiento, hay menos puntos de contacto (menos moléculas adheridas), por lo que se requiere menos fuerza para mantenerlo en movimiento. A poca rapidez, pero distinta a cero, la fricción es casi independiente de la velocidad.

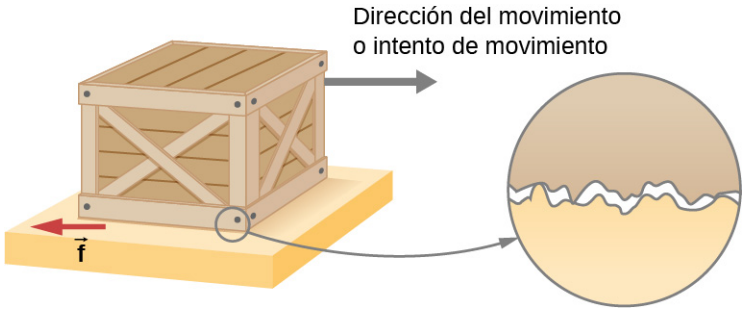


FIGURA 6.10 Las fuerzas de fricción, como $\vec{\mathbf{f}}$, siempre se oponen al movimiento o al intento de movimiento entre objetos en contacto. La fricción se produce en parte por la aspereza de las superficies en contacto, como se ve en la vista ampliada. Para que el objeto se mueva, debe elevarse hasta donde los picos de la superficie superior puedan saltar a lo largo de la superficie inferior. Por lo tanto, se requiere una fuerza solo para poner el objeto en movimiento. Algunos de los picos se quebrarán, lo que exigirá también una fuerza para mantener el movimiento. En realidad, gran parte de la fricción se debe a las fuerzas de atracción entre las moléculas que componen los dos objetos, de modo que incluso las superficies perfectamente lisas no están exentas de fricción. (De hecho, superficies perfectamente lisas y limpias de materiales similares se adherirían para formar una unión denominada "soldadura en frío").

La magnitud de la fuerza de fricción tiene dos formas: una para situaciones estáticas (fricción estática) y otra para situaciones de movimiento (fricción cinética). Lo que sigue es apenas un modelo empírico aproximado (determinado experimentalmente). Estas ecuaciones para la fricción estática y cinética no son ecuaciones vectoriales.

Magnitud de la fricción estática

La magnitud de la fricción estática f_s es

$$f_\text{s} \leq \mu_\text{s} N, \tag{6.1}$$

donde μ_s es el coeficiente de fricción estática y N es la magnitud de la fuerza normal.

El símbolo $\leq$ significa *menor o igual que*, lo que implica que la fricción estática puede tener un valor máximo de $\mu_\text{s} N$. La fricción estática es una fuerza de respuesta que aumenta para ser igual y opuesta a cualquier fuerza que se ejerza, hasta su límite máximo. Una vez que la fuerza aplicada supera

$f_\text{s}(\text{máx})$, el objeto se mueve. Por lo tanto,

$$f_\text{s}(\text{máx}) = \mu_\text{s} N.$$

Magnitud de la fricción cinética

La magnitud de la fricción cinética f_k viene dada por

$$f_\text{k} = \mu_\text{k} N, \tag{6.2}$$

donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética.

Un sistema en el que $f_\text{k} = \mu_\text{k} N$ se describe como un sistema en el que la *fricción se comporta de forma sencilla*. La transición de la fricción estática a la cinética se ilustra en la Figura 6.11.

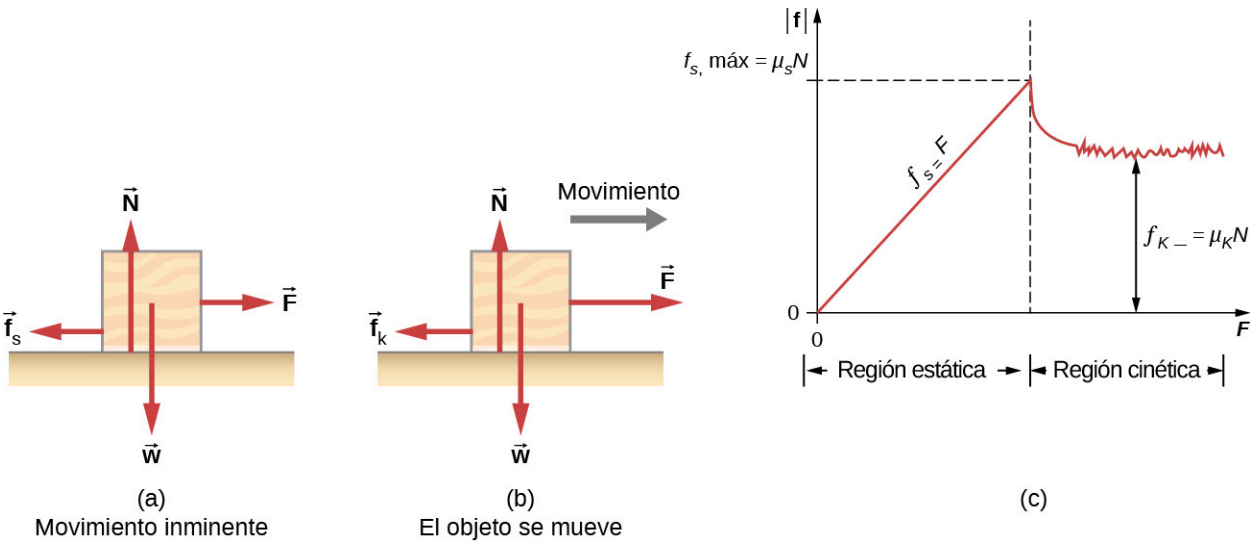


FIGURA 6.11 (a) La fuerza de fricción $\vec{\mathbf{f}}$ entre el bloque y la superficie áspera se opone a la dirección de la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$. La magnitud de la fricción estática equilibra la de la fuerza aplicada. Esto se muestra en la parte izquierda del gráfico en (c). (b) En algún momento, la magnitud de la fuerza aplicada es mayor que la fuerza de fricción cinética, y el bloque se mueve hacia la derecha. Esto se muestra en la parte derecha del gráfico. (c) El gráfico de la fuerza de fricción frente a la fuerza aplicada; observe que $f_s(\text{máx}) > f_k$. Esto significa que $\mu_s > \mu_k$.

Como puede ver en la Tabla 6.1, los coeficientes de fricción cinética son menores que sus homólogos estáticos. Los valores aproximados de μ se indican a solo uno o dos dígitos para señalar la descripción aproximada de la fricción dada por las dos ecuaciones anteriores.

Sistema	Fricción estática μ_s	Fricción cinética μ_k
Goma sobre hormigón seco	1,0	0,7
Goma sobre hormigón húmedo	0,5-0,7	0,3-0,5
Madera sobre madera	0,5	0,3
Madera encerada sobre nieve húmeda	0,14	0,1
Metal sobre madera	0,5	0,3
Acero sobre acero (en seco)	0,6	0,3
Acero sobre acero (aceitado)	0,05	0,03
Teflón sobre acero	0,04	0,04
Hueso lubricado por líquido sinovial	0,016	0,015
Zapatos sobre madera	0,9	0,7
Zapatos sobre hielo	0,1	0,05
Hielo sobre hielo	0,1	0,03

Sistema	Fricción estática μ_s	Fricción cinética μ_k
Acero sobre hielo	0,4	0,02

TABLA 6.1 Coeficientes aproximados de fricción estática y cinética

La Ecuación 6.1 y la Ecuación 6.2 incluyen la dependencia de la fricción con los materiales y la fuerza normal. La dirección de la fricción es siempre opuesta a la del movimiento, paralela a la superficie entre los objetos y perpendicular a la fuerza normal. Por ejemplo, si la caja que se intenta empujar (con una fuerza paralela al suelo) tiene una masa de 100 kg, entonces la fuerza normal es igual a su peso,

$$w = mg = (100\,\text{kg})\left(9{,}80\,\text{m/s}^2\right) = 980\,\text{N},$$

perpendicular al suelo. Si el coeficiente de fricción estática es de 0,45, tendría que ejercer una fuerza paralela al suelo superior a

$$f_s(\text{máx}) = \mu_s N = (0{,}45)(980\,\text{N}) = 440\,\text{N}$$

para mover la caja. Una vez que hay movimiento, la fricción es menor y el coeficiente de fricción cinética puede ser 0,30, por lo que una fuerza de solo

$$f_k = \mu_k N = (0{,}30)(980\,\text{N}) = 290\,\text{N}$$

lo mantiene en movimiento a una rapidez constante. Si el suelo está lubricado, ambos coeficientes son considerablemente menores de lo que serían sin lubricación. El coeficiente de fricción es una cantidad sin unidad con una magnitud generalmente entre 0 y 1,0. El valor real depende de las dos superficies que están en contacto.

Muchas personas han experimentado lo resbaladizo que resulta caminar sobre el hielo. Sin embargo, muchas partes del cuerpo, especialmente las articulaciones, tienen coeficientes de fricción mucho menores, a menudo tres o cuatro veces menos que el hielo. Una articulación está formada por los extremos de dos huesos, que están unidos por tejidos gruesos. La articulación de la rodilla está formada por el hueso de la parte inferior de la pierna (la tibia) y el hueso del muslo (el fémur). La cadera es una articulación de rótula (en el extremo del fémur) y cavidad (parte de la pelvis). Los extremos de los huesos de la articulación están cubiertos por cartílago, que proporciona una superficie lisa, casi cristalina. Las articulaciones también producen un líquido (líquido sinovial) que reduce la fricción y el desgaste. Una articulación dañada o artrítica puede reemplazarse con una articulación artificial (Figura 6.12). Estas prótesis pueden ser de metal (acero inoxidable o titanio) o de plástico (polietileno), también con coeficientes de fricción muy pequeños.

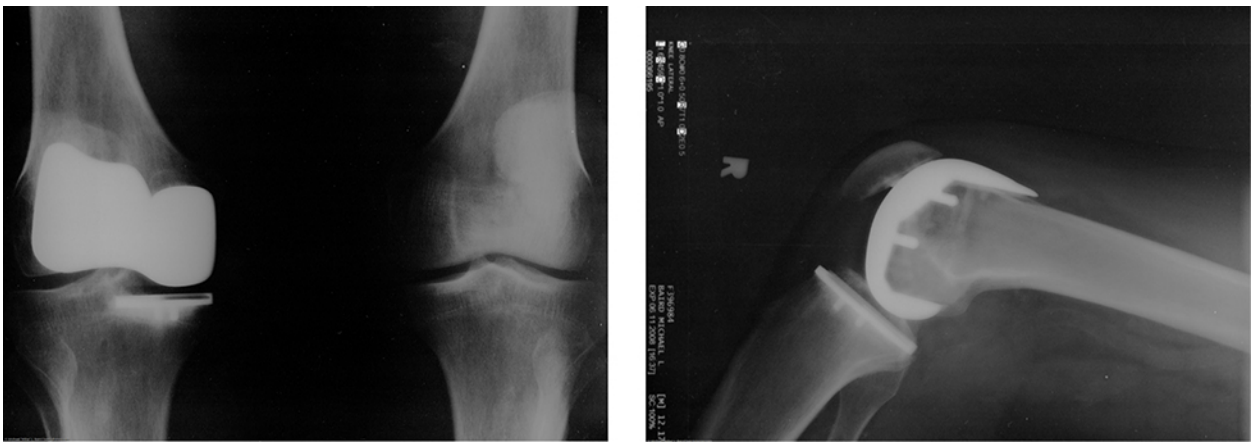


FIGURA 6.12 El reemplazo de rodilla artificial es un procedimiento que se realiza desde hace más de 20 años. Estas radiografías postoperatorias muestran el reemplazo de la articulación de la rodilla derecha (créditos: modificación del trabajo de Mike Baird).

Entre los lubricantes naturales se encuentran la saliva que facilita la deglución, y el moco viscoso que se

encuentra entre los órganos del cuerpo y los protege y lubrica durante los latidos del corazón, durante la respiración y cuando la persona se mueve. Los hospitales y las clínicas médicas utilizan lubricantes artificiales, como gel, para reducir la fricción.

Las ecuaciones dadas para la fricción estática y cinética son leyes empíricas que describen el comportamiento de las fuerzas de fricción. Aunque estas fórmulas son muy útiles a efectos prácticos, no tienen la categoría de enunciados matemáticos que representan los principios generales (por ejemplo, la segunda ley de Newton). De hecho, hay casos para los que estas ecuaciones ni siquiera son buenas aproximaciones. Por ejemplo, ninguna de las dos fórmulas es precisa para superficies lubricadas o para dos superficies que se deslizan una sobre otra a gran rapidez. A menos que se especifique, no nos ocuparemos de estas excepciones.

EJEMPLO 6.10

Fricción estática y cinética

Una caja de 20,0 kg está en reposo sobre el piso, como se muestra en la Figura 6.13. El coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es de 0,700 y el coeficiente de fricción cinética es de 0,600. Una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{P}}$ se aplica a la caja. Halle la fuerza de fricción si (a) $\vec{\mathbf{P}} = 20{,}0\ \text{N}$, (b) $\vec{\mathbf{P}} = 30{,}0\ \text{N}$, (c) $\vec{\mathbf{P}} = 120{,}0\ \text{N}$, y (d) $\vec{\mathbf{P}} = 180{,}0\ \text{N}$.

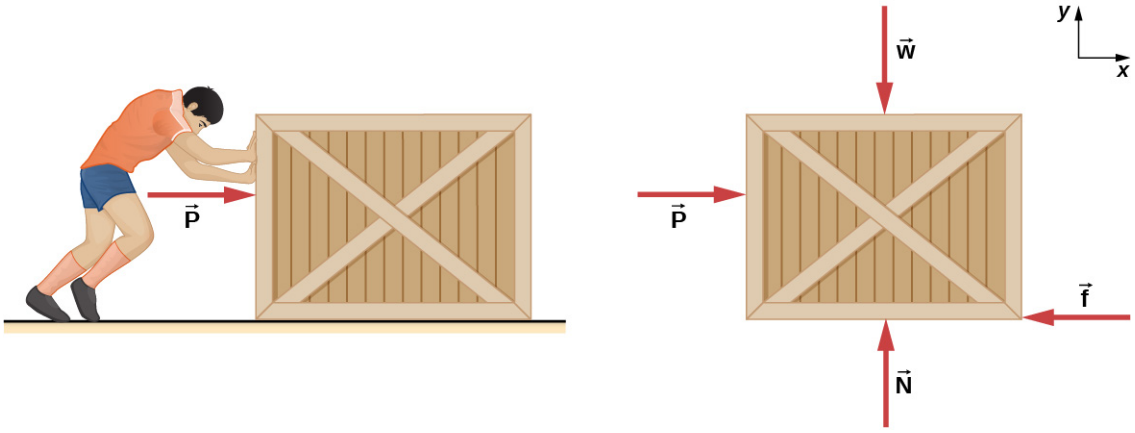


FIGURA 6.13 (a) Una caja situada en una superficie horizontal se empuja con una fuerza $\vec{\mathbf{P}}$. (b) Las fuerzas sobre la caja. Aquí, $\vec{\mathbf{f}}$ puede representar la fuerza de fricción estática o cinética.

Estrategia

El diagrama de cuerpo libre de la caja se muestra en la Figura 6.13(b). Aplicamos la segunda ley de Newton en las direcciones horizontal y vertical, incluso la fuerza de fricción en oposición a la dirección del movimiento de la caja.

Solución

La segunda ley de Newton DA

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y$$
$$P - f = ma_x \qquad N - w = 0.$$

Aquí utilizamos el símbolo f para representar la fuerza de fricción, ya que aún no hemos determinado si la caja está sometida a fricción estática o fricción cinética. Lo hacemos siempre que no estemos seguros del tipo de fricción que está actuando. Ahora el peso de la caja es

$$w = (20{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 196\ \text{N},$$

que también es igual a N. Por tanto, la fuerza máxima de fricción estática es $(0{,}700)\,(196\ \text{N}) = 137\ \text{N}$. Siempre

que $\vec{\mathbf{P}}$ sea inferior a 137 N, la fuerza de fricción estática mantendrá la caja inmóvil y $f_\mathrm{s} = \vec{\mathbf{P}}$. Por lo tanto, (a) $f_s = 20{,}0$ N, (b) $f_s = 30{,}0$ N, y (c) $f_s = 120{,}0$ N.

(d) Si $\vec{\mathbf{P}} = 180{,}0$ N, la fuerza aplicada es mayor que la fuerza máxima de fricción estática (137 N), por lo que la caja ya no puede permanecer en reposo. Una vez que la caja esté en movimiento, actúa la fricción cinética. Entonces

$$f_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{k} N = (0{,}600)(196\ \mathrm{N}) = 118\ \mathrm{N},$$

y la aceleración es

$$a_x = \frac{\vec{\mathrm{P}} - f_\mathrm{k}}{m} = \frac{180{,}0\ \mathrm{N} - 118\ \mathrm{N}}{20{,}0\ \mathrm{kg}} = 3{,}10\ \mathrm{m/s^2}.$$

Importancia

Este ejemplo ilustra cómo consideramos la fricción en un problema de dinámica. Observe que la fricción estática tiene un valor que coincide con la fuerza aplicada, hasta que alcanzamos el valor máximo de fricción estática. Además, no puede producirse ningún movimiento hasta que la fuerza aplicada sea igual a la fuerza de fricción estática, pero la fuerza de fricción cinética será entonces menor.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.7

Un bloque de masa 1,0 kg descansa sobre una superficie horizontal. Los coeficientes de fricción para el bloque y la superficie son $\mu_s = 0{,}50$ y $\mu_k = 0{,}40$. (a) ¿Cuál es la mínima fuerza horizontal necesaria para mover el bloque? (b) ¿Cuál es la aceleración del bloque cuando se aplica esta fuerza?

Fricción y el plano inclinado

Una situación en la que la fricción desempeña un papel evidente es la de un objeto en una pendiente. Puede tratarse de una caja que se empuja por una rampa hasta un muelle de carga o de un patinador que desciende por una montaña, pero la física básica es la misma. Solemos generalizar la superficie con pendiente y llamarla plano inclinado, pero luego fingimos que la superficie es plana. Veamos un ejemplo de análisis del movimiento en un plano inclinado con fricción.

EJEMPLO 6.11

Esquiador cuesta abajo

Un esquiador con una masa de 62 kg se desliza por una pendiente nevada con aceleración constante. Halle el coeficiente de fricción cinética del esquiador si se sabe que la fricción es de 45,0 N.

Estrategia

La magnitud de la fricción cinética es de 45,0 N. La fricción cinética está relacionada con la fuerza normal N por $f_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{k} N$; por lo tanto, podemos encontrar el coeficiente de fricción cinética si encontramos la fuerza normal sobre el esquiador. La fuerza normal es siempre perpendicular a la superficie, y como no hay movimiento perpendicular a la superficie, la fuerza normal debe ser igual al componente del peso del esquiador perpendicular a la pendiente. (Vea la Figura 6.14, que repite una figura del capítulo sobre las leyes del movimiento de Newton).

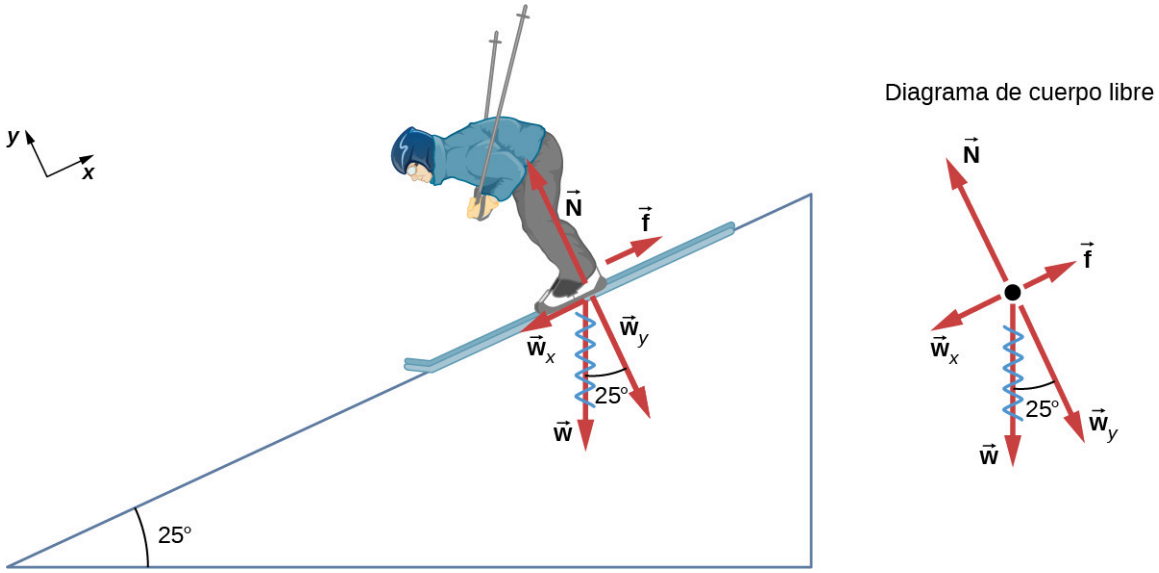


FIGURA 6.14 El movimiento del esquiador y la fricción son paralelos a la pendiente, por lo que lo más conveniente es proyectar todas las fuerzas en un sistema de coordenadas en el que un eje es paralelo a la pendiente y el otro es perpendicular (los ejes se muestran a la izquierda del esquiador). La fuerza normal $\vec{\mathbf{N}}$ es perpendicular a la pendiente, y la fricción $\vec{\mathbf{f}}$ es paralela a la pendiente, pero el peso del esquiador $\vec{\mathbf{w}}$ tiene componentes a lo largo de ambos ejes, es decir $\vec{\mathbf{w}}_y$ y $\vec{\mathbf{w}}_x$. La fuerza normal $\vec{\mathbf{N}}$ es igual en magnitud a $\vec{\mathbf{w}}_y$, por lo que no hay movimiento perpendicular a la pendiente. Sin embargo, $\vec{\mathbf{f}}$ es igual a $\vec{\mathbf{w}}_x$ en magnitud, por lo que hay una velocidad constante hacia abajo en la pendiente (a lo largo del eje de la *x*).

Tenemos

$$N = w_y = w\cos 25^\circ = mg\cos 25^\circ.$$

Al sustituir esto en nuestra expresión de la fricción cinética, obtenemos

$$f_\text{k} = \mu_\text{k} mg\cos 25^\circ,$$

que ahora se puede resolver para el coeficiente de fricción cinética μ_k.

Solución

Al resolver μ_k da

$$\mu_\text{k} = \frac{f_\text{k}}{N} = \frac{f_\text{k}}{w\cos 25^\circ} = \frac{f_\text{k}}{mg\cos 25^\circ}.$$

Al sustituir los valores conocidos en el lado derecho de la ecuación,

$$\mu_\text{k} = \frac{45{,}0\ \text{N}}{(62\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2)(0{,}906)} = 0{,}082.$$

Importancia

Este resultado es un poco menor que el coeficiente indicado en la Tabla 6.1 para la madera encerada sobre la nieve, pero sigue siendo razonable, ya que los valores de los coeficientes de fricción pueden variar mucho. En situaciones como esta, en la que un objeto de masa m se desliza por una pendiente que forma un ángulo θ con la horizontal, la fricción está dada por $f_\text{k} = \mu_\text{k} mg\cos\theta$. Todos los objetos se deslizan hacia abajo por una pendiente con aceleración constante en estas circunstancias.

Hemos hablado de que, cuando un objeto se apoya en una superficie horizontal, la fuerza normal que lo sostiene es igual en magnitud a su peso. Además, la fricción simple es siempre proporcional a la fuerza normal. Cuando un objeto no está sobre una superficie horizontal, como en el caso del plano inclinado,

debemos encontrar la fuerza que actúa sobre el objeto y que está dirigida perpendicularmente a la superficie; es un componente del peso.

Ahora derivamos una relación útil para calcular el coeficiente de fricción en un plano inclinado. Observe que el resultado se aplica solo para situaciones en las que el objeto se desliza con rapidez constante por la rampa.

Un objeto se desliza por un plano inclinado a velocidad constante si la fuerza neta sobre el objeto es cero. Podemos utilizar este hecho para medir el coeficiente de fricción cinética entre dos objetos. Como se muestra en el Ejemplo 6.11, la fricción cinética en una pendiente es $f_k = \mu_k mg \cos\theta$. El componente del peso hacia abajo de la pendiente es igual a $mg \operatorname{sen}\theta$ (observe el diagrama de cuerpo libre en la Figura 6.14). Estas fuerzas actúan en direcciones opuestas, por lo que, cuando tienen igual magnitud, la aceleración es cero. Escribiendo esto,

$$\mu_\text{k} mg \cos\theta = mg \operatorname{sen}\theta.$$

Al resolver μ_k, encontramos que

$$\mu_\text{k} = \frac{mg \operatorname{sen}\theta}{mg \cos\theta} = \tan\theta.$$

Coloque una moneda sobre un libro e inclínelo hasta que la moneda se deslice a una velocidad constante por el libro. Es posible que tenga que golpear ligeramente el libro para que la moneda se mueva. Mida el ángulo de inclinación con respecto a la horizontal y calcule μ_k. Observe que la moneda no empieza a deslizarse en absoluto hasta que un ángulo superior a θ se obtiene, ya que el coeficiente de fricción estática es mayor que el coeficiente de fricción cinética. Piense en cómo esto puede afectar el valor para μ_k y su incertidumbre.

Explicaciones a escala atómica de la fricción

Los aspectos más sencillos de la fricción tratados hasta ahora son sus características macroscópicas (a gran escala). En las últimas décadas se han producido grandes avances en la explicación de la fricción a escala atómica. Los investigadores están descubriendo que la naturaleza atómica de la fricción parece tener varias características fundamentales. Estas características no solo explican algunos de los aspectos más sencillos de la fricción, sino que también encierran el potencial para el desarrollo de entornos casi sin fricción. Esto podría ahorrar cientos de miles de millones de dólares en energía que actualmente se convierte (innecesariamente) en calor.

La Figura 6.15 ilustra una característica macroscópica de la fricción que se explica mediante la investigación microscópica (a pequeña escala). Hemos observado que la fricción es proporcional a la fuerza normal, pero no a la cantidad del área en contacto, una noción algo contraintuitiva. Cuando dos superficies ásperas están en contacto, el área de contacto real es una fracción minúscula del área total porque solo se tocan los puntos altos. Cuando se ejerce una fuerza normal mayor, el área de contacto real aumenta, y encontramos que la fricción es proporcional a esta área.

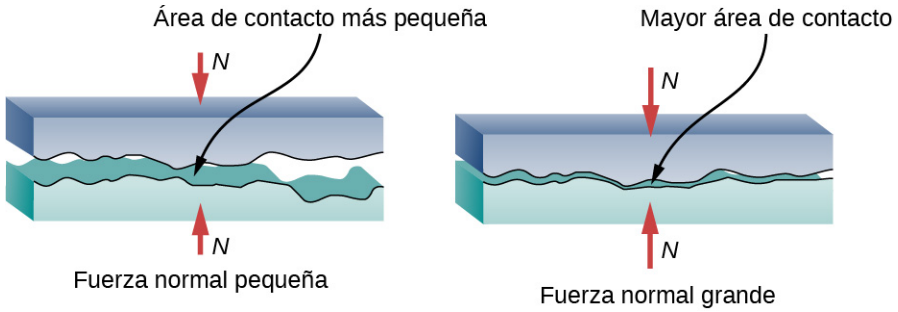


FIGURA 6.15 Dos superficies ásperas en contacto tienen un área de contacto real mucho menor que su área total. Cuando la fuerza normal es mayor como resultado de una mayor fuerza aplicada, el área de contacto real aumenta, al igual que la fricción.

Sin embargo, la visión a escala atómica promete explicar mucho más que las características más simples de la fricción. Ahora se está determinando el mecanismo de cómo se genera el calor. En otras palabras, ¿por qué se

calientan las superficies al frotarlas? Esencialmente, los átomos están unidos entre sí para formar entramados. Cuando las superficies se frotan, los átomos de la superficie se adhieren y hacen vibrar los entramados atómicos, para crear esencialmente ondas sonoras que penetran en el material. Las ondas sonoras disminuyen con la distancia y su energía se convierte en calor. Las reacciones químicas relacionadas con el desgaste por fricción también pueden producirse entre los átomos y las moléculas de las superficies. La Figura 6.16 muestra cómo la punta de una sonda que atraviesa otro material se deforma por la fricción a escala atómica. La fuerza necesaria para arrastrar la punta puede medirse y se encuentra relacionada con la tensión de corte, que se aborda en Equilibrio estático y elasticidad. La variación de la tensión de corte es notable (más de un factor de 10^{12}) y difícil de predecir teóricamente, pero la tensión de corte permite comprender fundamentalmente un fenómeno a gran escala que se conoce desde la antigüedad: la fricción.

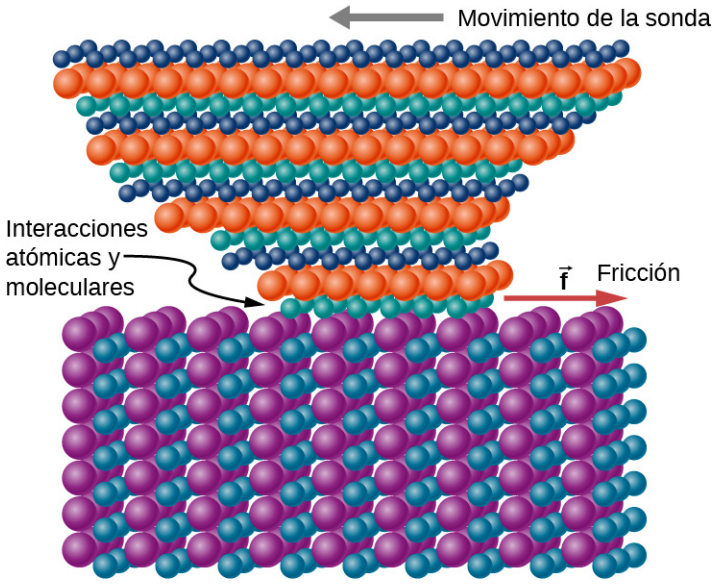


FIGURA 6.16 La punta de una sonda se deforma lateralmente por la fuerza de fricción al ser arrastrada por una superficie. Las mediciones de cómo varía la fuerza en diferentes materiales aportan conocimientos fundamentales sobre la naturaleza atómica de la fricción.

INTERACTIVO

Describa un modelo de fricción (https://openstax.org/l/21friction) a nivel molecular. Describa la materia en términos de movimiento molecular. La descripción debería incluir diagramas que apoyen la descripción, cómo incide la temperatura en la imagen, cuáles son las diferencias y similitudes entre el movimiento de las partículas sólidas, líquidas y gaseosas, y cómo se relacionan el tamaño y la rapidez de las moléculas de gas con los objetos cotidianos.

EJEMPLO 6.12

Bloques deslizantes

Los dos bloques de la Figura 6.17 están unidos entre sí por una cuerda sin masa que se enrolla alrededor de una polea sin fricción. Cuando el bloque inferior de 4,00 kg es halado hacia la izquierda por la fuerza constante $\vec{\mathbf{P}}$, el bloque superior de 2,00 kg se desliza por este hacia la derecha. Halle la magnitud de la fuerza necesaria para mover los bloques con rapidez constante. Supongamos que el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es de 0,400.

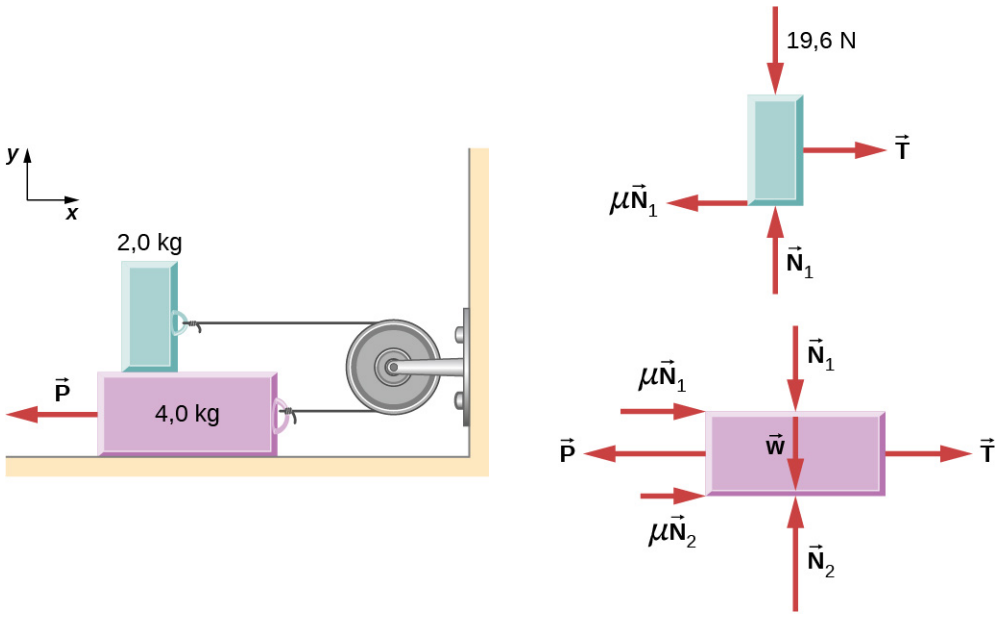


FIGURA 6.17 (a) Cada bloque se mueve a velocidad constante. (b) Diagramas de cuerpo libre para los bloques.

Estrategia

Analizamos los movimientos de los dos bloques por separado. El bloque superior está sometido a una fuerza de contacto ejercida por el bloque inferior. Los componentes de esta fuerza son la fuerza normal N_1 y la fuerza de fricción $-0{,}400N_1$. Otras fuerzas sobre el bloque superior son la tensión $T\mathrm{i}$ en la cuerda y el peso del propio bloque superior, 19,6 N. El bloque inferior está sometido a fuerzas de contacto debidas al bloque superior y al suelo. La primera fuerza de contacto tiene componentes $-N_1$ y $0{,}400N_1$, que son simplemente fuerzas de reacción a las fuerzas de contacto que el bloque inferior ejerce sobre el bloque superior. Los componentes de la fuerza de contacto del suelo son N_2 y $0{,}400N_2$. Otras fuerzas sobre este bloque son $-P$, la tensión $T\mathrm{i}$, y el peso -39,2 N.

Solución

Como el bloque superior se mueve horizontalmente hacia la derecha a velocidad constante, su aceleración es cero tanto en la dirección horizontal como en la vertical. De la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_1 a_x & \sum F_y &= m_1 a_y \\ T - 0{,}400N_1 &= 0 & N_1 - 19{,}6\,\mathrm{N} &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver las dos incógnitas, obtenemos $N_1 = 19{,}6\,\mathrm{N}$ y $T = 0{,}40N_1 = 7{,}84\,\mathrm{N}$. El bloque inferior tampoco acelera, por lo que la aplicación de la segunda ley de Newton a este bloque da

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_2 a_x & \sum F_y &= m_2 a_y \\ T - P + 0{,}400\,N_1 + 0{,}400\,N_2 &= 0 & N_2 - 39{,}2\,\mathrm{N} - N_1 &= 0. \end{aligned}$$

Los valores de N_1 y T se encontraron con el primer conjunto de ecuaciones. Cuando estos valores se sustituyen en el segundo conjunto de ecuaciones, podemos determinar N_2 y P. Son

$$N_2 = 58{,}8\,\mathrm{N} \;\text{ y }\; P = 39{,}2\,\mathrm{N}.$$

Importancia

Entender en qué dirección hay que dibujar la fuerza de fricción suele ser problemático. Observe que cada fuerza de fricción marcada en la Figura 6.17 actúa en la dirección opuesta al movimiento de su bloque correspondiente.

EJEMPLO 6.13

Una caja en un camión que acelera

Una caja de 50,0 kg descansa en la plataforma de un camión como se muestra en la Figura 6.18. Los coeficientes de fricción entre las superficies son $\mu_k = 0{,}300$ y $\mu_s = 0{,}400$. Halle la fuerza de fricción sobre la caja cuando el camión se acelera hacia adelante con respecto al suelo a (a) 2,00 m/s^2, y (b) 5,00 m/s^2.

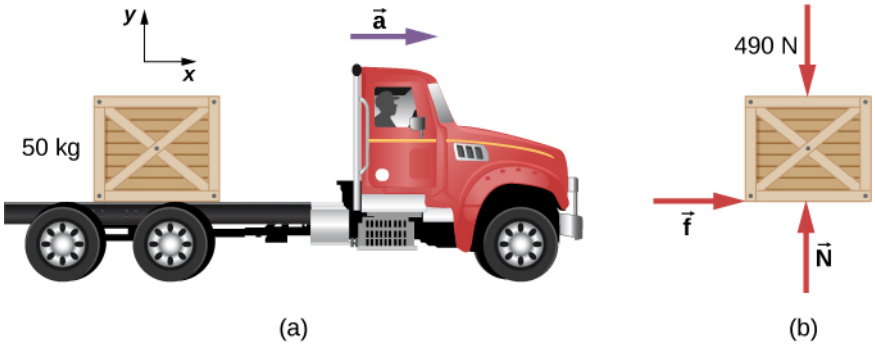


FIGURA 6.18 (a) Una caja descansa sobre la plataforma del camión que acelera hacia adelante. (b) El diagrama de cuerpo libre de la caja.

Estrategia

Las fuerzas sobre la caja son su peso y las fuerzas normales y de fricción debidas al contacto con la plataforma del camión. Comenzamos *asumiendo* que la caja no se desliza. En este caso, la fuerza de fricción estática f_s actúa sobre la caja. Además, la aceleración de la caja y del camión es igual.

Solución

a. La aplicación de la segunda ley de Newton a la caja, con el marco de referencia fijado al suelo, produce

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x & \sum F_y &= ma_y \\ f_s &= (50{,}0\ \text{kg})(2{,}00\ \text{m/s}^2) & N - 4{,}90 \times 10^2\ \text{N} &= (50{,}0\ \text{kg})(0) \\ &= 1{,}00 \times 10^2\ \text{N} & N &= 4{,}90 \times 10^2\ \text{N}. \end{aligned}$$

Ahora podemos comprobar la validez de nuestra suposición de no deslizamiento. El valor máximo de la fuerza de fricción estática es

$$\mu_s N = (0{,}400)(4{,}90 \times 10^2\ \text{N}) = 196\ \text{N},$$

mientras que la fuerza *real* de fricción estática que actúa cuando el camión acelera hacia delante a 2,00 m/s^2 es solo $1{,}00 \times 10^2$ N. Por lo tanto, la suposición de que no hay deslizamiento es válida.

b. Si la caja se mueve con el camión cuando este acelera a 5,0 m/s^2, la fuerza de fricción estática deberá ser

$$f_s = ma_x = (50{,}0\ \text{kg})(5{,}00\ \text{m/s}^2) = 250\ \text{N}.$$

Como esto excede el máximo de 196 N, la caja deberá deslizarse. La fuerza de fricción es por tanto cinética y es

$$f_k = \mu_k N = (0{,}300)(4{,}90 \times 10^2\ \text{N}) = 147\ \text{N}.$$

La aceleración horizontal de la caja con respecto al suelo se encuentra ahora a partir de

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ 147\ \text{N} &= (50{,}0\ \text{kg})a_x, \\ \text{así que } a_x &= 2{,}94\ \text{m/s}^2. \end{aligned}$$

Importancia

En relación con el suelo, el camión acelera hacia delante a 5,0 m/s^2 y la caja acelera hacia delante a 2,94 m/s^2. Por lo tanto, la caja se desliza hacia atrás con respecto a la plataforma del camión con una aceleración de

$2{,}94\ \text{m/s}^2 - 5{,}00\ \text{m/s}^2 = -2{,}06\ \text{m/s}^2$.

EJEMPLO 6.14

Surfear sobre nieve

Anteriormente, analizamos la situación de un esquiador cuesta abajo que se desplaza a velocidad constante para determinar el coeficiente de fricción cinética. Ahora, hagamos un análisis similar para determinar la aceleración. La surfista sobre nieve de la Figura 6.19 se desliza por una pendiente inclinada a $\theta = 13^0$ con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre la tabla y la nieve es $\mu_\text{k} = 0{,}20$. ¿Cuál es la aceleración de la surfista sobre nieve?

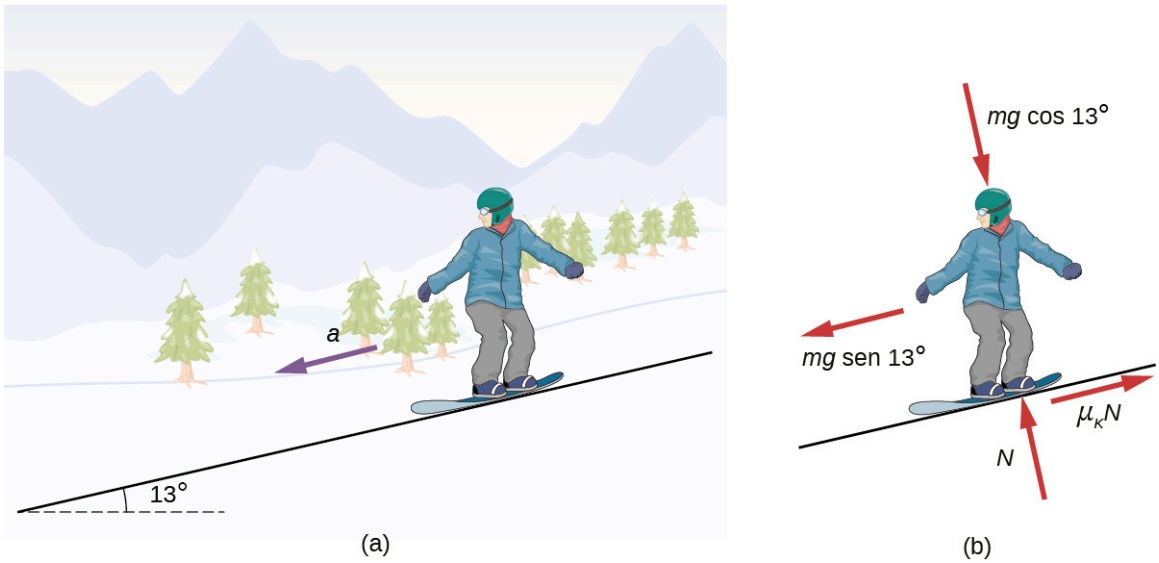


FIGURA 6.19 (a) Una surfista sobre nieve se desliza por una pendiente inclinada a 13° con respecto a la horizontal. (b) El diagrama de cuerpo libre de la surfista sobre nieve.

Estrategia

Las fuerzas que actúan sobre la surfista sobre nieve son su peso y la fuerza de contacto de la pendiente, que tiene un componente normal a la inclinación y un componente a lo largo de la misma (fuerza de fricción cinética). Como se desplaza a lo largo de la pendiente, el marco de referencia más conveniente para analizar su movimiento es uno con el eje de la x a lo largo y el eje de la y perpendicular a la pendiente. En este marco, tanto las fuerzas normales como las de fricción se sitúan a lo largo de los ejes de coordenadas, los componentes del peso son mg sen θ a lo largo de la pendiente y mg cos θ en ángulo recto en la pendiente, y la única aceleración es a lo largo del eje de la x $\left(a_y = 0\right)$.

Solución

Ahora podemos aplicar la segunda ley de Newton a la surfista sobre nieve:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x & \sum F_y &= ma_y \\ mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_k N &= ma_x & N - mg\cos\theta &= m(0). \end{aligned}$$

De la segunda ecuación, $N = mg\cos\theta$. Al sustituir esto en la primera ecuación, encontramos

$$\begin{aligned} a_x &= g(\text{sen}\,\theta - \mu_\text{k}\cos\theta) \\ &= g(\text{sen}\,13^\circ - 0{,}20\cos 13^\circ) = 0{,}29\ \text{m/s}^2. \end{aligned}$$

Importancia

Observe en esta ecuación que, si θ es lo suficientemente pequeño o μ_k es lo suficientemente grande, a_x será

negativo, es decir, la surfista sobre nieve desacelera.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.8

La surfista sobre nieve se desplaza ahora por una colina con pendiente de $10{,}0°$. ¿Cuál es la aceleración de la esquiadora?

6.3 Fuerza centrípeta

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la ecuación de la aceleración centrípeta.
- Aplicar la segunda ley de Newton para desarrollar la ecuación de la fuerza centrípeta.
- Utilizar los conceptos de movimiento circular para resolver problemas relacionados con las leyes del movimiento de Newton.

En Movimiento en dos y tres dimensiones, examinamos los conceptos básicos del movimiento circular. Un objeto que experimenta un movimiento circular, como uno de los autos de carreras mostrados al principio de este capítulo, debe estar acelerando porque está cambiando la dirección de su velocidad. Demostramos que esta aceleración dirigida al centro, llamada aceleración centrípeta, está dada por la fórmula

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

donde v es la velocidad del objeto, dirigida a lo largo de una línea tangente a la curva en cualquier instante. Si conocemos la velocidad angular ω, entonces podemos utilizar

$$a_c = r\omega^2.$$

La velocidad angular da la proporción con la que el objeto gira a través de la curva, en unidades de rad/s. Esta aceleración actúa a lo largo del radio de la trayectoria curva, por lo que también se denomina aceleración radial.

La fuerza deberá producir la aceleración. Cualquier fuerza o combinación de fuerzas puede provocar una aceleración centrípeta o radial. Algunos ejemplos son la tensión en la cuerda de un balón atado a un poste (*tether ball*), la fuerza de la gravedad terrestre en la Luna, la fricción entre los patines y el suelo de una pista de patinaje, la fuerza de una calzada con peralte sobre un auto y las fuerzas en el tubo de una centrífuga que gira. Cualquier fuerza neta que cause un movimiento circular uniforme se denomina **fuerza centrípeta**. La dirección de una fuerza centrípeta es hacia el centro de curvatura, igual que la dirección de la aceleración centrípeta. Según la segunda ley del movimiento de Newton, la fuerza neta es la masa por la aceleración: $F_{\text{neta}} = ma$. Para un movimiento circular uniforme, la aceleración es la aceleración centrípeta: $a = a_c$. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza centrípeta F_c es

$$F_c = ma_c.$$

Al sustituir las expresiones para la aceleración centrípeta a_c ($a_c = \frac{v^2}{r}; a_c = r\omega^2$), obtenemos dos expresiones para la fuerza centrípeta F_c en términos de masa, velocidad, velocidad angular y radio de la curvatura:

$$F_c = m\frac{v^2}{r}; \quad F_c = mr\omega^2. \tag{6.3}$$

Puede utilizar la expresión de la fuerza centrípeta que más le convenga. La fuerza centrípeta $\vec{\mathbf{F}}_c$ es siempre perpendicular a la trayectoria y apunta al centro de curvatura, porque $\vec{\mathbf{a}}_c$ es perpendicular a la velocidad y apunta al centro de curvatura. Observe que, si se resuelve la primera expresión para r, obtiene

$$r = \frac{mv^2}{F_c}.$$

Esto implica que, para una masa y una velocidad dadas, una fuerza centrípeta grande provoca un radio de curvatura pequeño, es decir, una curva cerrada, como en la Figura 6.20.

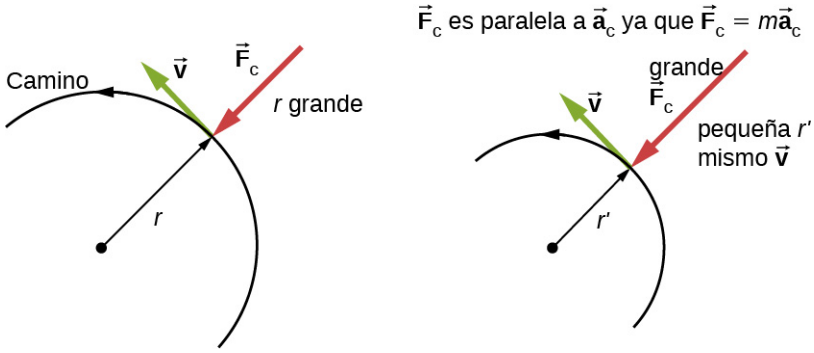


FIGURA 6.20 La fuerza de fricción suple la fuerza centrípeta y es numéricamente igual a ella. La fuerza centrípeta es perpendicular a la velocidad y provoca un movimiento circular uniforme. Cuanto más grande sea la F_c, menor será el radio de curvatura *r* y más pronunciada será la curva. La segunda curva tiene la misma *v*, pero una mayor F_c produce un *r*′ más pequeño.

EJEMPLO 6.15

¿Qué coeficiente de fricción necesitan los autos en una curva plana?

(a) Calcule la fuerza centrípeta ejercida sobre un auto de 900,0 kg que recorre una curva de 500,0 m de radio a 25,00 m/s. (b) Suponiendo una curva sin peralte, halle el mínimo coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera, siendo la fricción estática la que impide que el auto resbale (Figura 6.21).

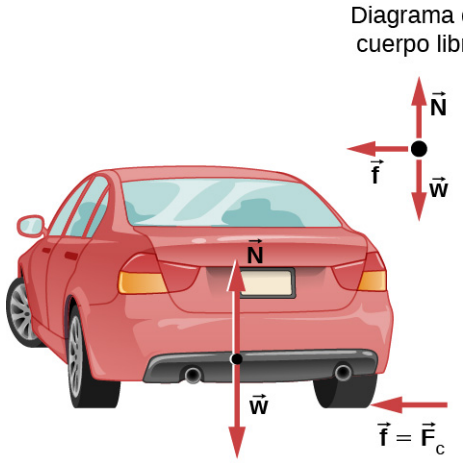


FIGURA 6.21 Este auto en terreno llano se aleja y gira a la izquierda. La fuerza centrípeta que hace que el auto gire en una trayectoria circular se debe a la fricción entre los neumáticos y la carretera. Se necesita un mínimo coeficiente de fricción; de otra manera, el auto se moverá en una curva de mayor radio y se saldrá de la calzada.

Estrategia

a. Sabemos que $F_c = \frac{mv^2}{r}$. Así,

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = \frac{(900{,}0\ \text{kg})(25{,}00\ \text{m/s})^2}{(500{,}0\ \text{m})} = 1.125\ \text{N}.$$

b. La Figura 6.21 muestra las fuerzas que actúan sobre el auto en una curva sin peralte (terreno llano). La fricción está a la izquierda, lo que impide que el auto resbale, y como es la única fuerza horizontal que

actúa sobre el auto, la fricción es la fuerza centrípeta en este caso. Sabemos que la fricción estática máxima (con la que los neumáticos ruedan pero no resbalan) es $\mu_s N$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática y N es la fuerza normal. La fuerza normal es igual al peso del auto sobre terreno llano, por lo que $N = mg$. Así, la fuerza centrípeta en esta situación es

$$F_c \equiv f = \mu_s N = \mu_s mg.$$

Ahora tenemos una relación entre la fuerza centrípeta y el coeficiente de fricción. Al utilizar la ecuación

$$F_c = m\frac{v^2}{r},$$

obtenemos

$$m\frac{v^2}{r} = \mu_s mg.$$

Resolvemos esto para μ_s, observamos que la masa se anula, y obtenemos

$$\mu_s = \frac{v^2}{rg}.$$

Al sustituir los valores conocidos,

$$\mu_s = \frac{(25{,}00\ \text{m/s})^2}{(500{,}0\ \text{m})(9{,}80\ \text{m/s}^2)} = 0{,}13.$$

(Como los coeficientes de fricción son aproximados, la respuesta se da con apenas dos dígitos).

Importancia

El coeficiente de fricción que se encuentra en la Figura 6.21(b) es mucho menor que el que se encuentra normalmente entre los neumáticos y las carreteras. El auto sigue maniobrando en la curva si el coeficiente es superior a 0,13, ya que la fricción estática es una fuerza de respuesta, capaz de asumir un valor inferior, pero no superior a $\mu_s N$. Un coeficiente más alto también permitiría al auto tomar la curva a mayor rapidez, pero si el coeficiente de fricción es menor, la rapidez segura sería inferior a 25 m/s. Observe que la masa se anula, lo que implica que, en este ejemplo, no importa la carga del auto para maniobrar el giro. La masa se anula porque la fricción se supone proporcional a la fuerza normal, que a su vez es proporcional a la masa. Si la superficie de la carretera tuviera peralte, la fuerza normal sería mayor, como se explica a continuación.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.9

Un auto que se mueve a 96,8 km/h recorre una curva circular de radio 182,9 m en una carretera rural plana. ¿Cuál debe ser el coeficiente mínimo de fricción estática para que el auto no resbale?

Curvas con peralte

Consideremos ahora las **curvas con peralte**, en las que la pendiente de la carretera permite maniobrar en la curva (Figura 6.22). Cuanto mayor sea el ángulo θ, más rápido se puede tomar la curva. Los circuitos de carreras, tanto de motos como de autos, por ejemplo, suelen tener curvas con peralte muy pronunciados. En una "curva con peralte ideal", el ángulo θ es tal que puede maniobrar en la curva a cierta rapidez sin la ayuda de la fricción entre los neumáticos y la carretera. Derivamos una expresión θ para una curva con peralte ideal y consideramos un ejemplo relacionado con ella.

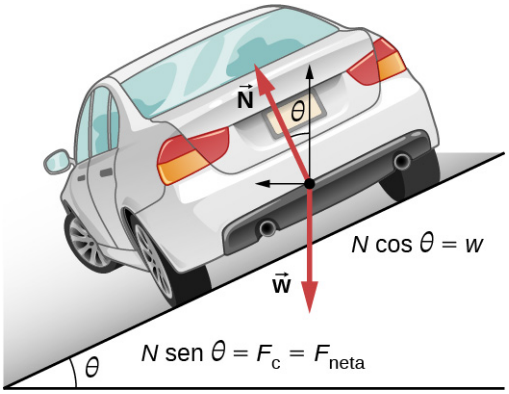


FIGURA 6.22 El auto en esta curva con peralte se aleja y gira a la izquierda.

Para el **peralte ideal**, la fuerza externa neta es igual a la fuerza centrípeta horizontal en ausencia de fricción. Las componentes de la fuerza normal N en las direcciones horizontal y vertical deberán ser iguales a la fuerza centrípeta y al peso del auto, respectivamente. En los casos en que las fuerzas no son paralelas, lo más conveniente es considerar los componentes a lo largo de los ejes perpendiculares, en este caso, las direcciones vertical y horizontal.

La Figura 6.22 muestra un diagrama de cuerpo libre para un auto en una curva con peralte sin fricción. Si el ángulo θ es ideal para la rapidez y el radio, entonces la fuerza externa neta es igual a la fuerza centrípeta necesaria. Las dos únicas fuerzas externas que actúan sobre el auto son su peso $\vec{\mathbf{w}}$ y la fuerza normal de la carretera $\vec{\mathbf{N}}$. (Una superficie sin fricción puede ejercer solamente una fuerza perpendicular a la superficie, es decir, una fuerza normal). Estas dos fuerzas deberán sumarse para dar una fuerza externa neta que es horizontal hacia el centro de la curvatura y tiene magnitud mv^2/r. Como esta es la fuerza crucial y es horizontal, utilizamos un sistema de coordenadas con ejes verticales y horizontales. Solo la fuerza normal tiene un componente horizontal, por lo que este deberá ser igual a la fuerza centrípeta, es decir,

$$N \operatorname{sen} \theta = \frac{mv^2}{r}.$$

Dado que el auto no abandona la superficie de la carretera, la fuerza vertical neta deberá ser cero, lo que significa que los componentes verticales de las dos fuerzas externas deberán ser iguales en magnitud y opuestas en dirección. En la Figura 6.22, vemos que el componente vertical de la fuerza normal es $N \cos \theta$, y la única otra fuerza vertical es el peso del auto. Estas deberán ser iguales en magnitud; por lo tanto,

$$N \cos \theta = mg.$$

Ahora podemos combinar estas dos ecuaciones para eliminar N y obtener una expresión para θ, según se desee. Al resolver la segunda ecuación para $N = mg/(cos\theta)$ y sustituir esto en la primera obtiene

$$\begin{aligned} mg\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} &= \frac{mv^2}{r} \\ mg\tan\theta &= \frac{mv^2}{r} \\ \tan\theta &= \frac{v^2}{rg}. \end{aligned}$$

Al tomar la tangente inversa se obtiene

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right). \qquad 6.4$$

Esta expresión puede entenderse al considerar cómo θ depende de v y r. Un gran θ se obtiene para una v grande y un r pequeño. Es decir, las carreteras deben tener un peralte pronunciado para la rapidez elevada y las curvas cerradas. La fricción permite tomar la curva a mayor o menor rapidez que si la curva no tuviera fricción. Observe que θ no depende de la masa del vehículo.

EJEMPLO 6.16

¿Cuál es la rapidez ideal para tomar una curva cerrada con peralte pronunciado?

Las curvas de algunos circuitos de pruebas y de carreras, como el Daytona International Speedway de Florida, tienen un peralte muy pronunciado. Este peralte, junto con la fricción de los neumáticos y las configuraciones de los autos muy estables, permite tomar las curvas a muy alta velocidad. Para ilustrarlo, calcule la rapidez a la que una curva de 100,0 m de radio con peralte a $31{,}0^\circ$ debería conducirse si la carretera no tuviera fricción.

Estrategia

En primer lugar, observamos que todos los términos de la expresión para el ángulo ideal de una curva con peralte son conocidos, excepto la rapidez; por lo tanto, solo tenemos que reorganizarla para que la rapidez aparezca en el lado izquierdo y luego sustituir las cantidades conocidas.

Solución

A partir de

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg},$$

obtenemos

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}.$$

Al observar que $\tan 31{,}0^\circ = 0{,}609$, obtenemos

$$v = \sqrt{(100{,}0\text{ m})(9{,}80\text{ m/s}^2)(0{,}609)} = 24{,}4\text{ m/s}.$$

Importancia

Se trata de unos 165 km/h, lo que se corresponde con una curva con peralte muy pronunciado y bastante cerrada. La fricción de los neumáticos permite que el vehículo tome la curva a una rapidez mucho mayor.

Los aviones también hacen virajes por ladeo. La fuerza de sustentación, debida a la fuerza del aire sobre el ala, actúa en ángulo recto con el ala. Cuando el avión se ladea, el piloto obtiene mayor sustentación de la necesaria para el vuelo nivelado. El componente vertical de la sustentación equilibra el peso del avión, y el componente horizontal acelera el avión. El ángulo de ladeo que se muestra en la Figura 6.23 viene dado por θ. Analizamos las fuerzas de la misma manera que tratamos el caso del auto que toma una curva con peralte.

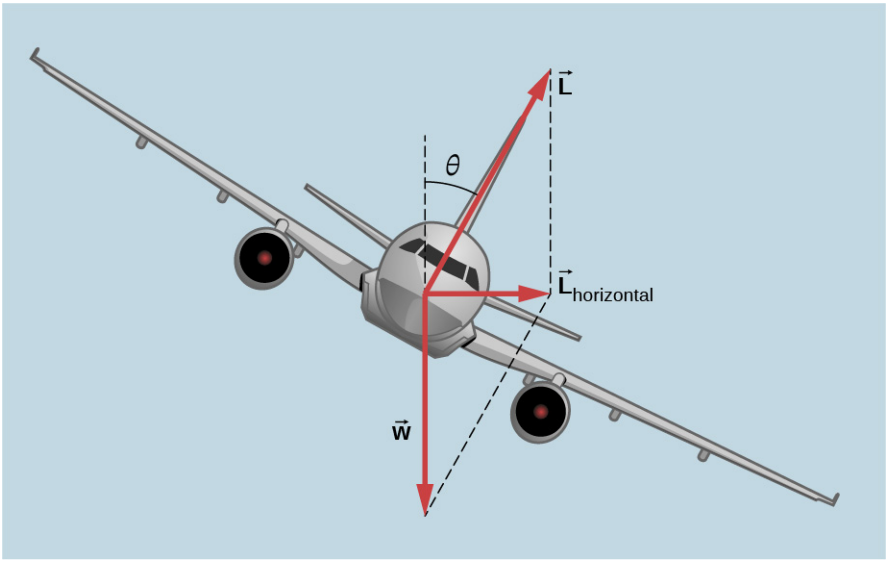


FIGURA 6.23 En un giro inclinado, el componente horizontal de la sustentación se desequilibra y acelera el avión.

El componente normal de la sustentación equilibra el peso del avión. El ángulo de ladeo viene dado por θ. Compare el diagrama vectorial con el que se muestra en la Figura 6.22.

INTERACTIVO

Acompañe a la mariquita (https://openstax.org/l/21ladybug) en una exploración del movimiento rotacional. Rote el carrusel para cambiar su ángulo o elija una velocidad angular o una aceleración angular constantes. Explore cómo el movimiento circular se relaciona con la posición *xy* del insecto, la velocidad y la aceleración mediante el empleo de vectores o gráficos.

INTERACTIVO

El movimiento circular requiere una fuerza, la llamada fuerza centrípeta, que se dirige al eje de rotación. Este modelo de un carrusel (https://openstax.org/l/21carousel) simplificado demuestra esta fuerza.

Fuerzas inerciales y marcos no inerciales (acelerados): la fuerza de Coriolis

¿Qué tienen en común el despegue de un avión de reacción, el giro de una esquina en un auto, el paseo en un carrusel y el movimiento circular de un ciclón tropical? Cada uno de ellos presenta fuerzas inerciales, es decir, fuerzas que simplemente parecen surgir del movimiento, porque el marco de referencia del observador acelera o rota. Al despegar en un jet, la mayoría de la gente estará de acuerdo en que se siente como si le empujaran hacia atrás en el asiento mientras el avión acelera por la pista. Sin embargo, un físico diría que *usted* tiende a permanecer inmóvil mientras el *asiento* le empuja hacia delante. Una experiencia aún más común ocurre cuando se toma una curva cerrada con el auto, por ejemplo, hacia la derecha (Figura 6.24). Tiene la sensación de ser lanzado (es decir, *forzado*) hacia la izquierda en relación con el auto. De nuevo, un físico diría que *usted* va en línea recta (recuerde la primera ley de Newton), pero que el *auto* se desplaza hacia la derecha, no que usted esté experimentando una fuerza desde la izquierda.

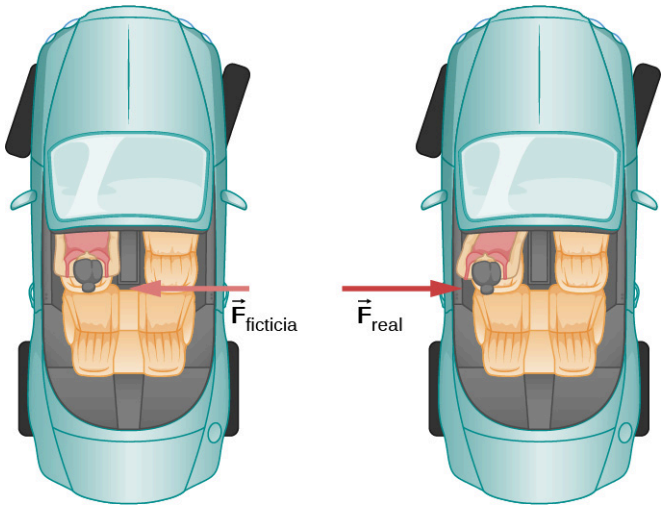


FIGURA 6.24 (a) La conductora del auto se siente forzada hacia la izquierda con respecto al auto cuando hace un giro a la derecha. Se trata de una fuerza de inercia derivada del uso del auto como marco de referencia. (b) En el marco de referencia de la Tierra, la conductora se mueve en línea recta, obedeciendo la primera ley de Newton, y el auto se mueve hacia la derecha. No hay ninguna fuerza hacia la izquierda sobre la conductora en relación con la Tierra. En cambio, hay una fuerza hacia la derecha sobre el auto para hacerlo girar.

Podemos conciliar estos puntos de vista examinando los marcos de referencia utilizados. Concentrémonos en las personas en un auto. Los pasajeros utilizan instintivamente el auto como marco de referencia, mientras que un físico podría utilizar la Tierra. El físico podría hacer esta elección porque la Tierra es casi un marco de referencia inercial, en el que todas las fuerzas tienen un origen físico identificable. En este marco de

referencia, las leyes del movimiento de Newton adoptan la forma dada en Leyes de movimiento de Newton. El auto es un **marco de referencia no inercial** porque está acelerado hacia un lado. La fuerza hacia la izquierda que perciben los pasajeros de un auto es una **fuerza inercial** que no tiene origen físico (se debe puramente a la inercia del pasajero, no a ninguna causa física como la tensión, la fricción o la gravitación). El auto, al igual que el conductor, acelera hacia la derecha. Se dice que esta fuerza inercial es una fuerza inercial porque no tiene ningún origen físico, como la gravedad.

Un físico elige el marco de referencia que sea más conveniente para la situación analizada. El físico no tiene ningún problema en incluir las fuerzas inerciales y la segunda ley de Newton, como es habitual, si eso es más conveniente, por ejemplo, en un carrusel o en un planeta en rotación. Los marcos de referencia no inerciales (acelerados) se utilizan cuando es útil hacerlo. Hay que tener en cuenta diferentes marcos de referencia al hablar del movimiento de un astronauta en una nave espacial que viaja a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, como apreciará en el estudio de la teoría especial de la relatividad.

Ahora, demos un paseo mental en un carrusel, concretamente en un carrusel de parque infantil que rota rápidamente (Figura 6.25). Usted toma el carrusel como marco de referencia porque ambos rotan juntos. Al rotar en ese marco de referencia no inercial, se siente una fuerza inercial que tiende a despedirlo hacia afuera; esto se denomina *fuerza centrífuga* (no confundirla con la fuerza centrípeta). La fuerza centrífuga es un término que se utiliza comúnmente, pero en realidad no existe. Debe agarrarse con fuerza para contrarrestar su inercia (que la gente denomina fuerza centrífuga). En el marco de referencia de la Tierra, no hay ninguna fuerza que intente despedirlo hacia afuera; subrayamos que la fuerza centrífuga es una ficción. Tiene que agarrarse para ir en círculo, porque, de lo contrario, iría en línea recta, justo fuera del carrusel, de acuerdo con la primera ley de Newton. Sin embargo, la fuerza que se ejerce actúa hacia el centro del círculo.

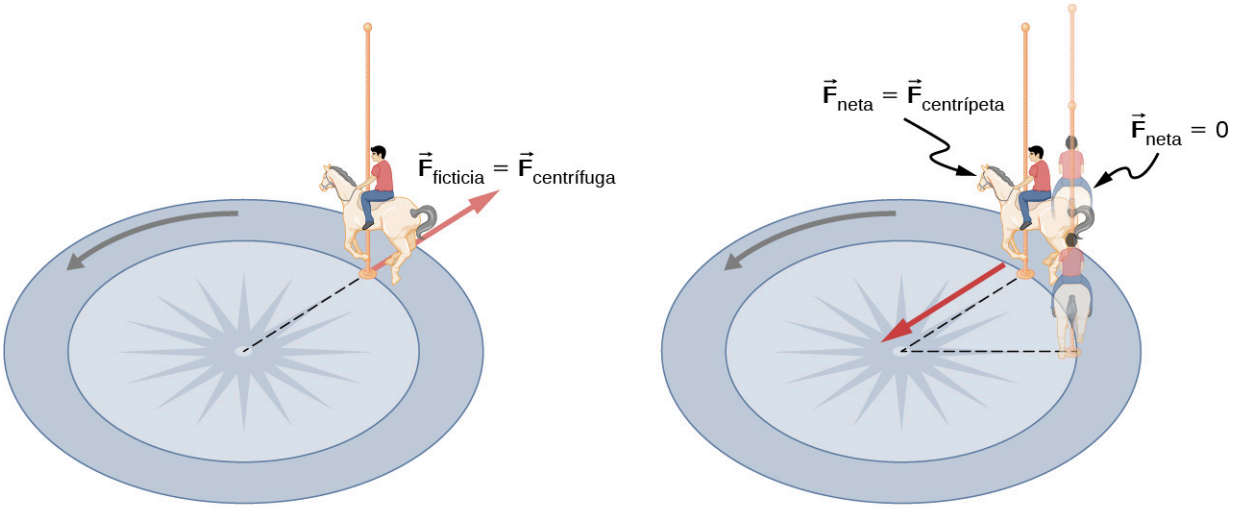


FIGURA 6.25 (a) Una persona que se monta en un carrusel tiene la sensación de salir despedido hacia afuera. Esta fuerza inercial a veces se denomina erróneamente fuerza centrífuga en un intento por explicar el movimiento de la persona montada en el marco de referencia rotativo. (b) En un marco de referencia inercial y según las leyes de Newton, es su inercia la que lo arrastra (la persona sin sombrear tiene $F_{\text{neta}} = 0$ y se dirige en línea recta). Una fuerza, $F_{\text{centrípeta}}$, es necesaria para provocar una trayectoria circular.

Este efecto inercial, que lo aleja del centro de rotación si no hay una fuerza centrípeta que provoque un movimiento circular, se aprovecha en las centrífugas (Figura 6.26). Una centrífuga hace girar una muestra muy rápidamente, como se ha mencionado anteriormente en este capítulo. Visto desde el marco de referencia rotativo, la fuerza inercial lanza las partículas hacia el exterior, lo que acelera su sedimentación. Cuanto mayor sea la velocidad angular, mayor será la fuerza centrífuga. Sin embargo, lo que realmente ocurre es que la inercia de las partículas las lleva a lo largo de una línea tangente al círculo, mientras que el tubo de ensayo es forzado en una trayectoria circular por una fuerza centrípeta.

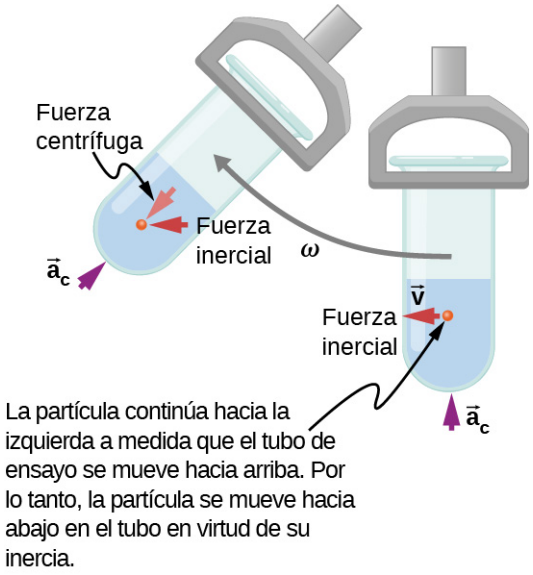


FIGURA 6.26 Las centrífugas utilizan la inercia para realizar su tarea. Las partículas del sedimento fluido se depositan porque su inercia las aleja del centro de rotación. La gran velocidad angular de la centrífuga acelera la sedimentación. Al final, las partículas entran en contacto con las paredes del tubo de ensayo, que aportan la fuerza centrípeta necesaria para que se muevan en un círculo de radio constante.

Consideremos ahora lo que ocurre si algo se mueve en un marco de referencia rotativo. Por ejemplo, ¿qué ocurre si desliza una pelota directamente desde el centro del carrusel, como se muestra en la Figura 6.27? La pelota sigue una trayectoria recta con respecto a la Tierra (suponiendo una fricción despreciable) y una trayectoria curvada hacia la derecha en la superficie del carrusel. Una persona situada junto al carrusel ve que la pelota se mueve en línea recta y que el carrusel rota debajo de ella. En el marco de referencia del carrusel, explicamos la aparente curva hacia la derecha mediante una fuerza de inercia, llamada **fuerza de Coriolis**, que hace que la pelota se curve hacia la derecha. Cualquiera puede utilizar la fuerza de Coriolis en ese marco de referencia para explicar por qué los objetos siguen trayectorias curvas y nos permite aplicar las leyes de Newton en marcos de referencia no inerciales.

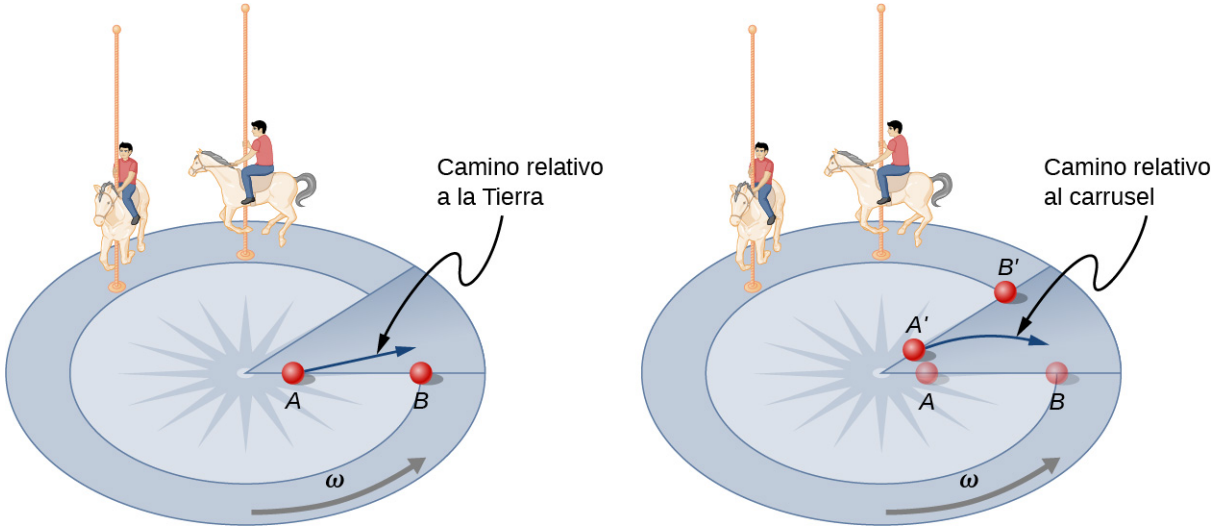


FIGURA 6.27 Observando la rotación en sentido contrario de las agujas del reloj de un carrusel, vemos que una pelota que se desliza directamente hacia el borde sigue una trayectoria curvada hacia la derecha. La persona desliza la pelota hacia el punto *B*, partiendo del punto *A*. Ambos puntos rotan hasta las posiciones sombreadas (*A*' y *B*') que se muestran en el tiempo que la pelota sigue la trayectoria curva en el marco rotativo y una trayectoria recta en el

marco de la Tierra.

Hasta ahora, hemos considerado que la Tierra es un marco de referencia inercial, sin preocuparse por los efectos debidos a su rotación. Sin embargo, estos efectos *existen*, por ejemplo, en la rotación de los sistemas meteorológicos. La mayoría de las consecuencias de la rotación de la Tierra pueden entenderse cualitativamente por analogía con el carrusel. Vista desde el Polo Norte, la Tierra rota en sentido contrario de las agujas del reloj, al igual que el carrusel en la Figura 6.27. Como en el carrusel, cualquier movimiento en el hemisferio norte de la Tierra experimenta una fuerza de Coriolis hacia la derecha. Lo contrario ocurre en el hemisferio sur; allí, la fuerza es hacia la izquierda. Dado que la velocidad angular de la Tierra es pequeña, la fuerza de Coriolis suele ser despreciable, pero para los movimientos a gran escala, como los patrones de viento, tiene efectos sustanciales.

La fuerza de Coriolis hace que los huracanes del hemisferio norte roten en el sentido contrario a las agujas del reloj, mientras que los ciclones tropicales del hemisferio sur rotan en el sentido de las agujas del reloj. (Los términos huracán, tifón y tormenta tropical son nombres regionales específicos para los ciclones, que son sistemas de tormentas caracterizados por centros de baja presión, fuertes vientos y lluvias intensas). La Figura 6.28 ayuda a mostrar cómo se producen estas rotaciones. El aire fluye hacia cualquier región de baja presión, y los ciclones tropicales contienen presiones particularmente bajas. Así, los vientos fluyen hacia el centro de un ciclón tropical o de un sistema meteorológico de baja presión en la superficie. En el hemisferio norte, estos vientos de entrada se desvían hacia la derecha, como se muestra en la figura, lo que produce una circulación en sentido contrario a las agujas del reloj en la superficie para las zonas de baja presión de cualquier tipo. Las bajas presiones en la superficie se asocian al ascenso del aire, que también produce el enfriamiento y la formación de nubes, lo que hace que los patrones de bajas presiones sean bastante visibles desde el espacio. Por el contrario, la circulación del viento en torno a las zonas de alta presión se produce en el sentido de las agujas del reloj en el hemisferio sur, pero es menos visible porque las altas presiones se asocian al hundimiento del aire y producen cielos despejados.

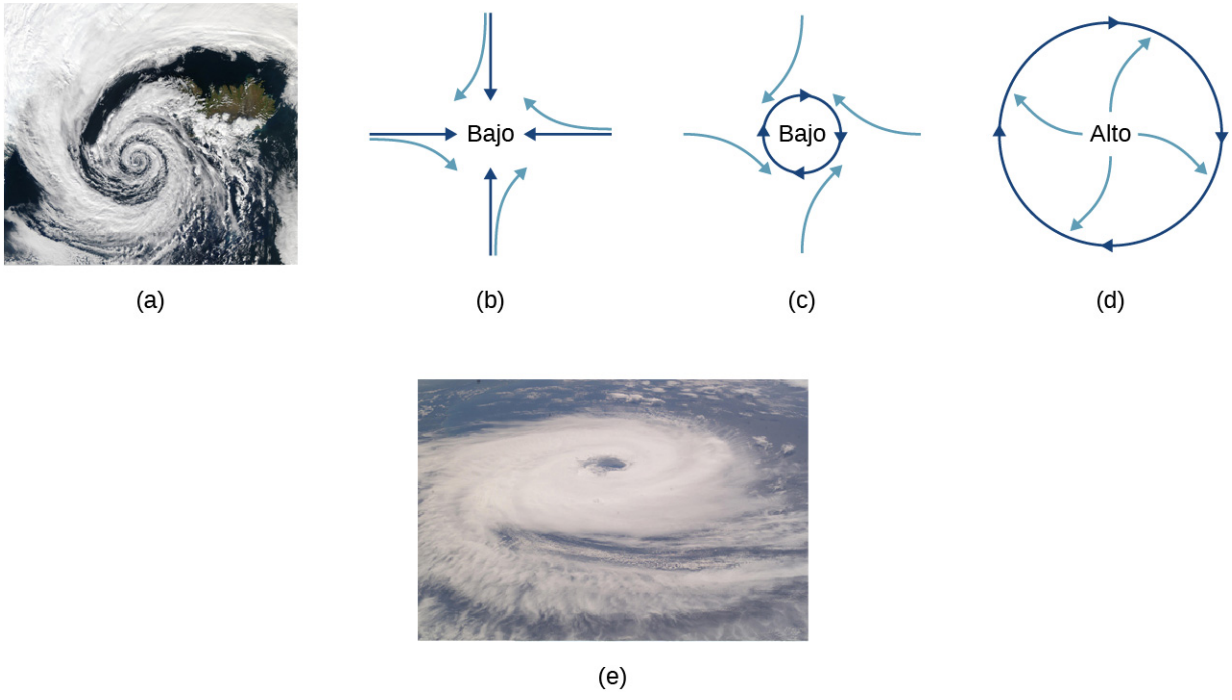


FIGURA 6.28 (a) La rotación en sentido contrario de las agujas del reloj de este huracán del hemisferio norte es una de las principales consecuencias de la fuerza de Coriolis. (b) Sin la fuerza de Coriolis, el aire fluiría directamente hacia una zona de baja presión, como la que se encuentra en los ciclones tropicales. (c) La fuerza de Coriolis desvía los vientos hacia la derecha y produce una rotación en sentido contrario de las agujas del reloj. (d) El viento que se aleja de una zona de alta presión también se desvía hacia la derecha y produce una rotación en sentido de las agujas del reloj. (e) La fuerza de Coriolis produce el sentido de rotación contrario en el hemisferio sur, lo que da lugar a los

ciclones tropicales (créditos: a y créditos e. modificaciones del trabajo de la NASA).

La rotación de los ciclones tropicales y la trayectoria de una pelota en un carrusel se explican igualmente por la inercia y la rotación del sistema que hay debajo. Cuando se utilizan marcos no inerciales, hay que inventar fuerzas inerciales, como la fuerza de Coriolis, para explicar la trayectoria curva. No existe ninguna fuente física identificable para estas fuerzas de inercia. En un marco inercial, la inercia explica la trayectoria, y no se encuentra ninguna fuerza sin una fuente identificable. Cualquiera de los dos puntos de vista nos permite describir la naturaleza, pero un punto de vista en un marco inercial es el más simple, en el sentido de que todas las fuerzas tienen orígenes y explicaciones.

6.4 Fuerza de arrastre y velocidad límite

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Expresar matemáticamente la fuerza de arrastre.
- Describir las aplicaciones de la fuerza de arrastre.
- Definir la velocidad límite.
- Determinar la velocidad límite de un objeto dada su masa.

Otra fuerza interesante en la vida cotidiana es la fuerza de arrastre sobre un objeto cuando se mueve en un fluido (ya sea un gas o un líquido). Siente la fuerza de arrastre cuando usted mueve la mano en el agua. También puede sentirla si mueve la mano durante un viento fuerte. Cuanto más rápido se mueva la mano, más difícil será el movimiento. Sentirá una menor fuerza de arrastre cuando incline la mano de manera que solo el lado pase por el aire: habrá disminuido el área de la mano que se enfrenta a la dirección del movimiento.

Fuerzas de arrastre

Al igual que la fricción, la **fuerza de arrastre** siempre se opone al movimiento de un objeto. A diferencia de la fricción simple, la fuerza de arrastre es proporcional a alguna función de la velocidad del objeto en ese fluido. Esta funcionalidad es complicada y depende de la forma del objeto, su tamaño, su velocidad y el fluido en el que se encuentra. Para la mayoría de los objetos grandes, como ciclistas, autos y pelotas de béisbol que no se mueven demasiado despacio, la magnitud de la fuerza de arrastre F_D es proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto. Podemos escribir esta relación matemáticamente como $F_\text{D} \propto v^2$. Si se tienen en cuenta otros factores, esta relación se convierte en

$$F_\text{D} = \frac{1}{2} C \rho A v^2, \tag{6.5}$$

donde C es el coeficiente de arrastre, A es el área del objeto frente al fluido, y ρ es la densidad del fluido. (Recordemos que la densidad es la masa por unidad de volumen). Esta ecuación también puede escribirse de forma más generalizada como $F_\text{D} = bv^n$, donde b es una constante equivalente a $0{,}5C\rho A$. Hemos fijado el exponente n para estas ecuaciones en 2 porque, cuando un objeto se mueve a gran velocidad por el aire, la magnitud de la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la rapidez. Como veremos en Mecánica de fluidos, para partículas pequeñas que se mueven a poca rapidez en un fluido, el exponente n es igual a 1.

Fuerza de arrastre

Fuerza de arrastre F_D es proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto. Matemáticamente,

$$F_\text{D} = \frac{1}{2} C \rho A v^2,$$

donde C es el coeficiente de arrastre, A es el área del objeto frente al fluido, y ρ es la densidad del fluido.

Tanto los atletas como los diseñadores de autos buscan reducir la fuerza de arrastre para disminuir su tiempo de carrera (Figura 6.29). La configuración aerodinámica de un automóvil puede reducir la fuerza de arrastre y,

por ende, aumentar el kilometraje de un auto.

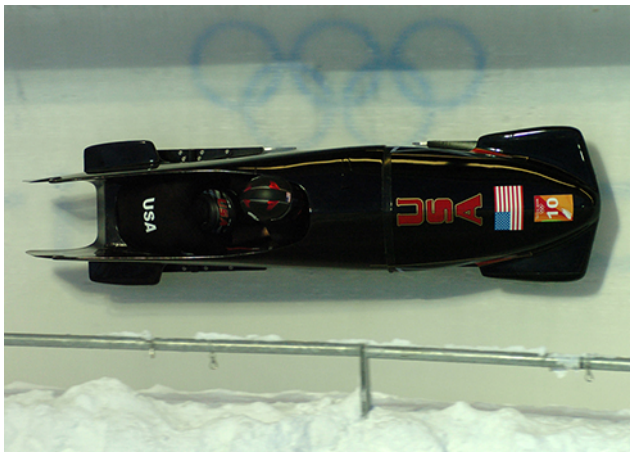


FIGURA 6.29 Desde los autos de carreras hasta los corredores de trineo, la forma aerodinámica es crucial para alcanzar velocidades máximas. Los trineos de carreras están diseñados para la rapidez y tienen forma de bala con aletas cónicas (crédito: "Ejército de los EE. UU."/Wikimedia Commons).

El valor del coeficiente de arrastre C se determina empíricamente, normalmente con el uso de un túnel de viento (Figura 6.30).



FIGURA 6.30 Investigadores de la NASA prueban un modelo de avión en un túnel de viento (créditos: NASA/Ames).

El coeficiente de arrastre puede depender de la velocidad, pero aquí suponemos que es una constante. La Tabla 6.2 enumera algunos coeficientes de arrastre típicos para una variedad de objetos. Observe que el coeficiente de arrastre es una cantidad sin dimensiones. A velocidades de autopista, más del 50% de la potencia de un auto se utiliza para superar el arrastre del aire. La velocidad de crucero más eficiente en cuanto a consumo de combustible es de unos 70 a 80 km/h (unas 45 a 50 mi/h). Por esta razón, durante la crisis del petróleo de la década de los años 70 del siglo XX en los Estados Unidos, la velocidad máxima en las autopistas

se fijó en unos 90 km/h (55 mi/h).

Objeto	*C*
Perfil alar	0,05
Toyota Camry	0,28
Ford Focus	0,32
Honda Civic	0,36
Ferrari Testarossa	0,37
Dodge Ram Pickup	0,43
Esfera	0,45
Vehículo todoterreno Hummer H2	0,64
Paracaidista (con los pies por delante)	0,70
Bicicleta	0,90
Paracaidista (horizontal)	1,0
Placa plana circular	1,12

TABLA 6.2 Valores típicos del coeficiente de arrastre *C*

En el mundo del deporte se está investigando mucho para minimizar el arrastre. Los hoyuelos de las pelotas de golf se están rediseñando, al igual que la ropa que llevan los deportistas. Los ciclistas y algunos nadadores y corredores llevan trajes de cuerpo entero. La australiana Cathy Freeman llevó un traje de cuerpo entero en los Juegos Olímpicos de Sydney 2000 y ganó una medalla de oro en la carrera de 400 metros. Muchos nadadores de los Juegos Olímpicos de Pekín 2008 llevaban trajes de baño de cuerpo entero (Speedo), lo que podría haber marcado la diferencia a la hora de batir muchos récords mundiales (Figura 6.31). La mayoría de los nadadores de élite (y los ciclistas) se afeitan el vello corporal. Estas innovaciones tendrían el efecto de recortar milésimas de segundo en una carrera, lo que a veces marca la diferencia entre una medalla de oro y una de plata. Una de las consecuencias es que hay que elaborar continuamente directrices cuidadosas y precisas para mantener la integridad del deporte.



FIGURA 6.31 A los trajes de cuerpo entero, como este LZR Racer Suit, se les atribuye la ayuda en muchos récords mundiales luego de su lanzamiento en 2008. Una "piel" más suave y más fuerzas de compresión en el cuerpo del nadador proporcionan al menos 10% menos arrastre (créditos: NASA/Kathy Barnstorff).

Velocidad límite

Algunas situaciones interesantes relacionadas con la segunda ley de Newton se producen al considerar los efectos de las fuerzas de arrastre sobre un objeto en movimiento. Por ejemplo, pensemos en un paracaidista que se lanza bajo la influencia de la gravedad. Las dos fuerzas que actúan sobre él son la fuerza de gravedad y la fuerza de arrastre (sin tomar en cuenta la pequeña fuerza de flotación). La fuerza de gravedad hacia abajo se mantiene constante, independientemente de la velocidad a la que se mueva la persona. Sin embargo, a medida que aumenta la velocidad de la persona, la magnitud de la fuerza de arrastre aumenta hasta que la magnitud de la fuerza de arrastre es igual a la fuerza gravitatoria, lo que produce una fuerza neta de cero. La fuerza neta de cero significa que no hay aceleración, como lo demuestra la segunda ley de Newton. En este punto, la velocidad de la persona permanece constante y decimos que la persona ha alcanzado su **velocidad límite** (v_T). Dado que F_D es proporcional a la rapidez al cuadrado, un paracaidista más pesado deberá ir más rápido para que F_D sea igual a su peso. Veamos cómo funciona esto de forma más cuantitativa.

En la velocidad terminal,

$$F_\mathrm{neta} = mg - F_\mathrm{D} = ma = 0.$$

Por lo tanto,

$$mg = F_\mathrm{D}.$$

Al utilizar la ecuación de la fuerza de arrastre, tenemos

$$mg = \frac{1}{2}C\rho A v_\mathrm{T}^2.$$

Al resolver la velocidad, obtenemos

$$v_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho CA}}.$$

Supongamos que la densidad del aire es $\rho = 1{,}21\ \mathrm{kg/m^3}$. Un paracaidista de 75 kg que desciende de cabeza tiene un área transversal de aproximadamente $A = 0{,}18\ \mathrm{m^2}$ y un coeficiente de arrastre de aproximadamente $C = 0{,}70$. Encontramos que

$$v_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2(75\ \mathrm{kg})(9{,}80\ \mathrm{m/s^2})}{(1{,}21\ \mathrm{kg/m^3})(0{,}70)(0{,}18\ \mathrm{m^2})}} = 98\ \mathrm{m/s} = 350\ \mathrm{km/h}.$$

Esto significa que un paracaidista con una masa de 75 kg alcanza una velocidad límite de unos 350 km/h mientras se desplaza en posición de cabeza, lo que minimiza el área y su resistencia. En una posición de águila extendida, esa velocidad límite puede disminuir a unos 200 km/h a medida que aumenta el área. Esta velocidad límite se reduce mucho después de que se abra el paracaídas.

EJEMPLO 6.17

Velocidad límite de un paracaidista

Halle la velocidad límite de un paracaidista de 85 kg que cae en posición de águila extendida.

Estrategia

Para la velocidad límite, $F_{\text{neta}} = 0$. Por lo tanto, la fuerza de arrastre sobre el paracaidista deberá ser igual a la fuerza de gravedad (el peso de la persona). Al utilizar la ecuación de la fuerza de arrastre, encontramos $mg = \frac{1}{2}\rho CAv^2$.

Solución

La velocidad límite v_{T} puede escribirse como

$$v_{\text{T}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho CA}} = \sqrt{\frac{2(85\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)}{(1{,}21\text{ kg/m}^3)(1{,}0)(0{,}70\text{ m}^2)}} = 44\text{ m/s}.$$

Importancia

Este resultado es coherente con el valor de v_{T} mencionado anteriormente. El paracaidista de 75 kg que iba con los pies por delante tenía una velocidad límite de $v_{\text{T}} = 98$ m/s. Pesaba menos, pero tenía un área frontal más pequeña y, por ende, menor arrastre debido al aire.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.10

Halle la velocidad límite de un paracaidista de 50 kg que cae en forma de águila extendida.

El tamaño del objeto que cae por el aire presenta otra interesante aplicación del arrastre del aire. Si se cae de una rama de un árbol de 5 metros de altura, es probable que se haga daño, y posiblemente se fracture un hueso. Sin embargo, una ardilla pequeña hace esto todo el tiempo, sin hacerse daño. Usted no alcanza una velocidad límite en una distancia tan corta, pero la ardilla sí.

La siguiente cita interesante sobre el tamaño de los animales y la velocidad límite procede de un ensayo de 1928 de un biólogo británico, J. B. S. Haldane, titulado "Sobre ser del tamaño correcto" ("On Being the Right Size").

"Para el ratón y cualquier animal más pequeño, [la gravedad] no presenta prácticamente ningún peligro. Se puede dejar caer un ratón por el pozo de una mina de mil metros; y, al llegar al fondo, recibe una ligera sacudida y se aleja, siempre que el suelo sea bastante blando. Una rata muere, un hombre se fractura los huesos y un caballo se desparrama. Esto se debe a que la resistencia que presenta el aire al movimiento es proporcional a la superficie del objeto en movimiento. Dividiendo por diez la longitud, la anchura y la altura de un animal, su peso se reduce a una milésima parte, pero su superficie solo a una centésima parte. Así que la resistencia a la caída en el caso del animal pequeño es relativamente diez veces mayor que la fuerza motriz".

La anterior dependencia cuadrática del arrastre del aire con respecto a la velocidad no se cumple si el objeto es muy pequeño, va muy lento o se encuentra en un medio más denso que el aire. Entonces encontramos que la fuerza de arrastre es proporcional justo a la velocidad. Esta relación viene dada por la ley de Stokes.

Ley de Stokes

Para un objeto esférico que cae en un medio, la fuerza de arrastre es

$$F_S = 6\pi r\eta v, \tag{6.6}$$

donde r es el radio del objeto, η es la viscosidad del fluido y v es la velocidad del objeto.

Los microorganismos, el polen y las partículas de polvo son buenos ejemplos de la ley de Stokes. Como cada uno de estos objetos es tan pequeño, nos encontramos con que muchos de ellos se desplazan sin ayuda solo a una velocidad constante (límite). Las velocidades límites de las bacterias (tamaño de aproximadamente de $1\ \mu m$) pueden ser casi $2\ \mu m/s$. Para desplazarse a mayor rapidez, muchas bacterias nadan con flagelos (orgánulos con forma de pequeñas colas) que son impulsados por pequeños motores incrustados en la célula.

Los sedimentos en un lago pueden moverse a una velocidad límite mayor (alrededor de $5\ \mu m/s$), por lo que puede tardar días en llegar al fondo del lago después de haberse depositado en la superficie.

Si comparamos los animales terrestres con los acuáticos, se observa cómo el arrastre ha influido en la evolución. Los peces, los delfines e incluso las enormes ballenas tienen una forma aerodinámica para reducir las fuerzas de arrastre. Las aves son aerodinámicas y las especies migratorias que vuelan grandes distancias suelen tener características particulares, como cuellos largos. Las bandadas de pájaros vuelan en forma de punta de lanza mientras la bandada forma un patrón aerodinámico (Figura 6.32). En los seres humanos, un ejemplo importante de aerodinámica es la forma de los espermatozoides, que deben ser eficientes en el uso de la energía.



FIGURA 6.32 Los gansos vuelan en formación de V durante sus largos viajes migratorios. Esta forma reduce el arrastre y el consumo de energía de cada una de las aves, y también les permite comunicarse mejor (créditos: modificación de la obra de "Julo"/Wikimedia Commons).

INTERACTIVO

En las exposiciones de clase, hacemos mediciones de la fuerza de arrastre (https://openstax.org/l/21dragforce) en diferentes objetos. Los objetos se colocan en una corriente de aire uniforme creada por un ventilador. Calcule el número de Reynolds y el coeficiente de arrastre.

El cálculo de las fuerzas de fricción dependientes de la velocidad

Cuando un cuerpo se desliza por una superficie, la fuerza de fricción sobre este es aproximadamente constante y viene dada por $\mu_k N$. Desgraciadamente, la fuerza de fricción sobre un cuerpo que se mueve a través de un líquido o un gas no se comporta de forma tan sencilla. Esta fuerza de arrastre es generalmente

una función complicada de la velocidad del cuerpo. Sin embargo, para un cuerpo que se mueve en línea recta a una rapidez moderada a través de un líquido como el agua, la fuerza de fricción puede aproximarse a menudo por

$$f_R = -bv,$$

donde b es una constante, cuyo valor depende de las dimensiones y la forma del cuerpo y de las propiedades del líquido, y v es la velocidad del cuerpo. Dos situaciones para las que la fuerza de fricción puede representarse mediante esta ecuación son una lancha a motor que se mueve por el agua y un pequeño objeto que cae lentamente por un líquido.

Consideremos el objeto que cae a través de un líquido. El diagrama de cuerpo libre de este objeto con la dirección positiva hacia abajo se muestra en la Figura 6.33. La segunda ley de Newton en la dirección vertical da la ecuación diferencial

$$mg - bv = m\frac{dv}{dt},$$

donde hemos escrito la aceleración como dv/dt. A medida que v aumenta, la fuerza de fricción $-bv$ aumenta hasta igualar a mg. En este punto, no hay aceleración y la velocidad se mantiene constante en la velocidad límite v_T. De la ecuación anterior,

$$mg - bv_\mathrm{T} = 0,$$

así que

$$v_\mathrm{T} = \frac{mg}{b}.$$

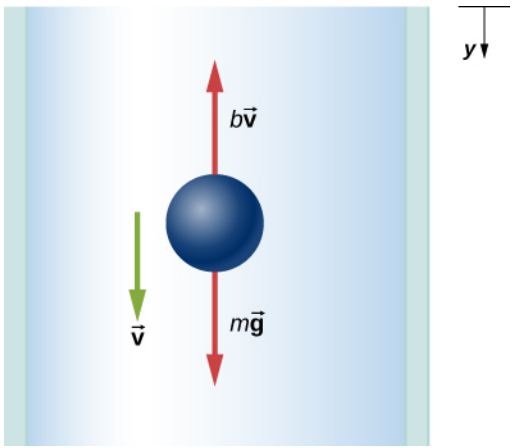


FIGURA 6.33 Diagrama de cuerpo libre de un objeto que cae a través de un medio resistivo.

Podemos encontrar la velocidad del objeto al integrar la ecuación diferencial para v. Primero, reordenamos los términos de esta ecuación para obtener

$$\frac{dv}{g - (b/m)v} = dt.$$

Suponiendo que $v = 0$ en $t = 0$, la integración de esta ecuación da como resultado

$$\int_0^v \frac{dv'}{g - (b/m)v'} = \int_0^t dt',$$

o

$$-\frac{m}{b}\ln\left(g - \frac{b}{m}v'\right)\Big|_0^v = t'\Big|_0^t,$$

donde v' y t' son variables ficticias de integración. Con los límites dados, encontramos

$$-\frac{m}{b}[\ln\left(g-\frac{b}{m}v\right)-\ln g]=t.$$

Dado que $\ln A-\ln B=\ln(A/B)$, y $\ln(A/B)=x$ implica $e^x=A/B$, obtenemos

$$\frac{g-(bv/m)}{g}=e^{-bt/m},$$

y

$$v=\frac{mg}{b}(1-e^{-bt/m}).$$

Observe que, como $t\to\infty$, $v\to mg/b=v_T$, que es la velocidad límite.

La posición en cualquier momento se encuentra al integrar la ecuación de v. Con $v=dy/dt$,

$$dy=\frac{mg}{b}(1-e^{-bt/m})dt.$$

Suponiendo que $y=0$ cuando $t=0$,

$$\int_0^y dy'=\frac{mg}{b}\int_0^t(1-e^{-bt'/m})\,dt',$$

que se integra en

$$y=\frac{mg}{b}t+\frac{m^2g}{b^2}(e^{-bt/m}-1).$$

EJEMPLO 6.18

Efecto de la fuerza de resistencia en una lancha a motor

Una lancha a motor se desplaza por un lago a una rapidez v_0 cuando su motor se congela y se para de repente. La lancha desacelera entonces por la fuerza de fricción $f_R=-bv$. (a) ¿Cuáles son la velocidad y la posición de la lancha en función del tiempo? (b) Si la lancha desacelera de 4,0 a 1,0 m/s en 10 s, ¿qué distancia recorre antes de detenerse?

Solución

a. Con el motor detenido, la única fuerza horizontal sobre la lancha es $f_R=-bv$, por lo que de la segunda ley de Newton,

$$m\frac{dv}{dt}=-bv,$$

que podemos escribir como

$$\frac{dv}{v}=-\frac{b}{m}dt.$$

Integrando esta ecuación entre el tiempo cero cuando la velocidad es v_0 y el tiempo t cuando la velocidad es v, tenemos

$$\int_0^v\frac{dv'}{v'}=-\frac{b}{m}\int_0^t dt'.$$

Por lo tanto,

$$\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{b}{m}t,$$

que, dado que $\ln A=x$ implica $e^x=A$, podemos escribirlo como

$$v=v_0e^{-bt/m}.$$

Ahora, desde la definición de velocidad,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-bt/m},$$

por lo que tenemos

$$dx = v_0 e^{-bt/m}\, dt.$$

Con la posición inicial cero, tenemos

$$\int_0^x dx' = v_0 \int_0^t e^{-bt'/m}\, dt',$$

y

$$x = -\frac{mv_0}{b} e^{-bt'/m}\Big|_0^t = \frac{mv_0}{b}(1 - e^{-bt/m}).$$

A medida que aumenta el tiempo, $e^{-bt/m} \to 0$, y la posición de la lancha se acerca a un valor límite

$$x_{\text{máx}} = \frac{mv_0}{b}.$$

Aunque esto nos dice que la lancha tarda infinidad de tiempo en llegar $x_{\text{máx}}$, la lancha se detiene efectivamente después de un tiempo razonable. Por ejemplo, en $t = 10m/b$, tenemos

$$v = v_0 e^{-10} \simeq 4{,}5 \times 10^{-5} v_0,$$

mientras que también tenemos

$$x = x_{\text{máx}}(1 - e^{-10}) \simeq 0{,}99995 x_{\text{máx}}.$$

Por lo tanto, la velocidad y la posición de la lancha han alcanzado esencialmente sus valores finales.

b. Con $v_0 = 4{,}0$ m/s y $v = 1{,}0$ m/s, tenemos $1{,}0 \text{ m/s} = (4{,}0 \text{ m/s})e^{-(b/m)(10 \text{ s})}$, así que

$$\ln 0{,}25 = -\ln 4{,}0 = -\frac{b}{m}(10 \text{ s}),$$

y

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{10} \ln 4{,}0 \text{ s}^{-1} = 0{,}14 \text{ s}^{-1}.$$

Ahora la posición límite del barco es

$$x_{\text{máx}} = \frac{mv_0}{b} = \frac{4{,}0 \text{ m/s}}{0{,}14 \text{ s}^{-1}} = 29 \text{ m}.$$

Importancia

En los dos ejemplos anteriores, hallamos valores "límite". La velocidad límite es la misma que la velocidad terminal, que es la velocidad del objeto que cae después de un tiempo (relativamente) largo. Del mismo modo, la distancia límite de la lancha es la distancia que la lancha recorrerá después de que haya transcurrido una gran cantidad de tiempo. Debido a las propiedades del decaimiento exponencial, el tiempo necesario para alcanzar cualquiera de estos valores no es en realidad demasiado largo (¡ciertamente no es un tiempo infinito!), pero se encuentran rápidamente para llevar el límite al infinito.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 6.11

Supongamos que la fuerza de resistencia del aire sobre un paracaidista puede aproximarse mediante $f = -bv^2$. Si la velocidad terminal de un paracaidista de 100 kg es de 60 m/s, ¿cuál es el valor de b?

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

curva con peralte curva en una carretera con una pendiente que permite al vehículo maniobrar en la curva

fricción fuerza que se opone al movimiento relativo o a los intentos de movimiento entre sistemas en contacto

fricción cinética fuerza que se opone al movimiento de dos sistemas que están en contacto y se mueven uno respecto al otro

fricción estática fuerza que se opone al movimiento de dos sistemas que están en contacto y no se mueven uno respecto al otro

fuerza centrípeta cualquier fuerza neta que cause un movimiento circular uniforme

fuerza de arrastre fuerza que siempre se opone al movimiento de un objeto en un fluido; a diferencia de la fricción simple, la fuerza de arrastre es proporcional a alguna función de la velocidad del objeto en ese fluido

fuerza de Coriolis fuerza inercial que causa la desviación aparente de los objetos en movimiento cuando se ven en un marco de referencia rotativo

fuerza inercial fuerza que no tiene origen físico

marco de referencia no inercial marco de referencia acelerado

peralte ideal pendiente de una curva en una carretera, donde el ángulo de la pendiente permite al vehículo maniobrar en la curva a una determinada rapidez, sin la ayuda de la fricción entre los neumáticos y la carretera; la fuerza externa neta sobre el vehículo es igual a la fuerza centrípeta horizontal en ausencia de fricción

velocidad límite velocidad constante alcanzada por un objeto que cae, que se produce cuando el peso del objeto se equilibra con la fuerza de arrastre hacia arriba

Ecuaciones Clave

Magnitud de la fricción estática	$f_\text{s} \leq \mu_\text{s} N$
Magnitud de la fricción cinética	$f_k = \mu_k N$
Fuerza centrípeta	$F_\text{c} = m\frac{v^2}{r}$ o $F_\text{c} = mr\omega^2$
Ángulo ideal de una curva con peralte	$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$
Fuerza de arrastre	$F_D = \frac{1}{2}C\rho A v^2$
Ley de Stokes	$F_\text{s} = 6\pi r\eta v$

Resumen

6.1 Resolución de problemas con las leyes de Newton

- Las leyes del movimiento de Newton pueden aplicarse en numerosas situaciones para resolver problemas de movimiento.
- Algunos problemas contienen múltiples vectores de fuerza que actúan en diferentes direcciones sobre un objeto. Dibuje diagramas, resuelva todos los vectores de fuerza en componentes horizontales y verticales, y trace un diagrama de cuerpo libre. Analice siempre la dirección en la que se acelera un objeto para poder determinar si $F_\text{neta} = ma$ o $F_\text{neta} = 0$.
- La fuerza normal sobre un objeto no siempre es igual en magnitud al peso del objeto. Si un objeto se acelera verticalmente, la fuerza normal es menor o mayor que el peso del objeto. Además, si el objeto está en un plano inclinado, la fuerza normal es siempre menor que el peso total del objeto.
- Algunos problemas contienen varias magnitudes físicas, como fuerzas, aceleración, velocidad o posición. Puede aplicar conceptos de cinemática y dinámica para resolver estos problemas.

6.2 Fricción

- La fricción es una fuerza de contacto que se opone al movimiento o al intento de movimiento entre dos sistemas. La fricción simple es proporcional a la fuerza normal N, que soporta los dos sistemas.
- La magnitud de la fuerza de fricción estática entre dos materiales inmóviles uno respecto del otro se determina mediante el coeficiente de fricción estática, que depende de ambos materiales.
- La fuerza de fricción cinética entre dos materiales que se mueven uno respecto del otro se determina mediante el coeficiente de fricción cinética, que también depende de ambos materiales y siempre es menor que el coeficiente de fricción estática.

6.3 Fuerza centrípeta

- La fuerza centrípeta $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{c}}$ es una fuerza de "búsqueda de centro" que siempre apunta hacia el centro de rotación. Es perpendicular a la velocidad lineal y tiene la magnitud
$$F_{\mathrm{c}} = ma_{\mathrm{c}}.$$
- Los marcos de referencia rotativos y acelerados son no inerciales. Las fuerzas inerciales, como la fuerza de Coriolis, son necesarias para explicar el movimiento en esos marcos.

6.4 Fuerza de arrastre y velocidad límite

- Las fuerzas de arrastre que actúan sobre un objeto que se mueve en un fluido se oponen al movimiento. Para objetos más grandes (como una pelota de béisbol) que se mueven a una velocidad en el aire, la fuerza de arrastre se determina con el coeficiente de arrastre (los valores típicos se dan en la Tabla 6.2), el área del objeto que se enfrenta al fluido y la densidad del fluido.
- Para objetos pequeños (como una bacteria) que se mueven en un medio más denso (como el agua), la fuerza de arrastre viene dada por la ley de Stokes.

Preguntas Conceptuales

6.1 Resolución de problemas con las leyes de Newton

1. Para simular la ingravidez aparente de la órbita espacial, los astronautas se entrenan en la bodega de un avión de carga que acelera hacia abajo a g. ¿Por qué parecen no tener peso, como se mide en una báscula de baño, en este marco de referencia acelerado? ¿Hay alguna diferencia entre su aparente ingravidez en órbita y en el avión?

6.2 Fricción

2. El pegamento de un trozo de cinta adhesiva puede ejercer fuerzas. ¿Pueden estas fuerzas ser un tipo de fricción simple? Explique, teniendo en cuenta especialmente que la cinta adhesiva puede pegarse a las paredes verticales e incluso al techo.

3. Cuando aprende a conducir, descubre que tiene que soltar ligeramente el pedal del freno al detenerse o el auto se parará con una sacudida. Explique esto en términos de la relación entre la fricción estática y la cinética.

4. Cuando empuja un trozo de tiza por una pizarra, a veces chirría porque alterna rápidamente entre el deslizamiento y la adhesión a la pizarra. Describa este proceso con más detalle, en particular, explique cómo se relaciona con el hecho de que la fricción cinética es menor que la estática. (El mismo proceso de deslizamiento y agarre ocurre cuando los neumáticos chirrían en el pavimento).

5. Una estudiante de física está cocinando el desayuno cuando se da cuenta de que la fuerza de fricción entre su espátula de acero y la sartén de teflón es de apenas 0,200 N. Conociendo el coeficiente de fricción cinética entre los dos materiales, calcule rápidamente la fuerza normal. ¿De cuánto es?

6.3 Fuerza centrípeta

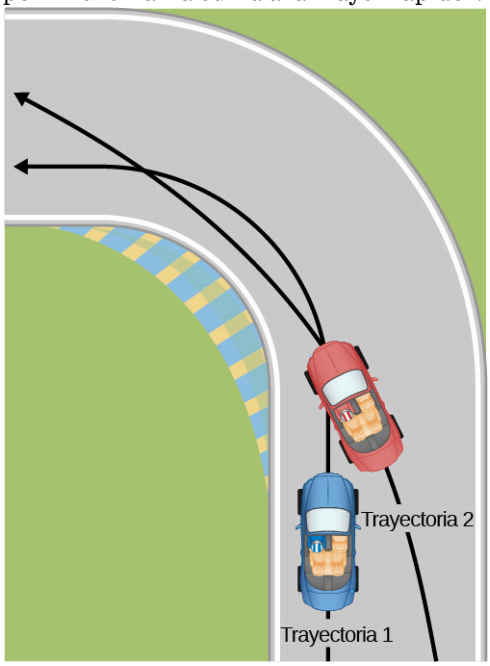
6. Si desea reducir el estrés (que está relacionado con la fuerza centrípeta) en los neumáticos de alta velocidad, ¿utilizaría neumáticos de diámetro grande o pequeño? Explique.

7. Defina la fuerza centrípeta. ¿Puede cualquier tipo de fuerza (por ejemplo, la tensión, la fuerza gravitatoria, la fricción, etc.) ser una fuerza centrípeta? ¿Puede cualquier combinación de fuerzas ser una fuerza centrípeta?

8. Si la fuerza centrípeta se dirige hacia el centro, ¿por qué siente que es "lanzado" lejos del centro cuando un auto toma una curva? Explique.

9. Los conductores de autos de carreras suelen

cortar las curvas, como se muestra a continuación (Trayectoria 2). Explique cómo esto permite tomar la curva a la mayor rapidez.



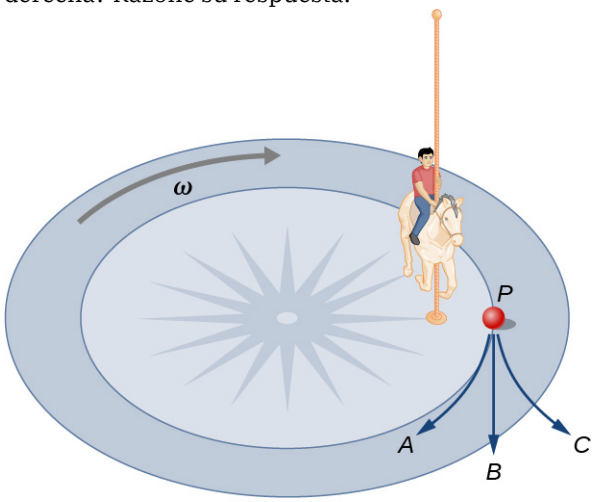
10. Muchos parques de atracciones tienen atracciones que hacen giros circulares verticales como el que se muestra a continuación. Por seguridad, los vagones se fijan a los rieles de forma que no puedan caerse. Si el vagón pasa por encima a la rapidez adecuada, solo la gravedad suministrará la fuerza centrípeta. Qué otra fuerza actúa y cuál es su dirección si:
(a) ¿El vagón pasa por encima a una rapidez mayor a la indicada?
(b) ¿El vagón pasa por encima a una rapidez inferior a la indicada?



11. ¿Qué hace que se elimine el agua de la ropa en una secadora?

12. Cuando un patinador forma un círculo, ¿qué fuerza es la responsable de realizar su giro? Utilice un diagrama de cuerpo libre en su respuesta.

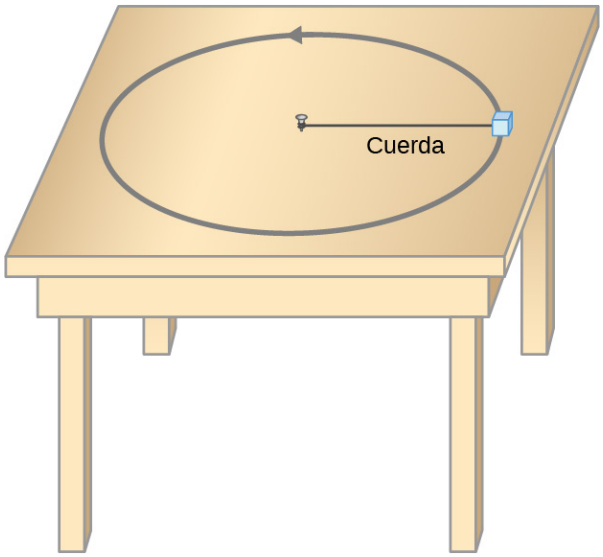
13. Supongamos que una niña está montada en un carrusel a una distancia aproximada de la mitad de su centro y su borde. Tiene una fiambrera apoyada en papel encerado, de modo que hay muy poca fricción entre ella y el carrusel. ¿Qué trayectoria tomará la fiambrera cuando la suelte? La fiambrera deja un rastro de polvo sobre el carrusel. ¿Ese rastro es recto, curvado a la izquierda o curvado a la derecha? Razone su respuesta.



Marco de referencia rotativo del carrusel

14. ¿Siente que lo tiran hacia un lado u otro cuando toma una curva con peralte ideal para la rapidez de su auto? ¿Cuál es la dirección de la fuerza ejercida sobre usted por el asiento del auto?

15. Supongamos que una masa se mueve en una trayectoria circular sobre una mesa sin fricción como se muestra a continuación. En el marco de referencia de la Tierra, no hay ninguna fuerza centrífuga que hale a la masa del centro de rotación, pero sí hay una fuerza que estira la cuerda que une la masa al clavo. Utilizando conceptos relacionados con la fuerza centrípeta y la tercera ley de Newton, explique qué fuerza estira la cuerda, identificando su origen físico.



16. Cuando se tira de la cadena de un inodoro o se vacía un fregadero, el agua (y otros materiales) empieza a rotar alrededor del desagüe en su descenso. Suponiendo que no hay rotación inicial y que el flujo es inicialmente recto hacia el desagüe, explique qué causa la rotación y qué dirección tiene en el hemisferio norte. (Tenga en cuenta que se trata de un efecto pequeño y que en la mayoría de los inodoros la rotación se debe a los chorros de agua direccionales). ¿Se invertiría el sentido de la rotación si el agua fuera forzada a subir por el desagüe?

17. Un auto toma una curva y se encuentra con una placa de hielo con un coeficiente de fricción cinética muy bajo. El auto se sale de la carretera. Describa la trayectoria del auto al salir de la carretera.

18. En una atracción del parque de atracciones, los pasajeros entran en un gran barril vertical y se colocan contra la pared sobre su suelo horizontal. El barril gira hacia arriba y el suelo cae. Los pasajeros se sienten como si estuvieran clavados a la pared por una fuerza parecida a la gravitatoria. Se trata de una fuerza inercial percibida y utilizada por los pasajeros para explicar los acontecimientos en el marco de referencia rotativo del barril. Explique en un marco de referencia inercial (la Tierra es casi uno) qué es lo que sujeta a los pasajeros a la pared, e identifique todas las fuerzas que actúan sobre ellos.

19. Dos amigos mantienen una conversación. Anna dice que un satélite en órbita está en caída libre porque el satélite sigue cayendo hacia la Tierra. Tom afirma que un satélite en órbita no está en caída libre porque la aceleración debida a la gravedad no es $9{,}80\ \text{m/s}^2$. ¿Con quién está de acuerdo y por qué?

20. Un marco de referencia no rotativo situado en el centro del Sol es casi un marco inercial. ¿Por qué no es exactamente un marco inercial?

6.4 Fuerza de arrastre y velocidad límite

21. Los atletas, como los nadadores y los ciclistas, llevan trajes de cuerpo entero en competición. Formule una lista de los pros y los contras de estos trajes.

22. Se utilizaron dos expresiones para la fuerza de arrastre experimentada por un objeto en movimiento en un líquido. Uno dependía de la rapidez, mientras que el otro era proporcional al cuadrado de la rapidez. ¿En qué tipo de movimiento sería más aplicable cada una de estas expresiones que la otra?

23. Cuando los autos circulan, el aceite y la gasolina se filtran en la superficie de la carretera. Si cae una lluvia ligera, ¿qué le hace al control del auto? ¿La lluvia fuerte hace alguna diferencia?

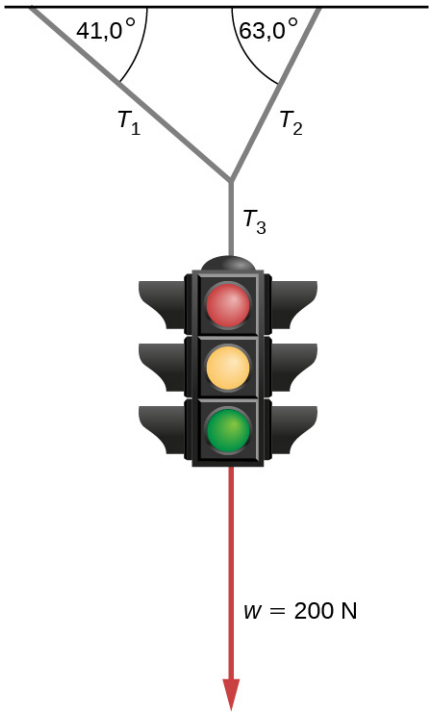
24. ¿Por qué una ardilla puede saltar desde la rama de un árbol hasta el suelo y salir corriendo sin sufrir daños, mientras que un humano podría fracturarse un hueso en una caída así?

Problemas

6.1 Resolución de problemas con las leyes de Newton

25. Una niña de 30,0 kg en un columpio se empuja hacia un lado y se mantiene en reposo por una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$ para que las cuerdas del columpio estén a $30{,}0°$ con respecto a la vertical. (a) Calcule la tensión en cada una de las dos cuerdas que soportan el columpio en estas condiciones. (b) Calcule la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}$.

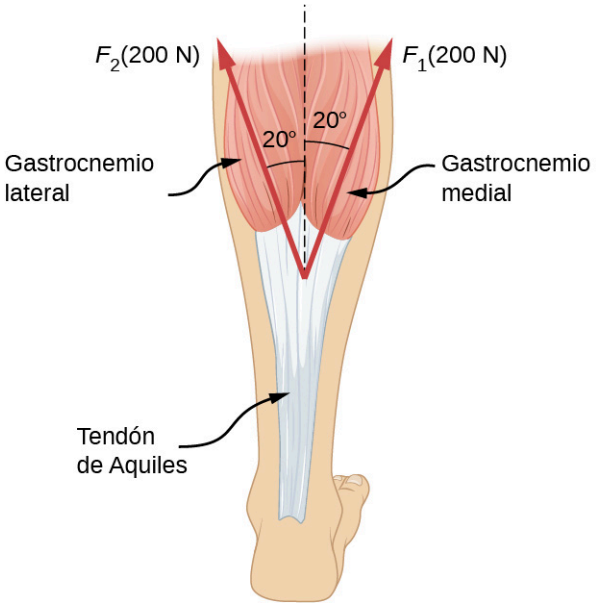
26. Halle la tensión en cada uno de los tres cables que sostienen el semáforo si este pesa $2{,}00 \times 10^2$ N.



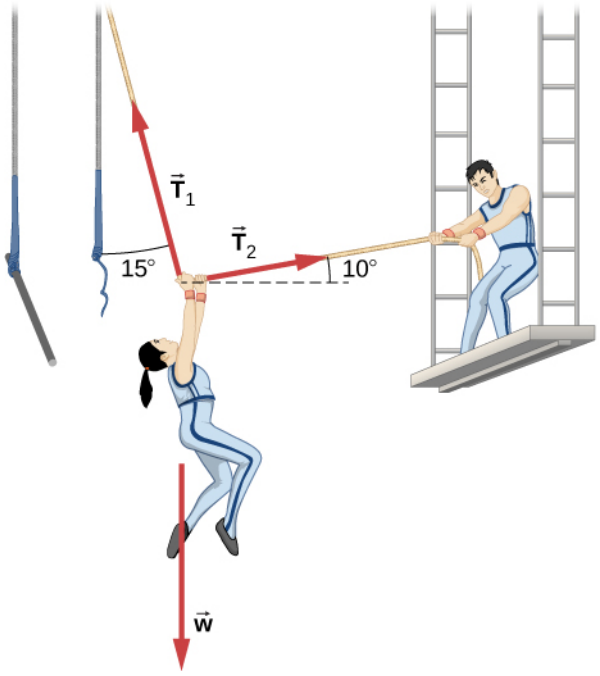
27. Tres fuerzas actúan sobre un objeto, considerado como una partícula, que se mueve con velocidad constante $v = (3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Dos de las fuerzas son $\vec{\mathbf{F}}_1 = (3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}})$ N y $\vec{\mathbf{F}}_2 = (4\hat{\mathbf{i}} - 7\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})$ N. Halle la tercera fuerza.

28. Una pulga salta y ejerce una fuerza de $1{,}20 \times 10^{-5}$ N directamente sobre el suelo. La brisa que sopla sobre la pulga paralela al suelo ejerce una fuerza de $0{,}500 \times 10^{-6}$ N sobre la pulga mientras aún está en contacto con el suelo. Halle la dirección y la magnitud de la aceleración de la pulga si su masa es $6{,}00 \times 10^{-7}$ kg. No ignore la fuerza gravitatoria.

29. Dos músculos de la parte posterior de la pierna halan hacia arriba el tendón de Aquiles, como se muestra en la siguiente imagen. (Estos músculos se denominan cabezas medial y lateral del músculo gastrocnemio). Halle la magnitud y la dirección de la fuerza total sobre el tendón de Aquiles. ¿Qué tipo de movimiento puede provocar esta fuerza?



30. Tras un percance, un artista de circo de 76,0 kg se aferra a un trapecio, que está siendo halado hacia un lado por otro artista de circo, como se muestra aquí. Calcule la tensión en las dos cuerdas si la persona está momentáneamente inmóvil. Incluya un diagrama de cuerpo libre en su solución.



31. Un delfín de 35,0 kg desacelera de 12,0 a 7,50 m/s en 2,30 s para unirse a otro delfín en juego. ¿Qué fuerza media se ejerció para frenar al primer delfín si se movía horizontalmente? (La fuerza gravitatoria se equilibra con la fuerza de flotación del agua).

32. Al iniciar una carrera a pie, un velocista de 70,0 kg ejerce una fuerza media de 650 N hacia atrás sobre el suelo durante 0,800 s. (a) ¿Cuál es su

rapidez final? (b) ¿Qué distancia recorre?

33. Un cohete grande tiene una masa de $2{,}00 \times 10^6$ kg en el despegue, y sus motores producen un empuje de $3{,}50 \times 10^7$ N. (a) Halle su aceleración inicial si despega en vertical. (b) ¿Cuánto tarda en alcanzar una velocidad de 120 km/h en línea recta, suponiendo que la masa y el empuje son constantes?

34. Un jugador de baloncesto salta directamente por un balón. Para ello, baja su cuerpo 0,300 m y luego acelera a través de esta distancia enderezando con fuerza las piernas. Este jugador salta con una velocidad vertical suficiente para elevarse 0,900 m por encima del suelo. (a) Calcule su velocidad cuando salta. (b) Calcule su aceleración mientras endereza las piernas. Pasa de cero a la velocidad encontrada en (a) en una distancia de 0,300 m. (c) Calcule la fuerza que ejerce sobre el suelo para hacerlo, dado que su masa es de 110,0 kg.

35. Un proyectil de fuegos artificiales de 2,50 kg se dispara directamente desde un mortero y alcanza una altura de 110,0 m. (a) Ignorando la resistencia del aire (una suposición precaria, pero la haremos para este ejemplo), calcule la velocidad del proyectil cuando sale del mortero. (b) El propio mortero es un tubo de 0,450 m de longitud. Calcule la aceleración media del proyectil en el tubo al pasar de cero a la velocidad encontrada en (a). (c) ¿Cuál es la fuerza media sobre el proyectil en el mortero? Exprese su respuesta en newtons y a razón del peso del proyectil.

36. Una papa de 0,500 kg se dispara con un ángulo de $80{,}0°$ por encima de la horizontal desde un tubo de PVC utilizado como "pistola de papas" y alcanza una altura de 110,0 m. (a) Ignorando la resistencia del aire, calcule la velocidad de la papa cuando sale de la pistola. (b) La propia pistola es un tubo de 0,450 m de longitud. Calcule la aceleración media de la papa en el tubo al pasar de cero a la velocidad hallada en (a). (c) ¿Cuál es la fuerza media sobre la papa en la pistola? Exprese su respuesta en newtons y a razón del peso de la patata.

37. Un elevador lleno de pasajeros tiene una masa de $1{,}70 \times 10^3$ kg. (a) El elevador acelera hacia arriba desde el reposo a una tasa de $1{,}20\ \text{m/s}^2$ durante 1,50 s. Calcule la tensión en el cable que sostiene el elevador. b) El elevador continúa hacia arriba a velocidad constante durante 8,50 s. ¿Cuál es la tensión en el cable durante este tiempo? (c) El elevador desacelera a una tasa de $0{,}600\ \text{m/s}^2$ durante 3,00 s. ¿Cuál es la tensión del cable durante la desaceleración? (d) ¿A qué altura se ha desplazado el elevador por encima de su punto de partida original, y cuál es su velocidad final?

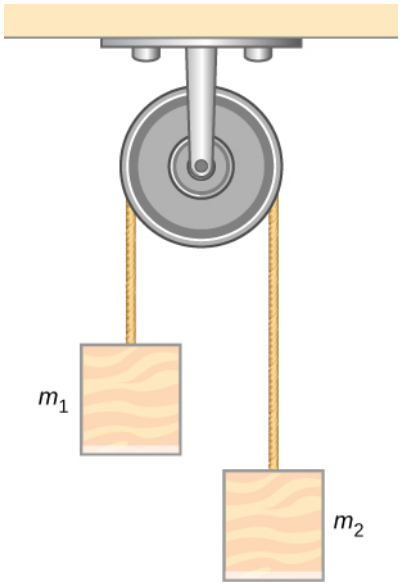
38. Una bola de 20,0 g cuelga del techo de un vagón de carga mediante una cuerda. Cuando el vagón de carga comienza a moverse, la cuerda hace un ángulo de $35{,}0°$ con la vertical. (a) ¿Cuál es la aceleración del vagón? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

39. La mochila de un estudiante, llena de libros de texto, está colgada de una balanza de resorte fijada al techo de un elevador. Cuando el elevador acelera hacia abajo a $3{,}8\ \text{m/s}^2$, la balanza lee 60 N. (a) ¿Cuál es la masa de la mochila? (b) ¿Qué lee la balanza si el elevador se mueve hacia arriba mientras acelera a una tasa de $3{,}8\ \text{m/s}^2$? (c) ¿Qué indica la balanza si el elevador se mueve hacia arriba a velocidad constante? (d) Si el elevador no tuviera frenos y el cable que lo sostiene se soltara de modo que el elevador pudiera caer libremente, ¿qué indicaría la balanza de resorte?

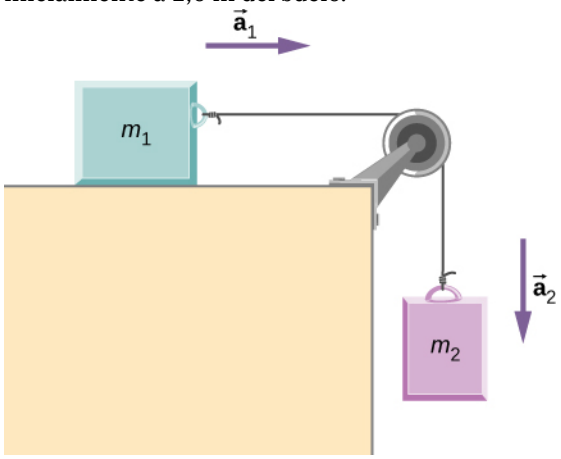
40. Un elevador de servicio lleva una carga de basura, con una masa de 10,0 kg, desde un piso de un rascacielos en construcción, hasta el nivel del suelo, que acelera hacia abajo a una tasa de $1{,}2\ \text{m/s}^2$. Halle la magnitud de la fuerza que ejerce la basura sobre el suelo del elevador de servicio.

41. Un vagón de montaña rusa parte del reposo en la parte superior de una pista de 30,0 m de longitud e inclinada a $20{,}0°$ de la horizontal. Supongamos que se puede ignorar la fricción. (a) ¿Cuál es la aceleración del vagón? (b) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que llegue al fondo de la pista?

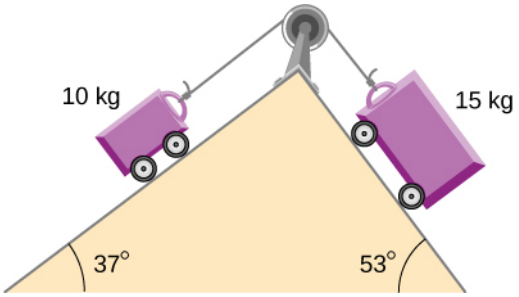
42. El dispositivo que se muestra a continuación es la máquina de Atwood considerada en el Ejemplo 6.5. Suponiendo que las masas de la cuerda y de la polea sin fricción son despreciables, (a) halle una ecuación para la aceleración de los dos bloques; (b) halle una ecuación para la tensión en la cuerda; y (c) halle tanto la aceleración como la tensión cuando el bloque 1 tiene masa 2,00 kg y el bloque 2 tiene masa 4,00 kg.



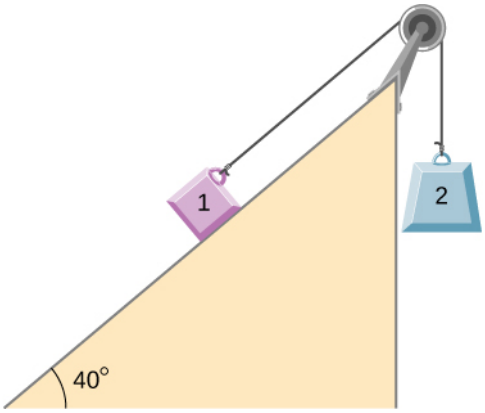
43. Dos bloques están conectados por una cuerda sin masa como se muestra a continuación. La masa del bloque sobre la mesa es de 4,0 kg y la masa colgante es de 1,0 kg. La mesa y la polea no tienen fricción. (a) Halle la aceleración del sistema. (b) Halle la tensión en la cuerda. (c) Halle la rapidez con la que la masa colgante golpea el suelo si parte del reposo y se sitúa inicialmente a 1,0 m del suelo.



44. A continuación, se muestran dos carros unidos por una cuerda que pasa sobre una pequeña polea sin fricción. Cada carro rueda libremente con una fricción despreciable. Calcule la aceleración de los carros y la tensión de la cuerda.



45. Un bloque de 2,00 kg (masa 1) y un bloque de 4,00 kg (masa 2) están unidos por una cuerda ligera como se muestra; la inclinación de la rampa es $40{,}0°$. La fricción es despreciable. ¿Cuál es (a) la aceleración de cada bloque y (b) la tensión en la cuerda?



6.2 Fricción

46. (a) Al reconstruir el motor de su auto, un estudiante de física deberá ejercer $3{,}00 \times 10^2$ N de fuerza para introducir un pistón de acero seco en un cilindro de acero. ¿Cuál es la fuerza normal entre el pistón y el cilindro? b) ¿Qué fuerza tendría que ejercer si las piezas de acero estuvieran aceitadas?

47. (a) ¿Cuál es la máxima fuerza de fricción en la articulación de la rodilla de una persona que soporta 66,0 kg de su masa en esa rodilla? (b) Durante el ejercicio extenuante, es posible ejercer fuerzas en las articulaciones que son fácilmente 10 veces mayores que el peso soportado. ¿Cuál es la fuerza máxima de fricción en esas condiciones? Las fuerzas de fricción en las articulaciones son relativamente pequeñas en todas las circunstancias, excepto cuando las articulaciones se deterioran, como en el caso de las lesiones o de la artritis. El aumento de las fuerzas de fricción puede causar más lesiones y dolor.

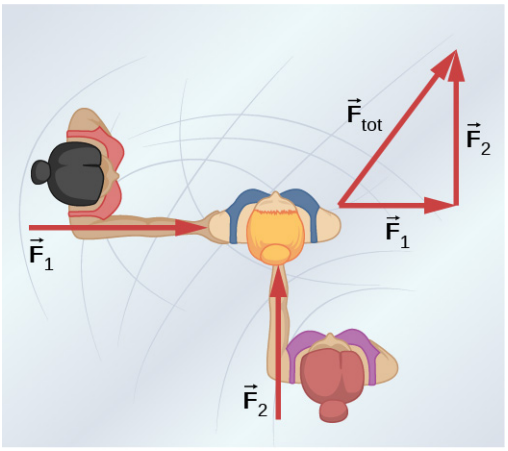
48. Suponga que tiene una caja de madera de 120 kg apoyada sobre un suelo de madera, con un coeficiente de fricción estática de 0,500 entre

estas superficies de madera. (a) ¿Qué fuerza máxima puede ejercer horizontalmente sobre la caja sin que se mueva? (b) Si sigue ejerciendo esta fuerza una vez que la caja empieza a resbalar, ¿cuál será entonces su aceleración? Se sabe que el coeficiente de fricción por deslizamiento es de 0,300 para esta situación.

49. (a) Si la mitad del peso de un pequeño $1{,}00 \times 10^3$-kg camión utilitario se apoya en sus dos ruedas motrices, ¿cuál es la máxima aceleración que puede alcanzar sobre el hormigón seco? (b) ¿Se deslizará un armario metálico que está sobre la plataforma de madera del camión si este acelera a este ritmo? (c) Resuelva ambos problemas suponiendo que el camión tiene tracción en las cuatro ruedas.

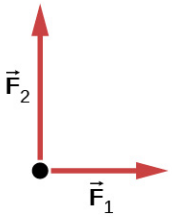
50. Un equipo de ocho perros hala un trineo con patines de madera encerada sobre la nieve húmeda (¡masa blanda!). Los perros tienen masas medias de 19,0 kg, y el trineo cargado con su conductor tiene una masa de 210 kg. (a) Calcule la aceleración de los perros partiendo del reposo si cada perro ejerce una fuerza media de 185 N hacia atrás sobre la nieve. (b) Calcule la fuerza en el acoplamiento entre los perros y el trineo.

51. Considere la patinadora sobre hielo de 65,0 kg que es empujada por otros dos que se muestran a continuación. (a) Halle la dirección y la magnitud de $\mathbf{F}_{\text{tot}}$, la fuerza total ejercida sobre ella por los demás, dado que las magnitudes F_1 y F_2 son 26,4 N y 18,6 N, respectivamente. (b) ¿Cuál es su aceleración inicial si inicialmente está inmóvil y lleva unos patines con cuchillas de acero que apuntan en la dirección de la $\mathbf{F}_{\text{tot}}$? (c) ¿Cuál es su aceleración, suponiendo que ya se está moviendo en la dirección de la $\mathbf{F}_{\text{tot}}$? (Recuerde que la fricción siempre actúa en dirección contraria a la del movimiento o intento de movimiento entre superficies en contacto).



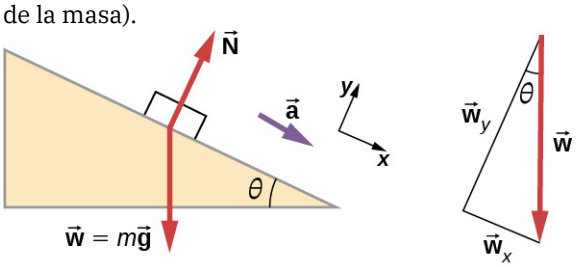
(a)

Diagrama de cuerpo libre

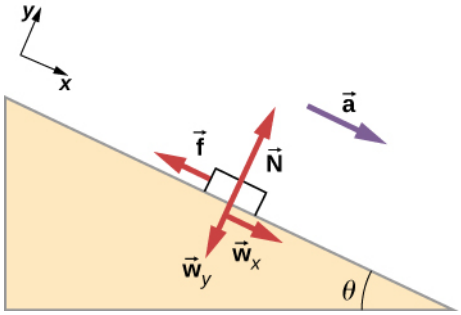


(b)

52. Demuestre que la aceleración de cualquier objeto que desciende por una pendiente sin fricción que forma un ángulo θ con la horizontal es $a = g \operatorname{sen} \theta$. (Observe que esta aceleración es independiente de la masa).



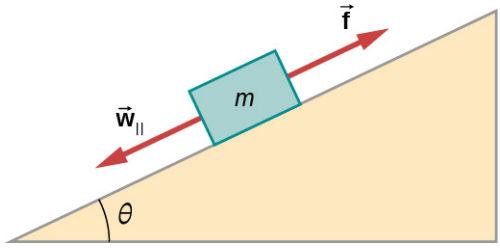
53. Demuestre que la aceleración de cualquier objeto que desciende por una pendiente en la que la fricción se comporta de forma simple (es decir, en la que $f_k = \mu_k N$) es $a = g(\operatorname{sen} \theta - \mu_k \cos \theta)$. Observe que la aceleración es independiente de la masa y se reduce a la expresión encontrada en el problema anterior cuando la fricción se vuelve insignificantemente pequeña ($\mu_k = 0$).



54. Calcule la desaceleración de un patinador sobre nieve que sube una pendiente de $5{,}00°$, asumiendo el coeficiente de fricción de la madera encerada sobre la nieve húmeda. El resultado del problema anterior puede ser útil, pero hay que tener en cuenta que el patinador sobre nieve va cuesta arriba.

55. Una máquina de una oficina de correos envía los paquetes por una rampa para cargarlos en los vehículos de reparto. (a) Calcule la aceleración de una caja que se dirige hacia abajo de una pendiente de $10{,}0°$, suponiendo que el coeficiente de fricción para un paquete sobre madera encerada es de 0,100. (b) Halle el ángulo de la pendiente por el que esta caja podría desplazarse a velocidad constante. Se puede ignorar la resistencia del aire en ambas partes.

56. Para que un objeto se apoye en una pendiente sin resbalar, la fricción debe ser igual al componente del peso del objeto paralelo a la pendiente. Esto requiere una fricción cada vez mayor para las pendientes más pronunciadas. Demuestre que el ángulo máximo de una pendiente sobre la horizontal para que un objeto no se deslice hacia abajo es $\theta = \tan^{-1}\ \mu_s$. Puede utilizar el resultado del problema anterior. Supongamos que $a = 0$ y que la fricción estática ha alcanzado su valor máximo.



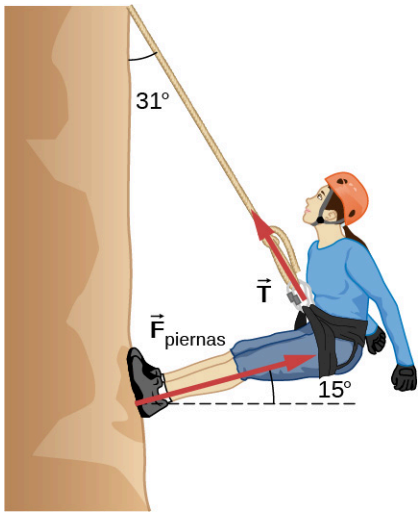
57. Calcule la aceleración máxima de un auto que se dirige hacia una pendiente de $6{,}00°$ (una que hace un ángulo de $6{,}00°$ con la horizontal) en las siguientes condiciones de la carretera. Puede suponer que el peso del auto está distribuido uniformemente en los cuatro neumáticos y que interviene el coeficiente de fricción estática, es decir, que los neumáticos no pueden resbalar durante la desaceleración. (Ignore la rodadura). Calcule para un auto: (a) sobre hormigón seco. (b) Sobre hormigón húmedo. (c) Sobre hielo, suponiendo que $\mu_s = 0{,}100$, lo mismo que para los zapatos sobre el hielo.

58. Calcule la aceleración máxima de un auto que se dirige a una pendiente de $4{,}00°$ (una que hace un ángulo de $4{,}00°$ con la horizontal) en las siguientes condiciones de la carretera. Supongamos que solo la mitad del peso del auto se soporta en las dos ruedas motrices y que interviene el coeficiente de fricción estática, es decir, que los neumáticos no pueden resbalar durante la aceleración. (Ignore la rodadura). (a) Sobre hormigón seco. (b) Sobre hormigón húmedo. (c) Sobre hielo, suponiendo que $\mu_s = 0{,}100$, lo mismo que para los zapatos sobre el hielo.

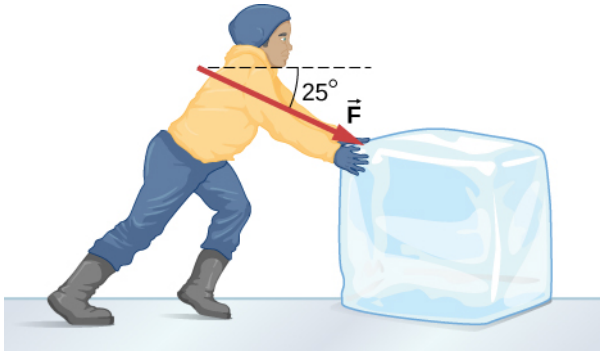
59. Repita el problema anterior para un auto con tracción en las cuatro ruedas.

60. Un tren de carga está formado por dos $8{,}00 \times 10^5$-kg motores y 45 vagones con masa promedio de $5{,}50 \times 10^5$ kg. (a) ¿Qué fuerza debe ejercer cada motor en retroceso en la vía para acelerar el tren a una tasa de $5{,}00 \times 10^{-2}\,\text{m/s}^2$ si la fuerza de fricción es $7{,}50 \times 10^5\,\text{N}$, suponiendo que los motores ejerzan fuerzas idénticas? No es una fuerza de fricción muy grande para un sistema tan masivo. La fricción de rodadura de los trenes es pequeña y, en consecuencia, los trenes son sistemas de transporte muy eficientes desde el punto de vista energético. (b) ¿Cuál es la fuerza en el acoplamiento entre los vagones 37 y 38 (es la fuerza que cada uno ejerce sobre el otro), suponiendo que todos los vagones tienen la misma masa y que la fricción se distribuye uniformemente entre todos los vagones y motores?

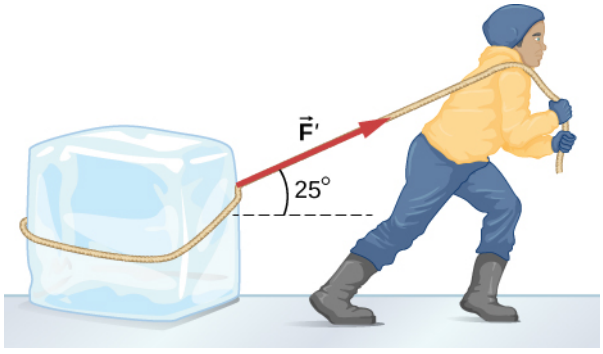
61. Considere la escaladora de 52,0 kg que se muestra a continuación. (a) Halle la tensión en la cuerda y la fuerza que la escaladora debe ejercer con sus pies sobre la pared vertical de la roca para permanecer estacionaria. Supongamos que la fuerza se ejerce en paralelo a sus piernas. Además, supongamos que la fuerza ejercida por sus brazos es despreciable. (b) ¿Cuál es el mínimo coeficiente de fricción entre sus zapatos y el acantilado?



62. Un competidor en una prueba deportiva de invierno empuja un bloque de hielo de 45,0 kg a través de un lago helado, como se muestra a continuación. (a) Calcule la fuerza mínima F que debe ejercer para que el bloque se mueva. (b) ¿Cuál es su aceleración una vez que empieza a moverse, si se mantiene esa fuerza?



63. El competidor hala ahora el bloque de hielo con una cuerda por encima del hombro en el mismo ángulo sobre la horizontal como se muestra a continuación. Calcule la fuerza mínima F que debe ejercer para que el bloque se mueva. (b) ¿Cuál es su aceleración una vez que empieza a moverse, si se mantiene esa fuerza?



64. En una oficina de correos, un paquete que es una caja de 20,0 kg se desliza por una rampa inclinada a 30,0° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano es de 0,0300. (a) Halle la aceleración de la caja. (b) Halle la velocidad de la caja al llegar al final del plano, si la longitud del plano es de 2 m y la caja comienza en reposo.

6.3 Fuerza centrípeta

65. (a) Un niño de 22,0 kg está montado en un carrusel de un parque infantil que rota a 40,0 rev/min. ¿Qué fuerza centrípeta se ejerce si está a 1,25 m de su centro? (b) ¿Qué fuerza centrípeta se ejerce si el carrusel rota a 3,00 rev/min y él está a 8,00 m de su centro? (c) Compare cada fuerza con su peso.

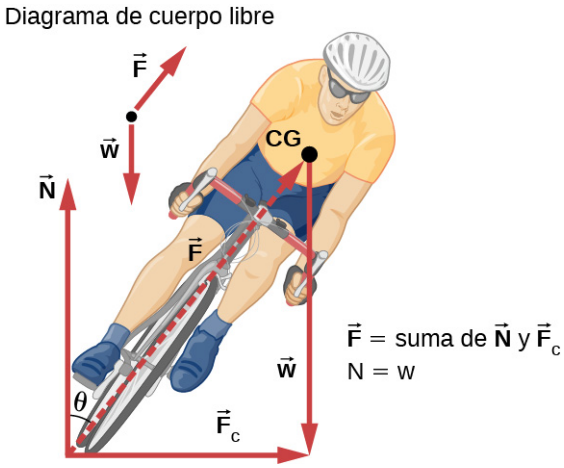
66. Calcule la fuerza centrípeta en el extremo de un aspa de una turbina eólica de 100 m (de radio) que rota a 0,5 rev/s. Supongamos que la masa es de 4 kg.

67. ¿Cuál es el ángulo de peralte ideal para un giro suave de 1,20 km de radio en una autopista con un límite de velocidad de 105 km/h (unas 65 mi/h), suponiendo que todo el mundo viaja al límite?

68. ¿Cuál es la rapidez ideal para tomar una curva de 100,0 m de radio con peralte a un ángulo de 20,0°?

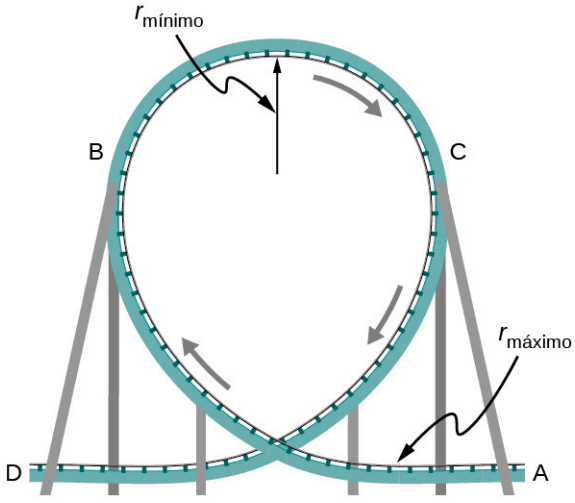
69. (a) ¿Cuál es el radio de un giro de trineo con peralte de 75,0° y tomado a 30,0 m/s, suponiendo que tiene un peralte ideal? (b) Calcule la aceleración centrípeta. (c) ¿Le parece que esta aceleración es grande?

70. Parte de montar en bicicleta implica inclinarse en el ángulo correcto al hacer un giro, como se ve a continuación. Para ser estable, la fuerza ejercida por el suelo debe estar en una línea que pase por el centro de gravedad. La fuerza sobre la rueda de la bicicleta puede resolverse en dos componentes perpendiculares: la fricción paralela a la carretera (que debe suministrar la fuerza centrípeta) y la fuerza normal vertical (que deberá ser igual al peso del sistema). (a) Demuestre que θ (definido como se muestra) está relacionado con la rapidez v y el radio de curvatura r de la curva de la misma manera que para una calzada con peralte ideal, es decir, $\theta = \tan^{-1}(v^2/rg)$. (b) Calcule θ para un giro de 12,0 m/s de radio 30,0 m (como en una carrera).

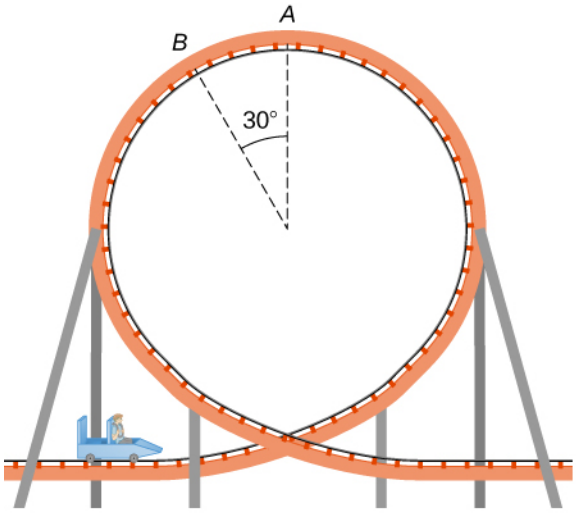


71. Si un auto toma una curva con peralte a una rapidez inferior a la ideal, la fricción es necesaria para evitar que se deslice hacia el interior de la curva (un problema en las carreteras de montaña con hielo). (a) Calcule la rapidez ideal para tomar una curva de 100,0 m de radio con peralte de $15{,}0°$. b) ¿Cuál es el mínimo coeficiente de fricción necesario para que un conductor asustado tome la misma curva a 20,0 km/h?

72. Las montañas rusas modernas tienen giros circulares verticales como el que se muestra aquí. El radio de curvatura es menor en la parte superior que en los laterales, de modo que la aceleración centrípeta descendente en la parte superior será mayor que la aceleración debida a la gravedad, lo que mantendrá a los pasajeros firmemente presionados a sus asientos. ¿Cuál es la rapidez de la montaña rusa en la parte superior del giro circular si el radio de curvatura allí es de 15,0 m y la aceleración hacia abajo del vagón es de 1,50 *g*?



73. Un niño de masa 40,0 kg está en un vagón de montaña rusa, que se desplaza en un giro circular de radio 7,00 m. En el punto A la velocidad del vagón es de 10,0 m/s, y en el punto B, la rapidez es de 10,5 m/s. Supongamos que el niño no se sujeta y no lleva cinturón de seguridad. (a) ¿Cuál es la fuerza del asiento del vagón sobre el niño en el punto A? (b) ¿Cuál es la fuerza del asiento del vagón sobre el niño en el punto B? (c) ¿Qué rapidez mínima es necesaria para mantener al niño en su asiento en el punto A?



74. En el modelo de Bohr simple del estado fundamental del átomo de hidrógeno, el electrón viaja en una órbita circular alrededor de un protón fijo. El radio de la órbita es $5{,}28 \times 10^{-11}$ m, y la rapidez del electrón es $2{,}18 \times 10^{6}$ m/s. La masa de un electrón es $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg. ¿Cuál es la fuerza sobre el electrón?

75. Las vías férreas siguen una curva circular de 500,0 m de radio y con peralte a un ángulo de $5{,}0°$. ¿Para qué trenes de qué rapidez están diseñadas estas vías?

76. El acelerador de partículas del CERN es circular con una circunferencia de 7,0 km. (a) ¿Cuál es la aceleración de los protones ($m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) que se mueven en torno al acelerador a 5% de la velocidad de la luz? (La velocidad de la luz es $v = 3{,}00 \times 10^{8}$ m/s.) (b) ¿Cuál es la fuerza sobre los protones?

77. Un auto rodea una curva sin peralte de radio de 65 m. Si el coeficiente de fricción estática entre la carretera y el auto es de 0,70, ¿cuál es la rapidez máxima a la que el auto puede atravesar la curva sin resbalar?

78. Una autopista con peralte está diseñada para el tráfico que se mueve a 90,0 km/h. El radio de la curva es de 310 m. ¿Cuál es el ángulo de peralte de la carretera?

6.4 Fuerza de arrastre y velocidad límite

79. La velocidad límite de una persona que cae en el aire depende del peso y del área de la persona frente al fluido. Halle la velocidad límite (en metros por segundo y kilómetros por hora) de un paracaidista de 80,0 kg que cae de cabeza con una superficie de $0{,}140\ \text{m}^2$.

80. Un paracaidista de 60,0 kg y otro de 90,0 kg saltan desde un avión a una altura de $6{,}00 \times 10^3\ \text{m}$, ambos caen de cabeza. Haga algunas suposiciones sobre sus áreas frontales y calcule sus velocidades límites. ¿Cuánto tiempo tardará cada paracaidista en llegar al suelo (suponiendo que el tiempo para alcanzar la velocidad límite es pequeño)? Asuma que todos los valores son precisos con tres dígitos significativos.

81. Una ardilla de 560 g con una superficie de $930\ \text{cm}^2$ cae desde un árbol de 5,0 m al suelo. Calcule su velocidad límite. (Utilice un coeficiente de arrastre para un paracaidista horizontal). ¿Cuál será la velocidad de una persona de 56 kg al chocar contra el suelo, suponiendo que no hay contribución del arrastre en una distancia tan corta?

82. Para mantener una rapidez constante, la fuerza proporcionada por el motor de un auto deberá ser igual a la fuerza de arrastre más la fuerza de fricción de la carretera (la resistencia a la rodadura). (a) ¿Cuáles son las fuerzas de arrastre a 70 km/h y a 100 km/h para un Toyota Camry? (El área de arrastre es $0{,}70\ \text{m}^2$) b) ¿Cuál es la fuerza de arrastre a 70 km/h y a 100 km/h de una Hummer H2? (El área de arrastre es $2{,}44\ \text{m}^2$) Asuma que todos los valores son precisos con tres dígitos significativos.

83. ¿En qué factor aumenta la fuerza de arrastre de un auto cuando pasa de 65 a 110 km/h?

84. Calcule la velocidad que alcanzaría una gota de lluvia esférica que cae desde 5,00 km (a) en ausencia de arrastre del aire (b) con arrastre del aire. Tomemos que el tamaño de la gota es de 4 mm y la densidad es de $1{,}00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$, y el área de superficie como πr^2.

85. Utilizando la ley de Stokes, verifique que las unidades de la viscosidad sean kilogramos por metro por segundo.

86. Halle la velocidad límite de una bacteria esférica (diámetro $2{,}00\ \mu\text{m}$) que cae en el agua. En primer lugar, debe tener en cuenta que la fuerza de arrastre es igual al peso a velocidad límite. Tome la densidad de la bacteria como $1{,}10 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$.

87. La ley de Stokes describe la sedimentación de las partículas en los líquidos y puede utilizarse para medir la viscosidad. Las partículas en los líquidos alcanzan rápidamente la velocidad límite. Se puede medir el tiempo que tarda una partícula en caer una determinada distancia y luego utilizar la ley de Stokes para calcular la viscosidad del líquido. Supongamos que un rodamiento de bolas de acero (densidad $7{,}8 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$, de 3,0 mm de diámetro) se deja caer en un recipiente con aceite de motor. Tarda 12 s en caer una distancia de 0,60 m. Calcule la viscosidad del aceite.

88. Supongamos que la fuerza de resistencia del aire sobre un paracaidista puede aproximarse por $f = -bv^2$. Si la velocidad límite de un paracaidista de 50,0 kg es de 60,0 m/s, ¿cuál es el valor de b?

89. Un pequeño diamante de masa 10,0 g se desprende del pendiente de una nadadora y cae por el agua, hasta alcanzar una velocidad límite de 2,0 m/s. (a) Suponiendo que la fuerza de fricción sobre el diamante obedece a $f = -bv$, ¿cuánto es b? (b) ¿A qué distancia cae el diamante antes de alcanzar el 90 % de su velocidad límite?

Problemas Adicionales

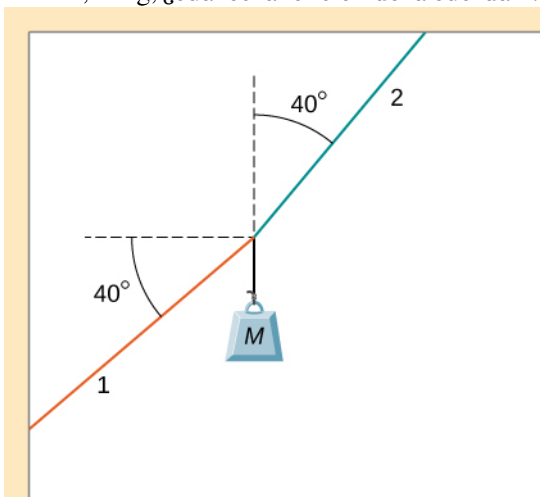
90. (a) ¿Cuál es la velocidad final de un auto que originalmente viajaba a 50,0 km/h y que desacelera a una tasa de $0{,}400\ \text{m/s}^2$ durante 50,0 s? Supongamos un coeficiente de fricción de 1,0. (b) ¿Qué es lo poco razonable del resultado? (c) ¿Qué premisa es poco razonable o qué premisas son incompatibles?

91. Una mujer de 75,0 kg se sube a una báscula de baño en un elevador que acelera desde el reposo hasta 30,0 m/s en 2,00 s. (a) Calcule la lectura de la báscula en newtons y compárela con su peso. (La báscula ejerce sobre ella una fuerza ascendente igual a su lectura). (b) ¿Qué es lo poco razonable del resultado? (c) ¿Qué premisa es poco razonable, o qué premisas son incompatibles?

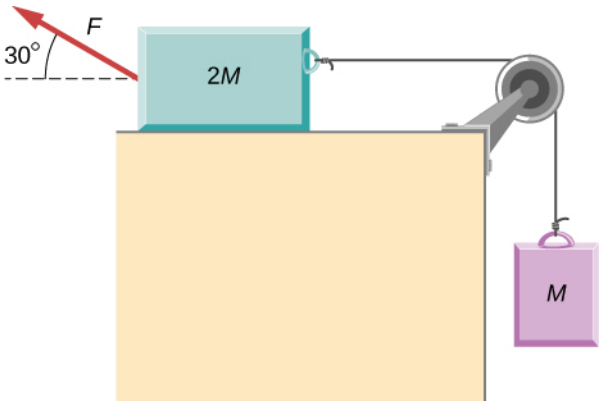
92. (a) Calcule el coeficiente de fricción mínimo necesario para que un auto recorra una curva de 50,0 m de radio sin peralte a 30,0 m/s. (b) ¿Qué es lo poco razonable del resultado? (c)

¿Qué premisas son absurdas o incompatibles?

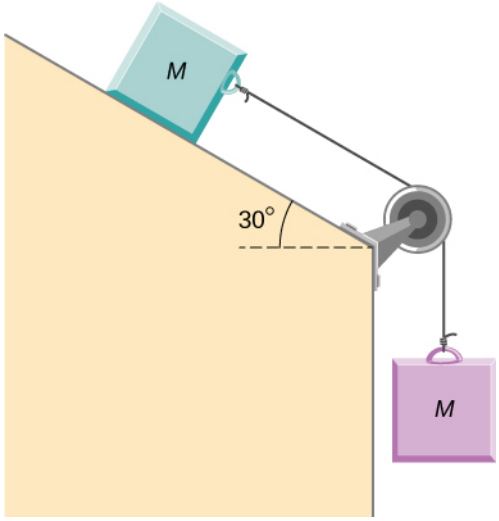
93. Como se muestra a continuación, si $M = 5{,}50$ kg, ¿cuál es la tensión de la cuerda 1?



94. Como se muestra a continuación, si $F = 60{,}0$ N y $M = 4{,}00$ kg, ¿cuál es la magnitud de la aceleración del objeto suspendido? Todas las superficies son sin fricción.



95. Como se muestra a continuación, si $M = 6{,}0$ kg, ¿cuál es la tensión de la cuerda de conexión? La polea y todas las superficies no tienen fricción.

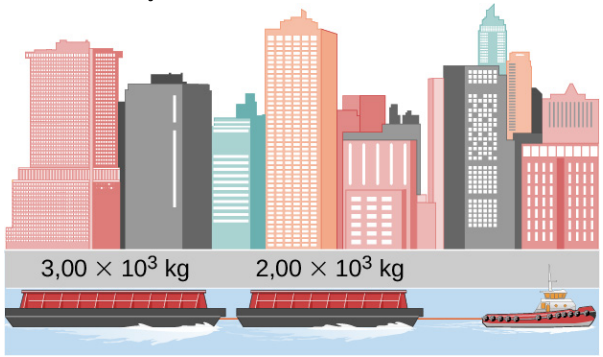


96. Una pequeña sonda espacial es liberada de una nave espacial. La sonda espacial tiene una masa de 20,0 kg y contiene 90,0 kg de combustible. Parte del reposo en el espacio profundo, desde el origen de un sistema de coordenadas basado en la nave espacial, y quema combustible a razón de 3,00 kg/s. El motor proporciona un empuje constante de 120,0 N. (a) Escriba una expresión para la masa de la sonda espacial en función del tiempo, entre 0 y 30 segundos, suponiendo que el motor encienda el combustible a partir de $t = 0$. (b) ¿Cuál es la velocidad después de 15,0 s? (c) ¿Cuál es la posición de la sonda espacial después de 15,0 s, con la posición inicial en el origen? (d) Escriba una expresión para la posición en función del tiempo, para $t > 30{,}0$ s.

97. Un contenedor de reciclaje medio lleno tiene una masa de 3,0 kg y es empujado hacia arriba por una pendiente de 40,0° con rapidez constante bajo la acción de una fuerza de 26 N que actúa hacia arriba y paralela a la pendiente. La pendiente tiene fricción. ¿Qué magnitud de fuerza debe actuar hacia arriba y en paralelo a la pendiente para que el contenedor se mueva hacia abajo con velocidad constante?

98. Un niño tiene una masa de 6,0 kg y se desliza por una pendiente de 35° con rapidez constante bajo la acción de una fuerza de 34 N que actúa hacia arriba y paralela a la inclinación. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el niño y la superficie de la pendiente?

99. Las dos barcazas mostradas aquí están acopladas por un cable de masa despreciable. La masa de la barcaza de adelante es $2{,}00 \times 10^3$ kg y la masa de la barcaza de atrás es $3{,}00 \times 10^3$ kg. Un remolcador hala la barcaza de adelante con una fuerza horizontal de magnitud $20{,}0 \times 10^3$ N, y las fuerzas de fricción del agua sobre las barcazas de adelante y atrás son $8{,}00 \times 10^3$ N y $10{,}0 \times 10^3$ N, respectivamente. Halle la aceleración horizontal de las barcazas y la tensión en el cable de conexión.



100. Si se invierte el orden de las barcazas del ejercicio anterior para que el remolcador hale la barcaza de $3{,}00 \times 10^3$ kg con una fuerza de $20{,}0 \times 10^3$ N, ¿cuál es la aceleración de las barcazas y la tensión en el cable de acoplamiento?

101. Un objeto con masa m se mueve a lo largo del eje de la x. Su posición en cualquier momento viene dada por $x(t) = pt^3 + qt^2$ donde p y q son constantes. Halle la fuerza neta sobre este objeto para cualquier tiempo t.

102. Un helicóptero con masa $2{,}35 \times 10^4$ kg tiene una posición dada por $\vec{\mathbf{r}}(t) = (0{,}020\,t^3)\hat{\mathbf{i}} + (2{,}2t)\hat{\mathbf{j}} - (0{,}060\,t^2)\hat{\mathbf{k}}$. Halle la fuerza neta sobre el helicóptero en $t = 3{,}0$ s.

103. Situado en el origen, un auto eléctrico de masa m está en reposo y en equilibrio. Una fuerza dependiente del tiempo de $\vec{\mathbf{F}}(t)$ se aplica en el tiempo $t = 0$, y sus componentes son $F_x(t) = p + nt$ y $F_y(t) = qt$ donde p, q y n son constantes. Halle la posición $\vec{\mathbf{r}}(t)$ y la velocidad $\vec{\mathbf{v}}(t)$ en función del tiempo t.

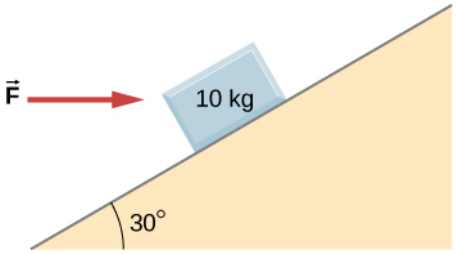
104. Una partícula de masa m se encuentra en el origen. Está en reposo y en equilibrio. Una fuerza dependiente del tiempo de $\vec{\mathbf{F}}(t)$ se aplica en el tiempo $t = 0$, y sus componentes son $F_x(t) = pt$ y $F_y(t) = n + qt$ donde p, q y n son constantes. Halle la posición $\vec{\mathbf{r}}(t)$ y la velocidad $\vec{\mathbf{v}}(t)$ en función del tiempo t.

105. Un objeto de 2,0 kg tiene una velocidad de $4{,}0\hat{\mathbf{i}}$ m/s a $t = 0$. Una fuerza resultante constante de $(2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}})$ N actúa entonces sobre el objeto durante 3,0 s. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del objeto al final del intervalo de 3,0 s?

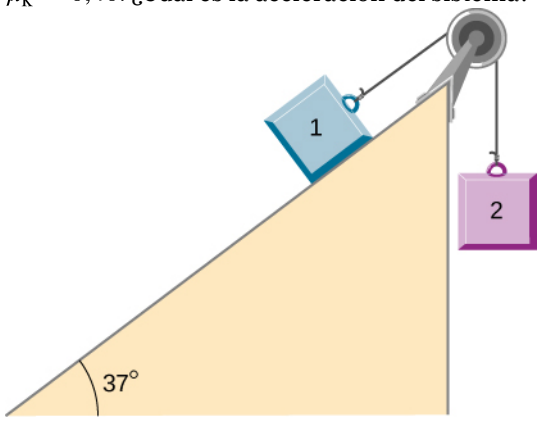
106. Una masa de 1,5 kg tiene una aceleración de $(4{,}0\hat{\mathbf{i}} - 3{,}0\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. Solamente dos fuerzas actúan sobre la masa. Si una de las fuerzas es $(2{,}0\hat{\mathbf{i}} - 1{,}4\hat{\mathbf{j}})$ N, ¿cuál es la magnitud de la otra fuerza?

107. Se deja caer una caja sobre una cinta transportadora que se mueve a 3,4 m/s. Si el coeficiente de fricción entre la caja y la correa es de 0,27, ¿cuánto tiempo tardará la caja en moverse sin resbalar?

108. A continuación, se muestra un bloque de 10,0 kg empujado por una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$ de magnitud 200,0 N. El coeficiente de fricción cinética entre las dos superficies es de 0,50. Calcule la aceleración del bloque.



109. Como se muestra a continuación, la masa del bloque 1 es $m_1 = 4{,}0$ kg, mientras que la masa del bloque 2 es $m_2 = 8{,}0$ kg. El coeficiente de fricción entre m_1 y la superficie inclinada es $\mu_k = 0{,}40$. ¿Cuál es la aceleración del sistema?



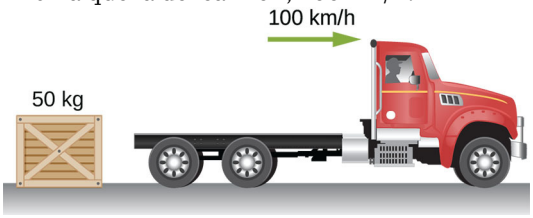
110. Una estudiante intenta trasladar una mininevera de 30 kg a su dormitorio. Durante un momento de desatención, la mininevera se desliza por una pendiente de 35 grados a rapidez constante cuando ella aplica una fuerza de 25 N que actúa hacia arriba y en paralelo a la pendiente. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre la nevera y la superficie de la pendiente?

111. Una caja de 100,0 kg de masa descansa sobre una superficie rugosa inclinada con un ángulo de 37,0° con la horizontal. Una cuerda sin masa a la que se puede aplicar una fuerza paralela a la superficie está unida a la caja y conduce a la parte superior de la pendiente. En su estado actual, la caja está a punto de resbalar y empezar a bajar por el plano. El coeficiente de fricción es 80% de eso para el caso estático. (a) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática? (b) ¿Cuál es la fuerza máxima que puede aplicarse hacia arriba a lo largo del plano en la cuerda y no mover el bloque? (c) Con una fuerza aplicada ligeramente mayor, el bloque se deslizará hacia arriba en el plano. Una vez que comienza a moverse, ¿cuál es su aceleración y qué fuerza reducida es necesaria para mantenerlo en movimiento hacia arriba a rapidez constante? (d) Si se le da un ligero

empujón al bloque para que comience a descender por el plano, ¿cuál será su aceleración en esa dirección? (e) Una vez que el bloque comienza a deslizarse hacia abajo, ¿qué fuerza ascendente sobre la cuerda es necesaria para evitar que el bloque acelere hacia abajo?

112. Un auto circula a gran rapidez por una autopista cuando el conductor frena de emergencia. Las ruedas se bloquean (dejan de rodar), y las marcas de derrape tienen una longitud de 32,0 metros. Si el coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera es de 0,550, y la aceleración fue constante durante el frenado, ¿a qué velocidad iba el auto cuando se bloquearon las ruedas?

113. Una caja con una masa de 50,0 kg cae horizontalmente desde la parte trasera del camión de plataforma, que se desplaza a 100 km/h. Calcule el valor del coeficiente de fricción cinética entre la carretera y la caja si esta se desliza 50 m sobre la carretera al llegar al reposo. La rapidez inicial de la caja es la misma que la del camión, 100 km/h.



114. Un trineo de 15 kg es halado por una superficie horizontal cubierta de nieve mediante una fuerza aplicada a una cuerda a 30 grados con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el trineo y la nieve es de 0,20. (a) Si la fuerza es de 33 N, ¿cuál es la aceleración horizontal del trineo? (b) ¿Cuál debe ser la fuerza para halar el trineo a velocidad constante?

115. Una bola de 30,0 g en el extremo de una cuerda se balancea en un círculo vertical con un radio de 25,0 cm. La velocidad tangencial es de 200,0 cm/s. Halle la tensión en la cuerda: (a) en la parte superior del círculo, (b) en la parte inferior del círculo, y (c) a una distancia de 12,5 cm del centro del círculo ($r = 12{,}5$ cm).

116. Una partícula de masa 0,50 kg comienza a moverse por una trayectoria circular en el plano *xy* con una posición dada por $\vec{\mathbf{r}}(t) = (4{,}0\cos 3t)\hat{\mathbf{i}} + (4{,}0\,\text{sen}\,3t)\hat{\mathbf{j}}$ donde *r* está en metros y *t* está en segundos. (a) Halle los vectores velocidad y aceleración en función del tiempo. (b) Demuestre que el vector de aceleración siempre apunta hacia el centro del círculo (y por tanto representa la aceleración centrípeta). (c) Halle el vector de fuerza centrípeta como función del tiempo.

117. Un ciclista de acrobacia circula por el interior de un cilindro de 12 m de radio. El coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la pared es de 0,68. Calcule el valor de la rapidez mínima para que el ciclista realice la acrobacia.

118. Cuando un cuerpo de masa de 0,25 kg está unido a un resorte vertical sin masa, se extiende 5,0 cm desde su longitud no estirada de 4,0 cm. El cuerpo y el resorte se colocan en una superficie horizontal sin fricción y se hace rotar alrededor del extremo del resorte sostenido a 2,0 rev/s. ¿Hasta dónde se estira el resorte?

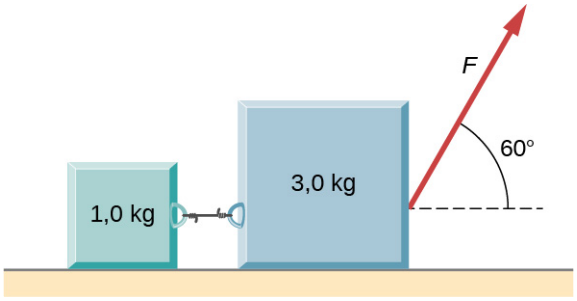
119. Un trozo de tocino se desliza por la sartén cuando un lado de esta se eleva 5,0 cm. Si la longitud de la sartén desde el pivote hasta el punto de elevación es de 23,5 cm, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la sartén y el tocino?

120. Una plomada cuelga del techo de un vagón de ferrocarril. El auto rodea una pista circular de radio 300,0 m a una rapidez de 90,0 km/h. ¿Con qué ángulo con respecto a la vertical cuelga la plomada?

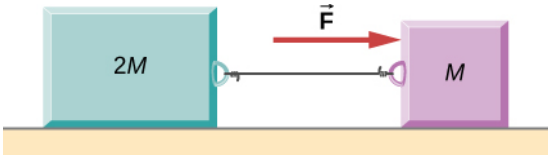
121. Un avión vuela a 120,0 m/s y se inclina a un ángulo de 30°. Si su masa es $2{,}50 \times 10^3$ kg, (a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de sustentación? (b) ¿Cuál es el radio del giro?

122. La posición de una partícula viene dada por $\vec{\mathbf{r}}(t) = A\left(\cos\omega t\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\omega t\hat{\mathbf{j}}\right)$, donde ω es una constante. (a) Demuestre que la partícula se mueve en un círculo de radio *A*. (b) Calcule $d\vec{\mathbf{r}}/dt$ y luego muestre que la rapidez de la partícula es una constante A_ω. (c) Determine $d^2\vec{\mathbf{r}}/dt^2$ y muestre que *a* viene dada por $a_c = r\omega^2$. (d) Calcule la fuerza centrípeta sobre la partícula. [*Pista*: Para (b) y (c), tendrá que utilizar $(d/dt)(\cos\omega t) = -\omega\,\text{sen}\,\omega t$ y $(d/dt)(\text{sen}\,\omega t) = \omega\cos\omega t$.

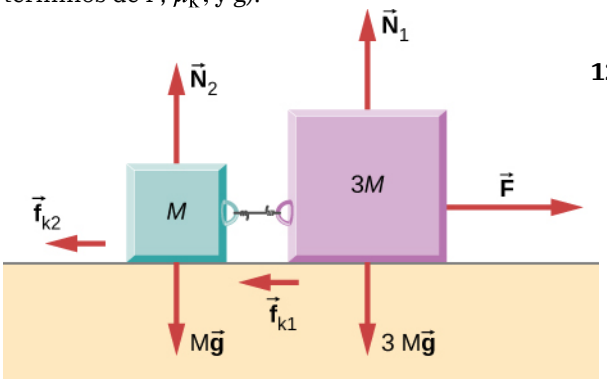
123. Dos bloques unidos por una cuerda son arrastrados a través de una superficie horizontal por una fuerza aplicada a uno de los bloques, como se muestra a continuación. El coeficiente de fricción cinética entre los bloques y la superficie es de 0,25. Si cada bloque tiene una aceleración de $2{,}0\ \text{m/s}^2$ hacia la derecha, ¿cuál es la magnitud *F* de la fuerza aplicada?



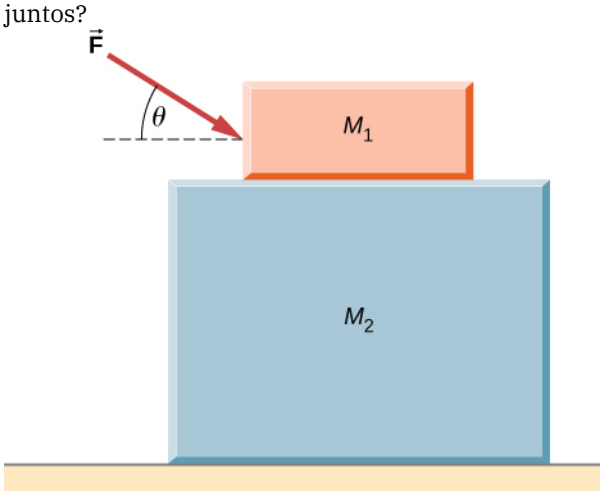
124. Como se muestra a continuación, el coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el bloque más grande es de 0,20, y el coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el bloque más pequeño es de 0,30. Si $F = 10\,\text{N}$ y $M = 1{,}0\,\text{kg}$, ¿cuál es la tensión de la cuerda de conexión?



125. En la figura, el coeficiente de fricción cinética entre la superficie y los bloques es μ_k. Si $M = 1{,}0\,\text{kg}$, halle una expresión para la magnitud de la aceleración de cualquiera de los bloques (en términos de F, μ_k, y g).

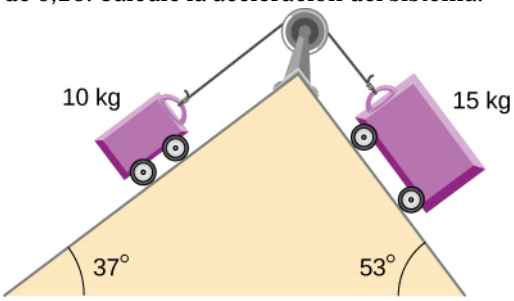


126. Dos bloques se apilan como se muestra a continuación, y descansan sobre una superficie sin fricción. Hay fricción entre los dos bloques (coeficiente de fricción μ). Se aplica una fuerza externa al bloque superior en un ángulo θ con la horizontal. ¿Cuál es la fuerza máxima F que se puede aplicar para que los dos bloques se muevan juntos?



127. Una caja descansa sobre la parte trasera (horizontal) de un camión. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la superficie sobre la que se apoya es de 0,24. ¿Qué distancia máxima puede recorrer el camión (partiendo del reposo y moviéndose horizontalmente con aceleración constante) en 3,0 s sin que la caja se deslice?

128. A continuación, se muestra un plano de doble inclinación. El coeficiente de fricción en la superficie izquierda es de 0,30 y en la derecha de 0,16. Calcule la aceleración del sistema.

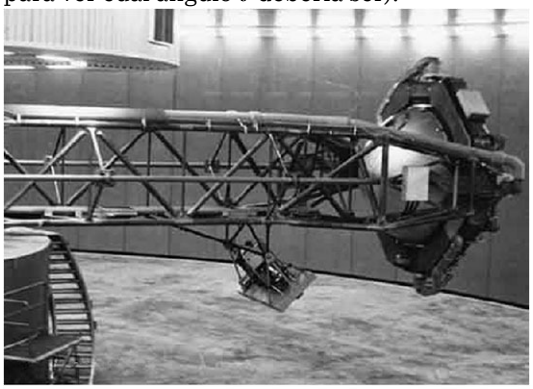


Problemas De Desafío

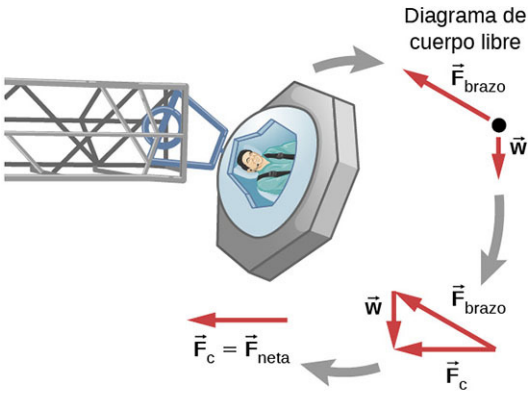
129. En un capítulo posterior, encontrará que el peso de una partícula varía con la altitud de forma que $w = \frac{mgr_0^2}{r^2}$ donde r_0 es el radio de la Tierra y r es la distancia al centro de la Tierra. Si la partícula se dispara verticalmente con velocidad v_0 de la superficie de la Tierra, determine su velocidad en función de la posición r. (*Pista:* Utilice $adr = vdv$, la reordenación mencionada en el texto).

130. Una gran centrifugadora, como la que se muestra a continuación, se utiliza para exponer a los aspirantes a astronautas a aceleraciones similares a las que se experimentan en los lanzamientos de cohetes y en los reingresos a la atmósfera. (a) ¿A qué velocidad angular corresponde una aceleración centrípeta de $10g$ si el piloto se encuentra a 15,0 m del centro de rotación? (b) La jaula del piloto cuelga de un pivote en el extremo del brazo, lo que le permite oscilar hacia fuera durante la rotación, como se

muestra en la figura inferior adjunta. En qué ángulo θ por debajo de la horizontal colgará la jaula cuando la aceleración centrípeta sea de $10g$? (*Pista:* El brazo suministra la fuerza centrípeta y soporta el peso de la jaula. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas para ver cuál ángulo θ debería ser).



(a)



(b)

131. Un auto de masa de 1000,0 kg circula por una carretera llana a 100,0 km/h cuando se aplican los frenos. Calcule la distancia de frenado si el coeficiente de fricción cinética de los neumáticos es de 0,500. Ignore la resistencia del aire. (*Pista:* Como lo que interesa es la distancia recorrida y no el tiempo, x es la variable independiente deseada y no t. Utilice la regla de la cadena para cambiar la variable: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$.)

132. Un avión que vuela a 200,0 m/s realiza un giro que tarda 4,0 min. ¿Qué ángulo de ladeo se requiere? ¿Cuál es el porcentaje de aumento del peso percibido de los pasajeros?

133. Un paracaidista se encuentra a una altura de 1.520 m. Tras 10,0 segundos de caída libre, abre su paracaídas y comprueba que la resistencia del aire, F_D, viene dada por la fórmula $F_D = -bv$, donde b es una constante y v es la velocidad. Si $b = 0{,}750$, y la masa del paracaidista es de 82,0 kg, establezca primero las ecuaciones diferenciales para la velocidad y la posición, y luego halle: (a) la rapidez del paracaidista cuando se abre el paracaídas, (b) la distancia caída antes de que se abra el paracaídas, (c) la velocidad límite después de que se abra el paracaídas (calcule la velocidad terminal), y (d) el tiempo que el paracaidista está en el aire después de que se abra el paracaídas.

134. En un anuncio de televisión, una pequeña cuenta esférica de 4,00 g de masa se libera del reposo en $t = 0$ en un frasco de champú líquido. Se observa que la velocidad límite es de 2,00 cm/s. Calcule: (a) el valor de la constante b en la ecuación $v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m})$, y (b) el valor de la fuerza resistiva cuando la cuenta alcanza la velocidad límite.

135. Un navegante y una lancha a motor descansan en un lago. Juntos, tienen una masa de 200,0 kg. Si el empuje del motor es una fuerza constante de 40,0 N en la dirección del movimiento, y si la fuerza resistiva del agua es numéricamente equivalente a 2 veces la rapidez v de la lancha, plantee y resuelva la ecuación diferencial para encontrar: (a) la velocidad de la lancha en el tiempo t; (b) la velocidad límite (la velocidad después de transcurrido un tiempo largo).

CAPÍTULO 7
Trabajo y energía cinética



Figura 7.1 Una velocista ejerce su máxima potencia con la mayor fuerza en el breve tiempo que su pie está en contacto con el suelo. Esto se suma a su energía cinética y le impide que desacelere durante la carrera. Empujar con fuerza hacia atrás en la pista genera una fuerza de reacción que impulsa a la velocista hacia delante para ganar en la meta (créditos: modificación del trabajo de Marie-Lan Nguyen).

ESQUEMA DEL CAPITULO

7.1 Trabajo
7.2 Energía cinética
7.3 Teorema de trabajo-energía
7.4 Potencia

INTRODUCCIÓN En este capítulo, abordamos algunos conceptos físicos básicos que participan en cada movimiento físico en el universo, más allá de los conceptos de fuerza y cambio en el movimiento, que exploramos en Movimiento en dos y tres dimensiones y Leyes del movimiento de Newton. Estos conceptos son el trabajo, la energía cinética y la potencia. Explicamos cómo se relacionan estas cantidades entre sí, lo que nos llevará a una relación fundamental denominada teorema de trabajo-energía. En el próximo capítulo, generalizamos esta idea al principio más amplio de la conservación de la energía.

La aplicación de las leyes de Newton exige la resolución de ecuaciones diferenciales que relacionan las fuerzas actuantes sobre un objeto con la aceleración que producen. A menudo, una solución analítica es intratable o imposible, por lo que se requieren largas soluciones numéricas o simulaciones para obtener resultados aproximados. En tales situaciones, relaciones más generales, como el teorema de trabajo-energía (o la conservación de la energía), pueden seguir dando respuestas útiles a muchas preguntas y requieren una cantidad más modesta de cálculos matemáticos. En particular, verá cómo el teorema de trabajo-energía sirve para relacionar la rapidez de una partícula, en diferentes puntos a lo largo de su trayectoria, con las fuerzas que actúan sobre esta, incluso cuando la trayectoria es demasiado complicada de tratar. Así, algunos aspectos

del movimiento pueden abordarse con menos ecuaciones y sin descomposiciones vectoriales.

7.1 Trabajo

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Representar el trabajo realizado por cualquier fuerza.
- Evaluar el trabajo realizado para varias fuerzas.

En física, el **trabajo** se realiza sobre un objeto cuando se le transfiere energía. En otras palabras, el trabajo se realiza cuando una fuerza actúa sobre algo que sufre un desplazamiento de una posición a otra. Las fuerzas pueden variar en función de la posición, y los desplazamientos pueden ser a lo largo de varias trayectorias entre dos puntos. Primero definimos el incremento de trabajo dW realizado por una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actuando a través de un desplazamiento infinitesimal $d\vec{\mathbf{r}}$ como el producto punto de estos dos vectores:

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \left|\vec{\mathbf{F}}\right| \left|d\vec{\mathbf{r}}\right| \cos\theta. \tag{7.1}$$

Entonces, podemos sumar los aportes a los desplazamientos infinitesimales, a lo largo de una trayectoria entre dos posiciones, para obtener el trabajo total.

Trabajo realizado por una fuerza

El trabajo realizado por una fuerza es la integral de la fuerza con respecto al desplazamiento a lo largo de la trayectoria del desplazamiento:

$$W_{AB} = \int_{\text{trayectoria } AB} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}. \tag{7.2}$$

Los vectores que intervienen en la definición del trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre una partícula se ilustran en la Figura 7.2.

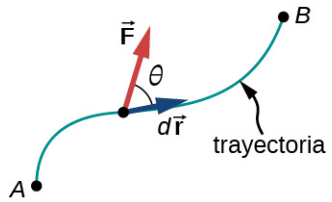


FIGURA 7.2 Vectores utilizados para definir el trabajo. La fuerza que actúa sobre una partícula y su desplazamiento infinitesimal se muestran en un punto de la trayectoria entre *A* y *B*. El trabajo infinitesimal es el producto punto de estos dos vectores; el trabajo total es la integral del producto punto a lo largo de la trayectoria.

Elegimos expresar el producto punto en términos de las magnitudes de los vectores y el coseno del ángulo entre ellos, porque el significado del producto punto para el trabajo se puede poner en palabras más directamente en términos de magnitudes y ángulos. También podríamos haber expresado el producto punto en términos de los distintos componentes introducidos en Vectores. En dos dimensiones, eran los componentes de la x y la y en coordenadas cartesianas, o los componentes r y φ en coordenadas polares; en tres dimensiones, solo eran los componentes de la x, la y y la z. La elección más conveniente depende de la situación. En palabras, se puede expresar la Ecuación 7.1 para el trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre un desplazamiento como producto de un componente que actúa paralelo al otro componente. Por las propiedades de los vectores, no importa si toma el componente de la fuerza paralelo al desplazamiento o el componente del desplazamiento paralelo a la fuerza: obtiene el mismo resultado de cualquier manera.

Recordemos que la magnitud de una fuerza multiplicada por el coseno del ángulo que forma la fuerza con una

dirección determinada es el componente de la fuerza en esa dirección. Los componentes de un vector pueden ser positivos, negativos o cero, dependiendo de si el ángulo entre el vector y la dirección del componente está entre $0°$ y $90°$ o $90°$ y $180°$, o es igual a $90°$. Como resultado, el trabajo realizado por una fuerza puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de si la fuerza está generalmente en la dirección del desplazamiento, generalmente opuesta al desplazamiento o perpendicular al desplazamiento. El trabajo máximo es realizado por una fuerza dada cuando se encuentra a lo largo de la dirección del desplazamiento ($\cos\theta = \pm 1$), y el trabajo es cero cuando la fuerza es perpendicular al desplazamiento ($\cos\theta = 0$).

Las unidades de trabajo son unidades de fuerza multiplicadas por unidades de longitud, que en el sistema SI son newtons por metros, $\mathrm{N \cdot m}$. Esta combinación se denomina julio, por razones históricas que mencionaremos más adelante, y se abrevia como J. En el sistema inglés, aún utilizado en los Estados Unidos, la unidad de fuerza es la libra (lb) y la unidad de distancia es el pie(ft), por lo que la unidad de trabajo es el pie-libra ($\mathrm{ft \cdot lb}$).

Trabajo realizado por fuerzas constantes y fuerzas de contacto

El trabajo más sencillo de evaluar es el que realiza una fuerza que es constante en magnitud y dirección. En este caso, podemos factorizar la fuerza; la integral restante es solo el desplazamiento total, que solo depende de los puntos finales A y B, pero no de la trayectoria entre ellos:

$$W_{AB} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \int_A^B d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A\right) = \left|\vec{\mathbf{F}}\right| \left|\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A\right| \cos\theta \quad \text{(fuerza constante)}.$$

También podemos ver esto escribiendo la Ecuación 7.2 en coordenadas cartesianas y utilizando el hecho de que los componentes de la fuerza son constantes:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{\text{trayectoria } AB} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{\text{trayectoria } AB} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = F_x \int_A^B dx + F_y \int_A^B dy + F_z \int_A^B dz \\ &= F_x\left(x_B - x_A\right) + F_y\left(y_B - y_A\right) + F_z\left(z_B - z_A\right) = \vec{\mathbf{F}} \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A\right). \end{aligned}$$

La Figura 7.3(a) muestra a una persona ejerciendo una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo del mango de un cortacésped, que hace un ángulo θ con la horizontal. El desplazamiento horizontal del cortacésped, sobre el que actúa la fuerza, es $\vec{\mathbf{d}}$. El trabajo realizado sobre el cortacésped es$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = Fd\cos\theta$, que la figura también ilustra como el componente horizontal de la fuerza por la magnitud del desplazamiento.

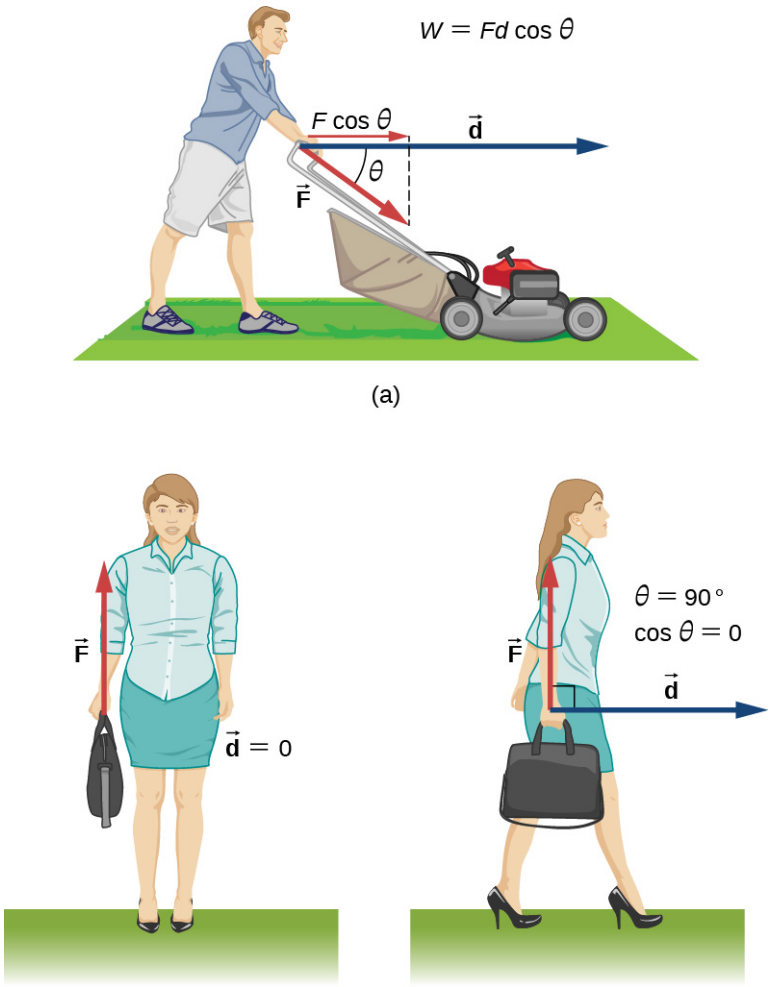


FIGURA 7.3 Trabajo realizado por una fuerza constante. (a) Una persona empuja un cortacésped con una fuerza constante. El componente de la fuerza paralelo al desplazamiento es el trabajo realizado, como se muestra en la ecuación de la figura. (b) Una persona sostiene un maletín. No se realiza ningún trabajo porque el desplazamiento es cero. (c) La persona de (b) camina horizontalmente mientras sostiene el maletín. No se realiza ningún trabajo porque $\cos\theta$ es cero.

La Figura 7.3(b) muestra a una persona que sostiene un maletín. La persona debe ejercer una fuerza hacia arriba, de magnitud igual al peso del maletín, pero esta fuerza no realiza ningún trabajo, porque el desplazamiento sobre el que actúa es cero.

En la Figura 7.3(c), donde la persona en (b) camina horizontalmente con rapidez constante, el trabajo que realiza la persona sobre el maletín sigue siendo cero, pero ahora porque el ángulo entre la fuerza ejercida y el desplazamiento es $90°$ ($\vec{\mathbf{F}}$ perpendicular a $\vec{\mathbf{d}}$) y $\cos 90° = 0$.

EJEMPLO 7.1

Calcular el trabajo que realiza al empujar un cortacésped

¿Cuánto trabajo realiza la persona que aparece en la Figura 7.3(a) sobre el cortacésped si ejerce una fuerza constante de 75,0 N en un ángulo de $35°$ por debajo de la horizontal y empuja el cortacésped 25,0 m en terreno llano?

Estrategia

Podemos resolver este problema sustituyendo los valores dados en la definición de trabajo realizado sobre un objeto por una fuerza constante, indicada en la ecuación $W = Fd\cos\theta$. La fuerza, el ángulo y el desplazamiento están dados, por lo que solo se desconoce el trabajo W.

Solución

La ecuación para el trabajo es

$$W = Fd\cos\theta.$$

Al sustituir los valores conocidos se obtiene

$$W = (75{,}0\text{ N})(25{,}0\text{ m})\cos(35{,}0°) = 1{,}54 \times 10^3\text{ J}.$$

Importancia

Aunque un kilojulio y medio puede parecer mucho trabajo, veremos en Energía potencial y conservación de la energía que es solo la misma cantidad de trabajo que podría hacer al quemar una sexta parte de un gramo de grasa.

Cuando corta el césped, sobre el cortacésped actúan otras fuerzas además de la que usted ejerce: la fuerza de contacto del suelo y la fuerza gravitatoria de la Tierra. Consideremos el trabajo que realizan estas fuerzas en general. Para un objeto que se mueve sobre una superficie, el desplazamiento $d\vec{\mathbf{r}}$ es tangente a la superficie. La parte de la fuerza de contacto sobre el objeto que es perpendicular a la superficie es la fuerza normal $\vec{\mathbf{N}}$. Dado que el coseno del ángulo entre la normal y la tangente a una superficie es cero, tenemos

$$dW_\text{N} = \vec{\mathbf{N}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

La fuerza normal realiza trabajo en estas circunstancias. (Tenga en cuenta que si el desplazamiento $d\vec{\mathbf{r}}$ tuviera un componente relativo perpendicular a la superficie, el objeto abandonaría la superficie o la atravesaría, y ya no habría ninguna fuerza de contacto normal. Sin embargo, si el objeto es más que una partícula y tiene una estructura interna, la fuerza normal de contacto puede realizar un trabajo sobre él, por ejemplo, desplazándolo o deformando su forma. Esto se mencionará en el próximo capítulo).

La parte de la fuerza de contacto sobre el objeto que es paralela a la superficie es la fricción, $\vec{\mathbf{f}}$. Para este objeto que se desliza por la superficie, la fricción cinética $\vec{\mathbf{f}}_\text{k}$ es opuesta a $d\vec{\mathbf{r}}$, con respecto a la superficie, por lo que el trabajo realizado por la fricción cinética es negativo. Si la magnitud de $\vec{\mathbf{f}}_\text{k}$ es constante (como lo sería si todas las demás fuerzas sobre el objeto fueran constantes), entonces el trabajo realizado por la fricción es

$$W_\text{fr} = \int_A^B \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -f_k \int_A^B |dr| = -f_k\,|l_{AB}|\,, \qquad 7.3$$

donde $|l_{AB}|$ es la longitud de la trayectoria en la superficie. La fuerza de fricción estática no realiza ningún trabajo en el marco de referencia entre dos superficies porque nunca hay desplazamiento entre las superficies. Como fuerza externa, la fricción estática puede realizar trabajo. La fricción estática evita que alguien se deslice de un trineo cuando este se mueve y realizar un trabajo positivo sobre la persona. Si conduce su auto a la velocidad máxima en un tramo recto y llano de la autopista, el trabajo negativo realizado por la resistencia del aire se equilibra con el trabajo positivo realizado por la fricción estática de la carretera sobre las ruedas motrices. Se puede sacar la alfombra de debajo de un objeto de manera que se deslice hacia atrás con respecto a la alfombra, pero hacia delante con respecto al suelo. En este caso, la fricción cinética ejercida por la alfombra sobre el objeto podría estar en la misma dirección que el desplazamiento del objeto, con respecto al suelo, y realizar un trabajo positivo. La conclusión es que hay que analizar cada caso particular para determinar el trabajo realizado por las fuerzas, ya sea positivo, negativo o cero.

EJEMPLO 7.2

Mover un sofá

Decide mover su sofá a una nueva posición en el suelo horizontal de su sala. La fuerza normal sobre el sofá es de 1 kN y el coeficiente de fricción es de 0,6. (a) Primero empuja el sofá 3 m paralelos a una pared y luego 1 m perpendicular a la pared (de *A* a *B* en la Figura 7.4). ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción? (b) No le gusta la nueva posición, así que devuelve el sofá a su posición original (de *B* a *A* en la Figura 7.4). ¿Cuál fue el trabajo total realizado contra la fricción al alejar el sofá de su posición original y volver a ella?

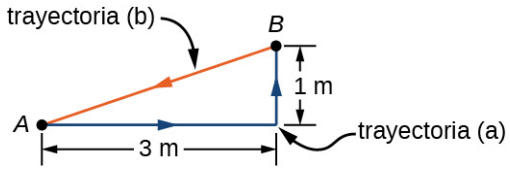


FIGURA 7.4 Vista superior de las trayectorias para mover un sofá.

Estrategia

La magnitud de la fuerza de fricción cinética sobre el sofá es constante, igual al coeficiente de fricción por la fuerza normal, $f_K = \mu_K N$. Por lo tanto, el trabajo realizado por esta es $W_{\text{fr}} = -f_K d$, donde d es la longitud de la trayectoria recorrida. Los segmentos de las trayectorias son los lados de un triángulo rectángulo, por lo que las longitudes de las trayectorias se calculan fácilmente. En la parte (b), puede utilizar el hecho de que el trabajo realizado contra una fuerza es el negativo del trabajo realizado por la fuerza.

Solución

a. El trabajo realizado por la fricción es
$$W = -(0{,}6)(1\text{ kN})(3\text{ m} + 1\text{ m}) = -2{,}4\text{ kJ}.$$

b. La longitud de la trayectoria a lo largo de la hipotenusa es $\sqrt{10}$ m, por lo que el trabajo total realizado contra la fricción es
$$W = (0{,}6)(1\text{ kN})(3\text{ m} + 1\text{ m} + \sqrt{10}\text{ m}) = 4{,}3\text{ kJ}.$$

Importancia

La trayectoria total sobre la que se evaluó el trabajo de fricción comenzaba y terminaba en el mismo punto (era una trayectoria cerrada), de modo que el desplazamiento total del sofá era cero. Sin embargo, el trabajo total no fue cero. La razón es que fuerzas como la fricción se clasifican como fuerzas no conservativas, o fuerzas disipativas, tal y como veremos en el próximo capítulo.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.1

¿Puede la fricción cinética ser alguna vez una fuerza constante para todas las trayectorias?

La otra fuerza sobre el cortacésped mencionada anteriormente era la fuerza gravitatoria de la Tierra, o el peso del cortacésped. Cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza gravitatoria sobre un objeto de masa m tiene una magnitud constante, mg, y una dirección constante, verticalmente hacia abajo. Por lo tanto, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto es el producto punto de su peso y su desplazamiento. En muchos casos, es conveniente expresar el producto punto para el trabajo gravitatorio en términos de los componentes x, y y z de los vectores. Un sistema de coordenadas típico tiene el eje de la x horizontal y el eje de la y verticalmente hacia arriba. Entonces la fuerza gravitatoria es $-mg\hat{\mathbf{j}}$, por lo que el trabajo realizado por la gravedad, en cualquier trayectoria de *A* a *B*, es

$$W_{\text{gravedad},AB} = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot (\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A) = -mg(y_B - y_A). \quad 7.4$$

El trabajo realizado por una fuerza de gravedad constante sobre un objeto depende únicamente del peso del objeto y de la diferencia de altura por la que se desplaza el objeto. La gravedad realiza un trabajo negativo sobre un objeto que se mueve hacia arriba ($y_B > y_A$), o, en otras palabras, hay que hacer un trabajo positivo contra la gravedad para levantar un objeto hacia arriba. Alternativamente, la gravedad hace un trabajo positivo sobre un objeto que se mueve hacia abajo ($y_B < y_A$), o se realiza un trabajo negativo contra la gravedad para "levantar" un objeto hacia abajo, controlando su descenso para que no caiga al suelo. ("levantar" se utiliza en contraposición a "caer").

EJEMPLO 7.3

Poner un libro en la estantería

Usted levanta un libro de biblioteca de gran tamaño, que pesa 20 N, 1 m en vertical desde una estantería, y lo lleva 3 m en horizontal hasta una mesa (Figura 7.5). ¿Cuánto trabajo hace la gravedad sobre el libro? (b) Cuando ha terminado, mueve el libro en línea recta hasta su lugar original en la estantería. ¿Cuál ha sido el trabajo total realizado contra la gravedad, alejando el libro de su posición original en la estantería y volviéndolo a colocar?

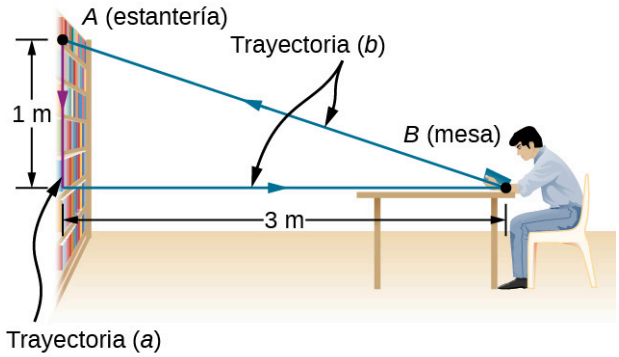


FIGURA 7.5 Vista lateral de los recorridos para mover un libro hacia y desde una estantería.

Estrategia

Acabamos de ver que el trabajo realizado por una fuerza de gravedad constante depende únicamente del peso del objeto desplazado y de la diferencia de altura por la trayectoria recorrida, $W_{AB} = -mg\,(y_B - y_A)$. Podemos evaluar la diferencia de altura para responder (a) y (b).

Solución

a. Como el libro empieza en la estantería y se levanta hacia abajo $y_B - y_A = -1$ m, tenemos
$$W = -(20\text{ N})(-1\text{ m}) = 20\text{ J}.$$

b. La diferencia de altura es cero para cualquier trayectoria que comience y termine en el mismo lugar de la estantería, por lo que $W = 0$.

Importancia

La gravedad realiza un trabajo positivo (20 J) cuando el libro se mueve hacia abajo desde la estantería. La fuerza gravitatoria entre dos objetos es una fuerza de atracción, que realiza un trabajo positivo cuando los objetos se acercan. La gravedad realiza un trabajo cero (0 J) cuando el libro se desplaza horizontalmente de la estantería a la mesa y un trabajo negativo (-20 J) cuando el libro se desplaza de la mesa a la estantería. El trabajo total realizado por la gravedad es cero [$20\text{ J} + 0\text{ J} + (-20\text{ J}) = 0$]. A diferencia de la fricción u otras fuerzas disipativas, descritas en el Ejemplo 7.2, el trabajo total realizado contra la gravedad, en cualquier trayectoria cerrada, es cero. Se realiza un trabajo positivo contra la gravedad en las partes ascendentes de una trayectoria cerrada, pero se realiza una cantidad igual de trabajo negativo contra la gravedad en las partes descendentes. En otras palabras, el trabajo realizado *contra* la gravedad, *levantando* un objeto, se "devuelve"

cuando el objeto vuelve a bajar. Fuerzas como la gravedad (las que realizan un trabajo cero en cualquier trayectoria cerrada) se clasifican como fuerzas conservativas y desempeñan un papel importante en la física.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.2

¿Puede la gravedad de la Tierra ser una fuerza constante para todas las trayectorias?

Trabajo realizado por fuerzas que varían

En general, las fuerzas pueden variar en magnitud y dirección en puntos del espacio, y las trayectorias entre dos puntos pueden ser curvas. El trabajo infinitesimal que realiza una fuerza variable puede expresarse en términos de los componentes de la fuerza y del desplazamiento a lo largo de la trayectoria,

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Aquí, los componentes de la fuerza son funciones de la posición a lo largo de la trayectoria, y los desplazamientos dependen de las ecuaciones de la trayectoria. (Aunque hemos elegido ilustrar dW en coordenadas cartesianas, otras coordenadas son más adecuadas para algunas situaciones). La Ecuación 7.2 define el trabajo total como una integral de línea, o el límite de una suma de cantidades infinitesimales de trabajo. El concepto físico de trabajo es sencillo: se calcula el trabajo para pequeños desplazamientos y se suman. A veces las matemáticas pueden parecer complicadas, pero el siguiente ejemplo demuestra la limpieza con la que pueden funcionar.

EJEMPLO 7.4

Trabajo realizado por una fuerza variable en una trayectoria curva

Un objeto se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica $y = (0{,}5\ \text{m}^{-1})x^2$ desde el origen $A = (0, 0)$ al punto $B = (2\ \text{m}, 2\ \text{m})$ bajo la acción de una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (5\ \text{N/m})y\hat{\mathbf{i}} + (10\ \text{N/m})x\hat{\mathbf{j}}$ (Figura 7.6). Calcule el trabajo realizado.

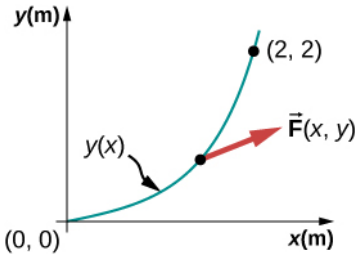


FIGURA 7.6 La trayectoria parabólica de una partícula sobre la que actúa una fuerza determinada.

Estrategia

Las componentes de la fuerza son funciones dadas de la x y la y. Podemos utilizar la ecuación de la trayectoria para expresar la y y la dy en términos de la x y la dx; esto es

$$y = (0{,}5\ \text{m}^{-1})x^2 \text{ y } dy = 2(0{,}5\ \text{m}^{-1})x dx.$$

Entonces, la integral del trabajo es solo una integral definida de una función de la x.

Solución

El elemento infinitesimal del trabajo es

$$\begin{aligned} dW &= F_x dx + F_y dy = (5\ \text{N/m})y dx + (10\ \text{N/m})x dy \\ &= (5\ \text{N/m})(0{,}5\ \text{m}^{-1})x^2 dx + (10\ \text{N/m})2(0{,}5\ \text{m}^{-1})x^2 dx = (12{,}5\ \text{N/m}^2)x^2 dx. \end{aligned}$$

La integral de x^2 es $x^3/3$, así que

$$W = \int_0^{2\text{ m}} (12{,}5\text{ N/m}^2)x^2\,dx = (12{,}5\text{ N/m}^2)\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\text{ m}} = (12{,}5\text{ N/m}^2)\left(\frac{8}{3}\right) = 33{,}3\text{ J}.$$

Importancia

Esta integral no era difícil de hacer. Puede seguir los mismos pasos, como en este ejemplo, para calcular las integrales de línea que representan el trabajo para fuerzas y trayectorias más complicadas. En este ejemplo, todo se ha dado en términos de componentes de x y y, que son los más fáciles de usar para evaluar el trabajo en este caso. En otras situaciones, las magnitudes y los ángulos pueden ser más fáciles.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.3

Calcule el trabajo realizado por la misma fuerza en el Ejemplo 7.4 sobre una trayectoria cúbica, $y = (0{,}25\text{ m}^{-2})x^3$, entre los mismos puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2\text{ m}, 2\text{ m})$.

En el Ejemplo 7.4 ha visto que para evaluar una integral de línea, puede reducirla a una integral sobre una sola variable o parámetro. Normalmente, hay varias formas de hacerlo, que pueden ser más o menos convenientes, según el caso. En el Ejemplo 7.4, hemos reducido la integral de línea a una integral sobre la x, pero podríamos haber optado igualmente por reducir todo a una función de la y. No lo hicimos porque las funciones en la y implican la raíz cuadrada y los exponentes fraccionarios, que pueden ser menos familiares, pero para fines ilustrativos, lo hacemos ahora. Al resolver la x y dx, en términos de la y, a lo largo de la trayectoria parabólica, obtenemos

$$x = \sqrt{y/(0{,}5\text{ m}^{-1})} = \sqrt{(2\text{ m})y}\text{ y }dx = \sqrt{(2\text{ m})} \times \frac{1}{2}dy/\sqrt{y} = dy/\sqrt{(2\text{ m}^{-1})y}.$$

Los componentes de la fuerza, en términos de y, son

$$F_x = (5\text{ N/m})y\text{ y }F_y = (10\text{ N/m})x = (10\text{ N/m})\sqrt{(2\text{ m})y},$$

por lo que el elemento de trabajo infinitesimal se convierte en

$$\begin{aligned} dW &= F_x\,dx + F_y\,dy = \frac{(5\text{ N/m})y\,dy}{\sqrt{(2\text{ m}^{-1})y}} + (10\text{ N/m})\sqrt{(2\text{ m})y}\,dy \\ &= (5\text{ N}\cdot\text{m}^{-1/2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\right)\sqrt{y}\,dy = (17{,}7\text{ N}\cdot\text{m}^{-1/2})y^{1/2}\,dy. \end{aligned}$$

La integral de $y^{1/2}$ es $\frac{2}{3}y^{3/2}$, por lo que el trabajo realizado de A a B es

$$W = \int_0^{2\text{ m}} (17{,}7\text{ N}\cdot\text{m}^{-1/2})y^{1/2}\,dy = (17{,}7\text{ N}\cdot\text{m}^{-1/2})\frac{2}{3}(2\text{ m})^{3/2} = 33{,}3\text{ J}.$$

Como era de esperar, el resultado es exactamente el mismo que antes.

Una fuerza variable muy importante y ampliamente aplicable es la fuerza que ejerce un resorte perfectamente elástico, que satisface la ley de Hooke $\vec{\mathbf{F}} = -k\Delta\vec{\mathbf{x}}$, donde k es la constante del resorte, y $\Delta\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_{\text{eq}}$ es el desplazamiento desde la posición no estirada (de equilibrio) del resorte (leyes de movimiento de Newton). Tenga en cuenta que la posición no estirada solo es igual a la posición de equilibrio si no actúan otras fuerzas (o, si lo hacen, se anulan entre sí). Las fuerzas entre moléculas, o en cualquier sistema que sufra pequeños desplazamientos desde un equilibrio estable, se comportan aproximadamente como una fuerza de resorte.

Para calcular el trabajo que realiza la fuerza de un resorte, podemos elegir el eje de la x a lo largo del resorte, en la dirección de la longitud creciente, como en la Figura 7.7, con el origen en la posición de equilibrio $x_{\text{eq}} = 0$. (Entonces la x positiva corresponde a un estiramiento y la x negativa a una compresión). Con esta elección de coordenadas, la fuerza del resorte solo tiene un componente $x, F_x = -kx$, y el trabajo realizado cuando x cambia de x_A a x_B es

$$W_{\text{resorte},AB} = \int_A^B F_x\,dx = -k\int_A^B x\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_A^B = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right). \quad \textbf{7.5}$$

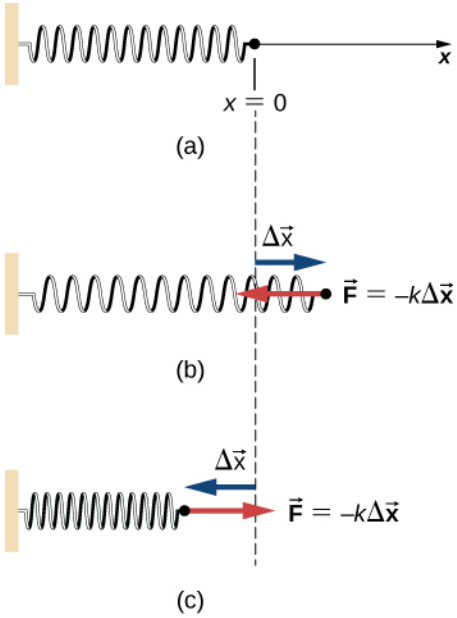


FIGURA 7.7 (a) El resorte no ejerce ninguna fuerza en su posición de equilibrio. El resorte ejerce una fuerza en sentido contrario a (b) una extensión o estiramiento, y (c) una compresión.

Observe que W_{AB} solo depende de los puntos de partida y de llegada, A y B, y es independiente de la trayectoria real entre ellos, siempre que empiece en A y termine en B. Es decir, la trayectoria real podría implicar ir y venir antes de terminar.

Otro aspecto interesante que hay que observar en la Ecuación 7.5 es que, para este caso unidimensional, se puede ver fácilmente la correspondencia entre el trabajo que realiza una fuerza y el área bajo la curva de la fuerza frente a su desplazamiento. Recordemos que, en general, una integral unidimensional es el límite de la suma de infinitesimales, $f(x)dx$, que representa el área de las franjas, como se muestra en la Figura 7.8. En la Ecuación 7.5, dado que $F = -kx$ es una línea recta con pendiente $-k$, cuando se representa en función de la x, el "área" bajo la línea no es más que una combinación algebraica de "áreas" triangulares, donde las "áreas" por encima del eje de la x son positivas y las que están por debajo son negativas, como se muestra en la Figura 7.9. La magnitud de una de estas "áreas" es justo la mitad de la base del triángulo, a lo largo del eje de la x, por la altura del triángulo, a lo largo del eje de la fuerza. (Hay comillas alrededor de "área" porque este producto de altura base tiene las unidades de trabajo, en lugar de metros cuadrados).

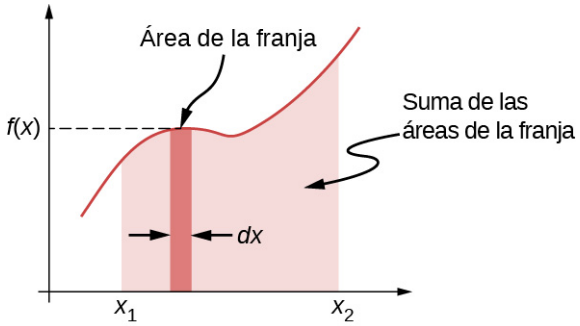


FIGURA 7.8 Curva de *f(x)* en función de *x* que muestra el área de una franja infinitesimal, *f(x)dx*, y la suma de dichas áreas, que es la integral de *f(x)* de x_1 a x_2.

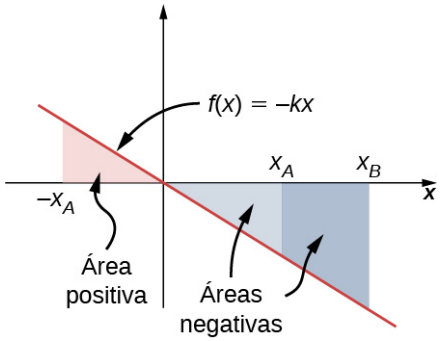


FIGURA 7.9 Curva de la fuerza del resorte $f(x) = -kx$ en función de la *x*, donde se muestran las áreas bajo la línea, entre x_A y x_B, tanto para valores positivos como negativos de x_A. Cuando x_A es negativa, el área total bajo la curva de la integral en la Ecuación 7.5 es la suma de las áreas triangulares positivas y negativas. Cuando x_A es positiva, el área total bajo la curva es la diferencia entre dos triángulos negativos.

EJEMPLO 7.5

Trabajo que realiza la fuerza de un resorte

Un resorte perfectamente elástico requiere 0,54 J de trabajo para estirarse 6 cm desde su posición de equilibrio, como en la Figura 7.7(b). (a) ¿Cuál es su constante *k* de resorte? (b) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo 6 cm más?

Estrategia

El trabajo "requerido" significa el trabajo realizado contra la fuerza del resorte, que es el negativo del trabajo en la Ecuación 7.5, es decir

$$W = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2).$$

Para la parte (a), $x_A = 0$ y $x_B = 6\text{cm}$; para la parte (b), $x_B = 6\text{cm}$ y $x_B = 12\text{cm}$. En la parte (a), se da el trabajo y puede resolver la constante del resorte; en la parte (b), puede utilizar el valor de *k*, de la parte (a), para resolver el trabajo.

Solución

a. $W = 0{,}54\,\text{J} = \frac{1}{2}k[(6\,\text{cm})^2 - 0]$, así que $k = 3\,\text{N/cm}$.
b. $W = \frac{1}{2}(3\,\text{N/cm})[(12\,\text{cm})^2 - (6\,\text{cm})^2] = 1{,}62\,\text{J}$.

Importancia

Dado que el trabajo realizado por la fuerza de un resorte es independiente de la trayectoria, solo había que calcular la diferencia de la cantidad $\frac{1}{2}kx^2$ en los puntos finales. Observe que el trabajo necesario para estirar el resorte de 0 a 12 cm es el cuádruple del necesario para estirarlo de 0 a 6 cm, porque ese trabajo depende del cuadrado de la cantidad de estiramiento desde el equilibrio, $\frac{1}{2}kx^2$. En esta circunstancia, el trabajo para estirar el resorte de 0 a 12 cm es también igual al trabajo para una trayectoria compuesta de 0 a 6 cm seguida de un estiramiento adicional de 6 cm a 12 cm. Por lo tanto,
$4W(0\text{ cm a }6\text{ cm}) = W(0\text{ cm a }6\text{ cm}) + W(6\text{ cm a }12\text{ cm})$, o $W(6\text{ cm a }12\text{ cm}) = 3W(0\text{ cm a }6\text{ cm})$, tal y como hemos comprobado anteriormente.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.4

El resorte del Ejemplo 7.5 se comprime 6 cm desde su longitud de equilibrio. (a) ¿La fuerza del resorte realiza un trabajo positivo o negativo y (b) cuál es la magnitud?

7.2 Energía cinética

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Calcular la energía cinética de una partícula dada su masa y su velocidad o momento.
- Evaluar la energía cinética de un cuerpo, relativa a diferentes marcos de referencia.

Es plausible suponer que cuanto mayor sea la velocidad de un cuerpo, mayor será su efecto sobre otros cuerpos. Esto no depende de la dirección de la velocidad, sino de su magnitud. A finales del siglo XVII se introdujo en la mecánica una cantidad para explicar las colisiones entre dos cuerpos perfectamente elásticos, en las que un cuerpo choca frontalmente con otro idéntico en reposo. El primer cuerpo se detiene y el segundo cuerpo se desplaza con la velocidad inicial del primero. (Si alguna vez ha jugado al billar o al croquet, o ha visto una maqueta de la Cuna de Newton, habrá observado este tipo de colisión). La idea que subyace a esta cantidad está relacionada con las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y se denomina "la energía del movimiento". Más tarde, durante el siglo XVIII, se dio el nombre de **energía cinética** a la energía del movimiento.

Teniendo en cuenta esta historia, podemos enunciar la definición clásica de energía cinética. Observe que, cuando decimos "clásica", queremos decir no relativista, es decir, a velocidades mucho menores que la de la luz. A velocidades comparables a la de la luz, la teoría especial de la relatividad requiere una expresión diferente para la energía cinética de una partícula, tal como se comenta en Relatividad (http://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/5-introduction).

Dado que los objetos (o sistemas) de interés varían en complejidad, primero definimos la energía cinética de una partícula con masa m.

Energía cinética

La energía cinética de una partícula es la mitad del producto de su masa m por el cuadrado de su rapidez v:

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \tag{7.6}$$

A continuación, ampliamos esta definición a cualquier sistema de partículas, al sumar las energías cinéticas de todas las partículas que lo componen:

$$K = \sum \frac{1}{2}mv^2. \tag{7.7}$$

Observe que, al igual que podemos expresar la segunda ley de Newton en términos de la tasa de cambio del momento o de la masa por la tasa de cambio de la velocidad, entonces la energía cinética de una partícula puede expresarse en términos de su masa y su momento ($\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$), en lugar de su masa y velocidad. Dado que$v = p/m$, vemos que

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

también expresa la energía cinética de una sola partícula. A veces, esta expresión es más cómoda de utilizar que la Ecuación 7.6.

Las unidades de energía cinética son la masa por el cuadrado de la rapidez, o $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$. No obstante, las unidades de fuerza son la masa por la aceleración, $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, por lo que las unidades de energía cinética son también las unidades de la fuerza por la distancia, que son las unidades de trabajo, o julios. En la siguiente sección verá que el trabajo y la energía cinética tienen las mismas unidades, porque son formas diferentes de la misma propiedad física más general.

EJEMPLO 7.6

Energía cinética de un objeto

(a) ¿Cuál es la energía cinética de un atleta de 80 kg, corriendo a 10 m/s? (b) Se cree que el cráter de Chicxulub, en Yucatán, uno de los mayores cráteres de impacto existentes en la Tierra, fue creado por un asteroide, que viajaba a 22 km/s y liberó $4{,}2 \times 10^{23}$ J de energía cinética en el momento del impacto. ¿Cuál era su masa? (c) En los reactores nucleares, los neutrones térmicos, que viajan a unos 2,2 km/s, desempeñan un papel importante. ¿Cuál es la energía cinética de dicha partícula?

Estrategia

Para responder a estas preguntas, puede utilizar la definición de energía cinética en la Ecuación 7.6. También hay que buscar la masa de un neutrón.

Solución

No olvide convertir los km en m para hacer estos cálculos, aunque, para ahorrar espacio, omitimos mostrar estas conversiones.

a. $K = \frac{1}{2}(80\,\text{kg})(10\,\text{m/s})^2 = 4{,}0\,\text{kJ}.$
b. $m = 2K/v^2 = 2(4{,}2 \times 10^{23}\text{J})/(22\,\text{km/s})^2 = 1{,}7 \times 10^{15}\,\text{kg}.$
c. $K = \frac{1}{2}(1{,}68 \times 10^{-27}\,\text{kg})(2{,}2\,\text{km/s})^2 = 4{,}1 \times 10^{-21}\,\text{J}.$

Importancia

En este ejemplo, hemos utilizado la forma en que la masa y la velocidad se relacionan con la energía cinética, y hemos hallado un rango muy amplio de valores para las energías cinéticas. Para estos valores tan grandes y tan pequeños se suelen utilizar unidades diferentes. La energía del impactador en la parte (b) se compara con el rendimiento explosivo del TNT y las explosiones nucleares, $1\,\text{megatón} = 4{,}18 \times 10^{15}$ J. La energía cinética del asteroide de Chicxulub era de unos cien millones de megatones. En el otro extremo, la energía de la partícula subatómica se expresa en electronvoltios, $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J. El neutrón térmico de la parte (c) tiene una energía cinética de aproximadamente una cuadragésima parte de un electronvoltio.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.5

(a) Un auto y un camión se mueven cada uno con la misma energía cinética. Supongamos que el camión tiene más masa que el auto. ¿Cuál tiene mayor rapidez? (b) Un auto y un camión se mueven cada uno con la misma rapidez. ¿Cuál tiene mayor energía cinética?

Ya que la velocidad es una magnitud relativa, se puede ver que el valor de la energía cinética dependerá de su marco de referencia. Por lo general, puede elegir un marco de referencia que se adapte al propósito de su análisis y que simplifique sus cálculos. Uno de estos marcos de referencia es aquel en el que se realizan las observaciones del sistema (probablemente un marco externo). Otra opción es un marco que esté unido al sistema o se mueva con este (probablemente un marco interno). Las ecuaciones del movimiento relativo, tratadas en Movimiento en dos y tres dimensiones, proporcionan un enlace para calcular la energía cinética de un objeto con respecto a diferentes marcos de referencia.

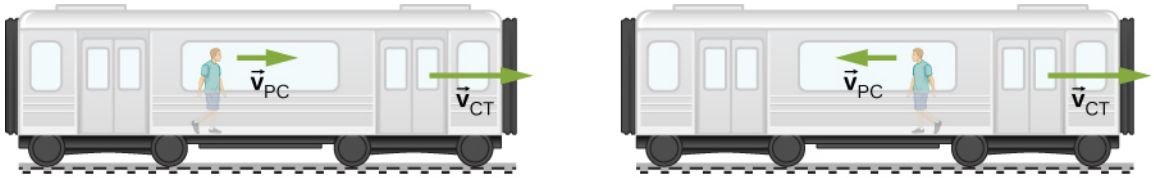
EJEMPLO 7.7

Energía cinética en relación con diferentes marcos

Una persona de 75,0 kg camina por el pasillo central de un vagón de metro a una rapidez de 1,50 m/s respecto al vagón, mientras que el tren se mueve a 15,0 m/s respecto a las vías. (a) ¿Cuál es la energía cinética de la persona respecto al vagón? (b) ¿Cuál es la energía cinética de la persona respecto a las vías? (c) ¿Cuál es la energía cinética de la persona respecto a un marco que se mueve con la persona?

Estrategia

Ya que la rapidez está dada, utilizamos $\frac{1}{2}mv^2$ para calcular la energía cinética de la persona. Sin embargo, en la parte (a), la rapidez de la persona es relativa al vagón de metro (como se da); en la parte (b), es relativa a las vías; y en la parte (c), es cero. Si denotamos el marco del vagón como C, el marco de la vía como T, y la persona como P, las velocidades relativas en la parte (b) están relacionadas por $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{PT}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{PC}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CT}}$. Podemos suponer que el pasillo central y las vías se encuentran en la misma línea. Sin embargo, no se especifica la dirección en la que la persona camina con respecto al vagón, por lo que daremos una respuesta para cada posibilidad, $v_{\mathrm{PT}} = v_{\mathrm{CT}} \pm v_{\mathrm{PC}}$, como se muestra en la Figura 7.10.



(a) (b)

FIGURA 7.10 Los posibles movimientos de una persona que camina en un tren son (a) hacia la parte delantera del vagón y (b) hacia la parte trasera del vagón.

Solución

a. $K = \frac{1}{2}(75{,}0\ \mathrm{kg})(1{,}50\ \mathrm{m/s})^2 = 84{,}4\ \mathrm{J}$.

b. $v_{\mathrm{PT}} = (15{,}0 \pm 1{,}50)\ \mathrm{m/s}$. Por lo tanto, los dos valores posibles de la energía cinética respecto al vagón son

$$K = \frac{1}{2}(75{,}0\ \mathrm{kg})(13{,}5\ \mathrm{m/s})^2 = 6{,}83\ \mathrm{kJ}$$

y

$$K = \frac{1}{2}(75{,}0\ \mathrm{kg})(16{,}5\ \mathrm{m/s})^2 = 10{,}2\ \mathrm{kJ}.$$

c. En un marco en el que $v_{\mathrm{P}} = 0$, $K = 0$ también.

Importancia

Verá que la energía cinética de un objeto puede tener valores muy diferentes, dependiendo del marco de referencia. Sin embargo, la energía cinética de un objeto nunca puede ser negativa, ya que es el producto de la masa y el cuadrado de la velocidad, ambos siempre positivos o cero.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.6

Está remando un bote paralelo a la orilla de un río. Su energía cinética respecto a las orillas es menor que su energía cinética respecto al agua. ¿Está remando con o contra la corriente?

La energía cinética de una partícula es una cantidad única. Sin embargo, la energía cinética de un sistema de partículas puede dividirse a veces en varios tipos, según el sistema y su movimiento. Por ejemplo, si todas las partículas de un sistema tienen la misma velocidad, el sistema está en movimiento de traslación y tiene energía cinética de traslación. Si un objeto está en rotación, podría tener energía cinética rotacional, o si está vibrando, podría tener energía cinética vibratoria. La energía cinética de un sistema, relativa a un marco de referencia interno, se denomina energía cinética interna. La energía cinética asociada al movimiento molecular aleatorio se denomina energía térmica. Estos nombres se utilizarán en capítulos posteriores del libro, cuando corresponda. Independientemente del nombre, cada tipo de energía cinética es la misma cantidad física, que representa la energía asociada al movimiento.

EJEMPLO 7.8

Nombres especiales para la energía cinética

(a) Un jugador lanza un pase a media cancha con un balón de baloncesto de 624 g, que recorre 15 m en 2 s. ¿Cuál es la energía cinética de traslación horizontal del balón de baloncesto durante su vuelo? (b) Una molécula media de aire, en el balón de baloncesto de la parte (a), tiene una masa de 29 u, y una rapidez media de 500 m/s, en relación con el balón de baloncesto. Hay alrededor de 3×10^{23} moléculas en su interior, moviéndose en direcciones aleatorias, cuando el balón está bien inflado. ¿Cuál es la energía cinética de traslación media del movimiento aleatorio de todas las moléculas del interior, en relación con el balón de baloncesto? (c) ¿A qué velocidad tendría que desplazarse el balón de baloncesto en relación con la cancha, como en la parte (a), para tener una energía cinética igual a la de la parte (b)?

Estrategia

En la parte (a), halle primero la rapidez horizontal del balón de baloncesto y luego utilice la definición de energía cinética en términos de masa y rapidez, $K = \frac{1}{2}mv^2$. A continuación, en la parte (b), convierta las unidades unificadas en kilogramos y luego utilice $K = \frac{1}{2}mv^2$ para obtener la energía cinética media de traslación de una molécula, en relación con el balón de baloncesto. A continuación, multiplique por el número de moléculas para obtener el resultado total. Finalmente, en la parte (c), podemos sustituir la cantidad de energía cinética de la parte (b), y la masa del balón de baloncesto de la parte (a), en la definición $K = \frac{1}{2}mv^2$, y resolver para v.

Solución

a. La rapidez horizontal es (15 m)/(2 s), por lo que la energía cinética horizontal del balón de baloncesto es
$$\frac{1}{2}(0{,}624\ \text{kg})(7{,}5\ \text{m/s})^2 = 17{,}6\ \text{J}.$$

b. La energía cinética media de traslación de una molécula es
$$\frac{1}{2}(29\ \text{u})(1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u})(500\ \text{m/s})^2 = 6{,}02 \times 10^{-21}\ \text{J},$$
y la energía cinética total de todas las moléculas es
$$(3 \times 10^{23})(6{,}02 \times 10^{-21}\ \text{J}) = 1{,}80\ \text{kJ}.$$

c. $v = \sqrt{2(1{,}8\ \text{kJ})/(0{,}624\ \text{kg})} = 76{,}0\ \text{m/s}.$

Importancia

En la parte (a), este tipo de energía cinética se denomina energía cinética horizontal de un objeto (el balón de baloncesto), en relación con su entorno (la cancha). Si el balón de baloncesto estuviera girando, todas sus partes tendrían no solo la rapidez media, sino también energía cinética rotacional. La parte (b) nos recuerda que este tipo de energía cinética se denomina energía cinética interna o térmica. Observe que esta energía es unas cien veces superior a la de la parte (a). El aprovechamiento de la energía térmica será el tema en los capítulos de termodinámica. En la parte (c), dado que la energía de la parte (b) es unas 100 veces mayor que la de la parte (a), la rapidez debería ser unas 10 veces mayor, y así es (76 frente a 7,5 m/s).

7.3 Teorema de trabajo-energía

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Aplicar el teorema de trabajo-energía para encontrar información sobre el movimiento de una partícula, dadas las fuerzas que actúan sobre esta.
- Utilizar el teorema de trabajo-energía para encontrar información sobre las fuerzas que actúan sobre una partícula, dada la información sobre su movimiento.

Hemos hablado de cómo calcular el trabajo que realizan en una partícula las fuerzas que actúan sobre esta,

pero ¿cómo se manifiesta ese trabajo en el movimiento de la partícula? Según la segunda ley del movimiento de Newton, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, o la fuerza neta, determina la tasa de cambio del momento de la partícula, o su movimiento. Por lo tanto, debemos considerar el trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, o el **trabajo neto**, para ver qué efecto tiene sobre el movimiento de la partícula.

Empecemos por ver el trabajo neto realizado sobre una partícula en desplazamiento infinitesimal, que es el producto punto de la fuerza neta y el desplazamiento: $dW_{\text{neta}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. La segunda ley de Newton establece que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = m(d\vec{\mathbf{v}}/dt)$, así que $dW_{\text{neta}} = m(d\vec{\mathbf{v}}/dt) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. Para las funciones matemáticas que describen el movimiento de una partícula física, podemos reordenar las diferenciales dt, etc., como cantidades algebraicas en esta expresión, es decir,

$$dW_{\text{neta}} = m\left(\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = md\vec{\mathbf{v}} \cdot \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right) = m\vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{v}},$$

donde sustituimos la velocidad por la derivada de tiempo del desplazamiento y utilizamos la propiedad conmutativa del producto punto [Ecuación 2.30]. Ya que las derivadas e integrales de escalares probablemente le resulten más familiares en este punto, expresamos el producto punto en términos de coordenadas cartesianas antes de integrar entre dos puntos cualesquiera A y B en la trayectoria de la partícula. Esto nos da el trabajo neto realizado sobre la partícula:

$$\begin{aligned} W_{\text{neta},AB} &= \int_A^B (mv_x dv_x + mv_y dv_y + mv_z dv_z) \\ &= \tfrac{1}{2}m\left|v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right|_A^B = \left|\tfrac{1}{2}mv^2\right|_A^B = K_B - K_A. \end{aligned} \qquad \textbf{7.8}$$

En el paso intermedio, utilizamos el hecho de que el cuadrado de la velocidad es la suma de los cuadrados de sus componentes cartesianos, y en el último paso, utilizamos la definición de la energía cinética de la partícula. Este importante resultado se denomina **teorema de trabajo-energía** (Figura 7.11).

Teorema de trabajo-energía

El trabajo neto realizado sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula:

$$W_{\text{neta}} = K_B - K_A. \qquad \textbf{7.9}$$



FIGURA 7.11 La tracción de caballos es un evento común en las ferias estatales. El trabajo realizado por los caballos que halan de la carga da lugar a un cambio en la energía cinética de la carga, que, en última instancia, va más rápido (créditos: modificación del trabajo por "Jassen"/ Flickr).

Según este teorema, cuando un objeto desacelera, su energía cinética final es menor que su energía cinética inicial, el cambio en su energía cinética es negativo, y también lo es el trabajo neto realizado sobre este. Si un objeto se acelera, el trabajo neto realizado sobre este es positivo. Al calcular el trabajo neto, hay que incluir todas las fuerzas que actúan sobre un objeto. Si se omiten las fuerzas que actúan sobre un objeto, o si se incluyen las fuerzas que no actúan sobre este, se obtendrá un resultado erróneo.

La importancia del teorema de trabajo-energía, y de las posteriores generalizaciones a las que conduce, es que hace que algunos tipos de cálculos sean mucho más sencillos de realizar que si se tratara de resolver la segunda ley de Newton. Por ejemplo, en las Leyes de movimiento de Newton, calculamos la rapidez de un objeto que se desliza por un plano sin fricción al resolver la segunda ley de Newton para la aceleración y utilizar las ecuaciones cinemáticas para una aceleración constante, con lo que se obtiene

$$v_{\mathrm{f}}^2 = v_{\mathrm{i}}^2 + 2g(s_{\mathrm{f}} - s_{\mathrm{i}})\mathrm{sen}\,\theta,$$

donde s es el desplazamiento hacia abajo del plano.

También podemos obtener este resultado a partir del teorema de trabajo-energía en la Ecuación 7.1. Como únicamente actúan dos fuerzas sobre el objeto, la gravedad y la fuerza normal, y la fuerza normal no realiza ningún trabajo, el trabajo neto es solo el realizado por la gravedad. El trabajo dW es el producto punto de la fuerza de gravedad o $\vec{\mathbf{F}} = -\mathrm{mg}\hat{\mathrm{j}}$ y el desplazamiento $\vec{dr} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$. Tras tomar el producto punto e integrar desde una posición inicial y_i a una posición final y_f, se calcula el trabajo neto como

$$W_{\mathrm{neta}} = W_{\mathrm{grav}} = -mg(y_{\mathrm{f}} - y_{\mathrm{i}}),$$

donde la y es positiva hacia arriba. El teorema de trabajo-energía señala que esto es igual al cambio de energía cinética:

$$-mg(y_{\mathrm{f}} - y_{\mathrm{i}}) = \frac{1}{2}m(v_{\mathrm{f}}^2 - v_{\mathrm{i}}^2).$$

Si utilizamos un triángulo rectángulo, podemos ver que $(y_{\mathrm{f}} - y_{\mathrm{i}}) = (s_{\mathrm{f}} - s_{\mathrm{i}})\mathrm{sen}\,\theta$, para que el resultado de la rapidez final sea el mismo.

¿Qué se gana con el teorema de trabajo-energía? La respuesta es que para una superficie plana sin fricción, no mucho. Sin embargo, la segunda ley de Newton es fácil de resolver solo para este caso en particular, mientras que el teorema de trabajo-energía da la rapidez final para cualquier superficie sin fricción. En el caso de una superficie curva arbitraria, la fuerza normal es inconstante, y la segunda ley de Newton puede ser difícil o imposible de resolver analíticamente. Constante o no, para el movimiento a lo largo de una superficie, la fuerza normal nunca hace ningún trabajo, porque es perpendicular al desplazamiento. El cálculo mediante el teorema de trabajo-energía evita esta dificultad y se aplica a situaciones más generales.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Teorema de trabajo-energía

1. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada fuerza sobre el objeto.
2. Determine si cada fuerza realiza o no un trabajo sobre el desplazamiento en el diagrama. Mantenga cualquier signo positivo o negativo en el trabajo realizado.
3. Sume la cantidad total de trabajo realizado por cada fuerza.
4. Establezca este trabajo total igual al cambio de energía cinética y resuelva para cualquier parámetro desconocido.
5. Compruebe sus respuestas. Si el objeto se desplaza a una rapidez constante o a una aceleración cero, el trabajo total realizado debería ser cero y coincidir con el cambio de energía cinética. Si el trabajo total es positivo, el objeto debe haber acelerado o aumentado su energía cinética. Si el trabajo total es negativo, el objeto debe haber disminuido su velocidad o su energía cinética.

EJEMPLO 7.9

Completar el círculo

La pista sin fricción para un auto de juguete consta de un giro circular de radio R. ¿A qué altura, medida desde la parte inferior del círculo, debe colocarse el auto para partir del reposo en la sección de pista que se aproxima y dar toda la vuelta al círculo?

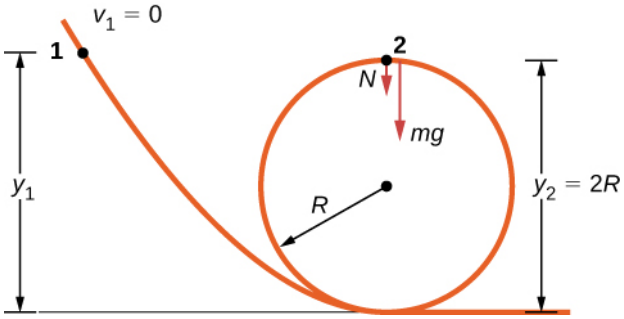


FIGURA 7.12 Una pista sin fricción para un auto de juguete tiene un giro circular completo. ¿A qué altura debe arrancar el auto para que pueda dar la vuelta al círculo sin caerse?

Estrategia

El diagrama de cuerpo libre en la posición final del objeto se dibuja en la Figura 7.12. El trabajo gravitacional es el único trabajo realizado sobre el desplazamiento que no es cero. Dado que el peso apunta en la misma dirección que el desplazamiento vertical neto, el trabajo total realizado por la fuerza gravitacional es positivo. A partir del teorema de trabajo-energía, la altura inicial determina la rapidez del auto en la parte superior del círculo,

$$-mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}m{v_2}^2,$$

donde la notación se muestra en la figura adjunta. En la parte superior del círculo, la fuerza normal y la gravedad están abajo y la aceleración es centrípeta, por lo que

$$a_{\text{superior}} = \frac{F}{m} = \frac{N + mg}{m} = \frac{v_2^2}{R}.$$

La condición para mantener el contacto con la pista es que haya alguna fuerza normal, por mínima que sea; es decir, $N > 0$. Sustituyendo por v_2^2 y N, podemos encontrar la condición para y_1.

Solución

Aplique los pasos de la estrategia para llegar al resultado deseado:

$$N = -mgR + \frac{mv_2^2}{R} = \frac{-mg + 2mg(y_1 - 2R)}{R} > 0 \quad \text{o} \quad y_1 > \frac{5R}{2}.$$

Importancia

En la superficie del círculo, el componente normal de la gravedad y la fuerza normal de contacto deberán proporcionar la aceleración centrípeta del auto que da la vuelta al círculo. El componente tangencial de la gravedad frena o acelera el auto. Un niño averiguaría a qué altura arrancar el auto por ensayo y error, pero ahora que conoce el de teorema de trabajo-energía, puede predecir la altura mínima (así como otros resultados más útiles) a partir de principios físicos. Al utilizar el teorema de trabajo-energía, no ha tenido que resolver ninguna ecuación diferencial para determinar la altura.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.7

Supongamos que el radio del giro circular en el Ejemplo 7.9 es de 15 cm y que el auto de juguete parte del

reposo a una altura de 45 cm sobre la parte inferior. ¿Cuál es su rapidez en la parte superior del círculo?

INTERACTIVO

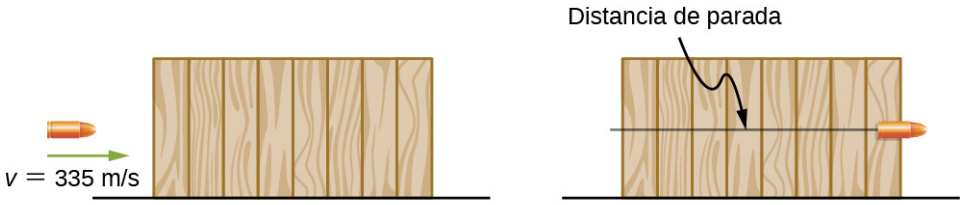
Visite el sitio web de Carleton College para ver un vídeo (https://openstax.org/l/21carcollvidrol) de una montaña rusa con círculos completos.

En situaciones en las que se conoce el movimiento de un objeto, pero se desconocen los valores de una o más de las fuerzas que actúan sobre este, se puede utilizar el teorema de trabajo-energía para obtener alguna información sobre las fuerzas. El trabajo depende de la fuerza y de la distancia sobre la que actúa, por lo que la información se proporciona a través de su producto.

EJEMPLO 7.10

Determinación de la fuerza de detención

Una bala tiene una masa de 40 granos (2,60 g) y una velocidad de salida de 1.100 pies/s (335 m/s). Puede penetrar ocho tablas de pino de 1 pulgada, cada una con un grosor de 0,75 pulgadas. ¿Cuál es la fuerza media de detención ejercida por la madera, como se muestra en la Figura 7.13?



(a) La bala golpea las tablas (b) Las tablas paran la bala

FIGURA 7.13 Las tablas ejercen una fuerza para detener la bala. Como resultado, las tablas hacen trabajo y la bala pierde energía cinética.

Estrategia

Podemos suponer que, en las condiciones generales expuestas, la bala pierde toda su energía cinética al penetrar en las tablas, por lo que el teorema de trabajo-energía señala que su energía cinética inicial es igual a la fuerza media de detención por la distancia penetrada. El cambio en la energía cinética de la bala y el trabajo neto realizado para detenerla son ambos negativos, así que cuando escribe el teorema de trabajo-energía, con el trabajo neto igual a la fuerza media por la distancia de detención, eso es lo que obtiene. El espesor total de ocho tablas de pino de 1 pulgada que la bala penetra es $8 \times \frac{3}{4}$ in. $= 6$ in. $= 15{,}2$ cm.

Solución

Si aplicamos el teorema de trabajo-energía, obtenemos

$$W_{\text{neta}} = -F_{\text{ave}}\Delta s_{\text{detención}} = -K_{\text{inicial}},$$

entonces

$$F_{\text{ave}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\Delta s_{\text{detención}}} = \frac{\frac{1}{2}(2{,}6 \times 10^{-3}\,\text{kg})(335\,\text{m/s})^2}{0{,}152\,\text{m}} = 960\,\text{N}.$$

Importancia

Podríamos haber utilizado la segunda ley de Newton y la cinemática en este ejemplo, pero el teorema de trabajo-energía también proporciona una respuesta a situaciones menos sencillas. La penetración de una bala, disparada verticalmente hacia arriba en un bloque de madera, se analiza en una sección del reciente artículo de Asif Shakur ["Bullet-Block Science Video Puzzle" (Video rompecabezas de ciencia con bloque y bala) *The Physics Teacher (El Profesor de Física)* (enero de 2015) 53(1): 15-16]. Si la bala se dispara centrada en el

bloque, pierde toda su energía cinética y penetra ligeramente más lejos que si se dispara descentrada. La razón es que si la bala impacta descentrada, tiene un poco de energía cinética después de dejar de penetrar, porque el bloque gira. El teorema de trabajo-energía implica que un menor cambio en la energía cinética da lugar a una menor penetración. Entenderá mejor la física de este interesante artículo cuando termine de leer Momento angular.

INTERACTIVO

Aprenda más sobre el trabajo y la energía en esta simulación de PhET (https://openstax.org/l/21PhETSimRamp) llamada "la rampa". Intente cambiar la fuerza que empuja la caja y la fuerza de fricción a lo largo de la pendiente. Los gráficos de trabajo y energía pueden examinarse para observar el trabajo total realizado y el cambio en la energía cinética de la caja.

7.4 Potencia

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Relacionar el trabajo realizado durante un intervalo de tiempo con la potencia entregada.
- Hallar la potencia gastada por una fuerza que actúa sobre un cuerpo en movimiento.

El concepto de trabajo implica fuerza y desplazamiento; el teorema de trabajo-energía relaciona el trabajo neto que se realiza sobre un cuerpo con la diferencia de su energía cinética, calculada entre dos puntos de su trayectoria. Ninguna de estas cantidades o relaciones implica explícitamente el tiempo, pero sabemos que el tiempo disponible para realizar una determinada cantidad de trabajo suele ser tan importante para nosotros como la propia cantidad. En la figura que abre el capítulo, varios velocistas pueden haber alcanzado la misma velocidad en la meta y, por lo tanto, haber realizado la misma cantidad de trabajo, pero el ganador de la carrera lo hizo en el menor tiempo.

Expresamos la relación entre el trabajo realizado y el intervalo de tiempo que implica su realización, al introducir el concepto de potencia. Dado que el trabajo puede variar en función del tiempo, primero definimos la **potencia media** (Average, ave) como el trabajo realizado durante un intervalo de tiempo, dividido entre el intervalo,

$$P_{\text{ave}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{7.10}$$

A continuación, podemos definir la **potencia instantánea** (a menudo denominada simplemente **potencia**).

Potencia

La potencia se define como la tasa de realización de trabajo, o el límite de la potencia media para los intervalos de tiempo que se acercan a cero,

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{7.11}$$

Si la potencia es constante a lo largo de un intervalo de tiempo, la potencia media de ese intervalo es igual a la potencia instantánea, y el trabajo realizado por el agente que suministra la potencia es $W = P\Delta t$. Si la potencia durante un intervalo varía con el tiempo, entonces el trabajo realizado es la integral del tiempo de la potencia,

$$W = \int P dt.$$

El teorema de trabajo-energía relaciona cómo se puede transformar el trabajo en energía cinética. Dado que también existen otras formas de energía, como veremos en el próximo capítulo, también podemos definir la

potencia como la tasa de transferencia de energía. El trabajo y la energía se miden en unidades de julios, por lo que la potencia se mide en unidades de julios por segundo, a las que el SI ha dado el nombre de vatios, con abreviatura W: $1\ \text{J/s} = 1\ \text{W}$. Otra unidad común para expresar la capacidad de potencia de los dispositivos cotidianos es el caballo de fuerza (Horsepower, hp): $1\ \text{hp} = 746\ \text{W}$.

EJEMPLO 7.11

Potencia de levantamiento

Un aprendiz del ejército de 80 kg hace dominadas en una barra horizontal (Figura 7.14). El aprendiz tarda 0,8 segundos en levantar el cuerpo desde una posición baja hasta que la barbilla está por encima de la barra. ¿Cuánta fuerza suministran los músculos del aprendiz al mover su cuerpo desde la posición inferior hasta que la barbilla está por encima de la barra? (*Pista:* Haga una estimación razonable de las cantidades necesarias).

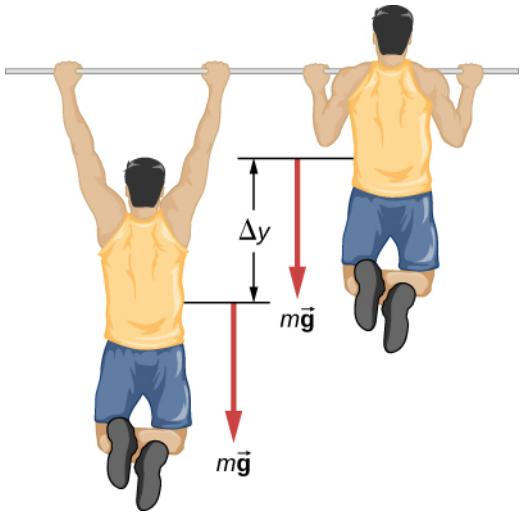


FIGURA 7.14 ¿Cuál es la potencia gastada al hacer diez dominadas en diez segundos?

Estrategia

El trabajo realizado contra la gravedad, subiendo o bajando una distancia Δy, es $mg\Delta y$. Supongamos que $\Delta y = 2\text{pies} \approx 60\ \text{cm}$. Supongamos también que los brazos representan el 10 % de la masa del cuerpo y no se incluyen en la masa en movimiento. Con estos supuestos, podemos calcular el trabajo realizado.

Solución

El resultado que obtenemos, aplicando nuestros supuestos, es

$$P = \frac{\text{mg}(\Delta y)}{t} = \frac{0{,}9\ (80\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}60\ \text{m})}{0{,}8\ \text{s}} = 529\ \text{W}.$$

Importancia

Esto es típico para el gasto de energía en el ejercicio extenuante; en unidades cotidianas, es algo más de un caballo de fuerza ($1\ \text{hp} = 746\ \text{W}$).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.8

Calcule la potencia que gasta un levantador de pesas al levantar una barra de 150 kg 2 m en 3 s.

La potencia necesaria para mover un cuerpo también puede expresarse en términos de las fuerzas que actúan sobre este. Si una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa sobre un cuerpo que es desplazado $d\vec{\mathbf{r}}$ en un tiempo dt, la potencia gastada por la fuerza es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right) = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}, \qquad 7.12$$

donde $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad del cuerpo. El hecho de que los límites implicados por las derivadas existan, para el movimiento de un cuerpo real, justifica el reordenamiento de los infinitesimales.

EJEMPLO 7.12

Potencia automotriz conduciendo cuesta arriba

¿Cuánta potencia debe gastar el motor de un automóvil para mover un auto de 1.200 kg por una pendiente de grado del 15 % a 90 km/h (Figura 7.15)? Supongamos que el 25 % de esta potencia se disipa al vencer la resistencia del aire y la fricción.

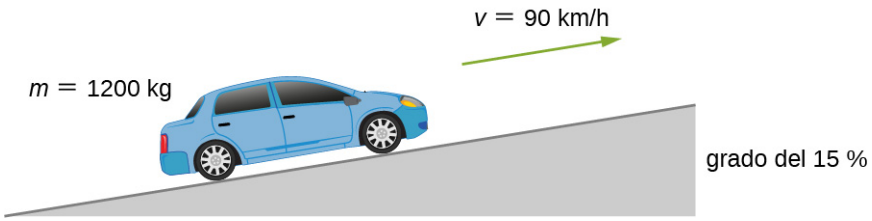


FIGURA 7.15 Queremos calcular la potencia necesaria para subir un auto por una colina a velocidad constante.

Estrategia

A velocidad constante, no hay cambio en la energía cinética, por lo que el trabajo neto realizado para mover el auto es cero. Por lo tanto, la potencia suministrada por el motor para mover el auto es igual a la potencia gastada contra la gravedad y la resistencia del aire. Suponiendo que el 75 % de la potencia se suministre contra la gravedad, lo que equivale a $m\vec{\mathbf{g}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = mgv \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo de la pendiente. Un grado del 15 % significa $\tan\theta = 0{,}15$. Este razonamiento nos permite resolver la potencia necesaria.

Solución

Al llevar a cabo los pasos sugeridos, hallamos

$$0{,}75\ P = mgv\ \text{sen}(\tan^{-1}\ 0{,}15),$$

o

$$P = \frac{(1.200\ \times\ 9{,}8\ \text{N})(90\ \text{m}/3{,}6\ \text{s})\text{sen}(8{,}53°)}{0{,}75} = 58\ \text{kW},$$

o unos 78 hp. (Deberá suministrar los pasos utilizados para convertir las unidades).

Importancia

Esta es una cantidad razonable de potencia para que el motor de un auto pequeño o mediano suministre (1 hp = 0,746 kW). Observe que esto es solo la potencia gastada para mover el auto. Gran parte de la potencia del motor va a parar a otra parte, por ejemplo, al calor residual. Por eso los autos necesitan radiadores. La potencia restante puede utilizarse para acelerar o para hacer funcionar los accesorios del auto.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

energía cinética energía del movimiento, la mitad de la masa de un objeto por el cuadrado de su rapidez

potencia (o potencia instantánea) tasa de realización del trabajo

potencia media trabajo realizado en un intervalo de tiempo dividido entre el intervalo de tiempo

teorema de trabajo-energía el trabajo neto realizado sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética

trabajo se realiza cuando una fuerza actúa sobre algo que sufre un desplazamiento de una posición a otra

trabajo neto trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un objeto

Ecuaciones Clave

Trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento infinitesimal	$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \left\|\vec{\mathbf{F}}\right\| \left\|d\vec{\mathbf{r}}\right\| \cos\theta$
Trabajo realizado por una fuerza que actúa a lo largo de una trayectoria de A a B	$W_{AB} = \int_{\text{trayectoria}\,AB} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$
Trabajo realizado por una fuerza constante de fricción cinética	$W_{\text{fr}} = -f_k \left\|l_{AB}\right\|$
Trabajo realizado por la gravedad de la Tierra para ir de A a B, cerca de su superficie	$W_{\text{grav},AB} = -mg\left(y_B - y_A\right)$
Trabajo realizado por la fuerza de un resorte unidimensional para ir de A a B	$W_{\text{resorte},AB} = -\left(\frac{1}{2}k\right)\left(x_B^2 - x_A^2\right)$
Energía cinética de una partícula no relativista	$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$
Teorema de trabajo-energía	$W_{\text{neto}} = K_B - K_A$
Potencia como tasa de realización del trabajo	$P = \frac{dW}{dt}$
Potencia como producto punto de la fuerza y la velocidad	$P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$

Resumen

7.1 Trabajo

- El incremento infinitesimal del trabajo realizado por una fuerza, que actúa sobre un desplazamiento infinitesimal, es el producto punto de la fuerza y el desplazamiento.
- El trabajo realizado por una fuerza, que actúa sobre una trayectoria finita, es la integral de los incrementos infinitesimales del trabajo realizado a lo largo de la trayectoria.
- El trabajo realizado *contra* una fuerza es el negativo del trabajo realizado *por* la fuerza.
- El trabajo realizado por una fuerza normal o de fricción por contacto deberá determinarse en cada caso particular.
- El trabajo realizado por la fuerza de la gravedad, sobre un objeto cercano a la superficie de la Tierra, depende únicamente del peso del objeto y de la diferencia de altura por la que se desplazó.
- El trabajo realizado por una fuerza de resorte, que actúa desde una posición inicial hasta una posición final, depende únicamente de la constante del resorte y de los cuadrados de esas posiciones.

7.2 Energía cinética

- La energía cinética de una partícula es el producto de la mitad de su masa por el cuadrado de su velocidad, para una rapidez no relativista.
- La energía cinética de un sistema es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas del sistema.
- La energía cinética es relativa a un marco de referencia, siempre es positiva y a veces recibe nombres especiales para los distintos tipos de movimiento.

7.3 Teorema de trabajo-energía

- Ya que la fuerza neta sobre una partícula es igual a su masa por la derivada de su velocidad, la integral del trabajo neto realizado sobre la partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. Este es el teorema de trabajo-energía.
- Puede utilizar el teorema de trabajo-energía para hallar ciertas propiedades de un sistema, sin tener que resolver la ecuación diferencial de la segunda ley de Newton.

7.4 Potencia

- La potencia es la tasa de realización del trabajo, es decir, la derivada del trabajo con respecto al tiempo.
- Alternativamente, el trabajo realizado durante un intervalo de tiempo es la integral de la potencia suministrada durante dicho intervalo.
- La potencia entregada por una fuerza, que actúa sobre una partícula en movimiento, es el producto punto de la fuerza por la velocidad de la partícula.

Preguntas Conceptuales

7.1 Trabajo

1. Dé un ejemplo de algo que consideremos trabajo en circunstancias cotidianas y que no sea trabajo en el sentido científico. ¿La energía se transfiere o cambia de forma en su ejemplo? En caso afirmativo, explique cómo se consigue esto sin realizar trabajo.

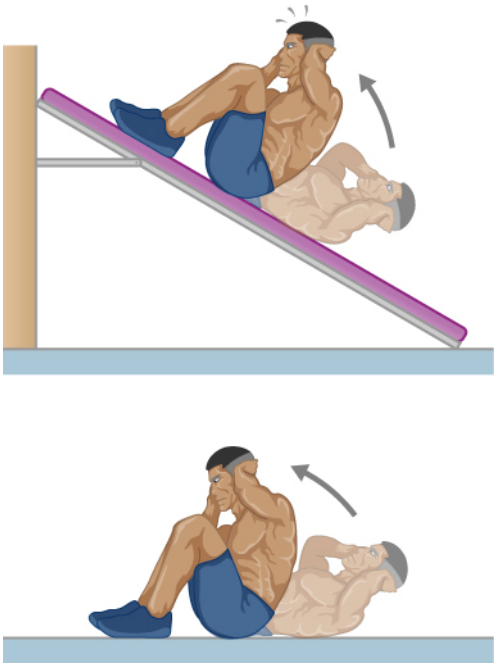
2. Dé un ejemplo de una situación en la que hay una fuerza y un desplazamiento, pero la fuerza no realiza ningún trabajo. Explique por qué no realiza trabajo.

3. Describa una situación en la que una fuerza se ejerce durante mucho tiempo, pero no realiza ningún trabajo. Explique.

4. Un cuerpo se mueve en un círculo a rapidez constante. ¿La fuerza centrípeta que acelera el cuerpo realiza algún trabajo? Explique.

5. Suponga que lanza una pelota hacia arriba y la atrapa cuando vuelve a la misma altura. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza gravitatoria sobre la pelota en todo su recorrido?

6. ¿Por qué es más difícil hacer abdominales sobre una tabla inclinada que sobre una superficie horizontal? (Vea a continuación).



7. De joven, Tarzán trepó por una liana para llegar a su casa del árbol. Cuando se hizo mayor, decidió construir y utilizar una escalera en su lugar. Dado que el trabajo de la fuerza gravitatoria mg es independiente de la trayectoria, ¿qué ganaba el rey de los monos al utilizar las escaleras?

7.2 Energía cinética

8. Una partícula de m tiene una velocidad de $v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$. ¿Está su energía cinética dada por $m({v_x}^2\hat{\mathbf{i}} + {v_y}^2\hat{\mathbf{j}} + {v_z}^2\hat{\mathbf{k}})/2$? Si no es así, ¿cuál

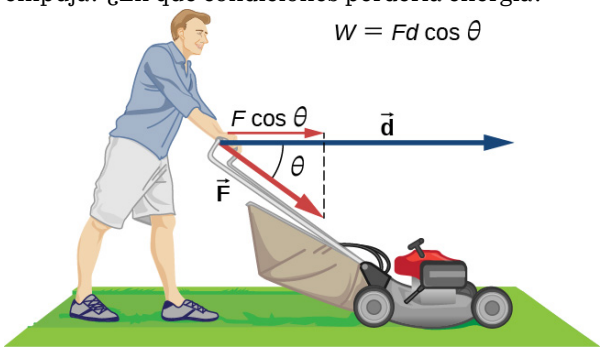
es la expresión correcta?

9. Una partícula tiene masa m y una segunda partícula tiene masa $2m$. La segunda partícula se mueve con rapidez v y la primera con rapidez $2v$. ¿Cómo se comparan sus energías cinéticas?

10. Una persona deja caer un guijarro de masa m_1 desde una altura h, y golpea el suelo con una energía cinética K. La persona deja caer otro guijarro de masa m_2 desde una altura de $2h$, y golpea el suelo con la misma energía cinética K. ¿Cómo se comparan las masas de los guijarros?

7.3 Teorema de trabajo-energía

11. La persona que se muestra a continuación ejerce trabajo sobre el cortacésped. ¿En qué condiciones el cortacésped ganaría energía de la persona que lo empuja? ¿En qué condiciones perdería energía?



12. El trabajo realizado sobre un sistema aporta energía al mismo. El trabajo realizado por un sistema le quita energía. Dé un ejemplo para cada afirmación.

13. Dos canicas de masas m y $2m$ se dejan caer desde una altura h. Compare sus energías cinéticas cuando llegan al suelo.

14. Compare el trabajo necesario para acelerar un auto de 2.000 kg de masa de 30,0 a 40,0 km/h con el necesario para una aceleración de 50,0 a 60,0 km/h.

15. Supongamos que está trotando a velocidad constante. ¿Está ejerciendo un trabajo en el ambiente y viceversa?

16. Dos fuerzas actúan para duplicar la rapidez de una partícula que se mueve inicialmente con una energía cinética de 1 J. Una de las fuerzas realiza 4 J de trabajo. ¿Cuánto trabajo hace la otra fuerza?

7.4 Potencia

17. La mayoría de los aparatos eléctricos están clasificados en vatios. ¿Depende esta clasificación del tiempo que esté encendido el aparato? (Cuando está apagado, es un dispositivo de cero vatios). Explique en términos de la definición de potencia.

18. Explique, en términos de la definición de potencia, por qué el consumo de energía se indica a veces en kilovatios-hora en lugar de julios. ¿Cuál es la relación entre estas dos unidades de energía?

19. Una chispa de electricidad estática, como la que puede recibir de un pomo de la puerta en un día frío y seco, puede llevar unos cientos de vatios de potencia. Explique por qué no lo lastima dicha chispa.

20. ¿Depende el trabajo realizado al levantar un objeto de que tan rápido este es levantado? ¿Depende la potencia gastada de la rapidez con la que se levanta?

21. ¿Puede ser negativa la potencia gastada por una fuerza?

22. ¿Cómo puede una bombilla de 50 W consumir más energía que un horno de 1.000 W?

Problemas

7.1 Trabajo

23. ¿Cuánto trabajo realiza el cajero de un supermercado con una lata de sopa que empuja 0,600 m horizontalmente con una fuerza de 5,00 N?

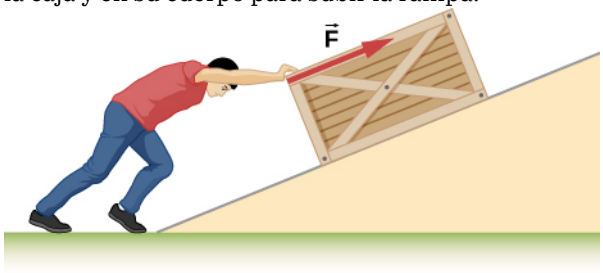
24. Una persona de 75,0 kg sube las escaleras, para llegar a 2,50 m de altura. Calcule el trabajo realizado para llevar a cabo esta tarea.

25. (a) Calcule el trabajo realizado sobre una cabina de elevador de 1.500 kg por su cable para elevarla 40,0 m con rapidez constante, suponiendo que la fricción es de media 100 N. (b) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el elevador por la fuerza gravitatoria en este proceso? (c) ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre el elevador?

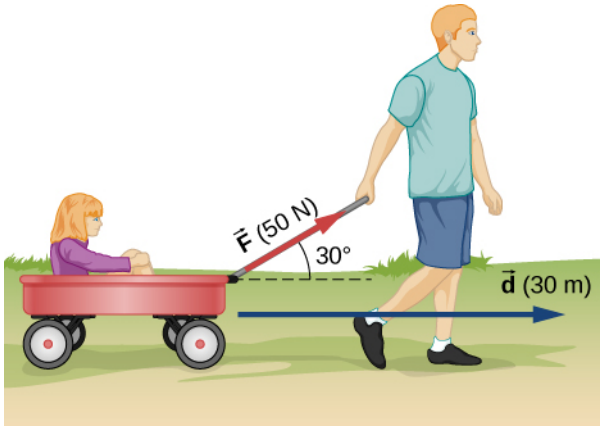
26. Supongamos que un auto recorre 108 km a una rapidez de 30,0 m/s, y utiliza 2,0 galones de gasolina. Solo el 30 % de la gasolina se convierte en trabajo útil por la fuerza que mantiene el auto en movimiento a rapidez constante, a pesar de la fricción. (El contenido de energía de la gasolina es de unos 140 MJ/gal). (a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza ejercida para mantener el auto en movimiento a rapidez constante? (b) Si la fuerza necesaria es directamente proporcional a la rapidez, ¿cuántos galones se

utilizarán para recorrer 108 km a una rapidez de 28,0 m/s?

27. Calcule el trabajo realizado por un hombre de 85,0 kg que empuja una caja de 4,00 m hacia arriba por una rampa que forma un ángulo de $20{,}0°$ con la horizontal (vea más abajo). Ejerce una fuerza de 500 N sobre la caja paralela a la rampa y se mueve a rapidez constante. Incluya el trabajo que realiza en la caja y en su cuerpo para subir la rampa.

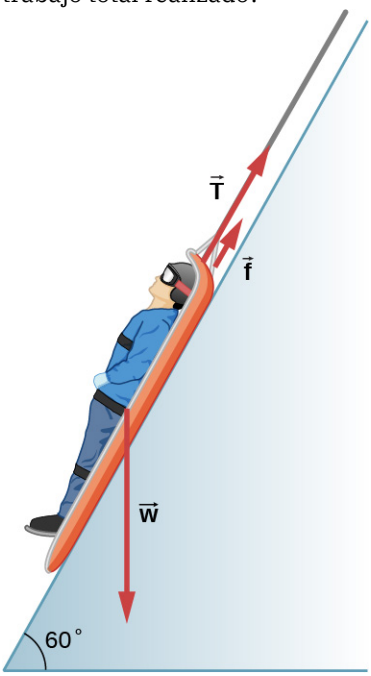


28. ¿Cuánto trabajo realiza el niño que hala a su hermana 30,0 m en una carretilla como la que se muestra a continuación? Supongamos que ninguna fricción actúa sobre la carretilla.



29. Un comprador empuja un carro de supermercado 20,0 m a rapidez constante en terreno llano, contra una fuerza de fricción de 35,0 N. Empuja en una dirección de $25{,}0°$ por debajo de la horizontal. (a) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el carro por la fricción? (b) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el carro por la fuerza gravitatoria? (c) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el carro por el comprador? (d) Calcule la fuerza que ejerce el comprador; utilice consideraciones de energía. (e) ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre el carro?

30. Supongamos que la patrulla de esquí baja un trineo de rescate y una víctima, con una masa total de 90,0 kg, por una pendiente de $60{,}0°$ a rapidez constante, como se muestra a continuación. El coeficiente de fricción entre el trineo y la nieve es de 0,100. (a) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción cuando el trineo se desplaza 30,0 m por la colina? (b) ¿Cuánto trabajo realiza la cuerda sobre el trineo en esta distancia? (c) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre el trineo? (d) ¿Cuál es el trabajo total realizado?



31. Una fuerza constante de 20 N empuja una pequeña pelota en la dirección de la fuerza a lo largo de una distancia de 5,0 m. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza?

32. Un carro de juguete es arrastrado una distancia de 6,0 m en línea recta por el suelo. La fuerza que hala del carro tiene una magnitud de 20 N y está dirigida a $37°$ sobre la horizontal. ¿Cuál es el trabajo realizado por esta fuerza?

33. Una caja de 5,0 kg descansa sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es $\mu_K = 0{,}50$. Una fuerza horizontal hala de la caja a velocidad constante durante 10 cm. Calcule el trabajo realizado por (a) la fuerza horizontal aplicada, (b) la fuerza de fricción y (c) la fuerza neta.

34. Un trineo más un pasajero con una masa total de 50 kg es halado 20 m por la nieve ($\mu_k = 0{,}20$) a velocidad constante por una fuerza dirigida a $25°$ sobre la horizontal. Calcule (a) el trabajo de la fuerza aplicada, (b) el trabajo de la fricción y (c) el trabajo total.

35. Supongamos que el trineo más el pasajero del problema anterior son empujados 20 m por la nieve a velocidad constante por una fuerza dirigida a $30°$ por debajo de la horizontal. Calcule (a) el trabajo de la fuerza aplicada, (b) el

trabajo de la fricción y (c) el trabajo total.

36. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza $F(x) = (-2{,}0/x)$ N en una partícula cuando se mueve de $x = 2{,}0$ m a $x = 5{,}0$ m?

37. ¿Cuánto trabajo se realiza contra la fuerza gravitatoria sobre un maletín de 5,0 kg cuando se transporta desde la planta baja hasta la azotea del Empire State Building, un ascenso vertical de 380 m?

38. Se necesitan 500 J de trabajo para comprimir un resorte 10 cm. ¿Cuál es la constante de fuerza del resorte?

39. Una cuerda elástica es esencialmente una banda elástica muy larga que puede estirarse hasta cuatro veces su longitud sin estirar. Sin embargo, su constante de resorte varía a lo largo de su estiramiento [vea Menz, P.G. "La física del *puenting*". *El profesor de física (The Physics Teacher)* (noviembre de 1993) 31: 483-487]. Tome la longitud de la cuerda en la dirección de la x y defina el estiramiento de la x como la longitud de la cuerda l menos su longitud no estirada l_0; es decir, $x = l - l_0$ (vea más abajo). Supongamos que una determinada cuerda elástica tiene una constante de resorte, para $0 \leq x \leq 4{,}88$ m, de $k_1 = 204$ N/m y para $4{,}88 \text{ m} \leq x$, de $k_2 = 111$ N/m. (Recuerde que la constante del resorte es la pendiente de la fuerza $F(x)$ en función de su estiramiento x). (a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando el estiramiento es de 16,7 m (el máximo deseado para un salto determinado)? (b) ¿Cuánto trabajo debe realizarse contra la fuerza elástica de la cuerda elástica para estirarla 16,7 m?

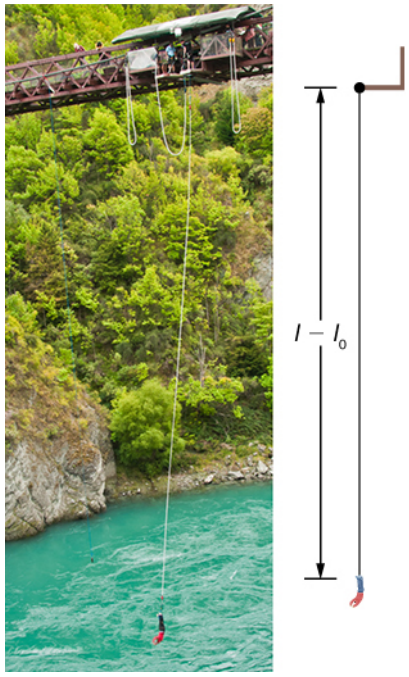


FIGURA 7.16 (créditos: modificación del trabajo de Graeme Churchard).

40. Una cuerda elástica ejerce una fuerza elástica no lineal de magnitud $F(x) = k_1 x + k_2 x^3$, donde la x es la distancia a la que se estira la cuerda, $k_1 = 204$ N/m y $k_2 = -0{,}233$ N/m^3. ¿Cuánto trabajo hay que ejercer en la cuerda para estirarla 16,7 m?

41. Los ingenieros desean modelar la magnitud de la fuerza elástica de una cuerda elástica con la ecuación $F(x) = a\left[\frac{x+9 \text{ m}}{9 \text{ m}} - \left(\frac{9 \text{ m}}{x+9 \text{ m}}\right)^2\right]$, donde la x es el estiramiento de la cuerda a lo largo de su longitud y a es una constante. Si se necesitan 22,0 kJ de trabajo para estirar la cuerda 16,7 m, determine el valor de la constante a.

42. Una partícula que se mueve en el plano xy está sometida a una fuerza $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = (50 \text{ N/m})(x\hat{\mathbf{i}} + \frac{y^2}{3\text{m}}\hat{\mathbf{j}})$ donde la x y la y están en metros. Calcule el trabajo realizado sobre la partícula por esta fuerza, al moverse en línea recta desde el punto (3 m, 4 m) hasta el punto (6 m, 8 m).

43. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva $y(x) = (10 \text{ m})\{1 + \cos[(0{,}1 \text{ m}^{-1})x]\}$, de $x = 0$ a $x = 10\pi$ m, sometida a una fuerza tangencial de magnitud variable $F(x) = (10 \text{ N})\text{sen}[(0{,}1 \text{ m}^{-1})x]$. ¿Cuánto trabajo hace la fuerza? (*Pista:* Consulte una tabla de

integrales o utilice un programa de integración numérica).

7.2 Energía cinética

44. Compare la energía cinética de un camión de 20.000 kg que se mueve a 110 km/h con la de un astronauta de 80,0 kg en órbita que se mueve a 27.500 km/h.

45. (a) ¿A qué velocidad debe moverse un elefante de 3.000 kg para tener la misma energía cinética que un velocista de 65,0 kg que corre a 10,0 m/s? (b) Argumente de qué manera las mayores energías necesarias para el movimiento de los animales más grandes se relacionarían con las tasas metabólicas.

46. Calcule la energía cinética de un portaaviones de 90.000 toneladas que se mueve a una rapidez de 30 nudos. Tendrá que buscar la definición de milla náutica para utilizarla en la conversión de la unidad para la rapidez, donde 1 nudo equivale a 1 milla náutica por hora. Además, para este problema, 1 tonelada equivale a 2.000 libras.

47. Calcule las energías cinéticas de (a) un automóvil de 2.000,0 kg que se mueve a 100,0 km/h; (b) un corredor de 80,0 kg que esprinta a 10,0 m/s; y (c) un electrón de $9{,}1 \times 10^{-31}$ -kg que se mueve a $2{,}0 \times 10^{7}$ m/s.

48. Un cuerpo de 5,0 kg tiene tres veces la energía cinética de un cuerpo de 8,0 kg. Calcule el cociente de la rapidez de estos cuerpos.

49. Una bala de 8,0 g tiene una rapidez de 800 m/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética? (b) ¿Cuál es su energía cinética si la rapidez se reduce a la mitad?

7.3 Teorema de trabajo-energía

50. (a) Calcule la fuerza necesaria para que un auto de 950 kg se detenga desde una rapidez de 90,0 km/h en una distancia de 120 m (una distancia bastante típica para una parada sin pánico). (b) Suponga que, en cambio, el auto choca con un estribo de hormigón a toda velocidad y se detiene en 2,00 m. Calcule la fuerza ejercida sobre el auto y compárela con la fuerza encontrada en la parte (a).

51. El parachoques de un auto está diseñado para soportar una colisión a 4,0 km/h (1,1 m/s) con un objeto inamovible sin que se dañe la carrocería del vehículo. El parachoques amortigua el choque absorbiendo la fuerza a lo largo de una distancia. Calcule la magnitud de la fuerza media sobre un parachoques que se desploma 0,200 m al poner en reposo un auto de 900 kg desde una rapidez inicial de 1,1 m/s.

52. Los guantes de boxeo están acolchados para disminuir la fuerza de un golpe. (a) Calcule la fuerza ejercida por un guante de boxeo sobre la cara de un adversario, si el guante y la cara se comprimen 7,50 cm durante un golpe en el que el brazo de 7,00 kg y el guante se llevan a reposo desde una rapidez inicial de 10,0 m/s. (b) Calcule la fuerza ejercida por un golpe idéntico en los días en que no se utilizaban guantes, y los nudillos y la cara se comprimían sólo 2,00 cm. Suponga que el cambio de masa al quitarse el guante es despreciable. (c) Comente sobre la magnitud de la fuerza con el guante puesto. ¿Parece lo suficientemente alta como para causar daños aunque sea menor que la fuerza sin guante?

53. Con base en consideraciones energéticas, calcule la fuerza media que un velocista de 60,0 kg ejerce hacia atrás en la pista para acelerar de 2,00 a 8,00 m/s en una distancia de 25,0 m, si encuentra un viento en contra que ejerce una fuerza media de 30,0 N contra él.

54. Una caja de 5,0 kg tiene una aceleración de $2{,}0\ \text{m/s}^2$ cuando es halada por una fuerza horizontal a través de una superficie con $\mu_K = 0{,}50$. Calcule el trabajo realizado en una distancia de 10 cm por (a) la fuerza horizontal, (b) la fuerza de fricción y (c) la fuerza neta. (d) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética de la caja?

55. Se aplica una fuerza horizontal constante de 10 N a un carro de 20 kg en reposo sobre un suelo plano. Si la fricción es despreciable, ¿cuál es la rapidez del carro cuando ha sido empujado 8,0 m?

56. En el problema anterior, la fuerza de 10 N se aplica en un ángulo de $45°$ por debajo de la horizontal. ¿Cuál es la rapidez del carro cuando ha sido empujado 8,0 m?

57. Compare el trabajo necesario para detener una caja de 100 kg que se desliza a 1,0 m/s y una bala de 8,0 g que viaja a 500 m/s.

58. Un vagón con su pasajero se encuentra en la cima de una colina. El vagón recibe un ligero empujón y rueda 100 m por una pendiente de $10°$ hasta la base de la colina. Cuál es la rapidez del vagón cuando llega al final de la pendiente. Supongamos que la fuerza de fricción retardadora es despreciable.

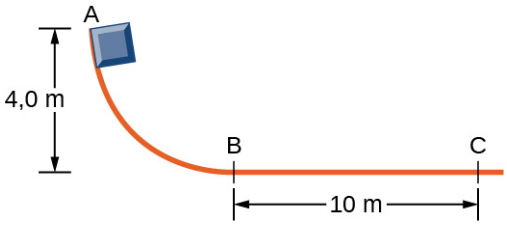
59. Una bala de 8,0 g a una rapidez de 800 m/s se

dispara contra un bloque de madera y penetra 20 cm antes de detenerse. ¿Cuál es la fuerza media de la madera sobre la bala? Supongamos que el bloque no se mueve.

60. Un bloque de 2,0 kg comienza con una rapidez de 10 m/s en la parte inferior de un plano inclinado a 37° de la horizontal. El coeficiente de fricción por deslizamiento entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0{,}30$. (a) Utilice el principio de trabajo-energía para determinar la distancia que el bloque se desliza a lo largo del plano antes de detenerse momentáneamente. (b) Después de detenerse, el bloque vuelve a deslizarse por el plano. ¿Cuál es su rapidez cuando llega a la parte inferior? (*Pista:* Para el viaje de ida y vuelta, solo la fuerza de la fricción ejerce trabajo en el bloque).

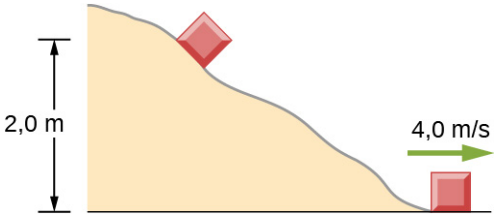
61. Cuando un bloque de 3,0 kg es empujado contra un resorte sin masa de fuerza constante $4{,}5 \times 10^3$ N/m, el resorte se comprime 8,0 cm. El bloque se suelta y se desliza 2,0 m (desde el punto en que se suelta) por una superficie horizontal antes de que la fricción lo detenga. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie?

62. Un pequeño bloque de masa 200 g comienza en reposo en A, se desliza hasta B donde su rapidez es $v_B = 8{,}0$ m/s, luego, se desliza por la superficie horizontal una distancia de 10 m antes de detenerse en C. (Vea abajo.) (a) ¿Cuál es el trabajo de fricción a lo largo de la superficie curva? (b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética a lo largo de la superficie horizontal?



63. Se coloca un pequeño objeto en la parte superior de una pendiente que es esencialmente sin fricción. El objeto se desliza por la pendiente hasta una superficie horizontal rugosa, donde se detiene en 5,0 s después de recorrer 60 m. (a) ¿Cuál es la rapidez del objeto en la parte inferior de la pendiente y su aceleración a lo largo de la superficie horizontal? (b) ¿Cuál es la altura de la pendiente?

64. Cuando se suelta, un bloque de 100 g se desliza por la trayectoria que se muestra a continuación, para llegar hasta la parte inferior con una rapidez de 4,0 m/s. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción?



65. Una bala de calibre 0,22LR como la mencionada en el Ejemplo 7.10 se dispara contra una puerta hecha con tablas de pino de un solo grosor de 1 pulgada. ¿A qué velocidad se desplazaría la bala después de atravesar la puerta?

66. Un trineo parte del reposo en la cima de una pendiente cubierta de nieve que forma un ángulo de 22° con la horizontal. Tras deslizarse 75 m por la pendiente, su rapidez es de 14 m/s. Utilice el teorema de trabajo-energía para calcular el coeficiente de fricción cinética entre los patines del trineo y la superficie nevada.

7.4 Potencia

67. Una persona en buenas condiciones físicas puede emitir 100 W de potencia útil durante varias horas seguidas, quizás pedaleando un mecanismo que accione un generador eléctrico. Descartando los problemas de eficiencia de los generadores ni consideraciones prácticas como el tiempo de descanso: (a) ¿Cuántas personas harían falta para hacer funcionar una secadora de ropa eléctrica de 4,00 kW? (b) ¿Cuántas personas harían falta para sustituir una gran central eléctrica que genera 800 MW?

68. ¿Cuál es el costo de funcionamiento de un reloj eléctrico de 3,00 W durante un año si el costo de la electricidad es de 0,0900 dólares por $\text{kW} \cdot \text{h}$?

69. Un gran aparato de aire acondicionado residencial puede consumir 15,0 kW de potencia. ¿Cuál es el costo de hacer funcionar este aire acondicionado 3,00 h al día durante 30,0 d si el costo de la electricidad es de 0,110 $ por $\text{kW} \cdot \text{h}$?

70. (a) ¿Cuál es el consumo medio de potencia en vatios de un aparato que utiliza 5,00 $\text{kW} \cdot \text{h}$ de energía al día? b) ¿Cuántos julios de energía consume este aparato en un año?

71. (a) ¿Cuál es la producción de potencia útil media de una persona que hace $6{,}00 \times 10^6$ J de trabajo útil en 8,00 h? (b) Trabajando a este ritmo, ¿cuánto tiempo tardará esta persona en levantar 2.000 kg de ladrillos en 1,50 m hasta una plataforma? (El trabajo realizado para

levantar su cuerpo puede omitirse porque no se considera aquí una producción útil).

72. Un dragster de 500 kg acelera desde el reposo hasta una rapidez final de 110 m/s en 400 m (aproximadamente un cuarto de milla) y encuentra una fuerza de fricción media de 1.200 N. ¿Cuál es su producción de potencia media en vatios y caballos de fuerza si esto le toma 7,30 s?

73. (a) ¿Cuánto tardará un auto de 850 kg con una potencia útil de 40,0 hp (1 hp equivale a 746 W) en alcanzar una rapidez de 15,0 m/s, ignorando la fricción? (b) ¿Cuánto tardará esta aceleración si el auto también sube una colina de 3,00 m de altura en el proceso?

74. (a) Halle la potencia útil de un motor de elevador que eleva una carga de 2.500 kg a una altura de 35,0 m en 12,0 s, si además aumenta la rapidez desde el reposo a 4,00 m/s. Observe que la masa total del sistema de contrapesos es de 10.000 kg, de modo que solo se elevan 2.500 kg en altura, pero se aceleran los 10.000 kg completos. (b) ¿Cuánto cuesta, si la electricidad es de 0,0900 dólares por $\text{kW} \cdot \text{h}$?

75. (a) ¿Cuánto tiempo tardaría un avión de $1{,}50 \times 10^5$-kg con motores que generan 100 MW de potencia para alcanzar una rapidez de 250 m/s y una altitud de 12,0 km si la resistencia del aire fuera despreciable? (b) Si realmente tarda 900 s, ¿cuál es la potencia? (c) Dada esta potencia, ¿cuál es la fuerza media de la resistencia del aire si el avión tarda 1.200 s? (*Pista:* Debe encontrar la distancia que recorre el avión en 1.200 s suponiendo una aceleración constante).

76. Calcule la producción de potencia necesaria para que un auto de 950 kg suba una pendiente de $2{,}00°$ a 30,0 m/s constantes mientras se encuentra con una resistencia al viento y una fricción de 600 N.

77. Un hombre de 80 kg de masa sube corriendo un tramo de escaleras de 20 m de altura en 10 s. (a) ¿Cuánta potencia se utiliza para levantar al hombre? (b) Si el cuerpo del hombre tiene un rendimiento del 25 %, ¿cuánta potencia gasta?

78. El hombre del problema anterior consume aproximadamente $1{,}05 \times 10^7$ J (2.500 calorías) de energía al día para mantener un peso constante. ¿Cuál es la potencia media que produce en un día? Compare esto con su producción de energía cuando sube las escaleras.

79. Un electrón en un tubo de televisión se acelera uniformemente desde el reposo hasta una rapidez de $8{,}4 \times 10^7$ m/s a una distancia de 2,5 cm. ¿Cuál es la potencia entregada al electrón en el instante en que su desplazamiento es de 1,0 cm?

80. El carbón se eleva desde una mina una distancia vertical de 50 m mediante un motor que suministra 500 W a una cinta transportadora. ¿Cuánto carbón por minuto se puede sacar a la superficie? Ignore los efectos de la fricción.

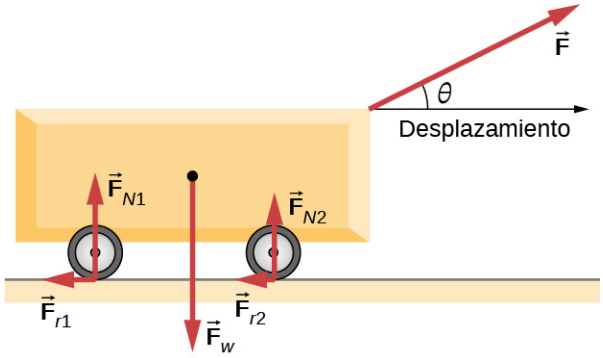
81. Una niña hala su vagón de 15 kg por una acera plana al aplicar una fuerza de 10 N a $37°$ de la horizontal. Supongamos que la fricción es despreciable y que el vagón parte del reposo. (a) ¿Cuánto trabajo realiza la niña sobre el vagón en los primeros 2,0 s. (b) ¿Cuánta potencia instantánea ejerce en $t = 2{,}0$ s?

82. Un motor de automóvil típico tiene un rendimiento del 25 %. Supongamos que el motor de un automóvil de 1.000 kg tiene una potencia máxima de 140 hp. ¿Cuál es el grado máximo que puede subir el automóvil a 50 km/h si la fuerza de fricción retardante sobre este es de 300 N?

83. Al trotar a 13 km/h en una superficie plana, un hombre de 70 kg utiliza energía a una tasa de aproximadamente 850 W. Con base en el hecho de que el "motor humano" tiene una eficiencia de aproximadamente el 25 %, determine la tasa a la que este hombre utiliza energía al correr por una pendiente de $5{,}0°$ a esta misma rapidez. Supongamos que la fuerza de fricción retardante es la misma en ambos casos.

Problemas Adicionales

84. Un carro es arrastrado una distancia D sobre una superficie plana y horizontal por una fuerza constante F que actúa a un ángulo θ con respecto a la dirección horizontal. Las otras fuerzas sobre el objeto durante este tiempo son la gravedad (F_w), las fuerzas normales (F_{N1}) y (F_{N2}), y las fricciones de rodadura F_{r1} y F_{r2}, como se muestra a continuación. ¿Cuál es el trabajo que realiza cada fuerza?



85. Consideremos una partícula sobre la que actúan varias fuerzas, una de las cuales se sabe que es constante en el tiempo: $\vec{\mathbf{F}}_1 = (3\text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (4\text{ N})\hat{\mathbf{j}}$. Como resultado, la partícula se mueve a lo largo del eje de la x desde $x = 0$ a $x = 5$ m en algún intervalo de tiempo. ¿Cuál es el trabajo que realiza $\vec{\mathbf{F}}_1$?

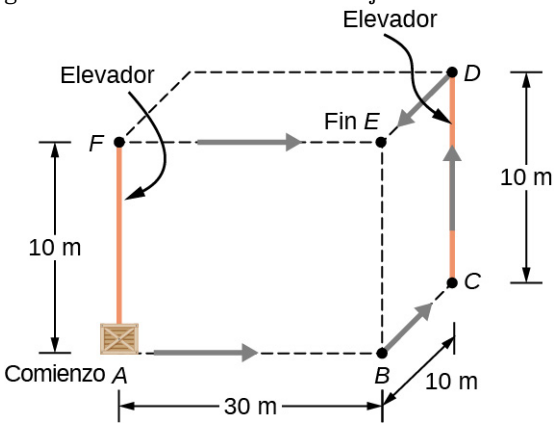
86. Consideremos una partícula sobre la que actúan varias fuerzas, una de las cuales se sabe que es constante en el tiempo: $\vec{\mathbf{F}}_1 = (3\text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (4\text{ N})\hat{\mathbf{j}}$. Como resultado, la partícula se mueve primero a lo largo del eje de la x de $x = 0$ a $x = 5$ m y luego paralela al eje de la y de $y = 0$ a $y = 6$ m. ¿Cuál es el trabajo que realiza $\vec{\mathbf{F}}_1$?

87. Consideremos una partícula sobre la que actúan varias fuerzas, una de las cuales se sabe que es constante en el tiempo: $\vec{\mathbf{F}}_1 = (3\text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (4\text{ N})\hat{\mathbf{j}}$. Como resultado, la partícula se desplaza por una trayectoria recta desde una coordenada cartesiana de (0 m, 0 m) a (5 m, 6 m). ¿Cuál es el trabajo que realiza $\vec{\mathbf{F}}_1$?

88. Consideremos una partícula sobre la que actúa una fuerza que depende de la posición de la partícula. Esta fuerza viene dada por $\vec{\mathbf{F}}_1 = (2y)\hat{\mathbf{i}} + (3x)\hat{\mathbf{j}}$. Calcule el trabajo que realiza esta fuerza cuando la partícula se mueve desde el origen hasta un punto situado 5 metros a la derecha en el eje de la x.

89. Un niño hala de un carro de 5 kg con una fuerza de 20 N en un ángulo de 30° por encima de la horizontal durante un tiempo. Durante este tiempo, el carro se desplaza una distancia de 12 m sobre el suelo horizontal. (a) Calcule el trabajo que realiza el niño sobre el carro. (b) ¿Cuál será el trabajo que realiza el niño si hala con la misma fuerza horizontalmente en lugar de en un ángulo de 30° sobre la horizontal en la misma distancia?

90. Hay que llevar una caja de 200 kg de masa desde un sitio en la planta baja hasta el tercer piso. Los trabajadores saben que pueden utilizar primero el elevador y luego deslizarla por el tercer piso hasta el apartamento, o bien deslizar primero la caja hasta otro lugar marcado con una C abajo, y luego tomar el elevador hasta el tercer piso y deslizarla en el tercer piso una distancia más corta. El problema es que la tercera planta es muy áspera en comparación con la planta baja. Dado que el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el suelo es de 0,100 y entre la caja y la superficie del tercer piso es de 0,300, calcule el trabajo que necesitan realizar los trabajadores para cada trayectoria mostrada desde *A* hasta *E*. Suponga que la fuerza que necesitan ejercer los trabajadores es la suficiente para deslizar la caja a velocidad constante (aceleración cero). *Nota:* El trabajo del elevador contra la fuerza de la gravedad no lo realizan los trabajadores.



91. Un disco de hockey con una masa de 0,17 kg se lanza por un suelo áspero con una aspereza diferente en distintos lugares, que puede describirse mediante un coeficiente de fricción cinética que depende de la posición. Para un disco que se mueve a lo largo del eje de la x, el coeficiente de fricción cinética es la siguiente función de x, donde x está en m: $\mu(x) = 0{,}1 + 0{,}05x$. Calcule el trabajo realizado por la fuerza cinética de fricción sobre el disco de hockey cuando se ha movido (a) de $x = 0$ a $x = 2$ m, y (b) de $x = 2$ m a $x = 4$ m.

92. Se requiere una fuerza horizontal de 20 N para mantener una caja de 5,0 kg subiendo a rapidez constante por una pendiente sin fricción durante un cambio de altura vertical de 3,0 m. (a) ¿Cuál es el trabajo realizado por la gravedad durante este cambio de altura? (b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza normal? (c) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza horizontal?

93. Una caja de 7,0 kg se desliza por un suelo horizontal sin fricción a 1,7 m/s y colisiona con un resorte relativamente sin masa que se

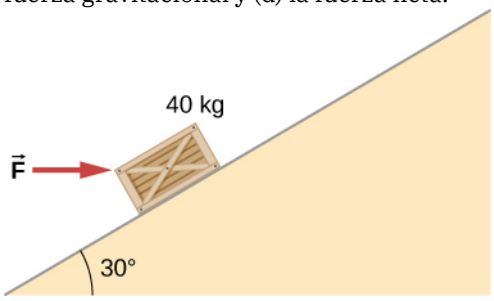
comprime 23 cm antes de que la caja se detenga. (a) ¿Cuánta energía cinética tiene la caja antes de chocar con el resorte? (b) Calcule el trabajo realizado por el resorte. (c) Determine la constante del resorte.

94. Está conduciendo su auto por una carretera recta con un coeficiente de fricción entre los neumáticos y la carretera de 0,55. Un gran trozo de escombro cae enfrente; usted frena de súbito y deja una marca de derrape de 30,5 m (100 pies) antes de detenerse. Un policía ve su auto parado en la carretera, mira la marca de derrape y le impone una multa por superar el límite de velocidad de 13,4 m/s (30 mph). ¿Debe impugnar la multa por exceso de velocidad en los tribunales?

95. Se empuja una caja por una superficie de suelo áspero. Si no se aplica ninguna fuerza sobre la caja, esta desacelerá y se detendrá. Si la caja de 50 kg de masa que se mueve a una rapidez de 8 m/s llega al reposo en 10 segundos, ¿cuál es la tasa a la que la fuerza de fricción sobre la caja le quita energía?

Problemas De Desafío

99. A continuación, se muestra una caja de 40 kg, que se empuja a velocidad constante, a una distancia de 8,0 m por una pendiente de 30° por la fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la pendiente es $\mu_k = 0{,}40$. Calcule el trabajo realizado por (a) la fuerza aplicada, (b) la fuerza de fricción, (c) la fuerza gravitacional y (d) la fuerza neta.



100. La superficie del problema anterior se modifica para que el coeficiente de fricción cinética disminuya. Se aplica la misma fuerza horizontal a la caja y, tras empujarse 8,0 m, su rapidez es de 5,0 m/s. ¿Cuánto trabajo realiza ahora la fuerza de fricción? Supongamos que la caja comienza en reposo.

101. La fuerza $F(x)$ varía con la posición, como se muestra a continuación. Calcule el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula cuando se mueve de $x = 1{,}0$ m a $x = 5{,}0$ m.

96. Supongamos que se requiere una fuerza horizontal de 20 N para mantener una rapidez de 8 m/s de una caja de 50 kg. (a) ¿Cuál es la potencia de esta fuerza? (b) Observe que la aceleración de la caja es cero, a pesar de que la fuerza de 20 N actúa sobre la caja horizontalmente. ¿Qué ocurre con la energía que recibe la caja como resultado del trabajo realizado por esta fuerza de 20 N?

97. Los granos de una tolva caen a una tasa de 10 kg/s en vertical sobre una cinta transportadora que se mueve en horizontal a una rapidez constante de 2 m/s. (a) ¿Qué fuerza se necesita para mantener la cinta transportadora en movimiento a la velocidad constante? (b) ¿Cuál es la potencia mínima del motor que mueve la cinta transportadora?

98. Un ciclista en una carrera debe subir una colina de 5° a una rapidez de 8 m/s. Si la masa de la bicicleta y del ciclista juntos es de 80 kg, ¿cuál debe ser la producción de potencia del ciclista para alcanzar la meta?



102. Calcule el trabajo realizado por la misma fuerza en el Ejemplo 7.4, entre los mismos puntos, $A = (0, 0)$ y $B = (2\text{ m}, 2\text{ m})$, sobre un arco circular de radio 2 m, centrado en (0, 2 m). Evalúe la integral de la trayectoria mediante el empleo de coordenadas cartesianas. (*Pista:* Probablemente tendrá que consultar una tabla de integrales).

103. Responda al problema anterior mediante el empleo de coordenadas polares.

104. Calcule el trabajo realizado por la misma fuerza en el Ejemplo 7.4, entre los mismos puntos, $A = (0, 0)$ y $B = (2\text{ m}, 2\text{ m})$, sobre un arco de radio 2 m, centrado en (2 m, 0). Evalúe la integral de la trayectoria mediante el empleo de coordenadas cartesianas. (*Pista:* Probablemente tendrá que consultar una tabla de integrales).

105. Responda al problema anterior mediante el

empleo de coordenadas polares.

106. A un auto de masa m le llega una potencia constante P a través de su motor. Demuestre que, si se puede ignorar la resistencia del aire, la distancia recorrida en un tiempo t por el auto, partiendo del reposo, está dada por $s = (8P/9m)^{1/2} t^{3/2}$.

107. Supongamos que la resistencia del aire que encuentra un auto es independiente de su rapidez. Cuando el auto se desplaza a 15 m/s, su motor entrega 20 hp a sus ruedas. (a) ¿Cuál es la potencia entregada a las ruedas cuando el auto se desplaza a 30 m/s? (b) ¿Cuánta energía utiliza el auto para recorrer 10 km a 15 m/s? ¿A 30 m/s? Supongamos que el motor tiene un rendimiento del 25 %. (c) Responda las mismas preguntas si la fuerza de la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del automóvil. (d) ¿Qué le dicen estos resultados, más su experiencia con el consumo de gasolina, acerca de la resistencia del aire?

108. Consideremos un resorte lineal, como el de la Figura 7.7(a), con una masa M, distribuida uniformemente a lo largo. El extremo izquierdo del resorte está fijo, pero el extremo derecho, en la posición de equilibrio $x = 0$, se desplaza a una rapidez v en la dirección de la x. ¿Cuál es la energía cinética total del resorte? (*Pista:* Primero, exprese la energía cinética de un elemento infinitesimal del resorte dm en términos de la masa total, la longitud de equilibrio, la rapidez del extremo derecho y la posición a lo largo del resorte; luego integre).

CAPÍTULO 8
Energía potencial y conservación de la energía



Figura 8.1 Aquí se muestra parte de una escultura Ball Machine de George Rhoads. Una pelota en este artilugio se levanta, rueda, cae, rebota y colisiona con varios objetos. A lo largo de sus viajes, su energía cinética cambia en cantidades definidas y predecibles, que dependen de su posición y de los objetos con los que interactúa (créditos: modificación del trabajo de Roland Tanglao).

ESQUEMA DEL CAPITULO

8.1 Energía potencial de un sistema
8.2 Fuerzas conservativas y no conservativas
8.3 Conservación de la energía
8.4 Diagramas de energía potencial y estabilidad
8.5 Fuentes de energía

INTRODUCCIÓN En la escultura de la pelota rodante de George Rhoads, el principio de conservación de la energía rige los cambios en la energía cinética de la pelota y los relaciona con los cambios y transferencias de otros tipos de energía asociados a las interacciones de la bola. En este capítulo, presentamos el importante concepto de energía potencial. Esto nos permitirá formular la ley de conservación de la energía mecánica y aplicarla a sistemas sencillos, lo cual facilitará la resolución de problemas. En la última sección sobre las fuentes de energía, consideraremos las transferencias de energía y la ley general de conservación de la energía. A lo largo de este libro, la ley de conservación de la energía se aplicará cada vez con más detalle, a medida que se encuentren sistemas más complejos y variados, y otras formas de energía.

8.1 Energía potencial de un sistema

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Relacionar la diferencia de energía potencial con el trabajo realizado en una partícula para un sistema sin fricción ni arrastre del aire.
- Explicar el significado del cero de la función de energía potencial para un sistema.
- Calcular y aplicar la energía potencial gravitacional para un objeto cercano a la superficie terrestre y la energía potencial elástica de un sistema masa-resorte.

En Trabajo, vimos que el trabajo realizado sobre un objeto por la fuerza gravitacional constante, cerca de la superficie de la Tierra, sobre cualquier desplazamiento es una función solo de la diferencia en las posiciones de los puntos finales del desplazamiento. Esta propiedad nos permite definir un tipo de energía diferente para el sistema que su energía cinética, que recibe el nombre de **energía potencial**. En las siguientes subsecciones consideramos varias propiedades y tipos de energía potencial.

Fundamentos de la energía potencial

En Movimiento en dos y tres dimensiones, analizamos el movimiento de un proyectil, como patear un balón de fútbol en la Figura 8.2. Para este ejemplo, vamos a ignorar la fricción y la resistencia del aire. Cuando el balón se eleva, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el balón es negativo, porque su desplazamiento es positivo en sentido vertical y la fuerza debida a la gravedad es negativa en sentido vertical. También observamos que el balón desacelera hasta llegar a su punto más alto en el movimiento, lo que disminuye su energía cinética. Esta pérdida de energía cinética se traduce en una ganancia de energía potencial gravitacional del sistema balón de fútbol-Tierra.

A medida que el balón cae hacia la Tierra, el trabajo realizado sobre el balón es ahora positivo, ya que tanto el desplazamiento como la fuerza gravitacional apuntan verticalmente hacia abajo. El balón también se acelera, lo que indica un aumento en la energía cinética. Por lo tanto, la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética.

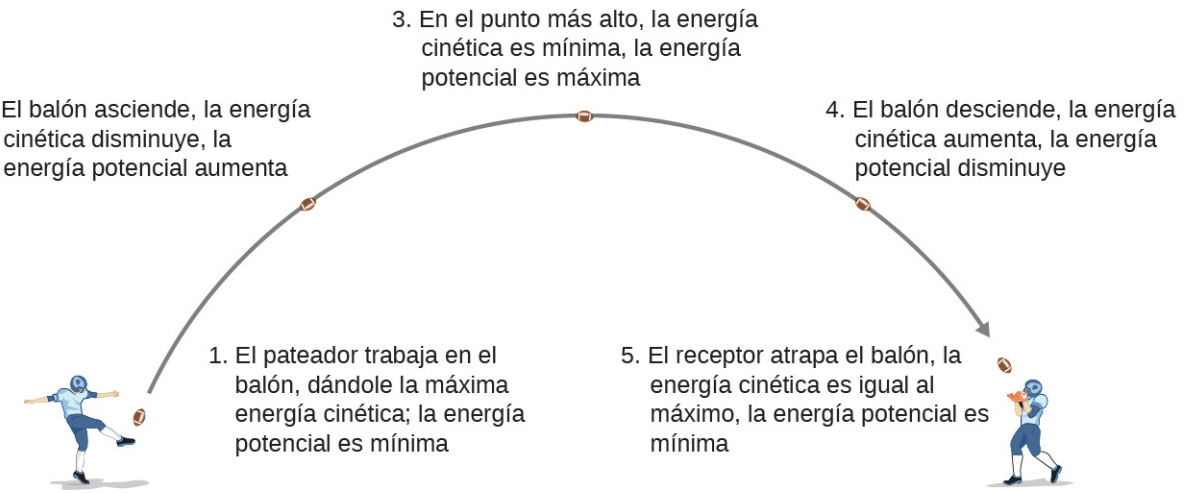


FIGURA 8.2 Cuando el balón de fútbol comienza a descender hacia el receptor, la energía potencial gravitacional se convierte de nuevo en energía cinética.

Basándonos en este escenario, podemos definir la diferencia de energía potencial del punto A al punto B como el negativo del trabajo realizado:

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = -W_{AB}. \quad 8.1$$

Esta fórmula indica explícitamente una **diferencia de energía potencial**, no solo una energía potencial absoluta. Por lo tanto, tenemos que definir la energía potencial en una posición determinada de manera que se

establezcan valores estándar de energía potencial por sí mismos, en lugar de diferencias de energía potencial. Lo hacemos al reescribir la función de energía potencial en términos de una constante arbitraria,

$$\Delta U = U(\vec{\mathbf{r}}) - U(\vec{\mathbf{r}}_0). \tag{8.2}$$

La elección de la energía potencial en un punto de partida de $\vec{\mathbf{r}}_0$ se hace por conveniencia en el problema dado. Lo más importante es que, sea cual sea la elección que se haga, se debería indicar y mantener la coherencia a lo largo de todo el problema. Hay algunas opciones bien aceptadas de energía potencial inicial. Por ejemplo, la altura más baja de un problema se define como energía potencial cero, o si un objeto está en el espacio, el punto más alejado del sistema se define como energía potencial cero. Entonces, la energía potencial, con respecto a cero en $\vec{\mathbf{r}}_0$, es solo $U(\vec{r})$.

Mientras no haya fricción ni resistencia del aire, el cambio en la energía cinética del balón es igual al negativo del cambio en su energía potencial gravitacional. Esto se puede generalizar a cualquier energía potencial:

$$\Delta K_{AB} = -\Delta U_{AB}. \tag{8.3}$$

Veamos un ejemplo concreto, al elegir la energía potencial cero para la energía potencial gravitacional en los puntos convenientes.

EJEMPLO 8.1

Propiedades básicas de la energía potencial

Una partícula se mueve a lo largo del eje de la x bajo la acción de una fuerza dada por $F = -ax^2$, donde $a = 3\ \text{N/m}^2$. (a) ¿Cuál es la diferencia en su energía potencial al pasar de $x_A = 1\ \text{m}$ a $x_B = 2\ \text{m}$? (b) ¿Cuál es la energía potencial de la partícula en $x = 1\ \text{m}$ con respecto a una determinada energía potencial de 0,5 J en $x = 0$?

Estrategia

(a) La diferencia en la energía potencial es el negativo del trabajo realizado, definido por la Ecuación 8.1. El trabajo se define en el capítulo anterior como el producto punto de la fuerza por la distancia. Dado que la partícula se desplaza hacia adelante, en la dirección de la x, el producto punto se simplifica a una multiplicación ($\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1$). Para hallar el trabajo total realizado, tenemos que integrar la función entre los límites dados. Después de la integración, podemos indicar el trabajo o el cambio de energía potencial. (b) La función de energía potencial, con respecto a cero en $x = 0$, es la integral indefinida encontrada en la parte (a), con la constante de integración determinada a partir de la Ecuación 8.3. A continuación, sustituimos el valor de x en la función de energía potencial para calcular la energía potencial en $x = 1\ \text{m}$.

Solución

a. El trabajo realizado por la fuerza dada cuando la partícula se mueve de la coordenada x a $x + dx$ en una dimensión es

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = F dx = -ax^2 dx.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ecuación 8.1, obtenemos

$$\Delta U = -W = \int_{x_1}^{x_2} ax^2 dx = \frac{1}{3}(3\ \text{N/m}^2)x^3\Big|_{1\ \text{m}}^{2\ \text{m}} = 7\ \text{J}.$$

b. La integral indefinida para la función de energía potencial en la parte (a) es

$$U(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \text{const.},$$

y queremos que la constante esté determinada por

$$U(0) = 0{,}5\ \text{J}.$$

Así, la energía potencial con respecto a cero en $x = 0$ es solo

$$U(x) = \frac{1}{3}ax^3 + 0{,}5\ \text{J}.$$

Por lo tanto, la energía potencial en $x = 1$ m es

$$U(1\ \text{m}) = \frac{1}{3}\left(3\ \text{N/m}^2\right)(1\ \text{m})^3 + 0{,}5\ \text{J} = 1{,}5\ \text{J}.$$

Importancia

En este ejemplo unidimensional, cualquier función que podamos integrar, independientemente de la trayectoria, es conservativa. Observe cómo hemos aplicado la definición de diferencia de energía potencial para determinar la función de energía potencial con respecto a cero en un punto seleccionado. Observe también que la energía potencial, determinada en la parte (b), en $x = 1$ m es $U(1\ \text{m}) = 1$ J y en $x = 2$ m es $U(2\ \text{m}) = 8$ J; su diferencia es el resultado de la parte (a).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.1

En el Ejemplo 8.1, ¿cuál es la energía potencial de la partícula en $x = 1$ m y $x = 2$ m con respecto a cero en $x = 1{,}5$ m? Compruebe que la diferencia de energía potencial sigue siendo de 7 J.

Sistemas de varias partículas

En general, un sistema de interés puede estar formado por varias partículas. La diferencia en la energía potencial del sistema es el negativo del trabajo realizado por las fuerzas gravitacionales o elásticas, que, como veremos en el siguiente apartado, son fuerzas conservativas. La diferencia de energía potencial depende solo de las posiciones inicial y final de las partículas, y de algunos parámetros que caracterizan la interacción (como la masa para la gravedad o la constante de resorte para una fuerza de la ley de Hooke).

Es importante recordar que la energía potencial es una propiedad de las interacciones entre los objetos de un sistema elegido, y no solo una propiedad de cada objeto. Esto es especialmente cierto para las fuerzas eléctricas, aunque en los ejemplos de energía potencial que consideramos a continuación, las partes del sistema son tan grandes (como la Tierra, comparada con un objeto en su superficie) o tan pequeñas (como un resorte sin masa), que los cambios que sufren esas partes son despreciables cuando se incluyen en el sistema.

Tipos de energía potencial

Para cada tipo de interacción presente en un sistema, se puede marcar el tipo correspondiente de energía potencial. La energía potencial total del sistema es la suma de las energías potenciales de todos los tipos. (Esto se deduce de la propiedad aditiva del producto punto en la expresión del trabajo realizado). Veamos algunos ejemplos concretos de los tipos de energía potencial que se analizan en Trabajo. En primer lugar, consideramos cada una de estas fuerzas cuando actúan por separado, y luego cuando ambas actúan conjuntamente.

Energía potencial gravitacional cerca de la superficie de la Tierra

El sistema de interés consiste en nuestro planeta, la Tierra, y una o más partículas cercanas a su superficie (o cuerpos lo suficientemente pequeños para ser considerados como partículas, en comparación con la Tierra). La fuerza gravitacional sobre cada partícula (o cuerpo) es solo su peso mg cerca de la superficie de la Tierra, que actúa verticalmente hacia abajo. Según la tercera ley de Newton, cada partícula ejerce una fuerza sobre la Tierra de igual magnitud, pero en sentido contrario. La segunda ley de Newton establece que la magnitud de la aceleración producida por cada una de estas fuerzas sobre la Tierra es mg dividida entre la masa terrestre. Dado que el cociente entre la masa de cualquier objeto ordinario y la masa de la Tierra es diminuto, el movimiento de la Tierra puede ignorarse por completo. Por lo tanto, consideramos que este sistema es un grupo de sistemas de una sola partícula, sujetos a la fuerza gravitacional uniforme de la Tierra.

En Trabajo, el trabajo realizado sobre un cuerpo por la fuerza gravitacional uniforme de la Tierra, cerca de su superficie, dependía de la masa del cuerpo, de la aceleración debida a la gravedad y de la diferencia de altura que el cuerpo recorría, tal como se indica en la Ecuación 7.4. Por definición, este trabajo es el negativo de la

diferencia de energía potencial gravitacional, por lo que esa diferencia es

$$\Delta U_{\text{grav}} = -W_{\text{grav},AB} = mg\,(y_B - y_A)\,. \qquad 8.4$$

De ello se deduce que la función de energía potencial gravitacional, cerca de la superficie de la Tierra, es

$$U\,(y) = mgy + \text{const.} \qquad 8.5$$

Se puede elegir el valor de la constante, como se describe en el análisis de la Ecuación 8.2; sin embargo, para resolver la mayoría de los problemas, la constante más conveniente a elegir es cero para cuando $y = 0$, que es la posición vertical más baja del problema.

EJEMPLO 8.2

Energía potencial gravitacional de un excursionista

La cumbre de Great Blue Hill en Milton, un pueblo localizado en Massachusetts, está a 147 m sobre su base y tiene una cota sobre el nivel del mar de 195 m (Figura 8.3). (Su nombre nativo americano, *Massachusett*, fue adoptado por los colonos para dar nombre a la Colonia de la Bahía y al estado cercano a su ubicación). Un excursionista de 75 kg asciende desde la base hasta la cumbre. ¿Cuál es la energía potencial gravitacional del sistema excursionista-Tierra con respecto a la energía potencial gravitacional cero a la altura de la base, cuando el excursionista está (a) en la base de la colina, (b) en la cima, y (c) a nivel del mar, después?

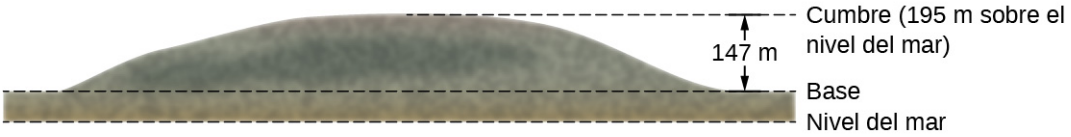


FIGURA 8.3 Esquema del perfil de Great Blue Hill, Milton, Massachusetts. Se indican las altitudes de los tres niveles.

Estrategia

En primer lugar, tenemos que elegir un origen para el eje de la y y luego determinar el valor de la constante que hace que la energía potencial sea cero a la altura de la base. Entonces, podemos determinar las energías potenciales a partir de la Ecuación 8.5, con base en la relación entre la altura de la energía potencial cero y la altura a la que se encuentra el excursionista.

Solución

a. Elijamos el origen para el eje y en la altura de la base, donde también queremos que esté el cero de la energía potencial. Esta elección hace que la constante sea igual a cero y
$$U\,(\text{base}) = U\,(0) = 0.$$

b. En la cumbre, $y = 147$ m, así que
$$U\,(\text{cumbre}) = U\,(147\text{ m}) = mgh = (75\ \times\ 9{,}8\text{ N})\,(147\text{ m}) = 108\text{ kJ}.$$

c. A nivel del mar, $y = (147 - 195)\text{ m} = -48$ m, así que
$$U\,(\text{nivel del mar}) = (75\ \times\ 9{,}8\text{ N})\,(-48\text{ m}) = -35{,}3\text{ kJ}.$$

Importancia

Además de ilustrar el uso de la Ecuación 8.4 y la Ecuación 8.5, los valores de energía potencial gravitacional que hallamos son razonables. La energía potencial gravitacional es mayor en la cumbre que en la base, y menor a nivel del mar que en la base. ¡La gravedad también actúa sobre usted al subir! Hace un trabajo negativo y no tanto (en magnitud), como el que hacen sus músculos. No obstante, ciertamente realiza un trabajo Del mismo modo, sus músculos realizan un trabajo en la bajada, como trabajo negativo. Los valores

numéricos de las energías potenciales dependen de la elección del cero de la energía potencial, pero las diferencias físicamente significativas de la energía potencial no lo hacen. [Observe que, dado que la Ecuación 8.2 es una diferencia, los valores numéricos no dependen del origen de coordenadas].

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.2

¿Cuáles son los valores de la energía potencial gravitacional del excursionista en la base, la cumbre y al nivel del mar, con respecto a un cero de energía potencial a nivel del mar?

Energía potencial elástica

En Trabajo, vimos que el trabajo que realiza un resorte perfectamente elástico, en una dimensión, depende solo de la constante del resorte y de los cuadrados de los desplazamientos desde la posición no estirada, como se indica en la Ecuación 7.5. Este trabajo se refiere única y exclusivamente a las propiedades de una interacción de la ley de Hooke y no a las propiedades de los resortes reales y de los objetos que estén unidos a ellos. Por lo tanto, podemos definir la diferencia de energía potencial elástica para una fuerza de resorte como el negativo del trabajo realizado por la fuerza de resorte en esta ecuación, antes de considerar los sistemas que encarnan este tipo de fuerza. Así,

$$\Delta U = -W_{AB} = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2), \tag{8.6}$$

donde el objeto se desplaza del punto A al punto B. La función de energía potencial correspondiente a esta diferencia es

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{const.} \tag{8.7}$$

Si la fuerza del resorte es la única que actúa, lo más sencillo es tomar el cero de la energía potencial en $x = 0$, cuando el resorte está sin estirar. Entonces, la constante en la Ecuación 8.7 es cero. (Otras opciones pueden ser más convenientes si actúan otras fuerzas).

EJEMPLO 8.3

Energía potencial del resorte

Un sistema contiene un resorte perfectamente elástico, con una longitud sin estirar de 20 cm y una constante de resorte de 4 N/cm. (a) ¿Cuánta energía potencial elástica aporta el resorte cuando su longitud es de 23 cm? (b) ¿Cuánta más energía potencial aporta si su longitud aumenta a 26 cm?

Estrategia

Cuando el resorte está sin estirar, no aporta nada a la energía potencial del sistema, por lo que podemos utilizar la Ecuación 8.7 con la constante igual a cero. El valor de la x es la longitud menos la longitud sin estirar. Cuando el resorte se expande, el desplazamiento del resorte o la diferencia entre su longitud relajada y su longitud estirada debe utilizarse para el valor de la x en el cálculo de la energía potencial del resorte.

Solución

a. El desplazamiento del resorte es $x = 23\text{ cm} - 20\text{ cm} = 3\text{ cm}$, por lo que la energía potencial aportada es $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(4\text{ N/cm})(3\text{ cm})^2 = 0{,}18\text{ J}$.
b. Cuando el desplazamiento del resorte es $x = 26\text{ cm} - 20\text{ cm} = 6\text{ cm}$, la energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(4\text{ N/cm})(6\text{ cm})^2 = 0{,}72\text{ J}$, lo que supone un aumento de 0,54 J sobre la cantidad de la parte (a).

Importancia

El cálculo de la energía potencial elástica y de las diferencias de energía potencial a partir de la Ecuación 8.7

implica la resolución de las energías potenciales en función de las longitudes dadas del resorte. Dado que U depende de x^2, la energía potencial para una compresión (x negativa) es la misma que para una extensión de igual magnitud.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.3

Cuando la longitud del resorte en el Ejemplo 8.3 cambia de un valor inicial de 22,0 cm a un valor final, la energía potencial elástica que aporta cambia en $-0{,}0800$ J. Halle la longitud final.

Energía potencial gravitacional y elástica

Un sistema sencillo que incorpora los tipos de energía potencial gravitacional y elástica es un sistema unidimensional vertical de masa-resorte. Consiste en una partícula masiva (o bloque), colgada de un extremo de un resorte perfectamente elástico y sin masa, cuyo otro extremo está fijo, como se ilustra en la Figura 8.4.

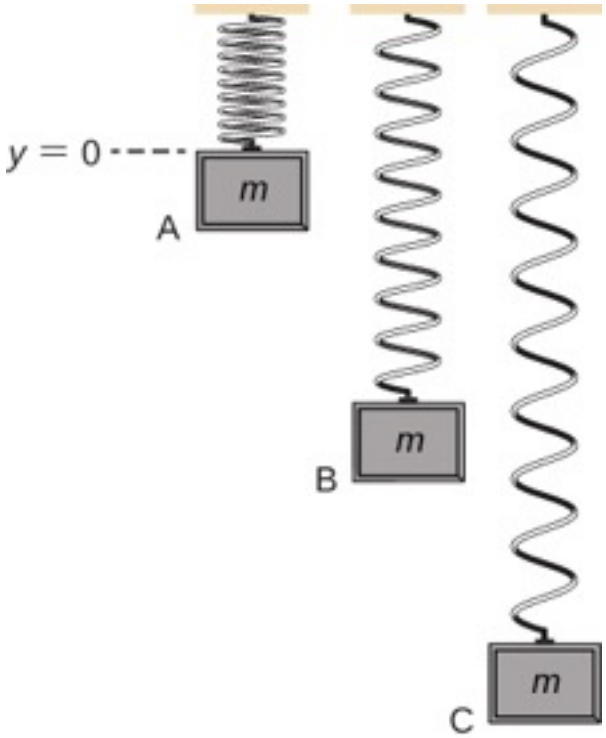


FIGURA 8.4 Un sistema vertical de masa-resorte, con el eje de la *Y* positivo apuntando hacia arriba. La masa se encuentra inicialmente en una longitud de resorte sin estirar, el punto A. Luego se suelta y se expande más allá del punto B hasta el punto C, donde se detiene.

En primer lugar, consideremos la energía potencial del sistema. Necesitamos definir la constante en la función de energía potencial de la Ecuación 8.5. A menudo, el suelo es una opción adecuada para cuando la energía potencial gravitacional es cero; sin embargo, en este caso, el punto más alto o cuando $y = 0$ es un lugar conveniente para la energía potencial gravitacional cero. Observe que esta elección es arbitraria, y el problema puede resolverse correctamente aunque se elija otra opción.

También debemos definir la energía potencial elástica del sistema y la constante correspondiente, como se detalla en la Ecuación 8.7. Aquí es donde el resorte está sin estirar, o en la posición $y = 0$.

Si consideramos que la energía total del sistema se conserva, entonces la energía en el punto A es igual a la del punto C. El bloque se coloca justo sobre el resorte, por lo que su energía cinética inicial es cero. Según el planteamiento del problema analizado anteriormente, tanto la energía potencial gravitacional como la energía potencial elástica son iguales a cero. Por lo tanto, la energía inicial del sistema es cero. Cuando el bloque llega al punto C, su energía cinética es cero. Sin embargo, ahora tiene tanto energía potencial gravitacional como

energía potencial elástica. Por lo tanto, podemos resolver la distancia y, que recorre el bloque antes de detenerse:

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{A}} + U_A &= K_C + U_{\mathrm{C}} \\ 0 &= 0 + mgy_C + \tfrac{1}{2}k(y_C)^2 \\ y_{\mathrm{C}} &= \frac{-2mg}{k} \end{aligned}$$



FIGURA 8.5 Un puente elástico transforma la energía potencial gravitacional al inicio del salto en energía potencial elástica al final del mismo.

EJEMPLO 8.4

Energía potencial de un sistema vertical de masa-resorte

Un bloque que pesa 1,2 N se cuelga de un resorte con una constante de 6,0 N/m, como se muestra en la Figura 8.4. (a) ¿Cuál es la máxima expansión del resorte, vista en el punto C? (b) ¿Cuál es la energía potencial total en el punto B, a medio camino entre A y C? (c) ¿Cuál es la velocidad del bloque en el punto B?

Estrategia

En la parte (a) calculamos la distancia y_C como se ha comentado en el texto anterior. Luego, en la parte (b), utilizamos la mitad del valor de y para calcular la energía potencial en el punto B mediante la Ecuación 8.4 y la Ecuación 8.6. Esta energía deberá ser igual a la energía cinética, la Ecuación 7.6, en el punto B ya que la energía inicial del sistema es cero. Al calcular la energía cinética en el punto B, ahora podemos calcular la rapidez del bloque en el punto B.

Solución

a. Dado que la energía total del sistema es cero en el punto A, como se ha comentado anteriormente, se calcula que la expansión máxima del resorte es:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{C}} &= \frac{-2mg}{k} \\ y_{\mathrm{C}} &= \frac{-2(1{,}2\ \mathrm{N})}{(6{,}0\mathrm{N/m})} = -0{,}40\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

b. La posición de y_B es la mitad de la posición en y_C o $-0{,}20$ m. La energía potencial total en el punto B sería,

por lo tanto, la siguiente:

$$\begin{aligned} U_B &= mgy_B + \tfrac{1}{2}k(y_C)^2 \\ U_B &= (1{,}2\,\text{N})(-0{,}20\,\text{m}) + \tfrac{1}{2}(6\ \text{N/m})(-0{,}20\,\text{m})^2 \\ U_\text{B} &= -0{,}12\,\text{J} \end{aligned}$$

c. La masa del bloque es el peso dividido entre la gravedad.

$$m = \frac{F_w}{g} = \frac{1{,}2\,\text{N}}{9{,}8\text{m/s}^2} = 0{,}12\text{kg}$$

Por lo tanto, la energía cinética en el punto B es de 0,12 J, porque la energía total es cero. Así, la rapidez del bloque en el punto B es igual a

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}mv^2 \\ v &= \sqrt{\tfrac{2K}{m}} = \sqrt{\tfrac{2(0{,}12\,\text{J})}{(0{,}12\,\text{kg})}} = 1{,}4\ \text{m/s} \end{aligned}$$

Importancia

Aunque la energía potencial debida a la gravedad es relativa a un lugar cero elegido, las soluciones a este problema serían las mismas si los puntos de energía cero se eligieran en lugares diferentes.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.4

Supongamos que la masa en la Ecuación 8.6 se duplica mientras se mantienen las demás condiciones. ¿Aumentaría, disminuiría o permanecería igual la expansión máxima del resorte? ¿La rapidez en el punto B sería mayor, menor o igual en comparación con la masa original?

INTERACTIVO

¡Vea esta simulación (https://openstax.org/l/21conenerskat) para aprender sobre la conservación de la energía con un patinador! Construya pistas, rampas y saltos para el patinador y observe la energía cinética, la energía potencial y la fricción mientras se mueve. ¡También puede llevar al patinador a diferentes planetas o incluso al espacio!

En la Tabla 8.1 se muestra un gráfico de muestra de una variedad de energías para darle una idea sobre los valores típicos de energía, asociados a ciertos eventos. Algunos de ellos se calculan con la energía cinética, mientras que otros se calculan con cantidades que se encuentran en una forma de energía potencial, que quizá no se haya comentado en este punto.

Objeto/fenómeno	Energía en julios
Big Bang	10^{68}
Consumo anual de energía en el mundo	$4{,}0 \times 10^{20}$
Bomba grande de fusión (9 megatones)	$3{,}8 \times 10^{16}$
Bomba de fisión del tamaño de la de Hiroshima (10 kilotones)	$4{,}2 \times 10^{13}$
1 barril de petróleo crudo	$5{,}9 \times 10^{9}$
1 tonelada métrica de TNT	$4{,}2 \times 10^{9}$

Objeto/fenómeno	Energía en julios
1 galón de gasolina	$1{,}2 \times 10^{8}$
Ingesta diaria de alimentos para adultos (recomendada)	$1{,}2 \times 10^{7}$
Auto de 1.000 kg a 90 km/h	$3{,}1 \times 10^{5}$
Pelota de tenis a 100 km/h	22
Mosquito $\left(10^{-2}\text{ g a }0{,}5\text{ m/s}\right)$	$1{,}3 \times 10^{-6}$
Electrón individual en un haz de tubo de TV	$4{,}0 \times 10^{-15}$
Energía para romper una cadena de ADN	10^{-19}

TABLA 8.1 Energía de diversos objetos y fenómenos

8.2 Fuerzas conservativas y no conservativas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Caracterizar una fuerza conservativa de diferentes maneras.
- Especificar las condiciones matemáticas que debe cumplir una fuerza conservativa y sus componentes.
- Relacionar la fuerza conservativa entre las partículas de un sistema con su energía potencial.
- Calcular los componentes de una fuerza conservativa en distintos casos.

En Energía potencial y conservación de la energía, cualquier transición entre energía cinética y potencial conserva la energía total del sistema. Esto era independiente de la trayectoria, lo que significa que podemos empezar y parar en dos puntos cualesquiera del problema, y que la energía total del sistema, cinética más potencial, en estos puntos es igual. Esto es característico de la **fuerza conservativa**. En la sección anterior hemos tratado las fuerzas conservativas, como la fuerza gravitacional y la fuerza del resorte. Al comparar el movimiento del balón de fútbol en la Figura 8.2, la energía total del sistema nunca cambia, aunque la energía potencial gravitacional del balón aumenta, ya que el balón se eleva con respecto al suelo y vuelve a caer a la energía potencial gravitacional inicial cuando el jugador de fútbol atrapa el balón. Las **fuerzas no conservativas** son fuerzas disipativas como la fricción o la resistencia del aire. Estas fuerzas restan energía al sistema a medida que este avanza, energía que no se puede recuperar. Estas fuerzas dependen de la trayectoria; por lo tanto, importa dónde empieza y se detiene el objeto.

Fuerza conservativa

El trabajo que realiza una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria; en otras palabras, el trabajo que realiza una fuerza conservativa es el mismo para cualquier trayectoria que conecte dos puntos:

$$W_{AB,\text{trayectoria-1}} = \int_{AB,\text{trayectoria-1}} \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = W_{AB,\text{trayectoria-2}} = \int_{AB,\text{trayectoria-2}} \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}. \quad 8.8$$

El trabajo que realiza una fuerza no conservativa depende de la trayectoria recorrida.

De forma equivalente, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero:

$$W_{\text{trayectoria cerrada}} = \oint \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0. \qquad 8.9$$

[En la Ecuación 8.9, utilizamos la notación de un círculo en medio del signo de la integral para una integral de línea sobre una trayectoria cerrada, una notación que se encuentra en la mayoría de los textos de física e ingeniería]. La Ecuación 8.8 y la Ecuación 8.9 son equivalentes porque cualquier trayectoria cerrada es la suma de dos trayectorias: la primera va de A a B, y la segunda va de B a A. El trabajo realizado que va por una trayectoria de B a A es el negativo del trabajo realizado que va por la misma trayectoria de A a B, donde A y B son dos puntos cualesquiera en la trayectoria cerrada:

$$\begin{aligned} 0 = \int \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} &= \int_{AB,\text{trayectoria-1}} \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int_{BA,\text{trayectoria-2}} \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \\ &= \int_{AB,\text{trayectoria-1}} \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} - \int_{AB,\text{trayectoria-2}} \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0. \end{aligned}$$

Podría preguntar cómo hacemos para demostrar si una fuerza es o no conservativa, ya que las definiciones implican todas y cada una de las trayectorias de A a B, o todas y cada una de las trayectorias cerradas. Sin embargo, para hacer la integral del trabajo, tiene que elegir una trayectoria en particular. Una respuesta es que el trabajo realizado es independiente de la trayectoria si el trabajo infinitesimal $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ es una **diferencial exacta**, como el trabajo neto infinitesimal era igual a la diferencial exacta de la energía cinética, $dW_{\text{neto}} = m\vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{v}} = d\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$,

cuando derivamos el teorema de trabajo-energía en Teorema de trabajo-energía. Hay condiciones matemáticas que se pueden utilizar para comprobar si el trabajo infinitesimal que realiza una fuerza es una diferencial exacta, y la fuerza es conservativa. Estas condiciones solo implican una diferenciación y, por lo tanto, su aplicación es relativamente sencilla. En dos dimensiones, la condición para $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = F_x dx + F_y dy$ para ser una diferencial exacta es

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{dF_y}{dx}. \qquad 8.10$$

Recordará que el trabajo que realiza la fuerza en el Ejemplo 7.4 dependía de la trayectoria. Para esa fuerza,

$$F_x = (5\ \text{N/m})\, y \text{ y } F_y = (10\ \text{N/m})\, x.$$

Por lo tanto,

$$(dF_x/dy) = 5\ \text{N/m} \neq \left(dF_y/dx\right) = 10\ \text{N/m},$$

lo que indica que es una fuerza no conservativa. ¿Puede ver lo que podría cambiar para convertirla en una fuerza conservativa?

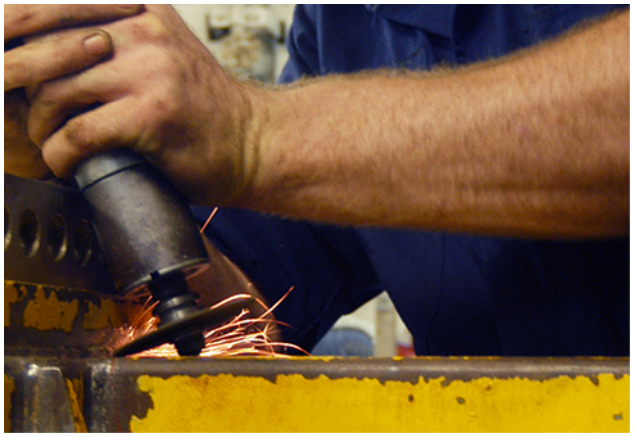


FIGURA 8.6 La rueda de esmeril aplica una fuerza no conservativa, ya que el trabajo realizado depende del número de rotaciones que haga la rueda, por lo que depende de la trayectoria (créditos: modificación del trabajo de Grantez Stephens, Marina de los EE. UU.).

EJEMPLO 8.5

¿Conservativa o no?

¿Cuáles de las siguientes fuerzas bidimensionales son conservativas y cuáles no? Supongamos que a y b son constantes con las unidades adecuadas:

(a) $axy^3\,\hat{\mathbf{i}} + ayx^3\,\hat{\mathbf{j}}$, (b) $a\left[\left(y^2/x\right)\hat{\mathbf{i}} + 2y\ln\left(x/b\right)\hat{\mathbf{j}}\right]$, (c) $\frac{ax\hat{\mathbf{i}}+ay\hat{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}$

Estrategia

Aplicar la condición indicada en la Ecuación 8.10, es decir, utilizar las derivadas de los componentes de cada fuerza indicada. Si la derivada del componente y de la fuerza con respecto a x es igual a la derivada del componente x de la fuerza con respecto a y, la fuerza es una fuerza conservativa, lo que significa que la trayectoria tomada para el cálculo de la energía potencial o del trabajo siempre arroja los mismos resultados.

Solución

a. $\frac{dF_x}{dy} = \frac{d\left(axy^3\right)}{dy} = 3axy^2$ y $\frac{dF_y}{dx} = \frac{d\left(ayx^3\right)}{dx} = 3ayx^2$, por lo que esta fuerza no es conservativa.

b. $\frac{dF_x}{dy} = \frac{d\left(ay^2/x\right)}{dy} = \frac{2ay}{x}$ y $\frac{dF_y}{dx} = \frac{d(2ay\ln(x/b))}{dx} = \frac{2ay}{x}$, por lo que esta fuerza es conservativa.

c. $\frac{dF_x}{dy} = \frac{d\left(ax/\left(x^2+y^2\right)\right)}{dy} = -\frac{ax(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{dF_y}{dx} = \frac{d\left(ay/\left(x^2+y^2\right)\right)}{dx}$, de nuevo conservativa.

Importancia

Las condiciones en la Ecuación 8.10 son derivadas como funciones de una sola variable; en tres dimensiones, existen condiciones similares que implican más derivadas.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.5

Una fuerza bidimensional y conservativa es cero en los ejes de la x y la y, y satisface la condición $(dF_x/dy) = \left(dF_y/dx\right) = \left(4\ \text{N/m}^3\right)xy$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en el punto $x = y = 1$ m?

Antes de dejar esta sección, observamos que las fuerzas no conservativas no tienen energía potencial asociada porque la energía se pierde en el sistema y no puede convertirse en trabajo útil más adelante. Así que siempre hay una fuerza conservativa asociada a cada energía potencial. Hemos visto que la energía potencial se define

en relación con el trabajo que realizan las fuerzas conservativas. Esa relación, la Ecuación 8.1, implicaba una integral para el trabajo; partiendo de la fuerza y el desplazamiento, se integraba para obtener el trabajo y el cambio de energía potencial. Sin embargo, la integración es la operación inversa de la diferenciación; podría haber empezado con la energía potencial y tomar su derivada, con respecto al desplazamiento, para obtener la fuerza. El incremento infinitesimal de energía potencial es el producto punto de la fuerza y el desplazamiento infinitesimal,

$$dU = -\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -F_l\, dl.$$

En este caso, hemos optado por representar el desplazamiento en una dirección arbitraria mediante $d\vec{\mathbf{l}}$, para no limitarnos a una dirección de coordenadas concreta. También expresamos el producto punto en términos de la magnitud del desplazamiento infinitesimal y el componente de la fuerza en su dirección. Ambas cantidades son escalares, por lo que se puede dividir por dl para obtener

$$F_l = -\frac{dU}{dl}. \qquad \textbf{8.11}$$

Esta ecuación da la relación entre la fuerza y la energía potencial asociada. En palabras, el componente de una fuerza conservativa, en una dirección particular, es igual al negativo de la derivada de la energía potencial correspondiente, con respecto a un desplazamiento en esa dirección. Para un movimiento unidimensional, digamos a lo largo del eje de la x, la Ecuación 8.11 da la fuerza vectorial completa, $\vec{\mathbf{F}} = F_x\hat{\mathbf{i}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}$.

En dos dimensiones,

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{j}}.$$

A partir de esta ecuación, se puede ver por qué la Ecuación 8.11 es la condición para que el trabajo sea una diferencial exacta, en términos de las derivadas de los componentes de la fuerza. En general, se utiliza una notación de derivada parcial. Si una función tiene muchas variables, la derivada se toma solo de la variable que especifica la derivada parcial. Las demás variables se mantienen constantes. En tres dimensiones, se añade otro término para el componente z, y el resultado es que la fuerza es el negativo del gradiente de la energía potencial. Sin embargo, todavía no vamos a ver ejemplos tridimensionales.

EJEMPLO 8.6

Fuerza debida a una energía potencial cuártica

La energía potencial de una partícula que experimenta un movimiento unidimensional a lo largo del eje de la x es

$$U(x) = \frac{1}{4}cx^4,$$

donde $c = 8\ \text{N/m}^3$. Su energía total en $x = 0$ es 2 J, y no está sujeta a ninguna fuerza no conservativa. Halle (a) las posiciones en las que su energía cinética es cero y (b) las fuerzas en esas posiciones.

Estrategia

(a) Podemos hallar las posiciones en las que $K = 0$, por lo que la energía potencial es igual a la energía total del sistema dado. (b) Utilizando la Ecuación 8.11, podemos encontrar la fuerza evaluada en las posiciones halladas de la parte anterior, ya que la energía mecánica se conserva.

Solución

a. La energía total del sistema de 2 J es igual a la energía elástica cuártica dada en el problema,

$$2\ \text{J} = \frac{1}{4}\left(8\ \text{N/m}^3\right) x_\text{f}{}^4.$$

Resolviendo para x_f da como resultado $x_f = \pm 1$ m.

b. A partir de la Ecuación 8.11,

$$F_x = -dU/dx = -cx^3.$$

Por lo tanto, al evaluar la fuerza en ± 1 m, obtenemos

$$\vec{\mathbf{F}} = -(8\ \text{N/m}^3)(\pm 1\ \text{m})^3\hat{\mathbf{i}} = \pm 8\ \text{N}\hat{\mathbf{i}}.$$

En ambas posiciones, la magnitud de las fuerzas es de 8 N y las direcciones son hacia el origen, ya que esta es la energía potencial para una fuerza restauradora.

Importancia

Hallar la fuerza a partir de la energía potencial es matemáticamente más fácil que hallar la energía potencial a partir de la fuerza, porque diferenciar una función es más fácil que integrar una.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.6

Halle las fuerzas sobre la partícula en el Ejemplo 8.6 cuando su energía cinética es de 1,0 J en $x = 0$.

8.3 Conservación de la energía

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Formular el principio de conservación de la energía mecánica, con o sin la presencia de fuerzas no conservativas.
- Utilizar la conservación de la energía mecánica para calcular diversas propiedades de sistemas sencillos.

En esta sección, explicamos y ampliamos el resultado que derivamos en Energía potencial de un sistema, donde reescribimos el teorema de trabajo-energía en términos del cambio en las energías cinética y potencial de una partícula. Esto nos llevará a analizar el importante principio de la conservación de la energía mecánica. A medida que continúe examinando otros temas de la física, en capítulos posteriores de este libro, verá cómo esta ley de conservación se generaliza para abarcar otros tipos de energía y transferencias de energía. La última sección de este capítulo ofrece un avance.

Los términos "cantidad conservada" y "ley de conservación" tienen significados específicos y científicos en física, que son diferentes de los significados cotidianos, que se asocian a estas palabras. (El mismo comentario es válido para los usos científicos y cotidianos de la palabra "trabajo"). En el uso cotidiano, se puede conservar el agua al no usarla, al usar menos cantidad o al reutilizarla. El agua está compuesta por moléculas formadas por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Si se juntan estos átomos para formar una molécula, se crea el agua; si se disocian los átomos de dicha molécula, se destruye el agua. Sin embargo, en el uso científico, una **cantidad conservada** para un sistema permanece constante, cambia en una cantidad definida que se transfiere a otros sistemas o se convierte en otras formas de esa cantidad. Una cantidad conservada, en el sentido científico, puede transformarse, pero no crearse ni destruirse en el sentido estricto de la palabra. Así, no existe ninguna ley física de conservación del agua.

Sistemas con una sola partícula u objeto

Primero consideramos un sistema con una sola partícula u objeto. De vuelta a nuestro desarrollo de la Ecuación 8.2, recordemos que primero separamos todas las fuerzas que actúan sobre una partícula en tipos conservativas y no conservativas, y escribimos el trabajo realizado por cada tipo de fuerza como un término separado en el teorema de trabajo-energía. Entonces sustituimos el trabajo realizado por las fuerzas conservativas por el cambio en la energía potencial de la partícula y lo combinamos con el cambio en la energía cinética de la partícula para obtener la Ecuación 8.2. Ahora, escribimos esta ecuación sin el paso intermedio y definimos la suma de las energías cinética y potencial, $K + U = E$; a ser la **energía mecánica** de la partícula.

Conservación de la energía

La energía mecánica E de una partícula permanece constante, a menos que fuerzas externas al sistema o fuerzas no conservativas realicen un trabajo sobre ella, en cuyo caso, el cambio en la energía mecánica es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas:

$$W_{\text{nc},AB} = \Delta(K + U)_{AB} = \Delta E_{AB}. \quad 8.12$$

Esta afirmación expresa el concepto de **conservación de energía** para una partícula clásica mientras no haya trabajo no conservativo. Recordemos que una partícula clásica es solo una masa puntual, no es relativista y obedece a las leyes del movimiento de Newton. En Relatividad (http://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/5-introduction), veremos que la conservación de la energía sigue aplicándose a una partícula no clásica. Sin embargo, para ello tenemos que hacer un ligero ajuste en la definición de energía.

A veces es conveniente separar el caso en el que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es cero, ya sea porque se supone que no hay tales fuerzas presentes, o, como la fuerza normal, realizan un trabajo cero cuando el movimiento es paralelo a la superficie. Entonces

$$0 = W_{\text{nc},AB} = \Delta(K + U)_{AB} = \Delta E_{AB}. \quad 8.13$$

En este caso, la conservación de la energía mecánica puede expresarse como sigue: La energía mecánica de una partícula no cambia si todas las fuerzas no conservativas que pueden actuar sobre ella no realizan ningún trabajo. Lo importante es comprender el concepto de conservación de energía, no la ecuación concreta que se utilice para expresarla.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Conservación de la energía

1. Identifique el organismo o los organismos que se van a estudiar (el sistema). A menudo, en las aplicaciones del principio de conservación de energía mecánica, estudiamos más de un cuerpo al mismo tiempo.
2. Identifique todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo o los cuerpos.
3. Determine si cada fuerza que realiza un trabajo es conservativa. Si una fuerza no conservativa (por ejemplo, la fricción) realiza un trabajo, la energía mecánica no se conserva. Luego, el sistema deberá analizarse con trabajo no conservativo, la Ecuación 8.13.
4. Para cada fuerza que realice un trabajo, elija un punto de referencia y determine la función de energía potencial para la fuerza. Los puntos de referencia de las distintas energías potenciales no tienen por qué estar en el mismo lugar.
5. Aplique el principio de conservación de energía mecánica al establecer la suma de las energías cinética y potencial iguales en cada punto de interés.

EJEMPLO 8.7

Péndulo simple

Una partícula de masa m cuelga desde el techo con una cuerda sin masa de 1,0 m de longitud, como se muestra en la Figura 8.7. La partícula se libera del reposo, cuando el ángulo entre la cuerda y la dirección vertical descendente es de 30°. ¿Cuál es su rapidez cuando alcanza el punto más bajo de su arco?

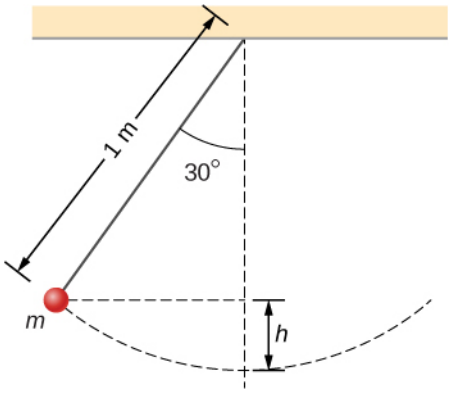


FIGURA 8.7 Una partícula colgada de una cuerda constituye un péndulo simple. Se muestra cuando se libera del reposo, junto con algunas distancias que se utilizan en el análisis del movimiento.

Estrategia

Al utilizar nuestra estrategia de resolución de problemas, el primer paso es definir que estamos interesados en el sistema partícula-Tierra. En segundo lugar, sobre la partícula solo actúa la fuerza gravitacional, que es conservativa (paso 3). Ignoramos la resistencia del aire en el problema, y la tensión de la cuerda, que es perpendicular al arco del movimiento, no realiza ningún trabajo. Por lo tanto, la energía mecánica del sistema se conserva, como se representa en la Ecuación 8.13, $0 = \Delta(K + U)$. Como la partícula parte del reposo, el aumento de la energía cinética es solo la energía cinética en el punto más bajo. Este aumento de la energía cinética es igual a la disminución de la energía potencial gravitacional, que podemos calcular a partir de la geometría. En el paso 4, elegimos como punto de referencia para la energía potencial gravitacional cero el punto vertical más bajo que alcanza la partícula, que es la mitad de la oscilación. Por último, en el paso 5, establecemos la suma de energías en el punto más alto (inicial) de la oscilación hasta el punto más bajo (final) de la oscilación para resolver finalmente la rapidez final.

Solución

Estamos ignorando las fuerzas no conservativas, por lo que escribimos la fórmula de conservación de energía que relaciona la partícula en el punto más alto (inicial) y el punto más bajo de la oscilación (final) como

$$K_\mathrm{i} + U_\mathrm{i} = K_\mathrm{f} + U_\mathrm{f}.$$

Dado que la partícula se libera del reposo, la energía cinética inicial es cero. En el punto más bajo, definimos que la energía potencial gravitacional es cero. Por lo tanto, nuestra fórmula de conservación de la energía se reduce a

$$\begin{aligned} 0 + mgh &= \tfrac{1}{2}mv^2 + 0 \\ v &= \sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

La altura vertical de la partícula no se da directamente en el problema. Esto puede resolverse con la trigonometría y dos datos: la longitud del péndulo y el ángulo por el que la partícula se hala verticalmente. Observando el diagrama, la línea vertical discontinua es la longitud de la cuerda del péndulo. La altura vertical se denomina h. La otra longitud parcial de la cuerda vertical se puede calcular con trigonometría. Esa parte se resuelve por

$$\cos\theta = x/L, x = L\cos\theta.$$

Por lo tanto, si observamos las dos partes de la cuerda, podemos resolver la altura h,

$$\begin{aligned} x + h &= L \\ L\cos\theta + h &= L \\ h &= L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

Sustituimos esta altura en la expresión anterior resuelta para la rapidez con el fin de calcular nuestro resultado:

$$v = \sqrt{2gL\,(1 - \cos\theta)} = \sqrt{2\left(9{,}8\ \text{m/s}^2\right)(1\ \text{m})\,(1 - \cos 30°)} = 1{,}62\ \text{m/s}.$$

Importancia

Hallamos la rapidez directamente a partir de la conservación de la energía mecánica, sin tener que resolver la ecuación diferencial para el movimiento de un péndulo (vea Oscilaciones). Podemos abordar este problema en términos de gráficos de barras de energía total. Inicialmente, la partícula tiene toda la energía potencial, al estar en el punto más alto, y ninguna energía cinética. Cuando la partícula cruza el punto más bajo de la parte inferior de la oscilación, la energía pasa de la columna de energía potencial a la columna de energía cinética. Por lo tanto, podemos imaginar una progresión de esta transferencia a medida que la partícula se mueve entre su punto más alto, el punto más bajo de la oscilación, y de vuelta al punto más alto (Figura 8.8). A medida que la partícula se desplaza desde el punto más bajo de la oscilación hasta el punto más alto en el extremo derecho del diagrama, las barras de energía van en orden inverso de (c) a (b) a (a).

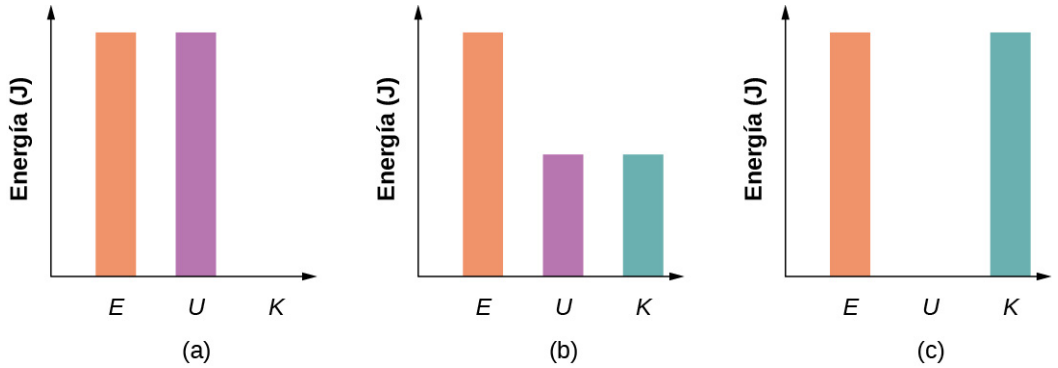


FIGURA 8.8 Gráficos de barras que representan la energía total (*E*), la energía potencial (*U*) y la energía cinética (*K*) de la partícula en diferentes posiciones. (a) La energía total del sistema es igual a la energía potencial y la energía cinética es cero, que se encuentra en el punto más alto que alcanza la partícula. (b) La partícula se encuentra a medio camino entre el punto más alto y el más bajo, por lo que los gráficos de barras de energía cinética más energía potencial son iguales a la energía total. (c) La partícula se encuentra en el punto más bajo de la oscilación, por lo que el gráfico de barras de energía cinética es el más alto e igual a la energía total del sistema.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.7

¿A qué altura sobre la parte inferior de su arco se encuentra la partícula en el péndulo simple de arriba, cuando su rapidez es 0,81 m/s?

EJEMPLO 8.8

Resistencia del aire en un objeto que cae

Un helicóptero sobrevuela a una altitud de 1 km cuando un panel de su parte inferior se desprende y cae al suelo (Figura 8.9). La masa del panel es 15 kg, y golpea el suelo a una rapidez de 45 m/s. ¿Cuánta energía mecánica se disipó por la resistencia del aire durante el descenso del panel?

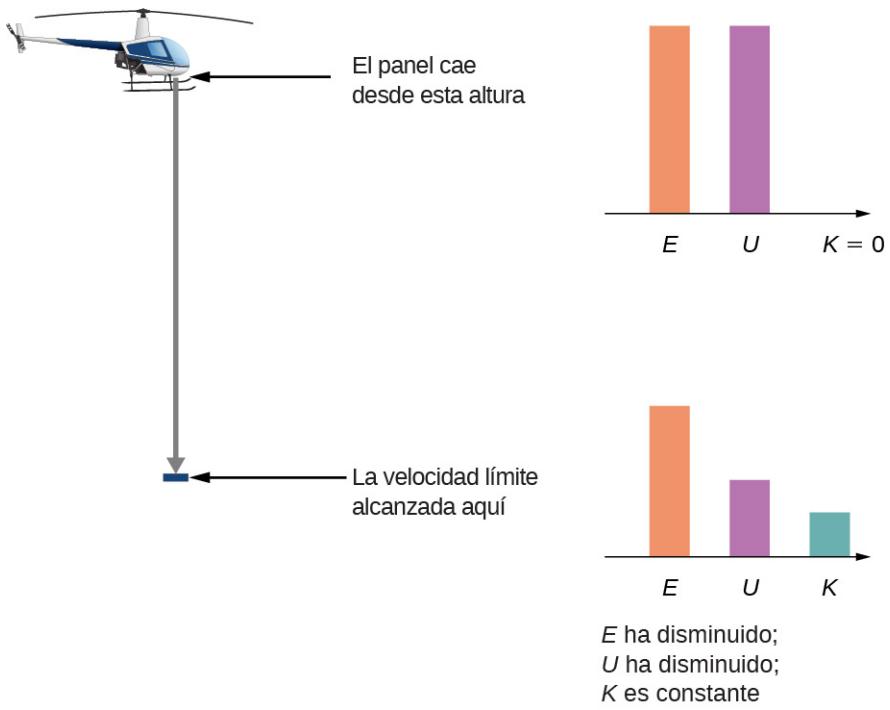


FIGURA 8.9 Un helicóptero pierde un panel que cae hasta alcanzar una velocidad límite de 45 m/s. ¿En qué medida contribuyó la resistencia del aire a la disipación de energía en este problema?

Estrategia

Paso 1: Aquí solo se investiga un cuerpo.

Paso 2: Sobre el panel actúa la fuerza gravitacional y la resistencia del aire, que se indica en el problema.

Paso 3: La fuerza gravitacional es conservativa; sin embargo, la fuerza no conservativa de la resistencia del aire realiza un trabajo negativo sobre el panel que cae, por lo que podemos utilizar la conservación de la energía mecánica, en la forma expresada por la Ecuación 8.12, para hallar la energía disipada. Esta energía es la magnitud del trabajo:

$$\Delta E_{\text{disipada}} = \left|W_{\text{nc, if}}\right| = \left|\Delta(K+U)_{\text{if}}\right|.$$

Paso 4: La energía cinética inicial, en $y_{\text{i}} = 1$ km, es cero. Por comodidad, fijamos la energía potencial gravitacional en cero a nivel del suelo.

Paso 5: El trabajo no conservativo se establece igual a las energías para resolver el trabajo disipado por la resistencia del aire.

Solución

La energía mecánica disipada por la resistencia del aire es la suma algebraica de la ganancia de energía cinética y la pérdida de energía potencial. Por lo tanto, el cálculo de esta energía es

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{disipada}} &= \left|K_{\text{f}} - K_{\text{i}} + U_{\text{f}} - U_{\text{i}}\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{2}(15\text{ kg})\,(45\text{ m/s})^2 - 0 + 0 - (15\text{ kg})\left(9{,}8\text{ m/s}^2\right)(1.000\text{ m})\right| = 130\text{ kJ}.\end{aligned}$$

Importancia

La mayor parte de la energía mecánica inicial del panel (U_{i}), 147 kJ, se perdió por la resistencia del aire. Observe que hemos podido calcular la energía disipada sin saber cuál era la fuerza de resistencia del aire, únicamente que era disipativa.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.8

Probablemente recuerde que, al descartar la resistencia del aire, si lanza un proyectil directamente hacia arriba, el tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima es igual al tiempo que tarda en caer desde la altura máxima hasta la altura inicial. Supongamos que no se puede descartar la resistencia del aire, como en el Ejemplo 8.8. ¿Es el tiempo que el proyectil tarda en subir (a) mayor, (b) menor o (c) igual al tiempo que tarda en bajar? Explique.

En estos ejemplos, hemos podido utilizar la conservación de la energía para calcular la rapidez de una partícula justo en determinados puntos de su movimiento. Sin embargo, el método de análisis del movimiento de las partículas, partiendo de la conservación de energía, es más poderoso que eso. Los tratamientos más avanzados de la teoría de la mecánica permiten calcular la dependencia a tiempo completo del movimiento de una partícula, para una energía potencial dada. De hecho, a menudo se da el caso de que un mejor modelo para el movimiento de la partícula lo proporciona la forma de sus energías cinética y potencial, en lugar de una ecuación para la fuerza que actúa sobre esta. (Esto es especialmente cierto para la descripción mecánica cuántica de partículas como los electrones o los átomos).

Podemos ilustrar algunas de las características más simples de este enfoque basado en la energía, al considerar una partícula en movimiento unidimensional, con energía potencial $U(x)$ y sin interacciones no conservativas presentes. La Ecuación 8.12 y la definición de velocidad requieren

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}mv^2 = E - U(x) \\ v &= \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}. \end{aligned}$$

Separe las variables x y t e integre, a partir de un tiempo inicial $t = 0$ a un tiempo arbitrario, para obtener

$$t = \int_0^t dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2\left[E - U(x)\right]/m}}. \qquad 8.14$$

Si puedes hacer la integral en la Ecuación 8.14, entonces puedes resolver x en función de t.

EJEMPLO 8.9

Aceleración constante

Utilice la energía potencial $U(x) = -E(x/x_0)$, para $E > 0$, en la Ecuación 8.14 para hallar la posición x de una partícula como función del tiempo t.

Estrategia

Ya que sabemos cómo cambia la energía potencial como función de x, podemos sustituir por $U(x)$ en la Ecuación 8.14, integre, y luego resuelva para x. Se obtiene una expresión de x como función del tiempo con las constantes de energía E, masa m y posición inicial x_0.

Solución

Siguiendo los dos primeros pasos sugeridos en la estrategia anterior,

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(2E/mx_0)(x_0 - x)}} = \frac{1}{\sqrt{(2E/mx_0)}}\left|-2\sqrt{(x_0 - x)}\right|_{x_0}^{x} = -\frac{2\sqrt{(x_0 - x)}}{\sqrt{(2E/mx_0)}}.$$

Resolviendo para la posición, obtenemos $x(t) = x_0 - \frac{1}{2}(E/mx_0)t^2$.

Importancia

La posición en función del tiempo, para este potencial, representa un movimiento unidimensional con

aceleración constante, $a = (E/mx_0)$, partiendo de la posición de reposo x_0. Esto no es tan sorprendente, ya que se trata de una energía potencial para una fuerza constante, $F = -dU/dx = E/x_0$, y $a = F/m$.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.9

¿Qué energía potencial $U(x)$ puede sustituir en la Ecuación 8.13 que resultará en un movimiento con velocidad constante de 2 m/s para una partícula de 1 kg de masa y 1 J de energía mecánica?

Veremos otro ejemplo más apropiado físicamente del uso de la Ecuación 8.13 después de que hayamos explorado algunas implicaciones adicionales que se pueden extraer de la forma funcional de la energía potencial de una partícula.

Sistemas con varias partículas u objetos

Los sistemas suelen estar formados por más de una partícula u objeto. Sin embargo, la conservación de la energía mecánica, en una de sus formas en la Ecuación 8.12 o la Ecuación 8.13, es una ley fundamental de la física y se aplica a cualquier sistema. Todo lo que hay que hacer es incluir las energías cinética y potencial de todas las partículas, y el trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre ellas. Hasta que aprenda más sobre la dinámica de los sistemas compuestos por muchas partículas, en Momento lineal y colisiones, Rotación de eje fijo y Momento angular, es mejor posponer el debate de la aplicación de la conservación de energía para entonces.

8.4 Diagramas de energía potencial y estabilidad

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Crear e interpretar gráficos de energía potencial.
- Explicar la relación entre la estabilidad y la energía potencial.

A menudo, se puede obtener una buena cantidad de información útil sobre el comportamiento dinámico de un sistema mecánico simplemente mediante la interpretación de un gráfico de su energía potencial como función de la posición, denominado **diagrama de energía potencial**. Esto es más fácil de lograr para un sistema unidimensional, cuya energía potencial se puede trazar en un gráfico bidimensional, por ejemplo, $U(x)$ frente a x, en una hoja de papel o en un programa de computadora. Para los sistemas cuyo movimiento es en más de una dimensión, es necesario estudiar el movimiento en el espacio tridimensional. Simplificaremos nuestro procedimiento para el movimiento unidimensional solamente.

En primer lugar, veamos un objeto que cae libremente en vertical, cerca de la superficie de la Tierra, en ausencia de resistencia del aire. La energía mecánica del objeto se conserva, $E = K + U$, y la energía potencial, con respecto a cero a nivel del suelo, es $U(y) = mgy$, que es una línea recta que pasa por el origen con pendiente mg. En el gráfico mostrado en la Figura 8.10, el eje de la x es la altura sobre el suelo y y el eje de la y es la energía del objeto.

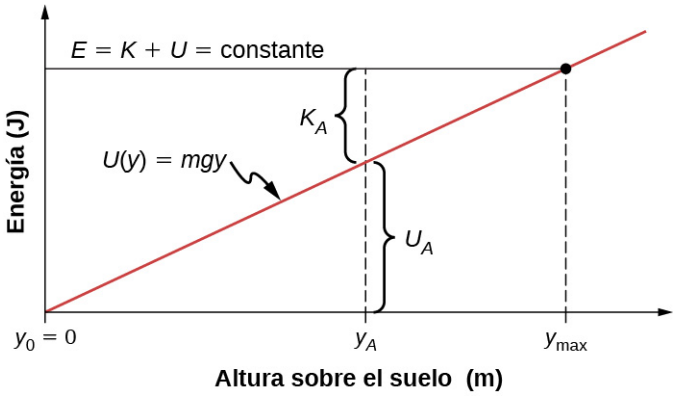


FIGURA 8.10 Gráfico de la energía potencial de un objeto en caída libre vertical, en la que se indican diversas cantidades.

La línea en la energía E representa la energía mecánica constante del objeto, mientras que las energías cinética y potencial, K_A y U_A, se indican a una altura determinada y_A. Puede ver cómo la energía total se divide entre energía cinética y potencial a medida que cambia la altura del objeto. Dado que la energía cinética nunca puede ser negativa, existe una energía potencial máxima y una altura máxima que un objeto con la energía total dada no puede superar:

$$K = E - U \geq 0,$$
$$U \leq E.$$

Si utilizamos el punto de referencia de la energía potencial gravitacional de cero en y_0, podemos reescribir la energía potencial gravitacional U como mgy. Resolviendo para y se obtiene

$$y \leq E/mg = y_{\text{máx}}.$$

Observamos en esta expresión que la cantidad de energía total, dividida entre el peso (mg), se sitúa en la altura máxima de la partícula, o $y_{\text{máx}}$. En la altura máxima, la energía cinética y la rapidez son cero, por lo que si el objeto se desplazara inicialmente hacia arriba, su velocidad pasaría por cero allí, mientras que $y_{\text{máx}}$ sería un punto de inflexión en el movimiento. A nivel del suelo, $y_0 = 0$, la energía potencial es cero, y la energía cinética y la rapidez son máximas:

$$\begin{aligned} U_0 &= 0 = E - K_0, \\ E &= K_0 = \tfrac{1}{2}m{v_0}^2, \\ v_0 &= \pm\sqrt{2E/m}. \end{aligned}$$

La rapidez máxima $\pm v_0$ da la velocidad inicial necesaria para alcanzar $y_{\text{máx}}$, la altura máxima, y $-v_0$ representa la velocidad final, después de caer de $y_{\text{máx}}$. Puede leer toda esta información, y más, en el diagrama de energía potencial que hemos mostrado.

Considere un sistema masa-resorte sobre una superficie horizontal sin fricción, estacionaria, de modo que la gravedad y la fuerza normal de contacto no realizan ningún trabajo y pueden pasarse por alto (Figura 8.11). Es como un sistema unidimensional, cuya energía mecánica E es una constante y cuya energía potencial, con respecto a la energía cero en el desplazamiento cero de la longitud no estirada del resorte, $x = 0$, es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

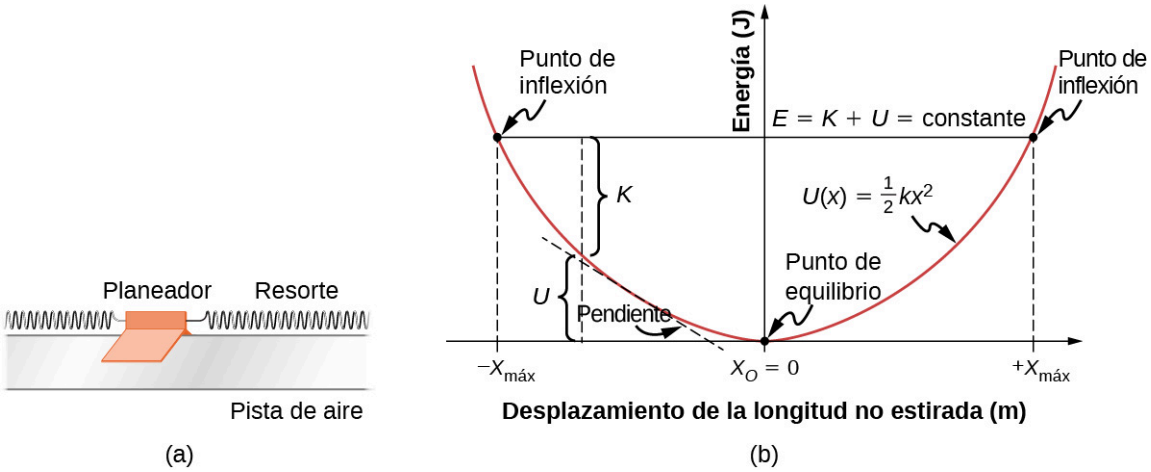


FIGURA 8.11 (a) Un planeador entre resortes en una pista de aire es un ejemplo de un sistema masa-resorte horizontal. (b) El diagrama de energía potencial para este sistema, donde se indican diversas cantidades.

En este caso se puede leer el mismo tipo de información a partir del diagrama de energía potencial que en el caso del cuerpo en caída libre vertical. Sin embargo, ya que la energía potencial del resorte describe una fuerza variable, se puede aprender más de este gráfico. En cuanto al objeto en caída libre vertical, se puede deducir el rango de movimiento físicamente admisible y los valores máximos de distancia y rapidez, a partir de los límites de la energía cinética, $0 \leq K \leq E$. Por lo tanto, $K = 0$ y $U = E$ en un **punto de inflexión**, de los cuales hay dos para la energía potencial del resorte elástico,

$$x_{\text{máx}} = \pm\sqrt{2E/k}.$$

El movimiento del planeador se limita a la región entre los puntos de inflexión, $-x_{\text{máx}} \leq x \leq x_{\text{máx}}$. Esto es así con cualquier valor (positivo) de E porque la energía potencial es ilimitada con respecto a x. Por esta razón, así como por la forma de la curva de energía potencial, $U(x)$ se denomina pozo de potencial infinito. En el fondo del pozo de potencial, $x = 0, U = 0$ y la energía cinética es máxima, $K = E$, entonces $v_{\text{máx}} = \pm\sqrt{2E/m}$.

Sin embargo, a partir de la pendiente de esta curva de energía potencial, también se puede deducir información sobre la fuerza sobre el planeador y su aceleración. Hemos visto antes que el negativo de la pendiente de la energía potencial es la fuerza del resorte, que en este caso es también la fuerza neta, y por lo tanto es proporcional a la aceleración. Cuando $x = 0$, la pendiente, la fuerza y la aceleración son todas cero, por lo que se trata de un **punto de equilibrio**. El negativo de la pendiente, a ambos lados del punto de equilibrio, da una fuerza que apunta hacia el punto de equilibrio, $F = \pm kx$, por lo que el equilibrio se denomina estable y la fuerza se denomina restauradora. Esto implica que $U(x)$ tiene allí un mínimo relativo. Si la fuerza a ambos lados de un punto de equilibrio tiene una dirección opuesta a la del cambio de posición, el equilibrio se denomina inestable, y esto implica que $U(x)$ tiene un máximo relativo en ese punto.

EJEMPLO 8.10

Diagrama de energía potencial cuártica y cuadrática

La energía potencial para una partícula que experimenta un movimiento unidimensional a lo largo del eje de la x es $U(x) = 2\left(x^4 - x^2\right)$, donde U está en julios y x está en metros. La partícula no está sometida a ninguna fuerza no conservativa y su energía mecánica es constante en $E = -0{,}25$ J. (a) ¿Está el movimiento de la partícula confinado en algunas regiones del eje de la x, y si es así, cuáles son? (b) ¿Existen puntos de equilibrio, y si es así, dónde están y son estables o inestables?

Estrategia

En primer lugar, tenemos que graficar la energía potencial como función de la x. La función es cero en el origen, se vuelve negativa a medida que la x aumenta en las direcciones positivas o negativas (x^2 es mayor que x^4 para $x < 1$), y luego se convierte en positiva a un tamaño suficientemente grande $|x|$. Su gráfico debería

parecerse a un pozo de potencial doble, con los ceros determinados al resolver la ecuación $U(x) = 0$, y los extremos se determinan al examinar las derivadas primera y segunda de $U(x)$, como se muestra en la Figura 8.12.

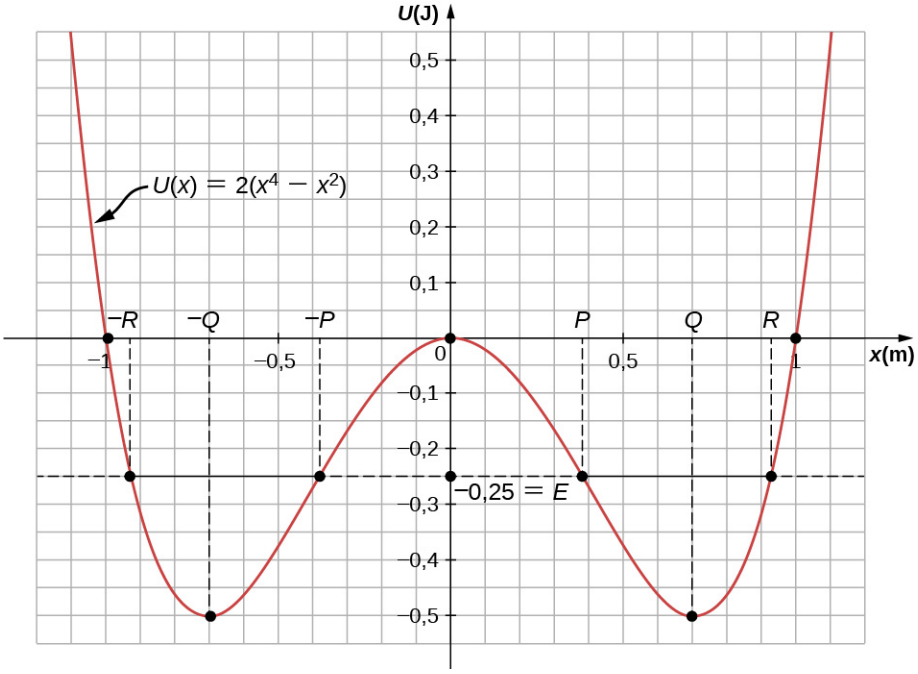


FIGURA 8.12 El gráfico de energía potencial para una energía potencial unidimensional, cuártica y cuadrática, se muestra con diversas cantidades.

Puede calcular los valores de (a) las regiones permitidas a lo largo del eje de la x, para el valor dado de la energía mecánica, a partir de la condición de que la energía cinética no puede ser negativa, y (b) los puntos de equilibrio y su estabilidad a partir de las propiedades de la fuerza (estable para un mínimo relativo e inestable para un máximo relativo de energía potencial).

Para obtener respuestas cualitativas a las preguntas de este ejemplo, basta con echar un vistazo al gráfico. Al fin y al cabo, ese es el valor de los diagramas de energía potencial. Puede ver que hay dos regiones permitidas para el movimiento $(E > U)$ y tres puntos de equilibrio (pendiente $dU/dx = 0$), de los cuales el central es inestable $\left(d^2U/dx^2 < 0\right)$, y los otros dos son estables $\left(d^2U/dx^2 > 0\right)$.

Solución

a. Para hallar las regiones permitidas para la x, utilizamos la condición

$$K = E - U = -\frac{1}{4} - 2\left(x^4 - x^2\right) \geq 0.$$

Si completamos el cuadrado en x^2, esta condición se simplifica a $2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, que podemos resolver para obtener

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{8}} \leq x^2 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

Esto representa dos regiones permitidas, $x_p \leq x \leq x_R$ y $-x_R \leq x \leq -x_p$, donde $x_p = 0{,}38$ y $x_R = 0{,}92$ (en metros).

b. Para hallar los puntos de equilibrio, resolvemos la ecuación

$$dU/dx = 8x^3 - 4x = 0$$

y calculamos $x = 0$ y $x = \pm x_Q$, donde $x_Q = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$ (metros). La segunda derivada

$$d^2U/dx^2 = 24x^2 - 4$$

es negativa en $x = 0$, por lo que esa posición es un máximo relativo y el equilibrio allí es inestable. La segunda derivada es positiva en $x = \pm x_Q$, por lo que estas posiciones son mínimos relativos y representan equilibrios estables.

Importancia

La partícula en este ejemplo puede oscilar en la región permitida alrededor de cualquiera de los dos puntos de equilibrio estables que encontramos, pero no tiene suficiente energía para escapar de cualquier pozo de potencial en el que se encuentre inicialmente. La conservación de la energía mecánica y las relaciones entre la energía cinética y la velocidad, y la energía potencial y la fuerza, permiten deducir mucha información sobre el comportamiento cualitativo del movimiento de una partícula, así como alguna información cuantitativa, a partir de un gráfico de su energía potencial.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.10

Repita el Ejemplo 8.10 cuando la energía mecánica de la partícula es +0,25 J.

Antes de terminar esta sección, practiquemos la aplicación del método basado en la energía potencial de una partícula para hallar su posición como función del tiempo, en el sistema unidimensional masa-resorte considerado anteriormente en esta sección.

EJEMPLO 8.11

Oscilaciones sinusoidales

Calcule $x(t)$ para una partícula que se mueve con energía mecánica constante $E > 0$ y energía potencial $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, cuando la partícula parte del reposo en el tiempo $t = 0$.

Estrategia

Seguimos los mismos pasos que en el Ejemplo 8.9. Sustituya la energía potencial U en la Ecuación 8.14 y factorice las constantes, como m o k. Integre la función y resuelva la expresión resultante para la posición, que ahora es una función del tiempo.

Solución

Sustituya la energía potencial en la Ecuación 8.14 e intégrela mediante un solucionador de integrales encontrado en una búsqueda en la web:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(k/m)\left[(2E/k) - x^2\right]}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}}\right) - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x_0}{\sqrt{2E/k}}\right)\right].$$

A partir de las condiciones iniciales en $t = 0$, la energía cinética inicial es cero y la energía potencial inicial es $\frac{1}{2}k{x_0}^2 = E$, a partir de lo que puede observar que $x_0/\sqrt{(2E/k)} = \pm 1$ y $\text{sen}^{-1}(\pm) = \pm 90^0$. Ahora puede resolver para x:

$$x(t) = \sqrt{(2E/k)}\,\text{sen}\left[\left(\sqrt{k/m}\right)t \pm 90^0\right] = \pm\sqrt{(2E/k)}\cos\left[\left(\sqrt{k/m}\right)t\right].$$

Importancia

Unos cuantos párrafos atrás, nos hemos referido a este sistema masa-resorte como un ejemplo de oscilador armónico. Aquí, anticipamos que un oscilador armónico ejecuta oscilaciones sinusoidales con un desplazamiento máximo de $\sqrt{(2E/k)}$ (amplitud) y una tasa de oscilación de $(1/2\pi)\sqrt{k/m}$ (frecuencia). Para más información sobre las oscilaciones, consulte Oscilaciones.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 8.11

Calcule $x\,(t)$ para el sistema masa-resorte en el Ejemplo 8.11 si la partícula parte de $x_0 = 0$ en $t = 0$. ¿Cuál es la velocidad inicial de la partícula?

8.5 Fuentes de energía

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir las transformaciones y conversiones de energía en términos generales.
- Explicar qué significa que una fuente de energía sea renovable o no renovable.

En este capítulo hemos estudiado la energía. Hemos aprendido que la energía puede adoptar diferentes formas y transferirse de una forma a otra. Verá que la energía se analiza en muchos contextos cotidianos, así como en los científicos, porque está implicada en todos los procesos físicos. También se hará evidente que muchas situaciones se entienden mejor, o se conceptualizan más fácilmente, al considerar la energía. Hasta ahora, ningún resultado experimental ha contradicho la conservación de la energía. De hecho, siempre que las mediciones han parecido entrar en conflicto con la conservación de energía, se han descubierto o reconocido nuevas formas de energía de acuerdo con este principio.

¿Cuáles son otras formas de energía? Muchas de estas se tratan en capítulos posteriores (vea también la Figura 8.13), aunque detallaremos algunas aquí:

- Los átomos y las moléculas del interior de todos los objetos están en movimiento aleatorio. La energía cinética interna de estos movimientos aleatorios se denomina *energía térmica* porque está relacionada con la temperatura del objeto. Observe que la energía térmica también se transfiere de un lugar a otro, sin transformarse ni convertirse, mediante los conocidos procesos de conducción, convección y radiación. En este caso, la energía se conoce como *energía calorífica*.
- La *energía eléctrica* es una forma común que se convierte en muchas otras formas y funciona en una amplia gama de situaciones prácticas.
- Los combustibles, como la gasolina y los alimentos, tienen *energía química*, que es energía potencial derivada de su estructura molecular. La energía química se convierte en energía térmica mediante reacciones como la oxidación. Las reacciones químicas también generan energía eléctrica, como en las baterías. La energía eléctrica, a su vez, genera energía térmica y luz, como en un calentador eléctrico o una bombilla.
- La luz es solo un tipo de radiación electromagnética, o *energía radiante* que también incluye la radio, el infrarrojo, el ultravioleta, los rayos X y los rayos gama. Todos los cuerpos con energía térmica irradian energía en ondas electromagnéticas.
- La *energía nuclear* proviene de reacciones y procesos que convierten cantidades mensurables de masa en energía. La energía nuclear se transforma en energía radiante en el Sol, en energía térmica en las calderas de las plantas de energía nuclear y luego en energía eléctrica en los generadores de las plantas de energía. Estas y todas las demás formas de energía se transforman entre sí y, hasta cierto punto, se convierten en trabajo mecánico.

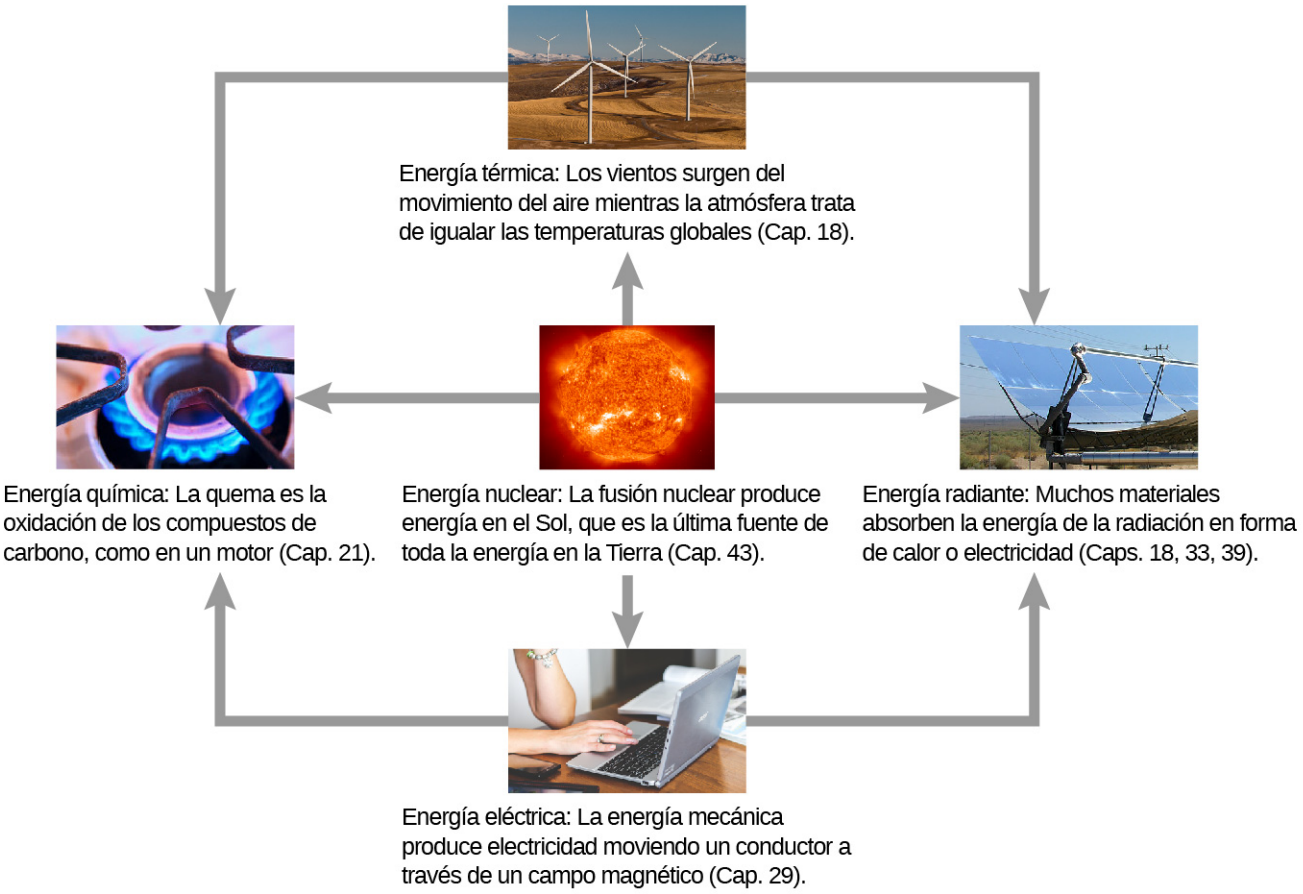


FIGURA 8.13 La energía que utilizamos en la sociedad adopta muchas formas, que se convierten de una en otra, dependiendo del proceso que se realice. Estudiaremos muchas de estas formas de energía en capítulos posteriores de este texto (créditos: "sol", modificación del trabajo del Consorcio del Observatorio Solar y Heliosférico [Solar and Heliospheric Observatory, SOHO] - Telescopio de Imágenes Ultravioleta Extrema [Extreme Utraviolet Imaging Telescope, EIT], ESA y NASA; "paneles solares", modificación del trabajo de "kjkolb"/Wikimedia Commons; "quemador de gas", modificación del trabajo de Steven Depolo).

La transformación de la energía de una forma a otra ocurre todo el tiempo. La energía química de los alimentos se convierte en energía térmica a través del metabolismo; la energía de la luz se convierte en energía química a través de la fotosíntesis. Otro ejemplo de conversión de energía se produce en una celda solar. La luz solar que incide en una celda solar produce electricidad, que se utiliza para hacer funcionar motores eléctricos o calentar agua. En un ejemplo que abarca muchos pasos, la energía química contenida en el carbón se convierte en energía térmica al arder en un horno, para transformar el agua en vapor, en una caldera. Parte de la energía térmica del vapor se convierte en energía mecánica al expandirse y hacer girar una turbina, que está conectada a un generador para producir energía eléctrica. En estos ejemplos, no toda la energía inicial se convierte en las formas mencionadas, porque siempre se transfiere algo de energía al medio ambiente.

La energía es un elemento importante en todos los niveles de la sociedad. Vivimos en un mundo muy interdependiente, y el acceso a recursos energéticos adecuados y fiables es crucial para el crecimiento económico y para mantener la calidad de nuestras vidas. Los principales recursos energéticos que se utilizan en el mundo se muestran en la Figura 8.14. La figura distingue entre dos grandes tipos de fuentes de energía: **renovables** y **no renovables**, y además divide cada tipo en algunas clases más específicas. Las fuentes renovables son fuentes de energía que se reponen a través de procesos naturales y continuos, en una escala de tiempo que es mucho más corta que la vida prevista de la civilización que utiliza la fuente. Las fuentes no

renovables se agotan una vez que parte de la energía que contienen se extrae y se convierte en otros tipos de energía. Los procesos naturales por los que se forman las fuentes no renovables suelen tener lugar en escalas de tiempo geológicas.

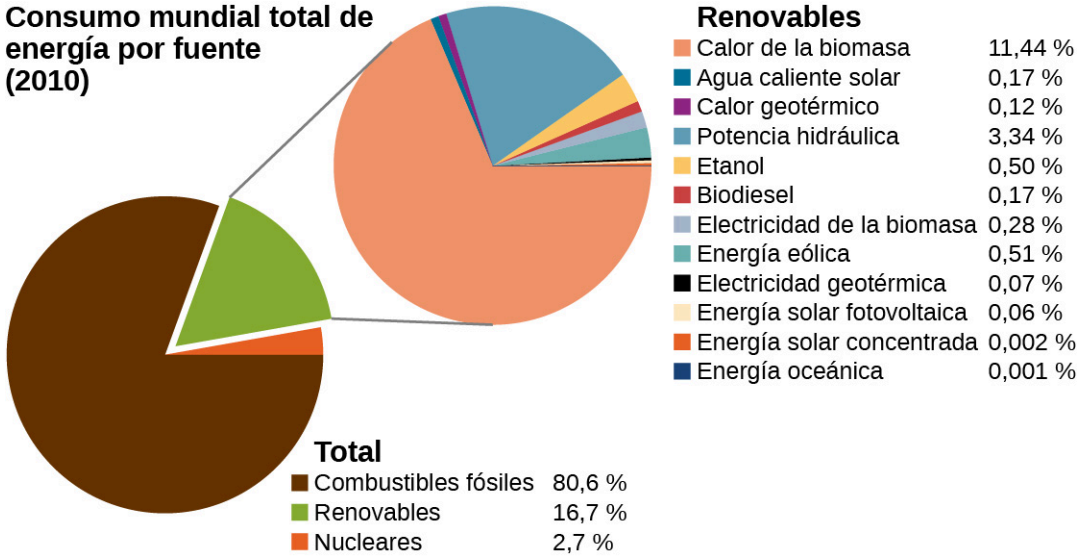


FIGURA 8.14 Consumo mundial de energía por fuentes; el porcentaje de renovables va en aumento, lo que representa el 19 % en 2012.

Nuestras fuentes de energía no renovables más importantes son los combustibles fósiles, como el carbón, el petróleo y el gas natural. Estas representan alrededor del 81 % del consumo mundial de energía, como se muestra en la figura. La quema de combustibles fósiles crea reacciones químicas que transforman la energía potencial, en las estructuras moleculares de los reactivos, en la energía térmica y en productos. Esta energía térmica se utiliza para la calefacción en los edificios o para hacer funcionar maquinaria de vapor. Los motores de combustión interna y de reacción convierten parte de la energía de los gases en rápida expansión, liberados por la combustión de la gasolina, en trabajo mecánico. La generación de potencia eléctrica se deriva principalmente de la transferencia de energía en el vapor en expansión, a través de turbinas, en trabajo mecánico, que hace rotar bobinas de alambre en campos magnéticos para generar electricidad. La energía nuclear es la otra fuente no renovable que aparece en la Figura 8.14 y suministra aproximadamente el 3 % del consumo mundial. Las reacciones nucleares liberan energía al transformar la energía potencial, en la estructura de los núcleos, en energía térmica, semejante a la liberación de energía en las reacciones químicas. La energía térmica obtenida de las reacciones nucleares puede transferirse y convertirse en otras formas de la misma manera que se utiliza la energía de los combustibles fósiles.

Un desafortunado subproducto de depender de la energía generada a partir de la combustión de combustibles fósiles es la liberación de dióxido de carbono a la atmósfera y su contribución al calentamiento global. La energía nuclear también plantea problemas ambientales, como la seguridad y la eliminación de los residuos nucleares. Además de estas importantes consecuencias, las reservas de fuentes de energía no renovables son limitadas y, dado el rápido ritmo de crecimiento del consumo mundial de energía, puede que no duren más que unos cuantos cientos de años. Se está realizando un esfuerzo considerable para desarrollar y ampliar el uso de las fuentes de energía renovables, en el que participa un porcentaje importante de los físicos e ingenieros del mundo.

Cuatro de las fuentes de energía renovable enumeradas en la Figura 8.14, las que utilizan material vegetal como combustible (calor de biomasa, etanol, biodiésel y electricidad de biomasa), implican los mismos tipos de transformaciones y conversiones energéticas que se acaban de comentar para los combustibles fósiles y nucleares. Los otros grandes tipos de energías renovables son la hidroeléctrica, la eólica, la geotérmica y la solar.

La potencia hidráulica se produce al convertir la energía potencial gravitacional del agua que cae o fluye en energía cinética y luego en trabajo para hacer funcionar generadores eléctricos o maquinaria. La conversión

de la energía mecánica de las olas y las mareas de la superficie del océano está en desarrollo. La energía eólica también convierte la energía cinética en trabajo, que puede utilizarse directamente para generar electricidad, hacer funcionar molinos y propulsar veleros.

El interior de la Tierra tiene una gran cantidad de energía térmica, parte de la cual es un remanente de su formación original (energía potencial gravitacional convertida en energía térmica), y la otra parte es liberada por los minerales radioactivos (una forma de energía nuclear natural). Esta energía geotérmica tardará mucho tiempo en salir al espacio, por lo que la gente suele considerarla como una fuente renovable, cuando en realidad, es simplemente inagotable en escalas de tiempo de la humanidad.

La fuente de energía solar es la energía transportada por las ondas electromagnéticas que irradia el Sol. La mayor parte de esta energía es transportada por la luz visible y la radiación infrarroja (calor). Cuando los materiales adecuados absorben las ondas electromagnéticas, la energía radiante se convierte en energía térmica, que se utiliza para calentar el agua, o cuando se concentra, para hacer vapor y generar electricidad (Figura 8.15). Sin embargo, en otro importante proceso físico, conocido como efecto fotoeléctrico, la radiación energética que incide sobre ciertos materiales se convierte directamente en electricidad. Los materiales que hacen esto reciben el nombre de fotovoltaicos (PV en la Figura 8.14). Algunos sistemas de energía solar utilizan lentes o espejos para concentrar los rayos del Sol, antes de convertir su energía a través de fotovoltaicos, y se califican como CSP en la Figura 8.14.



FIGURA 8.15 Matrices de celdas solares que se encuentran en una zona soleada y que convierten la energía solar en energía eléctrica almacenada (créditos: modificación del trabajo de Sarah Swenty, Servicio de Pesca y Vida Silvestre de los EE. UU.).

Al terminar este capítulo sobre la energía y el trabajo, es pertinente establecer algunas distinciones entre dos términos a veces malinterpretados en el ámbito del uso de la energía. Como ya hemos mencionado, la "ley de conservación de la energía" es un principio muy útil para analizar los procesos físicos. No se puede demostrar a partir de principios básicos, pero es un dispositivo de contabilidad muy bueno, y nunca se han encontrado excepciones. Afirma que la cantidad total de energía en un sistema aislado siempre permanece constante. Relacionada con este principio, pero notablemente diferente de este, se encuentra la importante filosofía de la conservación de energía. Este concepto tiene que ver con la búsqueda de la disminución de la cantidad de energía utilizada por un individuo o grupo a través de la reducción de las actividades (por ejemplo, al bajar los termostatos, al conducir menos kilómetros) o el aumento de la eficiencia de la conversión en el desempeño de una tarea particular, como el desarrollo y el uso de calentadores de habitación más eficientes, autos que tienen mayores índices de millas por galón, luces fluorescentes compactas de bajo consumo, etc.

Dado que la energía en un sistema aislado no se destruye, ni se crea, ni se genera, cabe preguntarse por qué tenemos que preocuparnos por nuestros recursos energéticos, ya que la energía es una cantidad conservada. El problema es que el resultado final de la mayoría de las transformaciones energéticas es el calor residual, es

decir, el trabajo que se ha "degradado" en la transformación energética. Trataremos esta idea con más detalle en los capítulos sobre termodinámica.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

cantidad conservada es aquella que no se crea ni se destruye, sino que asume distintas formas de sí misma

conservación de energía la energía total de un sistema aislado es constante

diagrama de energía potencial gráfico de la energía potencial de una partícula en función de la posición

diferencia de energía potencial negativo del trabajo realizado y que actúa entre dos puntos del espacio

diferencial exacta es la diferencial total de una función y requiere el uso de derivadas parciales si la función implica más de una dimensión

energía mecánica la suma de las energías cinética y potencial

energía potencial función de la posición, energía que posee un objeto en relación con el sistema considerado

fuerza conservativa fuerza que realiza un trabajo independiente de la trayectoria

fuerza no conservativa fuerza que realiza un trabajo que depende de la trayectoria

no renovable fuente de energía que no es renovable, sino que se agota con el consumo humano

punto de equilibrio posición en la que la supuesta fuerza conservativa neta sobre una partícula, dada por la pendiente de su curva de energía potencial, es cero

punto de inflexión posición en la que la velocidad de una partícula, en movimiento unidimensional, cambia de signo

renovable fuente de energía que se repone mediante procesos naturales, en escalas de tiempo de la humanidad

Ecuaciones Clave

Diferencia de energía potencial	$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = \text{-}W_{AB}$
Energía potencial con respecto a cero de energía potencial en $\vec{\mathbf{r}}_0$	$\Delta U = U\left(\vec{\mathbf{r}}\right) - U\left(\vec{\mathbf{r}}_0\right)$
Energía potencial gravitacional cerca de la superficie de la Tierra	$U\left(y\right) = mgy + \text{const.}$
Energía potencial para un resorte ideal	$U\left(x\right) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{const.}$
Trabajo realizado por una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada	$W_{\text{trayectoria cerrada}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$
Condición para la fuerza conservativa en dos dimensiones	$\left(\frac{dF_x}{dy}\right) = \left(\frac{dF_y}{dx}\right)$
La fuerza conservativa es la derivada negativa de la energía potencial	$F_l = -\frac{dU}{dl}$
Conservación de la energía sin fuerzas no conservativas	$0 = W_{nc,AB} = \Delta(K+U)_{AB} = \Delta E_{AB}.$

Resumen

8.1 Energía potencial de un sistema

- Para un sistema de una sola partícula, la diferencia de energía potencial es la opuesta al trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando se mueve de una posición a otra.
- Dado que solo las diferencias de energía potencial son físicamente significativas, el cero de la función de energía potencial puede

elegirse en un lugar conveniente.
- Las energías potenciales para la gravedad constante de la Tierra, cerca de su superficie, y para una fuerza de la ley de Hooke son funciones lineales y cuadráticas de la posición, respectivamente.

8.2 Fuerzas conservativas y no conservativas

- La fuerza conservativa es aquella para la que el trabajo realizado es independiente de la trayectoria. De forma equivalente, una fuerza es conservativa si el trabajo realizado en cualquier trayectoria cerrada es cero.
- La fuerza no conservativa es aquella cuyo trabajo depende de la trayectoria.
- Para una fuerza conservativa, el trabajo infinitesimal es una diferencial exacta. Esto implica condiciones sobre las derivadas de los componentes de la fuerza.
- El componente de una fuerza conservativa, en una dirección particular, es igual al negativo de la derivada de la energía potencial para esa fuerza, con respecto a un desplazamiento en esa dirección.

8.3 Conservación de la energía

- Una cantidad conservada es una propiedad física que se mantiene constante, independientemente de la trayectoria recorrida.
- Una forma del teorema de trabajo-energía establece que el cambio en la energía mecánica de una partícula es igual al trabajo que realizan sobre esta las fuerzas no conservativas.
- Si las fuerzas no conservativas no realizan ningún trabajo y no hay fuerzas externas, la energía mecánica de una partícula permanece constante. Esta es una afirmación de la conservación de la energía mecánica y no hay ningún cambio en la energía mecánica total.
- En cuanto al movimiento unidimensional de una partícula, en el que la energía mecánica es constante y la energía potencial es conocida, la posición de la partícula, como función del tiempo, se halla al evaluar una integral que se deriva de la conservación de la energía mecánica.

8.4 Diagramas de energía potencial y estabilidad

- La interpretación de un diagrama de energía potencial unidimensional permite obtener información cualitativa, y algo de información cuantitativa, sobre el movimiento de una partícula.
- En un punto de inflexión, la energía potencial es igual a la energía mecánica y la energía cinética es cero, lo que indica que el sentido de la velocidad se invierte allí.
- El negativo de la pendiente de la curva de energía potencial, para una partícula, es igual al componente unidimensional de la fuerza conservativa sobre la partícula. En un punto de equilibrio, la pendiente es cero y es un equilibrio estable (inestable) para un mínimo (máximo) de energía potencial.

8.5 Fuentes de energía

- La energía se transfiere de un sistema a otro y se transforma o convierte de un tipo a otro. Algunos de los tipos básicos de energía son la cinética, la potencial, la térmica y la electromagnética.
- Las fuentes de energía renovables son aquellas que se reponen mediante procesos naturales continuos, a lo largo de escalas de tiempo humanas. Algunos ejemplos son la energía eólica, la hidráulica, la geotérmica y la solar.
- Las fuentes de energía no renovables son aquellas que se agotan por el consumo, en escalas de tiempo humanas. Los ejemplos son los combustibles fósiles y la energía nuclear.

Preguntas Conceptuales

8.1 Energía potencial de un sistema

1. La energía cinética de un sistema deberá ser siempre positiva o cero. Explique si esto es cierto para la energía potencial de un sistema.

2. La fuerza que ejerce un trampolín es conservativa, siempre que la fricción interna sea despreciable. Suponiendo que la fricción es despreciable, describa los cambios en la energía potencial de un trampolín cuando un nadador se impulsa desde este, empezando justo antes de que el nadador pise el trampolín hasta justo después de que sus pies se aparten de este.

3. Describa las transferencias y transformaciones de energía potencial gravitacional de una jabalina, empezando por el punto en el que un atleta recoge la jabalina y terminando cuando la jabalina se clava en el suelo después lanzarla.

4. Un par de balones de fútbol de igual masa son pateados desde el suelo a la misma rapidez, pero en diferentes ángulos. El balón A se lanza con un ángulo ligeramente superior a la horizontal,

mientras que el balón B se lanza ligeramente por debajo de la vertical. ¿Cómo se comparan cada uno de los siguientes elementos para el balón A y el balón B? (a) La energía cinética inicial y (b) el cambio en la energía potencial gravitacional desde el suelo hasta el punto más alto? Si la energía de la parte (a) difiere de la de la parte (b), explique por qué hay una diferencia entre las dos energías.

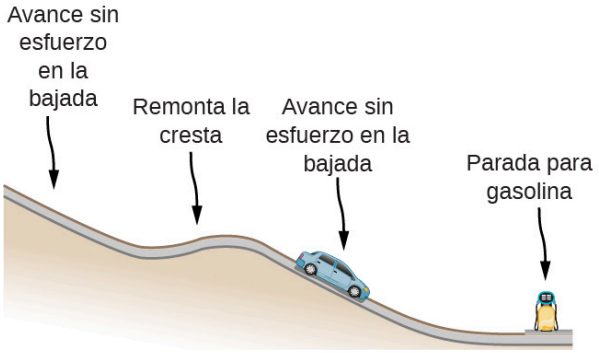
5. ¿Cuál es el factor dominante que afecta a la rapidez de un objeto que parte del reposo por una pendiente sin fricción, si el único trabajo realizado sobre el objeto procede de las fuerzas gravitacionales?
6. Dos personas observan cómo cae una hoja de un árbol. Una persona está de pie en una escalera y la otra en el suelo. Si cada persona comparara la energía de la hoja observada, ¿encontraría lo siguiente igual o diferente para la hoja, desde el punto en el que cae del árbol hasta cuando golpea el suelo: (a) la energía cinética de la hoja; (b) el cambio en la energía potencial gravitacional; (c) la energía potencial gravitacional final?

8.2 Fuerzas conservativas y no conservativas

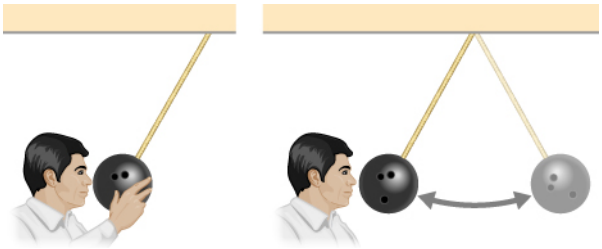
7. ¿Cuál es el significado físico de la fuerza no conservativa?
8. Un cohetón se dispara directamente al aire, a una rapidez de 30 m/s. Si se ignora la resistencia del aire, el cohetón subiría hasta una altura de aproximadamente 46 m. Sin embargo, el cohetón sube a solo 35 m antes de volver al suelo. ¿Qué ha pasado? Explique solamente con una respuesta cualitativa.
9. Una fuerza externa actúa sobre una partícula durante un viaje de un punto a otro y de vuelta a ese mismo punto. Esta partícula solo se ve afectada por las fuerzas conservativas. ¿Cambia la energía cinética y la energía potencial de esta partícula como resultado de este viaje?

8.3 Conservación de la energía

10. Cuando un cuerpo se desliza por un plano inclinado, ¿el trabajo de la fricción depende de la rapidez inicial del cuerpo? Responda la misma pregunta en relación con un cuerpo que se desliza por una superficie curva.
11. Considere la situación siguiente. Un auto para el que la fricción *no* es despreciable acelera desde el reposo cuesta abajo, pero se queda sin gasolina al cabo de una corta distancia (vea más abajo). El conductor deja que el auto vaya un poco más abajo por la colina y entonces asciende por una pequeña cresta. Luego, viaja cuesta abajo, hasta llegar a una gasolinera, donde frena y llena el tanque de gasolina. Identifique las formas de energía que tiene el auto y cómo se cambian y transfieren en esta serie de acontecimientos.



12. Una pelota que cae rebota hasta la mitad de su altura original. Comente sobre las transformaciones energéticas que se producen.
13. "$E = K + U$ constante es un caso especial del teorema de trabajo-energía". Razone esta afirmación.
14. En una demostración común de física, una bola de boliche está suspendida del techo por una cuerda. El profesor aleja la bola de su posición de equilibrio y la mantiene junto a su nariz, como se muestra a continuación. Suelta la bola para que oscile directamente lejos de él. ¿Recibe el golpe de la bola a su regreso? ¿Qué intenta mostrar con esta demostración?



15. Un niño salta sobre una cama y alcanza una mayor altura después de cada rebote. Explique cómo el niño puede aumentar su energía potencial gravitacional máxima con cada rebote.
16. ¿Puede una fuerza no conservativa aumentar la energía mecánica del sistema?
17. Descartando la resistencia del aire, ¿cuánto tendría que aumentar la altura vertical si quisiera duplicar la velocidad de impacto de un objeto que cae?
18. Una caja se deja caer sobre un resorte en su posición de equilibrio. El resorte se comprime con la caja unida y llega a un punto de reposo.

Dado que el resorte está en posición vertical, ¿es necesario considerar en este problema el cambio en la energía potencial gravitacional de la caja mientras el resorte se comprime?

Problemas

8.1 Energía potencial de un sistema

19. Utilizando los valores de la Tabla 8.1, ¿cuántas moléculas de ADN podrían romperse por la energía transportada por un solo electrón en el haz de un tubo antiguo de televisión? (Estos electrones no eran peligrosos en sí mismos, pero sí generaban rayos X nocivos. Los televisores de tubo de modelos posteriores tenían un blindaje que absorbía los rayos X antes de que se escaparan y expusieran a los espectadores).

20. Si la energía de las bombas de fusión se utilizara para abastecer las necesidades energéticas del mundo, ¿cuántas de la variedad de 9 megatones se necesitarían para el suministro de energía de un año (utilizando los datos de la Ecuación 8.3)?

21. Una cámara que pesa 10 N cae desde un pequeño dron que flota 20 m por encima y entra en caída libre. ¿Cuál es el cambio de energía potencial gravitacional de la cámara desde el dron hasta el suelo, si se toma como punto de referencia que (a) el suelo tiene una energía potencial gravitacional cero? (b) el dron tiene una energía potencial gravitacional cero? ¿Cuál es la energía potencial gravitacional de la cámara (c) antes de que caiga del dron y (d) después de que la cámara aterrice en el suelo si se toma como punto de referencia de energía potencial gravitacional cero una segunda persona que se asoma de un edificio a 30 m del suelo?

22. Alguien deja caer un guijarro de $50-$ g de un crucero atracado, a 70,0 m de la línea de agua. Una persona en un muelle a 3,0 m de la línea del agua sostiene una red para atrapar el guijarro. (a) ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad sobre el guijarro durante la caída? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial gravitacional durante la caída? Si la energía potencial gravitacional es cero en la línea del agua, ¿cuál es la energía potencial gravitacional (c) cuando se deja caer el guijarro? (d) cuando llega a la red? ¿Y si la energía potencial gravitacional fuera 30,0 Julios al nivel del agua? (e) Encuentre las respuestas a las mismas preguntas en (c) y (d).

23. Una bola arrugada de juguete para gatos con masa 15 g se lanza directamente hacia arriba con una rapidez inicial de 3 m/s. Supongamos en este problema que la resistencia del aire es despreciable. (a) ¿Cuál es la energía cinética de la bola cuando sale de la mano? (b) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza gravitacional durante el ascenso de la bola hasta su punto máximo? (c) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial gravitacional de la bola durante el ascenso hasta su punto máximo? (d) Si se considera que la energía potencial gravitacional es cero en el punto en que sale de la mano, ¿cuál es la energía potencial gravitacional cuando alcanza la altura máxima? (e) Si se considera que la energía potencial gravitacional es cero en la altura máxima que alcanza la bola, ¿cuál sería la energía potencial gravitacional cuando sale de la mano? (f) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

8.2 Fuerzas conservativas y no conservativas

24. Una fuerza $F(x) = (3{,}0/x)$ N actúa sobre una partícula al moverse a lo largo del eje de la x positiva. (a) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza sobre la partícula al moverse de $x = 2{,}0$ m a $x = 5{,}0$ m? (b) Elija un punto de referencia conveniente de la energía potencial para que sea cero en $x = \infty$, y halle la energía potencial de esta fuerza.

25. Una fuerza $F(x) = \left(-5{,}0x^2 + 7{,}0x\right)$ N actúa sobre una partícula. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza sobre la partícula al pasar de $x = 2{,}0$ m a $x = 5{,}0$ m?

26. Halle la fuerza correspondiente a la energía potencial $U(x) = -a/x + b/x^2$.

27. La función de energía potencial para cualquiera de los dos átomos de una molécula diatómica suele tomarse como $U(x) = a/x^{12} - b/x^6$ donde x es la distancia entre los átomos. (a) ¿A qué distancia de separación tiene la energía potencial un mínimo local (no a $x = \infty$)? (b) ¿Cuál es la fuerza sobre un átomo a esta separación? (c) ¿Cómo varía la fuerza con la distancia de separación?

28. Una partícula de masa 2,0 kg se desplaza bajo la influencia de la fuerza $F(x) = \left(3/\sqrt{x}\right)$ N. Si su rapidez en $x = 2{,}0$ m es $v = 6{,}0$ m/s, cuál es su

rapidez en $x = 7{,}0$ m?

29. Una partícula de masa 2,0 kg se desplaza bajo la influencia de la fuerza $F(x) = \left(-5x^2 + 7x\right)$ N. Si su rapidez en $x = -4{,}0$ m es $v = 20{,}0$ m/s, cuál es su rapidez en $x = 4{,}0$ m?

30. Una caja sobre rodillos es empujada sin pérdida de energía por fricción por el suelo de un vagón de carga (vea la siguiente figura). El vagón se mueve hacia la derecha a rapidez constante v_0. Si la caja comienza en reposo con respecto al vagón de carga, entonces a partir del teorema de trabajo-energía, $Fd = mv^2/2$, donde *d*, la distancia a la que se mueve la caja, y *v*, la rapidez de la caja, se miden ambas con respecto al vagón de carga. (a) Para un observador en reposo junto a las vías, ¿a qué distancia d' se empuja la caja cuando se mueve la distancia *d* en el vagón? (b) ¿Cuál es la rapidez inicial y final de la caja ${v_0}'$ y v' medida por el observador junto a las vías? (c) Demuestre que $Fd' = m(v')^2/2 - m({v'}_0)^2/2$ y, en consecuencia, ese trabajo es igual al cambio de energía cinética en ambos sistemas de referencia.



8.3 Conservación de la energía

31. Un niño lanza una pelota de masa 0,25 kg directamente hacia arriba, a una rapidez inicial de 20 m/s Cuando la pelota regresa al niño, su rapidez es 17 m/s ¿Cuánto trabajo realiza la resistencia del aire sobre la pelota durante su vuelo?

32. Un ratón con una masa de 200 g cae 100 m por un pozo de mina vertical y aterriza en el fondo, a una rapidez de 8,0 m/s. Durante su caída, ¿cuánto trabajo realiza la resistencia del aire sobre el ratón?

33. Con base en consideraciones energéticas y suponiendo que la resistencia del aire es despreciable, demuestre que una roca lanzada desde un puente a 20,0 m sobre el agua, a una rapidez inicial de 15,0 m/s golpea el agua a una rapidez de 24,8 m/s, independientemente de la dirección del lanzamiento. *(Pista:* Demuestre que $K_\text{i} + U_\text{i} = K_\text{f} + U_\text{f}$)

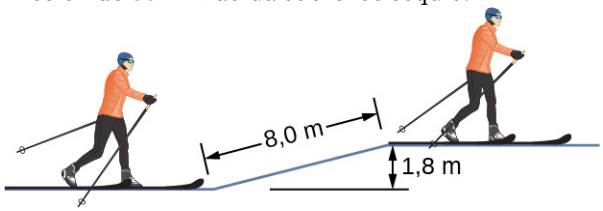
34. Una pelota de 1,0 kg en el extremo de una cuerda de 2,0 m se balancea en un plano vertical. En su punto más bajo, la pelota se desplaza a una rapidez de 10 m/s. (a) ¿Cuál es su rapidez en la parte superior de su trayectoria? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando la pelota está en la parte inferior y en la parte superior de su trayectoria?

35. Ignorando los detalles asociados a la fricción, las fuerzas adicionales que ejercen los músculos de brazos y piernas, y otros factores, podemos considerar el salto con pértiga como la conversión de la energía cinética de la carrera de un atleta en energía potencial gravitacional. Si un atleta debe elevar su cuerpo 4,8 m durante un salto, ¿qué rapidez deberá tener al plantar la pértiga?

36. Tarzán se agarra a una liana que cuelga verticalmente de un alto árbol cuando corre a 9,0 m/s. (a) ¿A qué altura puede balancearse hacia arriba? (b) ¿Afecta la longitud de la liana esta altura?

37. Supongamos que la fuerza de un arco sobre una flecha se comporta como la fuerza de un resorte. Al apuntar la flecha, un arquero tira del arco hacia atrás 50 cm y lo mantiene en posición con una fuerza de 150 N. Si la masa de la flecha es 50 g y el "resorte" no tiene masa, ¿cuál es la rapidez de la flecha inmediatamente después de salir del arco?

38. Un hombre de 100 − kg esquía por un terreno llano a una rapidez de 8,0 m/s cuando llega a la pequeña pendiente de 1,8 m, más alta que el nivel del suelo que se muestra en la siguiente figura. (a) Si el esquiador viaja hacia arriba de la colina, ¿cuál es su rapidez cuando llega a la meseta superior? Supongamos que la fricción entre la nieve y los esquís es despreciable. (b) ¿Cuál es su velocidad cuando llega a la parte superior si una fuerza de fricción de 80 − N actúa sobre los esquís?



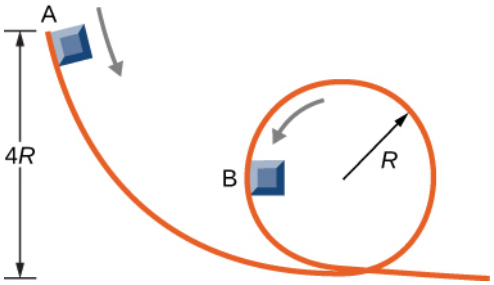
39. Un trineo de 70 kg de masa parte del reposo y se desliza por una pendiente de 10° de 80 m de largo. Luego, se desplaza 20 m en horizontal antes de volver a subir una pendiente de 8°. Recorre 80 m a lo largo de la pendiente antes de detenerse. ¿Cuál es la magnitud del trabajo neto realizado en el trineo por la fricción?

40. Una chica en una patineta (masa total de 40 kg) se mueve a una rapidez de 10 m/s en la parte inferior de una larga rampa. La rampa está inclinada a 20° con respecto a la horizontal. Si

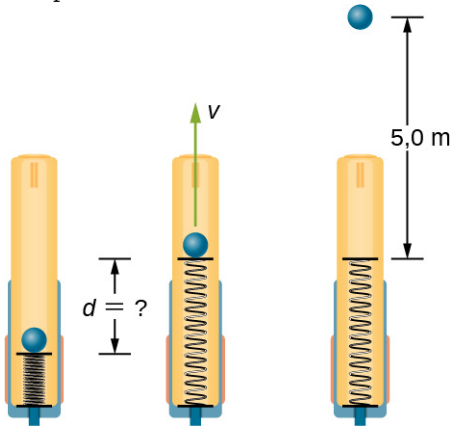
recorre 14,2 m hacia arriba, a lo largo de la rampa, antes de detenerse, ¿cuál es la fuerza neta de fricción sobre ella?

41. Una pelota de béisbol de 0,25 kg de masa es golpeada en el home a una rapidez de 40 m/s. Cuando aterriza en un asiento de la grada del campo izquierdo a una distancia horizontal de 120 m del home, se mueve a 30 m/s. Si la pelota cae a 20 m por encima del lugar donde fue golpeada, ¿cuánto trabajo realiza sobre ella la resistencia del aire?

42. Un pequeño bloque de masa m se desliza sin fricción alrededor del aparato de completar el círculo que se muestra a continuación. (a) Si el bloque parte del reposo en A, ¿cuál es su rapidez en B? (b) ¿Cuál es la fuerza de la pista sobre el bloque en B?



43. El resorte sin masa de una pistola de resorte tiene una constante de fuerza $k = 12$ N/cm. Cuando la pistola apunta verticalmente, un proyectil de 15 g se dispara a una altura de 5,0 m por encima del extremo del resorte expandido. (Vea más abajo). ¿Cuánto se comprimió el resorte inicialmente?



44. Se ata una pequeña pelota a una cuerda y se la pone a girar con una fricción despreciable en un círculo vertical. Si la pelota se desplaza por la parte superior del círculo lo más lentamente posible (de modo que la tensión de la cuerda sea despreciable), ¿cuál es la tensión de la cuerda en la parte inferior del círculo, suponiendo que no se añade energía a la pelota durante la rotación?

8.4 Diagramas de energía potencial y estabilidad

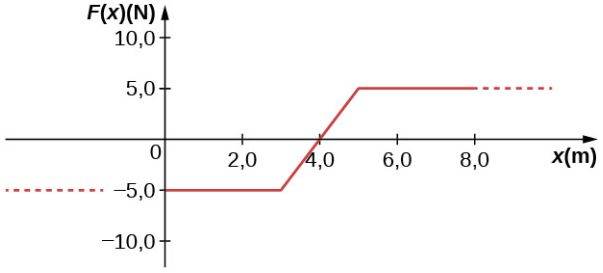
45. Una misteriosa fuerza constante de 10 N actúa horizontalmente sobre todo. Se comprueba que la dirección de la fuerza apunta siempre hacia una pared en una gran sala. Halle la energía potencial de una partícula debida a esta fuerza cuando se encuentra a una distancia x de la pared, suponiendo que la energía potencial en la pared es cero.

46. Una sola fuerza $F(x) = -4{,}0x$ (en newtons) actúa sobre un cuerpo de 1,0 kg. Cuando $x = 3{,}5$ m, la rapidez del cuerpo es de 4,0 m/s. ¿Cuál es su rapidez en $x = 2{,}0$ m?

47. Una partícula de masa 4,0 kg está obligada a moverse a lo largo del eje de la x bajo una sola fuerza $F(x) = -cx^3$, donde $c = 8{,}0\ \text{N/m}^3$. La rapidez de la partícula en A, donde $x_A = 1{,}0$ m, es de 6,0 m/s. ¿Cuál es su rapidez en B, donde $x_B = -2{,}0$ m?

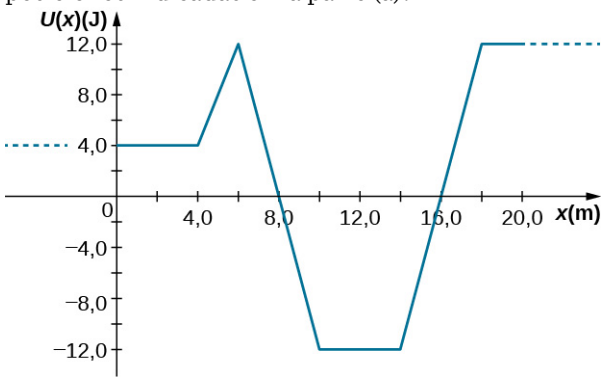
48. La fuerza sobre una partícula de masa 2,0 kg varía con la posición según $F(x) = -3{,}0x^2$ (x en metros, $F(x)$ en newtons). La velocidad de la partícula en $x = 2{,}0$ m es de 5,0 m/s. Calcule la energía mecánica de la partícula al utilizar (a) el origen como punto de referencia y (b) $x = 4{,}0$ m como punto de referencia. (c) Calcule la velocidad de la partícula en $x = 1{,}0$ m. Haga esta parte del problema para cada punto de referencia.

49. Sobre una partícula de 4,0 kg que se mueve a lo largo del eje de la x actúa la fuerza cuya forma funcional aparece a continuación. La velocidad de la partícula en $x = 0$ es $v = 6{,}0$ m/s. Calcule la rapidez de la partícula en $x =$ (a) 2,0 m, (b) 4,0 m, (c) 10,0 m, (d) ¿La partícula da la vuelta en algún punto y vuelve hacia el origen? (e) Repita la parte (d) si $v = 2{,}0$ m/s en $x = 0$.



50. Una partícula de masa 0,50 kg se mueve a lo largo del eje de la x con una energía potencial cuya dependencia de x se muestra a continuación. (a) ¿Cuál es la fuerza sobre la partícula en $x = 2{,}0, 5{,}0, 8{,}0,$ y 12 m? (b) Si la energía mecánica

total E de la partícula es -6,0 J, ¿cuáles son las posiciones mínima y máxima de la partícula? (c) ¿Cuáles son estas posiciones si $E = 2{,}0\,\text{J}$? (d) Si $E = 16\,\text{J}$, ¿cuál es la rapidez de la partícula en las posiciones indicadas en la parte (a)?



51. (a) Trace un gráfico de la función de energía potencial $U(x) = kx^2/2 + Ae^{-\alpha x^2}$, donde k, A, y α son constantes. (b) ¿Cuál es la fuerza correspondiente a esta energía potencial? (c) Supongamos que una partícula de masa m que se mueve con esta energía potencial tiene una velocidad v_a cuando su posición es $x = a$. Demuestre que la partícula no pasa por el origen, a menos que

$$A \leq \frac{mv_a{}^2 + ka^2}{2\left(1 - e^{-\alpha a^2}\right)}.$$

8.5 Fuentes de energía

52. En la película de dibujos animados *Pocahontas (https://openstax.org/l/21pocahontclip)* Pocahontas corre hacia el borde de un acantilado y salta, mostrando el lado divertido de su personalidad. (a) Si corre a 3,0 m/s antes de saltar por el acantilado y llega al agua en el fondo del acantilado a 20,0 m/s, ¿a qué altura está el acantilado? Supongamos que la resistencia del aire es despreciable en este dibujo animado. (b) Si saltara desde el mismo acantilado desde una posición de reposo, ¿qué tan rápido caería justo antes de llegar al agua?

53. En el *reality show* de televisión "Amazing Race" (https://openstax.org/l/21amazraceclip), un concursante dispara sandías de 12 kg con una honda para alcanzar objetivos en el campo. La honda es halada hacia atrás 1,5 m y se considera que la sandía está a nivel del suelo. El punto de lanzamiento está a 0,3 m del suelo y los objetivos están a 10 m de distancia horizontal. Calcule la constante de resorte de la honda.

54. En las películas de *Regreso al Futuro* (https://openstax.org/l/21bactofutclip), un auto DeLorean de 1.230 kg de masa viaja a 88 millas por hora para aventurarse de regreso al futuro. (a) ¿Cuál es la energía cinética del DeLorean? (b) ¿Qué constante de resorte sería necesaria para detener este DeLorean en una distancia de 0,1 m?

55. En la película *Los Juegos del Hambre* (https://openstax.org/l/21HungGamesclip), Katniss Everdeen dispara una flecha de 0,0200 kg desde el nivel del suelo para atravesar una manzana en un escenario. La constante de resorte del arco es de 330 N/m y ella hala la flecha hacia atrás una distancia de 0,55 m. La manzana en el escenario está 5,00 m más alta que el punto de lanzamiento de la flecha. ¿A qué rapidez la flecha (a) sale del arco? (b) golpea la manzana?

56. En un de "Top Fail" (https://openstax.org/l/21topfailvideo), dos mujeres corren con pelotas de ejercicio la una contra la otra y colisionan golpeando las pelotas. Si cada mujer tiene una masa de 50 kg, que incluye la pelota de ejercicios, y una mujer corre hacia la derecha a 2,0 m/s y la otra corre hacia ella a 1,0 m/s, (a) ¿cuánta energía cinética total hay en el sistema? (b) Si la energía se conserva después de la colisión y cada pelota de ejercicios tiene una masa de 2,0 kg, ¿qué tan rápido saldrían volando las pelotas hacia la cámara?

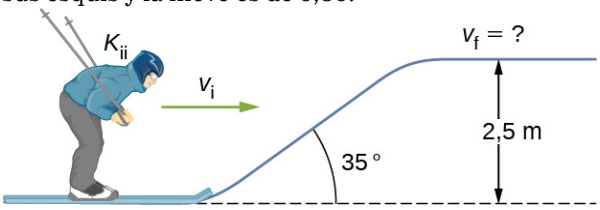
57. En un clip de dibujos animados del Coyote / Correcaminos (https://openstax.org/l/21coyroadcarcl), un resorte se expande rápidamente y envía al coyote contra una roca. Si el resorte se extiende 5 m y envía al coyote de masa 20 kg a una rapidez de 15 m/s, (a) ¿cuál es la constante de resorte de este resorte? (b) Si el coyote fuera enviado verticalmente al aire con la energía que le da el resorte, ¿a qué altura podría llegar si no hubiera fuerzas no conservativas?

58. En una icónica escena del cine, Forrest Gump (https://openstax.org/l/21ForrGumpvid) recorre el país corriendo. Si corre a una rapidez constante de 3 m/s, ¿le costaría más o menos energía correr cuesta arriba o cuesta abajo y por qué?

59. En la película *Monty Python y el Santo Grial (https://openstax.org/l/21monpytmovcl)* una vaca es catapultada desde lo alto de la muralla de un castillo hacia la gente abajo. La energía potencial gravitacional se toma como cero a

nivel del suelo. La vaca es lanzada desde un resorte con constante de resorte $1{,}1 \times 10^4$ N/m que se expande 0,5 m desde el equilibrio. Si el castillo tiene 9,1 m de altura y la masa de la vaca es de 110 kg, (a) ¿cuál es la energía potencial gravitacional de la vaca en la cima del castillo? (b) ¿cuál es la energía elástica de resorte de la vaca antes de que se suelte la catapulta? (c) ¿cuál es la rapidez de la vaca justo antes de que aterrice en el suelo?

60. Un esquiador de 60,0 kg con una rapidez inicial de 12,0 m/s viaja hacia arriba por una subida de 2,50 m de altura, tal como se muestra. Halle su rapidez final en la cima, dado que el coeficiente de fricción entre sus esquís y la nieve es de 0,80.

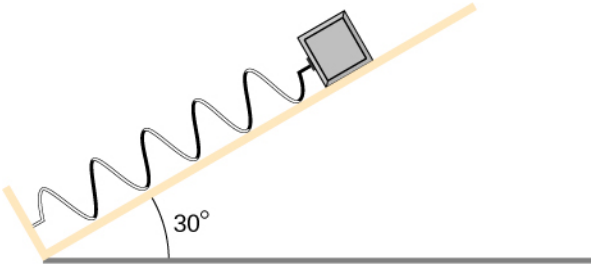


61. (a) ¿A qué altura de una colina puede subir un auto (con los motores desembragados) si el trabajo realizado por la fricción es insignificante y su rapidez inicial es de 110 km/h? (b) Si, en realidad, se observa que un auto de 750 kg con una rapidez inicial de 110 km/h sube por la colina hasta una altura de 22,0 m por encima de su punto de partida, ¿cuánta energía térmica se generó por la fricción? (c) ¿Cuál es la fuerza media de fricción si la colina tiene una pendiente de $2{,}5°$ sobre la horizontal?

62. Un tren de metro de $5{,}00 \times 10^5$ -kg se detiene desde una rapidez de 0,500 m/s en 0,400 m gracias a un gran parachoques de resorte situado al final de la vía. ¿Cuál es la constante de resorte k del resorte?

63. Un palo saltarín tiene un resorte con una constante de resorte de $2{,}5 \times 10^4$ N/m, que se puede comprimir 12,0 cm. ¿A qué altura máxima del resorte sin comprimir puede saltar un niño sobre el palo utilizando solo la energía del resorte, si el niño y el palo tienen una masa total de 40 kg?

64. Un bloque de 500 g de masa está unido a un resorte de constante de resorte 80 N/m (vea la siguiente figura). El otro extremo del resorte está sujeto a un soporte mientras la masa descansa sobre una superficie áspera con un coeficiente de fricción de 0,20, que está inclinada con un ángulo de $30°$. El bloque es empujado a lo largo de la superficie hasta que el resorte se comprime 10 cm y luego es liberado del reposo. (a) ¿Cuánta energía potencial estaba almacenada en el sistema bloque-resorte-soporte cuando el bloque acaba de ser liberado? (b) Determine la rapidez del bloque cuando cruza el punto en el que el resorte no está comprimido ni estirado. (c) Determine la posición del bloque cuando acaba de llegar al reposo en su camino hacia arriba de la pendiente.



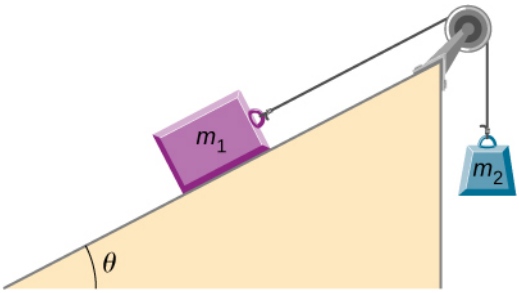
65. Un bloque de 200 g de masa se fija en el extremo de un resorte sin masa a la longitud de equilibrio de la constante de resorte 50 N/m. El otro extremo del resorte se sujeta al techo y la masa se suelta a una altura que se considera el punto donde la energía potencial gravitacional es cero. (a) ¿Cuál es la energía potencial neta del bloque en el instante en que el bloque está en el punto más bajo? (b) ¿Cuál es la energía potencial neta del bloque en el punto medio de su descenso? (c) ¿Cuál es la rapidez del bloque en el punto medio de su descenso?

66. Un cañón de camisetas lanza una camiseta a 5,00 m/s desde una plataforma a 3,00 m de altura desde el nivel del suelo. ¿Qué tan rápido se desplazará la camiseta si es atrapada por alguien cuyas manos están a) a 1,00 m del nivel del suelo? b) a 4,00 m del nivel del suelo? Ignore el arrastre del aire.

67. Un niño (32 kg) salta en un trampolín. El trampolín ejerce sobre el niño una fuerza restauradora de resorte con una constante de 5.000 N/m. En el punto más alto del rebote, el niño está a 1,0 m por encima de la superficie nivelada del trampolín. ¿Cuál es la distancia de compresión del trampolín? Ignore la flexión de las piernas o cualquier transferencia de energía del niño al trampolín mientras salta.

68. A continuación se muestra una caja de masa m_1 que descansa sobre una inclinación sin fricción en un ángulo sobre la horizontal de $\theta = 30°$. Esta caja está conectada por una cuerda relativamente sin masa, sobre una polea sin fricción, y finalmente conectada a una caja en reposo sobre el borde, marcada como m_2. Si m_1 y m_2 están a una altura h del suelo y $m_2 >> m_1$: (a) ¿Cuál es la energía potencial gravitacional inicial del sistema? (b) ¿Cuál es la energía

cinética final del sistema?

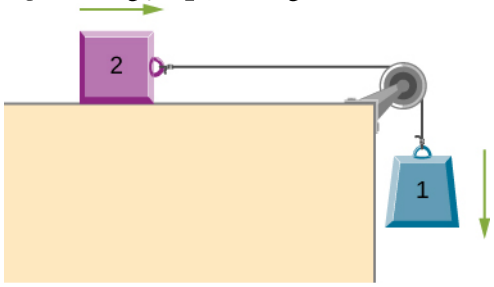


Problemas Adicionales

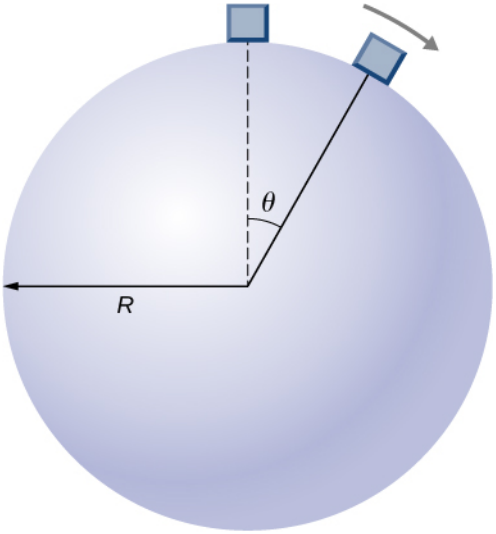
69. Un resorte sin masa con fuerza constante $k = 200$ N/m cuelga del techo. Se fija un bloque de 2,0 kg en el extremo libre del resorte y se suelta. Si el bloque cae 17 cm antes de volver a subir, ¿cuánto trabajo realiza la fricción durante su descenso?

70. Una partícula de masa 2,0 kg se mueve bajo la influencia de la fuerza $F(x) = \left(-5x^2 + 7x\right)$ N. Supongamos que sobre la partícula actúa también una fuerza de fricción. Si la rapidez de la partícula cuando comienza en $x = -4{,}0$ m es de 0,0 m/s y cuando llega a $x = 4{,}0$ m es de 9,0 m/s, ¿cuánto trabajo realiza sobre ella la fuerza de fricción entre $x = -4{,}0$ m y $x = 4{,}0$ m?

71. El bloque 2 mostrado abajo se desliza a lo largo de una mesa sin fricción mientras el bloque 1 cae. Ambos bloques están unidos por una polea sin fricción. Halle la rapidez de los bloques después de que cada uno se haya movido 2,0 m. Supongamos que empiezan en reposo y que la polea tiene una masa insignificante. Utilice $m_1 = 2{,}0$ kg y $m_2 = 4{,}0$ kg.



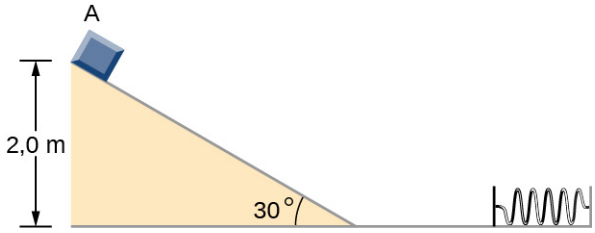
72. Un cuerpo de masa m y tamaño despreciable parte del reposo y se desliza hacia abajo por la superficie sin fricción de una esfera sólida de radio R. (Vea más abajo). Demuestre que el cuerpo sale de la esfera cuando $\theta = \cos^{-1}(2/3)$.



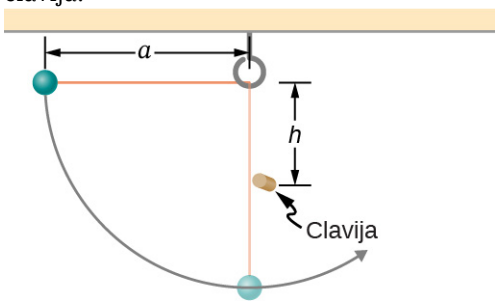
73. Una fuerza misteriosa actúa sobre todas las partículas a lo largo de una línea particular y siempre apunta hacia un punto particular P en la línea. La magnitud de la fuerza sobre una partícula aumenta como el cubo de la distancia a ese punto; es decir $F \infty r^3$, si la distancia de P a la posición de la partícula es r. Supongamos que b es la constante de proporcionalidad, y escriba la magnitud de la fuerza como $F = br^3$. Encuentre la energía potencial de una partícula sometida a esta fuerza cuando la partícula está a una distancia D de P, suponiendo que la energía potencial es cero cuando la partícula está en P.

74. Un objeto de 10 kg de masa se suelta en el punto A, se desliza hasta la parte inferior de una inclinación de 30°, luego colisiona con un resorte horizontal sin masa y lo comprime una distancia máxima de 0,75 m. (Vea más abajo). La constante de resorte es de 500 M/m, la altura de la pendiente es de 2,0 m y la superficie horizontal no tiene fricción. (a) ¿Cuál es la rapidez del objeto en la parte inferior de la pendiente? (b) ¿Cuál es el trabajo de fricción sobre el objeto mientras está en la pendiente? (c) El resorte retrocede y envía el objeto de vuelta hacia la pendiente. ¿Cuál es la rapidez del objeto cuando

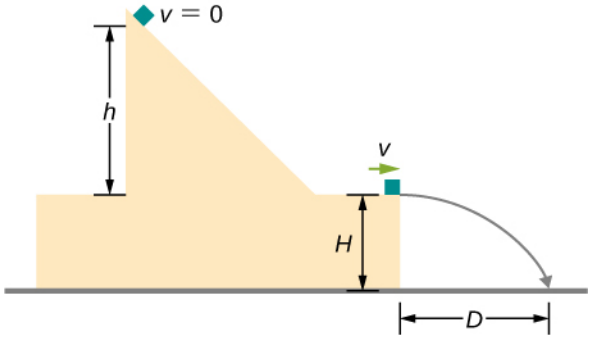
llega a la base de la pendiente? (d) ¿Qué distancia vertical recorre de vuelta hacia arriba de la pendiente?



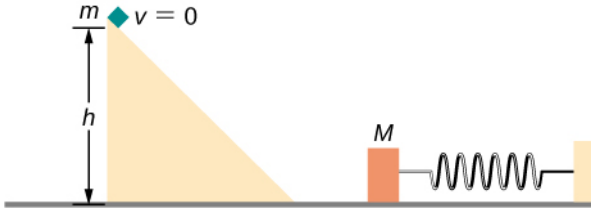
75. A continuación se muestra una pequeña bola de masa m unida a una cuerda de longitud a. Una pequeña clavija se sitúa a una distancia h por debajo del punto donde se apoya la cuerda. Si la bola se suelta cuando la cuerda está horizontal, demuestre que h debe ser mayor que $3a/5$ para que la bola gire completamente alrededor de la clavija.



76. Un bloque sale horizontalmente de una superficie inclinada sin fricción tras caer a una altura h. Halle la distancia horizontal D a la que caerá en el suelo, en términos de h, H y g.



77. Un bloque de masa m, después de deslizarse por una pendiente sin fricción, golpea otro bloque de masa M que está unido a un resorte de constante de resorte k (vea más abajo). Los bloques se pegan al impactar y se desplazan juntos. (a) Encuentre la compresión del resorte en términos de m, M, h, g y k cuando la combinación llega al reposo. Sugerencia: La rapidez de los bloques combinados $m + M$ (v_2) se basa en la rapidez del bloque m justo antes de la colisión con el bloque M (v_1) según la ecuación $v_2 = (m/m) + M\ (v_1)$. Esto se analizará más adelante, en el capítulo sobre Momento lineal y colisiones. (b) La pérdida de energía cinética como resultado de la unión de las dos masas al impactar se almacena en la llamada energía de enlace de las dos masas. Calcule la energía de enlace.



78. Un bloque de 300 g de masa está unido a un resorte de constante de resorte de 100 N/m. El otro extremo del resorte está sujeto a un soporte mientras el bloque descansa sobre una mesa horizontal lisa y se desliza libremente sin ninguna fricción. El bloque se empuja horizontalmente hasta que el resorte se comprime 12 cm, y entonces el bloque se libera del reposo. (a) ¿Cuánta energía potencial estaba almacenada en el sistema de bloque-resorte-soporte cuando el bloque se acaba de liberar? (b) Determine la rapidez del bloque cuando cruza el punto en el que el resorte no está ni comprimido ni estirado. (c) Determine la rapidez del bloque cuando ha recorrido una distancia de 20 cm desde donde fue liberado.

79. Consideremos un bloque de 0,200 kg de masa unido a un resorte de constante de resorte de 100 N/m. El bloque se coloca en una mesa sin fricción, y el otro extremo del resorte se fija a la pared de manera que el resorte quede nivelado con la mesa. A continuación, se empuja el bloque para que el resorte se comprima 10,0 cm. Halle la rapidez del bloque al cruzar (a) el punto cuando el resorte no está estirado, (b) 5,00 cm a la izquierda del punto en (a), y (c) 5,00 cm a la derecha del punto en (a).

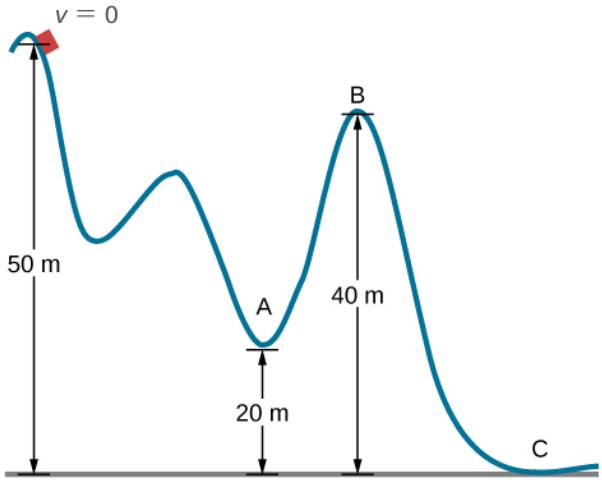
80. Un esquiador parte del reposo y se desliza cuesta abajo. ¿Cuál será la rapidez del esquiador si desciende a 20 metros de altura? Ignore la resistencia del aire (que, en realidad, será bastante) y la fricción entre los esquís y la nieve.

81. Repita el problema anterior, pero esta vez suponga que el trabajo realizado por la resistencia del aire no puede ignorarse. Supongamos que el trabajo realizado por la resistencia del aire cuando el esquiador va de A a B por la trayectoria de la colina dada es de -2.000 J. El trabajo realizado por la resistencia del aire es negativo ya que la resistencia del aire actúa en sentido contrario al desplazamiento. Suponiendo que la masa del esquiador es de 50 kg, ¿cuál es la rapidez del esquiador en el punto

B?

82. Dos cuerpos interactúan mediante una fuerza conservativa. Demuestre que la energía mecánica de un sistema aislado formado por dos cuerpos que interactúan con una fuerza conservativa se conserva. (*Pista*: Comience con la tercera ley de Newton y la definición de trabajo para hallar el trabajo realizado en cada cuerpo por la fuerza conservativa).

83. En un parque de atracciones, un vagón rueda en una pista como la que se muestra a continuación. Halle la rapidez del vagón en *A*, *B* y *C*. Observe que el trabajo realizado por la fricción de rodadura es cero, dado que el desplazamiento del punto en el que la fricción de rodadura actúa sobre los neumáticos está momentáneamente en reposo y, por lo tanto, tiene un desplazamiento cero.



84. Se ata una bola de acero de 200 g a una cuerda "sin masa" de 2,00 m y se cuelga del techo para hacer un péndulo, y luego, se lleva la bola a una posición que forme un ángulo de $30°$ en dirección vertical y es liberada del reposo. Ignorando los efectos de la resistencia del aire, halle la rapidez de la bola cuando la cuerda (a) está verticalmente hacia abajo, (b) forma un ángulo de $20°$ con la vertical y (c) forma un ángulo de $10°$ con la vertical.

85. Se lanza un disco de hockey de 300 g a través de un estanque cubierto de hielo. Antes de golpearlo, el disco de hockey estaba en reposo. Después del golpe, el disco tiene una rapidez de 40 m/s. El disco se detiene después de recorrer una distancia de 30 m. (a) Describa cómo cambia la energía del disco con el tiempo; indique los valores numéricos de cualquier trabajo o energía involucrados. (b) Halle la magnitud de la fuerza de fricción neta.

86. Un proyectil de 2 kg de masa se dispara a una rapidez de 20 m/s en un ángulo de $30°$ con respecto a la horizontal. (a) Calcule la energía total inicial del proyectil, dado que el punto de referencia de la energía potencial gravitacional es cero en la posición de lanzamiento. (b) Calcule la energía cinética en la posición vertical más alta del proyectil. (c) Calcule la energía potencial gravitacional en la posición vertical más alta. (d) Calcule la altura máxima que alcanza el proyectil. Compare este resultado al resolver el mismo problema utilizando sus conocimientos sobre el movimiento de proyectil.

87. Se dispara un proyectil de artillería contra un objetivo situado a 200 m del suelo. Cuando el proyectil está a 100 m en el aire, tiene una rapidez de 100 m/s. ¿Cuál es su rapidez cuando alcanza su objetivo? Ignore la fricción del aire.

88. ¿Cuánta energía se pierde por una fuerza de arrastre disipativa si una persona de 60 kg cae a una rapidez constante durante 15 metros?

89. Una caja se desliza sobre una superficie sin fricción con una energía total de 50 J. Choca con un resorte y lo comprime una distancia de 25 cm del equilibrio. Si la misma caja con la misma energía inicial se desliza sobre una superficie áspera, solo comprime el resorte una distancia de 15 cm, ¿cuánta energía habrá perdido al deslizarse sobre la superficie áspera?

CAPÍTULO 9
Momento lineal y colisiones



Figura 9.1 Los conceptos de impulso, momento y centro de masa son cruciales para que un jugador de béisbol de las grandes ligas consiga batear. Si juzga mal estas cantidades, podría romper el bate (créditos: modificación de la obra de "Cathy T"/Flickr).

ESQUEMA DEL CAPITULO

9.1 Momento lineal
9.2 Impulso y colisiones
9.3 Conservación del momento lineal
9.4 Tipos de colisiones
9.5 Colisiones en varias dimensiones
9.6 Centro de masa
9.7 Propulsión de cohetes

INTRODUCCIÓN Los conceptos de trabajo, energía y el teorema de trabajo-energía son valiosos por dos razones principales. En primer lugar, son potentes herramientas computacionales que facilitan el análisis de sistemas físicos complejos más allá de las leyes de Newton (por ejemplo, sistemas con fuerzas no constantes) y, en segundo lugar, la observación de que la energía total de un sistema cerrado se conserva significa que el sistema solo puede evolucionar de forma coherente con la conservación de energía. En otras palabras, un sistema no puede evolucionar al azar, sino que cambia únicamente en formas que conserven la energía.

En este capítulo, desarrollamos y definimos otra cantidad conservada, denominada *momento lineal*, y otra relación (el *teorema del momento-impulso*), que pondrá una restricción adicional sobre cómo evoluciona un sistema en el tiempo. La conservación del momento sirve para entender las colisiones, como la que se muestra en la imagen anterior. Es tan potente, tan importante y tan útil como la conservación de la energía y el teorema de trabajo-energía.

9.1 Momento lineal

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar físicamente en qué consiste el momento.
- Calcular el momento de un objeto en movimiento.

Nuestro estudio de la energía cinética mostró que la comprensión completa del movimiento de un objeto debe incluir tanto su masa como su velocidad ($K = (1/2)mv^2$). Sin embargo, por muy potente que sea este concepto, no incluye ninguna información sobre la dirección del vector de velocidad del objeto en movimiento. Ahora definiremos una cantidad física que incluye la dirección.

Al igual que la energía cinética, esta cantidad incluye tanto la masa como la velocidad; al igual que la energía cinética, es una forma de caracterizar la "cantidad de movimiento" de un objeto. Se le da el nombre de **momento** (de la palabra latina *movimentum*, que significa "movimiento"), y se representa con el símbolo p.

Momento

El momento p de un objeto es el producto de su masa por su velocidad:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}. \tag{9.1}$$



FIGURA 9.2 Los vectores de velocidad y momento del balón están en la misma dirección. La masa del balón es de unos 0,5 kg, por lo que el vector de momento es aproximadamente la mitad de la longitud del vector de velocidad, ya que el momento es velocidad por masa (créditos: modificación del trabajo de Ben Sutherland).

Como se muestra en la Figura 9.2, el momento es una cantidad vectorial (ya que la velocidad lo es). Este es uno de los aspectos que hace que el momento sea útil y no una duplicación de la energía cinética. Quizá sea más útil para determinar si el movimiento de un objeto es difícil de cambiar (Figura 9.3) o fácil de cambiar (Figura 9.4).



FIGURA 9.3 Este supertanquero transporta una enorme masa de petróleo; en consecuencia, se necesita mucho tiempo para que una fuerza cambie su velocidad (comparativamente pequeña) (créditos: modificación de la obra de "the_tahoe_guy"/Flickr).

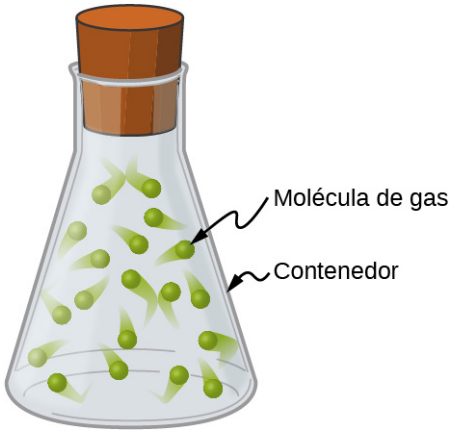


FIGURA 9.4 Las moléculas de gas pueden tener velocidades muy grandes, pero estas velocidades cambian casi instantáneamente cuando colisionan con las paredes del recipiente o entre sí. Esto se debe principalmente a que sus masas son muy pequeñas.

A diferencia de la energía cinética, el momento depende por igual de la masa y la velocidad de un objeto. Por ejemplo, como aprenderá cuando estudie termodinámica, la rapidez media de una molécula de aire a temperatura ambiente es de aproximadamente 500 m/s, con una masa molecular media de 6×10^{-25} kg; por lo tanto, su momento es

$$p_{\text{molécula}} = \left(6 \times 10^{-25}\ \text{kg}\right)\left(500\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 3 \times 10^{-22}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

A modo de comparación, un automóvil típico puede tener una rapidez de solo 15 m/s, pero una masa de 1.400 kg, lo que le da un momento de

$$p_{\text{auto}} = (1.400\ \text{kg})\left(15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 21.000\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

Estos momentos son diferentes en 27 órdenes de magnitud, ¡o un factor de mil millones de mil millones de mil millones!

9.2 Impulso y colisiones

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar físicamente qué es impulso.
- Describir lo que hace un impulso.
- Relacionar los impulsos con las colisiones.
- Aplicar el teorema del momento-impulso para resolver problemas.

Hemos definido el momento como el producto de la masa y la velocidad. Por lo tanto, si la velocidad de un objeto cambia (debido a la aplicación de una fuerza sobre el objeto), entonces necesariamente, su momento también cambia. Esto indica una conexión entre el momento y la fuerza. El propósito de esta sección es explorar y describir esa conexión.

Supongamos que aplica una fuerza a un objeto libre durante cierto tiempo. Evidentemente, cuanto mayor sea la fuerza, mayor será el cambio de momento del objeto. Alternativamente, cuanto más tiempo se aplique esta fuerza, también será mayor el cambio de momento, como se representa en la Figura 9.5. Por lo tanto, la cantidad en la que cambia el movimiento del objeto es proporcional a la magnitud de la fuerza, y también al intervalo de tiempo en el que se aplica la fuerza.

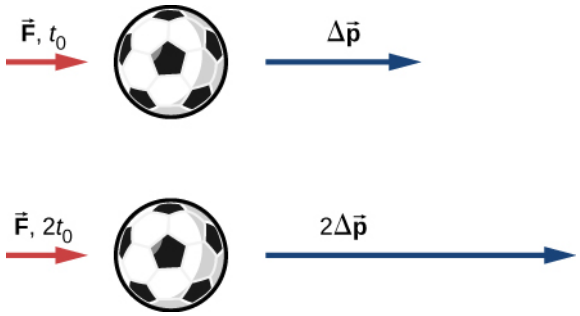


FIGURA 9.5 El cambio de momento de un objeto es proporcional a la duración de la fuerza aplicada. Si se ejerce una fuerza sobre el balón más bajo durante el doble de tiempo que sobre el balón de arriba, entonces el cambio en el momento del balón más bajo es el doble que el del balón de arriba.

Matemáticamente, si una cantidad es proporcional a dos (o más) cosas, entonces es proporcional al producto de esas cosas. El producto de una fuerza por un intervalo de tiempo (sobre el que actúa esa fuerza) se llama **impulso**, y recibe el símbolo $\vec{\mathbf{J}}$.

Impulso

Supongamos que $\vec{\mathbf{F}}(t)$ sea la fuerza aplicada a un objeto en un intervalo de tiempo diferencial dt (Figura 9.6). El impulso resultante sobre el objeto se define como

$$d\vec{\mathbf{J}} \equiv \vec{\mathbf{F}}(t)dt. \qquad 9.2$$

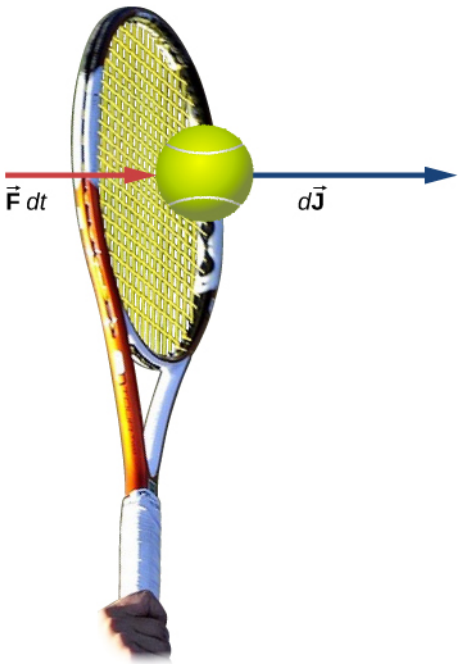


FIGURA 9.6 La fuerza que aplicada la raqueta a una pelota de tenis durante un intervalo de tiempo genera un impulso que actúa sobre la pelota.

El impulso total en el intervalo $t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}$ es

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} d\vec{\mathbf{J}} \text{ o } \vec{\mathbf{J}} \equiv \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \vec{\mathbf{F}}(t)dt. \qquad 9.3$$

La Ecuación 9.2 y la Ecuación 9.3 señalan conjuntamente que, cuando una fuerza se aplica durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt, provoca un impulso infinitesimal $d\vec{\mathbf{J}}$, y el impulso total dado al objeto se define como la suma (integral) de todos estos impulsos infinitesimales.

Para calcular el impulso mediante la Ecuación 9.3, necesitamos conocer la función de la fuerza $F(t)$, que a menudo no conocemos. Sin embargo, el resultado del cálculo es útil aquí: Recordemos que el valor medio de una función a lo largo de un intervalo se calcula mediante

$$f(x)_\mathrm{ave} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} f(x)dx$$

donde $\Delta x = x_\mathrm{f} - x_\mathrm{i}$. Aplicando esto a la función de fuerza dependiente del tiempo, obtenemos

$$\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{ave} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \vec{\mathbf{F}}(t)dt. \qquad 9.4$$

Por lo tanto, a partir de la Ecuación 9.3,

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{F}}_\mathrm{ave}\,\Delta t. \qquad 9.5$$

La idea es que puede calcular el impulso sobre el objeto, aunque no conozca los detalles de la fuerza en función del tiempo; solo necesita la fuerza media. De hecho, el proceso suele ser inverso: Se determina el impulso (por medición o cálculo) y luego se calcula la fuerza media que ha causado ese impulso.

Para calcular el impulso, se obtiene un resultado útil al escribir la fuerza en la Ecuación 9.3 como $\vec{\mathbf{F}}(t) = m\vec{\mathbf{a}}(t)$:

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \vec{\mathbf{F}}(t)dt = m\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \vec{\mathbf{a}}(t)dt = m\left[\vec{\mathbf{v}}(t_\mathrm{f}) - \vec{\mathbf{v}}_\mathrm{i}\right].$$

Para una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ave}} = \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, esto se simplifica a

$$\vec{\mathbf{J}} = m\vec{\mathbf{a}}\Delta t = m\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{f} - m\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{i} = m(\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{f} - \vec{\mathbf{v}}_\mathrm{i}).$$

Esto es,

$$\vec{\mathbf{J}} = m\Delta\vec{\mathbf{v}}. \qquad 9.6$$

Observe que la forma integral, la Ecuación 9.3, se aplica también a las fuerzas constantes; en ese caso, dado que la fuerza es independiente del tiempo, sale de la integral, que puede entonces evaluarse trivialmente.

EJEMPLO 9.1

El cráter del meteorito de Arizona

Hace aproximadamente 50.000 años, un meteorito de hierro y níquel de gran tamaño (radio de 25 m) colisionó con la Tierra a una rapidez estimada de $1{,}28 \times 10^4$ m/s en lo que hoy es el desierto del norte de Arizona, en los Estados Unidos. El impacto produjo un cráter que todavía es visible hoy en día (Figura 9.7); tiene aproximadamente 1.200 m de diámetro (tres cuartos de milla), 170 m de profundidad y un borde que se eleva 45 m por encima de la llanura desértica circundante. Los meteoritos de hierro-níquel suelen tener una densidad de $\rho = 7.970\,\mathrm{kg/m^3}$. Utilice las consideraciones de impulso para estimar la fuerza media y la fuerza máxima que el meteorito aplicó a la Tierra durante el impacto.



FIGURA 9.7 El cráter del meteorito de Arizona en Flagstaff, Arizona (a menudo denominado cráter Barringer en honor a la persona que sugirió por primera vez su origen y cuya familia es propietaria del terreno) (créditos: modificación de la obra de "Shane.torgerson"/Wikimedia Commons).

Estrategia

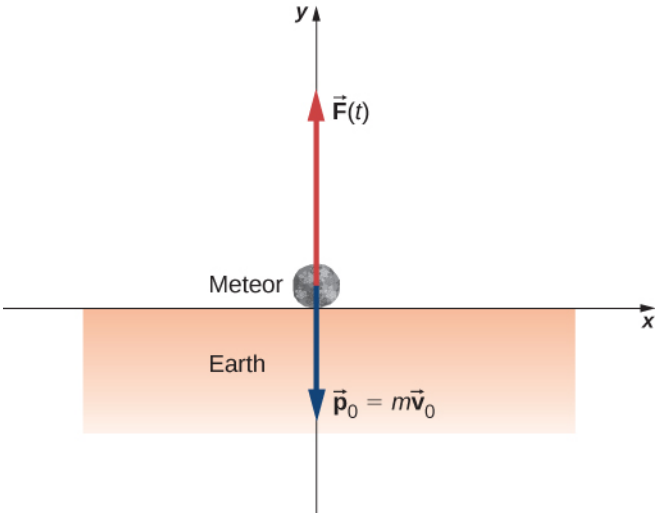
Es conceptualmente más fácil invertir la pregunta y calcular la fuerza que la Tierra aplicó al meteorito para detenerlo. Por lo tanto, calcularemos la fuerza sobre el meteorito y luego usaremos la tercera ley de Newton para argumentar que la fuerza del meteorito sobre la Tierra fue igual en magnitud y opuesta en dirección.

Utilizando los datos dados sobre el meteorito, y haciendo conjeturas razonables sobre la forma del meteorito y el tiempo de impacto, calculamos primero el impulso utilizando la Ecuación 9.6. A continuación, utilizamos la

relación entre la fuerza y el impulso en la Ecuación 9.5 para estimar la fuerza media durante el impacto. Luego, elegimos una función razonable de fuerza para el evento de impacto, calculamos el valor medio de esa función con la Ecuación 9.4 y establecemos la expresión resultante igual a la fuerza media calculada. Esto nos permite resolver la fuerza máxima.

Solución

Defina hacia arriba como la dirección de la $+y$. Para simplificar, supongamos que el meteorito se desplaza verticalmente hacia abajo antes del impacto. En ese caso, su velocidad inicial es $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{i}} = -v_{\mathrm{i}}\hat{\mathbf{j}}$, y la fuerza que la Tierra ejerce sobre el meteorito apunta hacia arriba, $\vec{\mathbf{F}}(t) = +F(t)\hat{\mathbf{j}}$. La situación en $t = 0$ se muestra a continuación.



La fuerza media durante el impacto se relaciona con el impulso mediante

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ave}} = \frac{\vec{\mathbf{J}}}{\Delta t}.$$

A partir de la Ecuación 9.6, $\vec{\mathbf{J}} = m\Delta\vec{\mathbf{v}}$, por lo que tenemos

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ave}} = \frac{m\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}.$$

La masa es igual al producto de la densidad del meteorito por su volumen:

$$m = \rho V.$$

Si suponemos (conjeturamos) que el meteorito era aproximadamente esférico, tenemos

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Así, obtenemos

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ave}} = \frac{\rho V\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\left(\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{f}} - \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{i}}\right)}{\Delta t}.$$

El problema establece que la velocidad en el impacto fue $-1{,}28 \times 10^4\ \mathrm{m/s}\hat{\mathbf{j}}$ (la velocidad final es cero); además, suponemos que el impacto primario duró aproximadamente $t_{\mathrm{máx}} = 2\ \mathrm{s}$. Sustituyendo estos valores obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{\text{ave}} &= \frac{\left(7.970\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left[\frac{4}{3}\pi(25\ \text{m})^3\right]\left[0\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-1{,}28 \times 10^4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\hat{\mathbf{j}}\right)\right]}{2\ \text{s}} \cdot \\ &= +\left(3{,}33\ \times\ 10^{12}\ \text{N}\right)\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

Es la fuerza media aplicada durante la colisión. Observe que este vector de fuerza apunta en la misma dirección que el cambio del vector velocidad $\Delta\vec{\mathbf{v}}$.

A continuación, calculamos la fuerza máxima. El impulso se relaciona con la función de fuerza mediante

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_{t_\text{i}}^{t_\text{máx}} \vec{\mathbf{F}}(t)dt.$$

Tenemos que hacer una elección razonable de la fuerza en función del tiempo. Definimos $t = 0$ como el momento en que el meteorito toca el suelo por primera vez. Entonces suponemos que la fuerza es máxima en el impacto y cae rápidamente a cero. La función que hace esto es

$$F(t) = F_\text{máx}\, e^{-t^2/\left(2\tau^2\right)}.$$

(El parámetro τ representa la rapidez con que la fuerza disminuye hasta llegar a cero). La fuerza media es

$$F_\text{ave} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{t_\text{máx}} F_\text{máx}\, e^{-t^2/\left(2\tau^2\right)}\, dt$$

donde $\Delta t = t_\text{máx} - 0\ \text{s}$. Como ya tenemos un valor numérico para F_ave, podemos utilizar el resultado de la integral para obtener $F_\text{máx}$.

Eligiendo $\tau = \frac{1}{e}t_\text{máx}$ (esta es una opción común, como se verá en capítulos posteriores), y conjeturando que $t_\text{máx} = 2\ \text{s}$, esta integral se evalúa como

$$F_\text{avg} = 0{,}458\ F_\text{máx}.$$

Así, la fuerza máxima tiene una magnitud de

$$\begin{aligned}0{,}458 F_\text{máx} &= 3{,}33\ \times\ 10^{12}\ \text{N} \\ F_\text{máx} &= 7{,}27\ \times\ 10^{12}\ \text{N}\end{aligned}.$$

La función completa de fuerza, incluida la dirección, es

$$\vec{\mathbf{F}}(t) = \left(7{,}27\ \times\ 10^{12}\ \text{N}\right) e^{-t^2/\left(8\text{s}^2\right)}\hat{\mathbf{j}}.$$

Esta es la fuerza que la Tierra aplicó al meteorito; por la tercera ley de Newton, la fuerza que el meteorito aplicó a la Tierra es

$$\vec{\mathbf{F}}(t) = -\left(7{,}27\ \times\ 10^{12}\ \text{N}\right) e^{-t^2/\left(8\text{s}^2\right)}\hat{\mathbf{j}}$$

que es la respuesta a la pregunta original.

Importancia

El gráfico de esta función contiene información importante. Grafiquemos (la magnitud de) esta función y la fuerza media juntas (Figura 9.8).

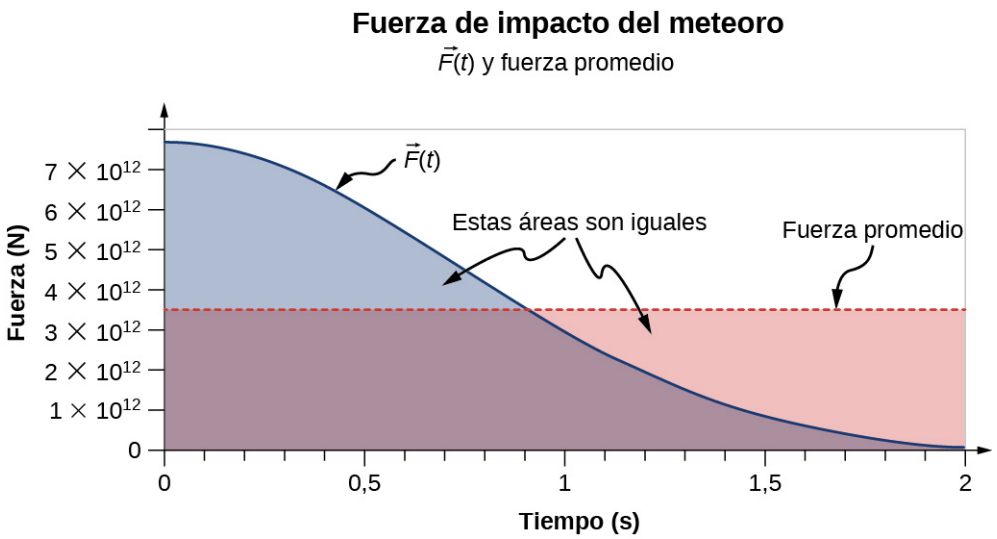


FIGURA 9.8 Gráfico de la fuerza media (en rojo) y de la fuerza como función del tiempo (en azul) del impacto del meteorito. Las áreas bajo las curvas son iguales entre sí, y son numéricamente iguales al impulso aplicado.

Observe que se ha rellenado el área bajo cada gráfico. Para el gráfico de la fuerza (constante) F_{ave}, el área es un rectángulo, correspondiente a $F_{\text{ave}}\Delta t = J$. En cuanto al gráfico de $F(t)$, recordemos del cálculo que el área bajo el gráfico de una función es numéricamente igual a la integral de esa función, sobre el intervalo especificado; así que aquí, esto es $\int_0^{t_{\text{máx}}} F(t)dt = J$. Así, las áreas son iguales, y ambas representan el impulso que el meteorito aplicó a la Tierra durante el impacto de dos segundos. La fuerza media sobre la Tierra parece una fuerza enorme, y lo es. Sin embargo, la Tierra apenas lo notó. La aceleración que obtuvo la Tierra fue solo

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{-\vec{\mathbf{F}}_{\text{ave}}}{M_{\text{Tierra}}} = \frac{-\left(3{,}33 \times 10^{12}\ \text{N}\right)\hat{\mathbf{j}}}{5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg}} = -\left(5{,}6 \times 10^{-13}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

que es completamente inconmensurable. Eso sí, el impacto creó ondas sísmicas que hoy en día podrían detectar los modernos equipos de vigilancia.

EJEMPLO 9.2

Los beneficios del impulso

Un auto que viaja a 27 m/s colisiona con un edificio. La colisión con el edificio hace que el auto se detenga en aproximadamente 1 segundo. El conductor, que pesa 860 N, está protegido por una combinación de cinturón de seguridad de tensión variable y una bolsa de aire (Figura 9.9). (En efecto, el conductor colisiona con el cinturón de seguridad y la bolsa de aire y *no* con el edificio). La bolsa de aire y el cinturón de seguridad disminuyen su velocidad, de manera que se detiene en aproximadamente 2,5 s.

a. ¿Qué fuerza media experimenta el conductor durante la colisión?
b. Sin el cinturón de seguridad y la bolsa de aire, el tiempo de colisión (con el volante) habría sido de aproximadamente 0,20 s. ¿Qué fuerza experimentaría en este caso?

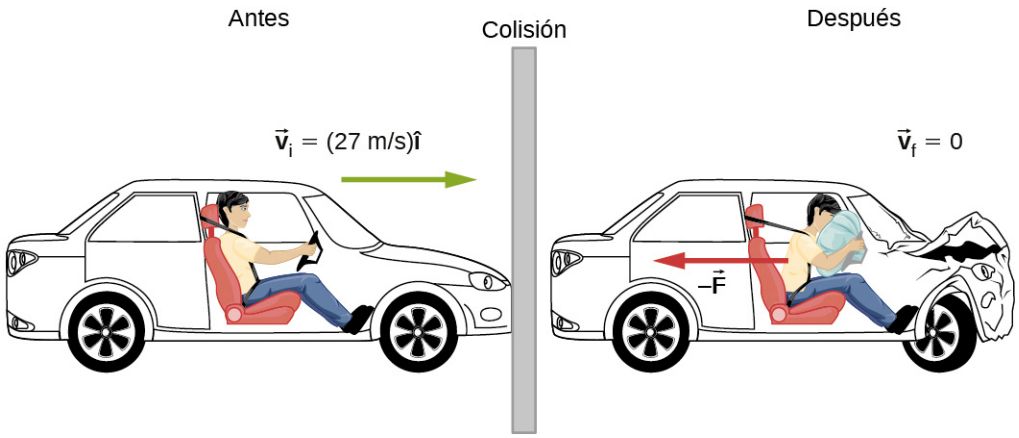


FIGURA 9.9 El movimiento del auto y de su conductor en el instante anterior y en el instante posterior a la colisión con el muro. El conductor sujetado experimenta una gran fuerza hacia atrás por el cinturón de seguridad y la bolsa de aire, lo que hace que su velocidad disminuya hasta cero. (La fuerza hacia delante del respaldo del asiento es mucho menor que la fuerza hacia atrás, por lo que la ignoramos en la solución).

Estrategia

Se nos da el peso del conductor, sus velocidades inicial y final, y el tiempo de la colisión; se nos pide que calculemos una fuerza. El impulso parece la forma correcta de abordar esto; podemos combinar la Ecuación 9.5 y la Ecuación 9.6.

Solución

a. Defina la dirección de la $x+$ como la dirección en la que se desplaza inicialmente el auto. Sabemos que

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{F}}\Delta t$$

y

$$\vec{\mathbf{J}} = m\Delta\vec{\mathbf{v}}.$$

Dado que J es igual a ambas cosas, deben ser iguales entre sí:

$$\vec{\mathbf{F}}\Delta t = m\Delta\vec{\mathbf{v}}.$$

Tenemos que convertir este peso en la masa equivalente, expresada en unidades del SI:

$$\frac{860\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 87{,}8\ \text{kg}.$$

Recordando que $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i$, y observando que la velocidad final es cero, resolvemos la fuerza:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\frac{0 - v_i\hat{\mathbf{i}}}{\Delta t} = (87{,}8\ \text{kg})\left(\frac{-(27\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{i}}}{2{,}5\ \text{s}}\right) = -(948\ \text{N})\,\hat{\mathbf{i}}.$$

El signo negativo implica que la fuerza lo frena. Para tener una perspectiva, esto es aproximadamente 1,1 veces su propio peso.

b. El mismo cálculo, solo que el intervalo de tiempo es diferente:

$$\vec{\mathbf{F}} = (87{,}8\ \text{kg})\left(\frac{-(27\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{i}}}{0{,}20\ \text{s}}\right) = -(11.853\ \text{N})\,\hat{\mathbf{i}}$$

que es aproximadamente 14 veces su propio peso. ¡Gran diferencia!

Importancia

Como ve, el valor de la bolsa de aire es la medida en que reduce la fuerza sobre los ocupantes del vehículo. Por tal motivo, se exigen en todos los vehículos de pasajeros en los Estados Unidos desde 1991, y son habituales en toda Europa y Asia desde mediados de la década de los años 90 del siglo XX. El cambio del momento en un choque es el mismo, con o sin bolsa de aire; la fuerza, sin embargo, es muy diferente.

Efecto del impulso

Dado que el impulso es una fuerza que actúa durante cierto tiempo, hace que el movimiento de un objeto cambie. Recuerde la Ecuación 9.6:

$$\vec{\mathbf{J}} = m\Delta\vec{\mathbf{v}}.$$

Dado que $m\vec{\mathbf{v}}$ es el momento de un sistema, $m\Delta\vec{\mathbf{v}}$ es el *cambio* del momento $\Delta\vec{\mathbf{p}}$. Esto nos da la siguiente relación, que recibe el nombre de **teorema del momento-impulso** (o relación).

Teorema del momento-impulso

El impulso aplicado a un sistema cambia el momento del sistema, y ese cambio de momento es exactamente igual al impulso que se aplicó:

$$\vec{\mathbf{J}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}. \qquad 9.7$$

El teorema del momento-impulso se representa gráficamente en la Figura 9.10.

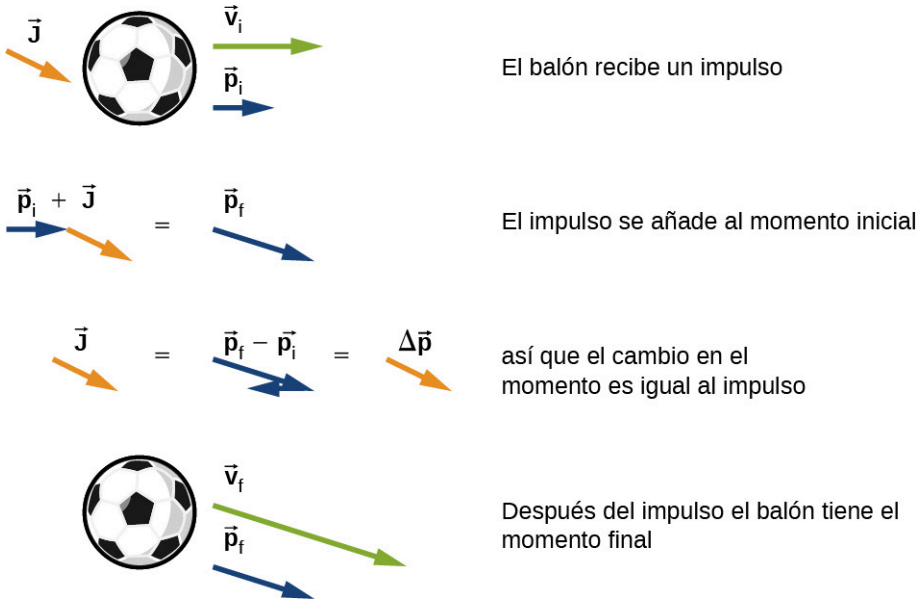


FIGURA 9.10 Ilustración del teorema del momento-impulso. (a) Un balón con velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_0$ y momento $\vec{\mathbf{p}}_0$ recibe un impulso $\vec{\mathbf{J}}$. (b) Este impulso se añade vectorialmente al momento inicial. (c) Por lo tanto, el impulso es igual al cambio de momento, $\vec{\mathbf{J}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}$. (d) Tras el impulso, el balón se desplaza con su nuevo momento $\vec{\mathbf{p}}_f$.

Hay dos conceptos cruciales en el teorema del momento-impulso:

1. El impulso es una cantidad vectorial; un impulso de, por ejemplo, $-(10\ \text{N}\cdot\text{s})\,\hat{\mathbf{i}}$ es muy diferente a un impulso de $+(10\ \text{N}\cdot\text{s})\,\hat{\mathbf{i}}$; provocan cambios de momento completamente opuestos.
2. Un impulso no provoca momento, sino que provoca un *cambio* en el momento de un objeto. Así, hay que restar el momento final del momento inicial y, dado que el momento es también una cantidad vectorial, hay que tener muy en cuenta los signos de los vectores del momento.

Las preguntas más frecuentes en relación con el impulso son para calcular la fuerza aplicada, o el cambio de velocidad que se produce como resultado de la aplicación de un impulso. El enfoque general es el mismo.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Teorema del momento-impulso

1. Exprese el impulso como la fuerza por el intervalo de tiempo correspondiente.
2. Exprese el impulso como el cambio de momento, normalmente $m\Delta v$.
3. Iguale esto y resuelva la cantidad deseada.

EJEMPLO 9.3

Mover la nave *Enterprise*

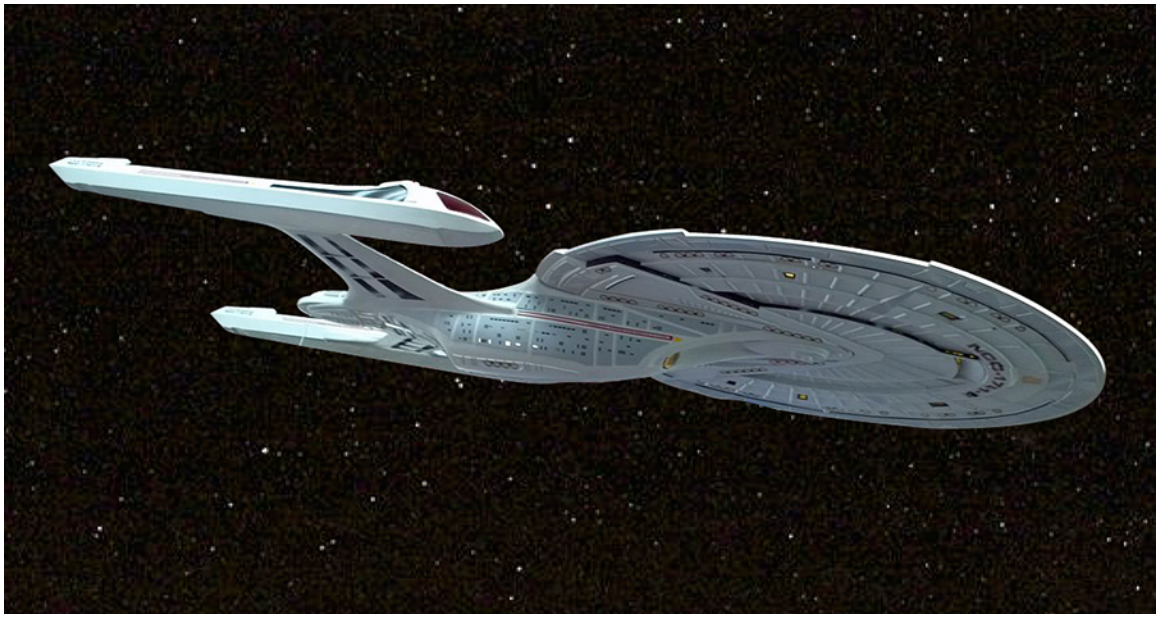


FIGURA 9.11 La nave ficticia *Enterprise* de las aventuras de "Viaje a las estrellas" funcionaba con los llamados "motores de impulso", que combinaban materia con antimateria para generar energía.

Cuando el capitán Picard ordena: "Sácanos; adelante un cuarto de impulso", la nave *Enterprise* (Figura 9.11) arranca desde el reposo hasta una rapidez final de $v_f = 1/4\left(3{,}0 \times 10^8 \text{ m/s}\right)$. Suponiendo que esta maniobra se complete en 60 s, ¿qué fuerza media aplicaron los motores de impulso a la nave?

Estrategia

Se nos pide una fuerza; conocemos las rapideces inicial y final (y, por tanto, el cambio de rapidez), y conocemos el intervalo en el que ha ocurrido todo esto. En concreto, sabemos el tiempo que actuó la fuerza. Esto sugiere utilizar la relación momento-impulso. Sin embargo, para esto, necesitamos la masa de la nave *Enterprise*. Una búsqueda en Internet da una mejor estimación de la masa de la nave *Enterprise* (en la película de 2009) como 2×10^9 kg.

Solución

Dado que este problema implica solo una dirección (es decir, la dirección de la fuerza aplicada por los motores), solo necesitamos la forma escalar del teorema del momento-impulso de la Ecuación 9.7, que es

$$\Delta p = J$$

con

$$\Delta p = m\Delta v$$

y

$$J = F\Delta t.$$

Al igualar estas expresiones obtenemos

$$F\Delta t = m\Delta v.$$

Si se resuelve para la magnitud de la fuerza y se insertan los valores dados, se obtiene

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{\left(2 \times 10^9 \text{ kg}\right)\left(7{,}5 \times 10^7 \text{ m/s}\right)}{60 \text{ s}} = 2{,}5 \times 10^{15} \text{ N}.$$

Importancia

Esta es una fuerza inimaginablemente enorme. No hace falta decir que una fuerza semejante mataría al instante a todos los que están a bordo, además de destruir todos los equipos. Afortunadamente, la nave *Enterprise* tiene "amortiguadores de inercia". Se deja a la imaginación del lector determinar cómo funcionan.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.1

La Fuerza Aérea de los EE. UU. utiliza "10*g*" (una aceleración igual a $10 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2$) como la aceleración máxima que puede soportar un ser humano (pero solo durante varios segundos) y sobrevivir. ¿Cuánto tiempo debe pasar la nave *Enterprise* acelerando si los seres humanos a bordo deben experimentar una media de $10g$ de aceleración como máximo? (Supongamos que los amortiguadores de inercia están desconectados).

EJEMPLO 9.4

La caída del iPhone

Apple lanzó su iPhone 6 Plus en noviembre de 2014. Según muchos informes, en un principio iba a tener una pantalla de zafiro, pero se cambió en el último momento por una de cristal endurecido. Según se informa, esto se debió a que la pantalla de zafiro se agrietó cuando el teléfono se cayó. ¿Qué fuerza sufrió el iPhone 6 Plus como resultado de la caída?

Estrategia

La fuerza que experimenta el teléfono se debe al impulso que le aplica el suelo al colisionar con este. Nuestra estrategia entonces es utilizar la relación momento-impulso. Calculamos el impulso, estimamos el tiempo de impacto y lo utilizamos para calcular la fuerza.

Tenemos que hacer un par de estimaciones razonables, así como encontrar datos técnicos sobre el propio teléfono. En primer lugar, supongamos que el teléfono se deja caer desde la altura del pecho en una persona de estatura media. En segundo lugar, supongamos que se deja caer desde el reposo, es decir, con una velocidad vertical inicial de cero. Por último, supongamos que el teléfono rebota muy poco y que la altura del rebote es despreciable.

Solución

Defina hacia arriba como la dirección de la $+y$. La altura típica es de aproximadamente $h = 1{,}5$ m y, como se ha señalado, $\vec{\mathbf{v}}_\text{i} = (0 \text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}}$. La fuerza media sobre el teléfono se relaciona con el impulso que el suelo aplica sobre este durante la colisión:

$$\vec{\mathbf{F}}_\text{ave} = \frac{\vec{\mathbf{J}}}{\Delta t}.$$

El impulso $\vec{\mathbf{J}}$ es igual al cambio de momento,

$$\vec{\mathbf{J}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}$$

entonces

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{ave}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t}.$$

Luego, el cambio de momento es

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = m\Delta\vec{\mathbf{v}}.$$

Hay que tener cuidado con las velocidades aquí; se trata del cambio de velocidad debido a la colisión con el suelo. Sin embargo, el teléfono también tiene una velocidad de caída inicial [$\vec{\mathbf{v}}_{\text{i}} = (0\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$], por lo que marcamos nuestras velocidades. Supongamos que:

- $\vec{\mathbf{v}}_{\text{i}}$ = la velocidad inicial con la que se dejó caer el teléfono (cero, en este ejemplo)
- $\vec{\mathbf{v}}_1$ = la velocidad que tuvo el teléfono en el instante justo antes de golpear el suelo
- $\vec{\mathbf{v}}_2$ = la velocidad final del teléfono al chocar contra el suelo

La Figura 9.12 muestra las velocidades en cada uno de estos puntos de la trayectoria del teléfono.

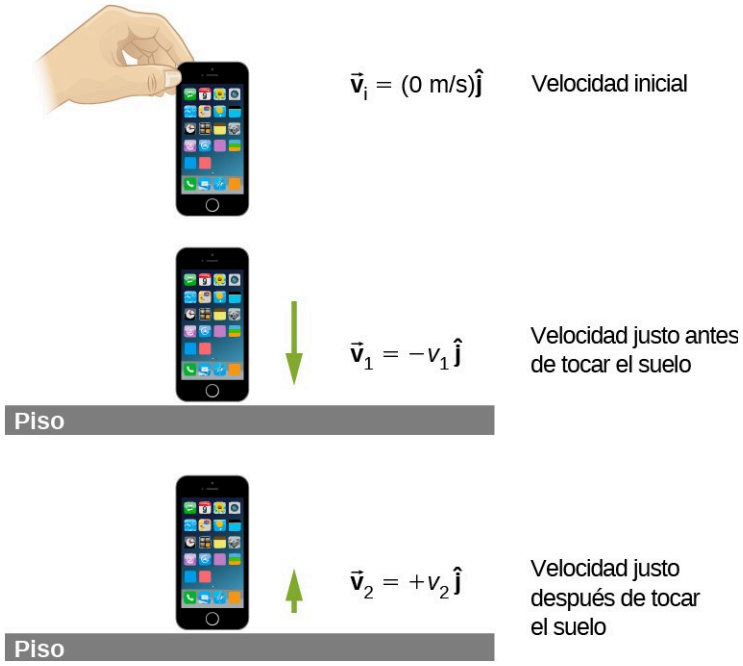


FIGURA 9.12 (a) La velocidad inicial del teléfono es cero, justo después de que la persona lo deja caer. (b) Justo antes de que el teléfono golpee el suelo, su velocidad es $\vec{\mathbf{v}}_1$, que por el momento se desconoce, salvo por su dirección, que es descendente ($-\hat{\mathbf{j}}$). (c) Después de rebotar en el suelo, el teléfono tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_2$, que también se desconoce, salvo por su dirección, que es ascendente ($+\hat{\mathbf{j}}$).

Con estas definiciones, el cambio de momento del teléfono durante la colisión contra el suelo es

$$m\Delta\vec{\mathbf{v}} = m\left(\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1\right).$$

Dado que suponemos que el teléfono no rebota en absoluto cuando golpea el suelo (o al menos, la altura de rebote es despreciable), entonces $\vec{\mathbf{v}}_2$ es cero, por lo que

$$\begin{aligned} m\Delta\vec{\mathbf{v}} &= m\left[0 - \left(-v_1\hat{\mathbf{j}}\right)\right] \\ m\Delta\vec{\mathbf{v}} &= +mv_1\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Podemos obtener la velocidad del teléfono justo antes de que toque el suelo mediante el empleo de la cinemática o la conservación de la energía. Utilizaremos aquí la conservación de la energía; debe rehacer esta parte del problema mediante el empleo de la cinemática y demostrar que obtiene la misma respuesta.

En primer lugar, defina el cero de la energía potencial como la posición en el suelo. Entonces, la conservación de la energía nos da:

$$\begin{aligned} E_\text{i} &= E_1 \\ K_\text{i} + U_\text{i} &= K_1 + U_1 \\ \tfrac{1}{2}mv_\text{i}^2 + mgh_\text{caída} &= \tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgh_\text{suelo}. \end{aligned}$$

Definiendo la $h_\text{suelo} = 0$ y utilizando la $\vec{\mathbf{v}}_\text{i} = (0\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$ nos da

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_\text{caída} \\ v_1 &= \pm\sqrt{2gh_\text{caída}}. \end{aligned}$$

Dado que v_1 es una magnitud vectorial, deberá ser positiva. Así, $m\Delta v = mv_1 = m\sqrt{2gh_\text{caída}}$. Insertando este resultado en la expresión de la fuerza se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}} &= \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t} \\ &= \frac{m\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} \\ &= \frac{+mv_1\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} \\ &= \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Por último, tenemos que estimar el tiempo de colisión. La forma habitual de estimar el tiempo de colisión es calcular cuánto tardaría el objeto en recorrer su propia longitud. El teléfono se mueve a 5,4 m/s justo antes de golpear el suelo, y tiene una longitud de 0,14 m, lo que da un tiempo de colisión estimado de 0,026 s. Insertando los números dados, obtenemos

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{(0{,}172\ \text{kg})\sqrt{2\left(9{,}8\ \text{m/s}^2\right)(1{,}5\ \text{m})}}{0{,}026\ \text{s}}\hat{\mathbf{j}} = (36\ \text{N})\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Importancia

El propio iPhone pesa apenas $(0{,}172\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2) = 1{,}68\ \text{N}$; la fuerza que le aplica el suelo es, por lo tanto, más de 20 veces su peso.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.2

¿Y si hubiéramos asumido que el teléfono *sí* rebotó en el impacto? ¿Habría aumentado la fuerza sobre el iPhone, la habría disminuido o no habría ninguna diferencia?

Momento y fuerza

En el Ejemplo 9.3, obtuvimos una relación importante:

$$\vec{\mathbf{F}}_\text{ave} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t}. \qquad 9.8$$

En palabras, la fuerza media aplicada a un objeto es igual al cambio de momento que provoca la fuerza, dividido entre el intervalo en el que se produce este cambio de momento. Esta relación es muy útil en situaciones en las que el tiempo de colisión Δt es pequeño, pero medible; los valores típicos serían 1/10ma de segundo, o incluso una milésima de segundo. Los accidentes de auto, el lanzamiento de un balón de fútbol o las colisiones de partículas subatómicas cumplirían este criterio.

Para un momento que cambia *continuamente*, debido a una fuerza que cambia continuamente, esto se convierte en una poderosa herramienta conceptual. En el límite $\Delta t \to dt$, la Ecuación 9.2 se convierte en

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}. \quad 9.9$$

Esto indica que la tasa de cambio del momento del sistema (lo que implica que el momento es una función del tiempo) es exactamente igual a la fuerza neta aplicada (también, en general, una función del tiempo). Se trata, de hecho, de la segunda ley de Newton, escrita en términos de momento y no de aceleración. Esta es la relación que el propio Newton presentó en su *Principia Mathematica* (aunque la denominó "cantidad de movimiento" en lugar de "momento").

Si la masa del sistema permanece constante, la Ecuación 9.3 se reduce a la forma más familiar de la segunda ley de Newton. Podemos ver esto al sustituir la definición de momento:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}.$$

La suposición de masa constante nos permitió sacar m de la derivada. Si la masa no es constante, no podemos utilizar esta forma de la segunda ley, sino que debemos partir de la Ecuación 9.3. Así, una de las ventajas de expresar la fuerza en términos de cambio de momento es que permite cambiar la masa del sistema, así como la velocidad. Este es un concepto que exploraremos cuando estudiemos el movimiento de los cohetes.

Segunda ley del movimiento de Newton en términos de momento

La fuerza externa neta sobre un sistema es igual a la tasa de cambio del momento de ese sistema causada por la fuerza:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

Aunque la Ecuación 9.3 permite cambiar la masa, como veremos en Propulsión de cohetes, la relación entre momento y fuerza sigue siendo útil cuando la masa del sistema es constante, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9.5

Calcular la fuerza: el saque de tenis de Venus Williams

Durante el Abierto de Francia de 2007, Venus Williams realizó el saque más rápido registrado en un partido de la máxima categoría femenina, alcanzando una rapidez de 58 m/s (209 km/h). ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre la pelota de tenis de 0,057 kg por la raqueta de Venus Williams? Supongamos que la rapidez de la pelota justo después del impacto es de 58 m/s, como se muestra en la Figura 9.13, que el componente horizontal inicial de la velocidad antes del impacto es despreciable, y que la pelota permaneció en contacto con la raqueta durante 5,0 ms.

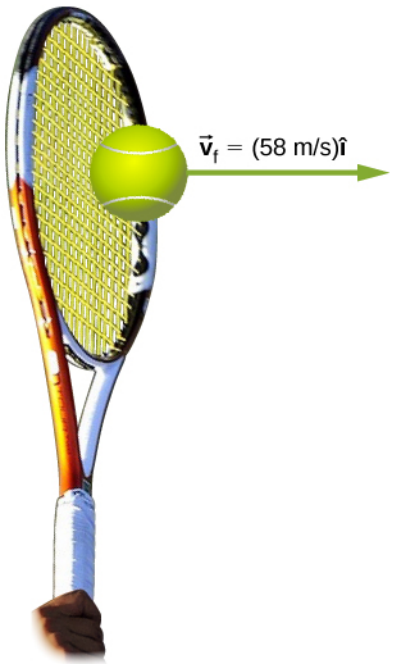


FIGURA 9.13 La velocidad final de la pelota de tenis es $\vec{\mathbf{v}}_f = (58\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{i}}$.

Estrategia

Este problema implica solo una dimensión, porque la pelota parte de no tener ningún componente de velocidad horizontal antes del impacto. La segunda ley de Newton expresada en términos de momento se escribe entonces como

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

Como se ha señalado anteriormente, cuando la masa es constante, el cambio de momento viene dado por

$$\Delta p = m\Delta v = m\,(v_f - v_i)$$

donde hemos utilizado escalares porque este problema implica solo una dimensión. En este ejemplo, se da la velocidad justo después del impacto y el intervalo de tiempo; así, una vez que Δp se calcula, podemos utilizar $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ para encontrar la fuerza.

Solución

Para determinar el cambio de momento, inserte los valores de las velocidades inicial y final en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\Delta p &= m\,(v_f - v_i)\\ &= (0{,}057\ \text{kg})\,(58\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s})\\ &= 3{,}3\ \tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Ahora se puede determinar la magnitud de la fuerza externa neta al utilizar

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{3{,}3\ \frac{\text{kg·m}}{\text{s}}}{5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 6{,}6 \times 10^{2}\ \text{N}.$$

donde hemos conservado únicamente dos cifras significativas en el último paso.

Importancia

Esta cantidad fue la fuerza media ejercida por la raqueta de Venus Williams sobre la pelota de tenis durante su breve impacto (observe que la pelota también experimentó la fuerza de gravedad de 0,57 N, pero esa fuerza no

se debió a la raqueta). Este problema también podría resolverse al hallar primero la aceleración y luego utilizar $F = ma$, pero se requeriría un paso adicional en comparación con la estrategia utilizada en este ejemplo.

9.3 Conservación del momento lineal

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el significado de "conservación del momento".
- Identificar correctamente si un sistema es, o no, cerrado.
- Definir un sistema cuyo momento se conserva.
- Expresar matemáticamente la conservación del momento en un sistema dado.
- Calcular una cantidad desconocida mediante la conservación del momento.

Recordemos la tercera ley de Newton: cuando dos objetos de masas m_1 y m_2 interactúan (lo que significa que aplican fuerzas entre sí), la fuerza que el objeto 2 aplica al objeto 1 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza que el objeto 1 aplica sobre el objeto 2. Supongamos que:

- $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ = la fuerza sobre m_1 de m_2
- $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ = la fuerza sobre m_2 de m_1

Entonces, en símbolos, la tercera ley de Newton establece

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_{21} &= -\vec{\mathbf{F}}_{12} \\ m_1\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{1}} &= -m_2\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{2}}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

(Recordemos que estas dos fuerzas no se cancelan porque se aplican a objetos diferentes. F_{21} causa que m_1 acelere, y F_{12} causa que m_2 acelere).

Aunque las magnitudes de las fuerzas sobre los objetos son las mismas, las aceleraciones no lo son, simplemente porque las masas (en general) son diferentes. Por lo tanto, los cambios de velocidad de cada objeto son diferentes:

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}}{dt} \neq \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}}{dt}.$$

Sin embargo, los productos de la masa y el cambio de velocidad *son* iguales (en magnitud):

$$m_1\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}}{dt} = -m_2\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}}{dt}. \tag{9.11}$$

Es una buena idea, en este punto, que tenga claro el significado físico de las derivadas en la Ecuación 9.3. A causa de la interacción, cada objeto termina cambiando su velocidad, en una cantidad *dv*. Además, la interacción se produce en un intervalo de tiempo *dt*, lo que significa que el cambio de velocidades también se produce en *dt*. Este intervalo es el mismo para cada objeto.

Supongamos, por el momento, que las masas de los objetos no cambian durante la interacción. (Más adelante relajaremos esta restricción). En ese caso, podemos halar las masas dentro de las derivadas:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}\right) = -\frac{d}{dt}\left(m_2\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}\right) \tag{9.12}$$

y así

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}}{dt} = -\frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{2}}}{dt}. \tag{9.13}$$

Esto indica que *la tasa a la que cambia el momento es la misma para ambos objetos.* Las masas son diferentes, y los cambios de velocidad son distintos, pero la tasa de cambio del producto de m y $\vec{\mathbf{v}}$ son las mismas.

Físicamente, esto significa que durante la interacción de los dos objetos (m_1 y m_2), ambos objetos tienen su momento cambiado; pero esos cambios son idénticos en magnitud, aunque opuestos en signo. Por ejemplo, el momento del objeto 1 puede aumentar, lo que significa que el momento del objeto 2 disminuye exactamente en la misma cantidad.

A la luz de esto, reescribamos la Ecuación 9.12 de forma más sugerente:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}_1}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{p}}_2}{dt} = 0. \tag{9.14}$$

Esto indica que, durante la interacción, aunque el momento del objeto 1 cambia, y el momento del objeto 2 también cambia, estos dos cambios se cancelan mutuamente, de modo que el cambio total del momento de los dos objetos juntos es cero.

Como el momento total combinado de los dos objetos juntos nunca cambia, entonces podríamos escribir

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2\right) = 0 \tag{9.15}$$

de lo que se deduce que

$$\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \text{constante}. \tag{9.16}$$

Como se muestra en la Figura 9.14, el momento total del sistema antes y después de la colisión sigue siendo el mismo.

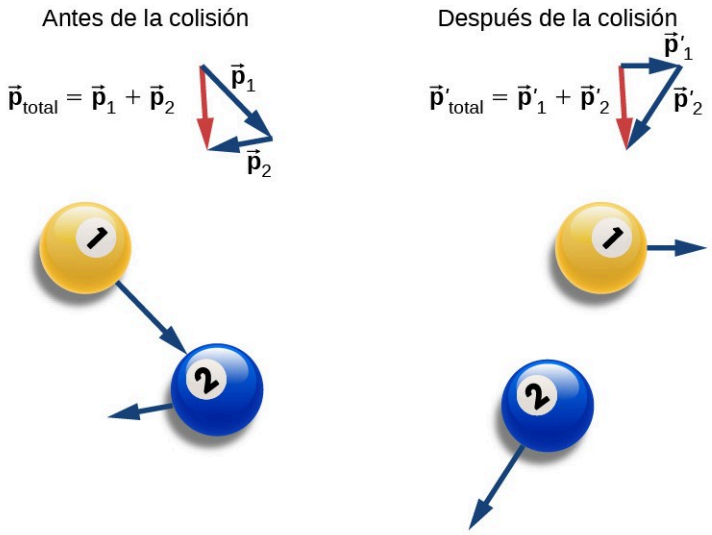


FIGURA 9.14 Antes de la colisión, las dos bolas de billar viajan con momentos $\vec{\mathbf{p}}_1$ y $\vec{\mathbf{p}}_2$. El momento total del sistema es la suma de estos, como se muestra en el vector rojo marcado como $\vec{\mathbf{p}}_{\text{total}}$ a la izquierda. Tras la colisión, las dos bolas de billar se desplazan con momentos diferentes $\vec{\mathbf{p}}'_1$ y $\vec{\mathbf{p}}'_2$. El momento total; sin embargo, no ha cambiado, como muestra la flecha roja del vector $\vec{\mathbf{p}}'_{\text{total}}$ a la derecha.

Generalizando este resultado a N objetos, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 + \vec{\mathbf{p}}_3 + \cdots + \vec{\mathbf{p}}_N &= \text{constante} \\ \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_j &= \text{constante}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

La Ecuación 9.17 es la definición del momento total (o neto) de un sistema de N objetos que interactúan, junto con la afirmación de que el momento total de un sistema de objetos es constante en el tiempo, o mejor, se conserva.

Leyes de conservación

Si el valor de una cantidad física es constante en el tiempo, decimos que la cantidad se conserva.

Requisitos para la conservación del momento

Sin embargo, hay una complicación. Un sistema deberá cumplir dos requisitos para que su momento se conserve:

1. *La masa del sistema deberá permanecer constante durante la interacción.*
   A medida que los objetos interactúan (aplican fuerzas entre sí), pueden *transferir* masa de uno a otro; pero cualquier masa que gane un objeto se compensa con la pérdida de esa masa de otro. Por lo tanto, la masa total del sistema de objetos no cambia con el paso del tiempo:
   $$\left[\frac{dm}{dt}\right]_{\text{sistema}} = 0.$$
2. *La fuerza externa neta sobre el sistema deberá ser cero.*
   A medida que los objetos colisionan, o explotan, y se desplazan, ejercen fuerzas entre sí. Sin embargo, todas estas fuerzas son internas al sistema y, por lo tanto, cada una está equilibrada por otra fuerza interna de igual magnitud y signo contrario. Como resultado, el cambio en el momento causado por cada fuerza interna se cancela con otro cambio de momento, que es igual en magnitud y opuesto en dirección. Por lo tanto, las fuerzas internas no pueden cambiar el momento total de un sistema porque los cambios suman cero. Sin embargo, si hay alguna fuerza externa que actúa sobre todos los objetos (la gravedad, por ejemplo, o la fricción), entonces esta fuerza cambia el momento del sistema en su conjunto; es decir, la fuerza externa cambia el momento del sistema. Por lo tanto, para que el momento del sistema se conserve, debemos tener
   $$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Se dice que un sistema de objetos que cumple estos dos requisitos es un **sistema cerrado** (también llamado sistema aislado). Así, la forma más compacta de expresarlo es la que se muestra a continuación.

Ley de conservación del momento

El momento total de un sistema cerrado se conserva:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{j}} = \text{constante}.$$

Esta afirmación se denomina **ley de conservación del momento**. Junto con la conservación de la energía, es uno de los fundamentos sobre los que se asienta toda la física. Todas nuestras pruebas experimentales apoyan esta afirmación: desde los movimientos de los cúmulos galácticos hasta los quarks que forman el protón y el neutrón, y en todas las escalas intermedias. *En un sistema cerrado, el momento total nunca cambia.*

Observe que absolutamente *pueden* haber fuerzas externas actuando sobre el sistema; sin embargo, para que el momento del sistema permanezca constante, estas fuerzas externas tienen que cancelarse, de modo que la fuerza externa *neta* sea cero. Las bolas de billar en una mesa tienen todas una fuerza de peso que actúa sobre ellas, pero los pesos se equilibran (se cancelan) por las fuerzas normales, por lo que no hay fuerza *neta*.

El significado de "sistema"

Un **sistema** (mecánico) es el conjunto de objetos en cuyo movimiento (cinemática y dinámica) está interesado. Si está analizando el rebote de una pelota en el suelo, probablemente solo le interesa el movimiento de la pelota, y no el de la Tierra; por lo tanto, la pelota es su sistema. Si está analizando un accidente de auto, los dos autos juntos componen su sistema (Figura 9.15).

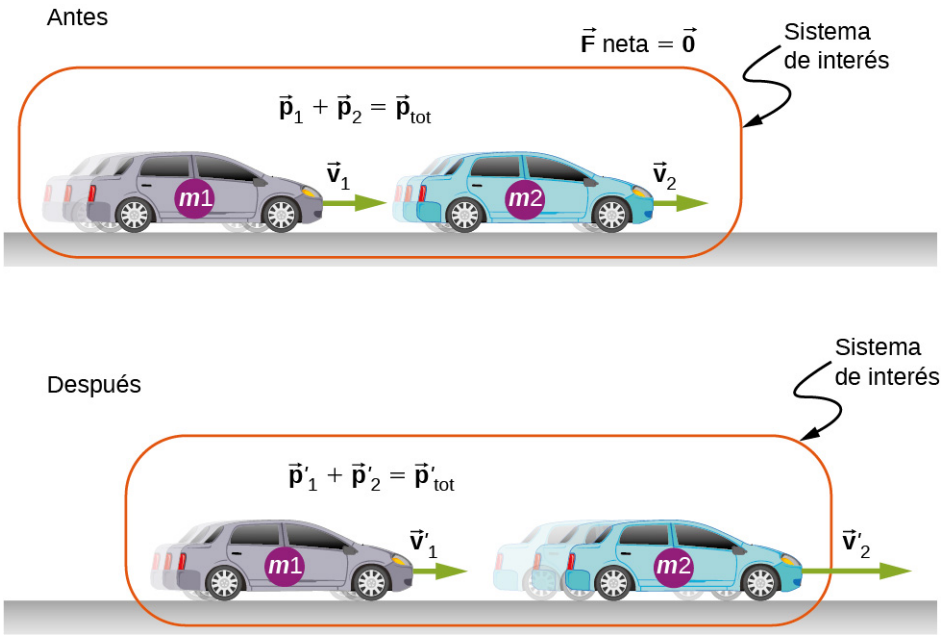


FIGURA 9.15 Los dos autos juntos forman el sistema que se va a analizar. Es importante recordar que el contenido (la masa) del sistema no cambia antes, durante o después de que los objetos del sistema interactúen.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Conservación del momento

El uso de la conservación del momento requiere cuatro pasos básicos. El primer paso es crucial:

1. Identifique un sistema cerrado (la masa total es constante, ninguna fuerza externa neta actúa sobre el sistema).
2. Escriba una expresión que represente el momento total del sistema antes del "evento" (explosión o colisión).
3. Escriba una expresión que represente el momento total del sistema después del "evento".
4. Establezca estas dos expresiones iguales entre sí, y resuelva esta ecuación para la cantidad deseada.

EJEMPLO 9.6

Carros que colisionan

Dos carros en un laboratorio de física ruedan sobre una pista plana, con una fricción insignificante. Estos carros tienen pequeños imanes en sus extremos, de modo que cuando colisionan, se pegan (Figura 9.16). El primer carro tiene una masa de 675 gramos y rueda a 0,75 m/s hacia la derecha; el segundo tiene una masa de 500 gramos y rueda a 1,33 m/s, también hacia la derecha. Tras la colisión, ¿cuál es la velocidad de los dos carros unidos?

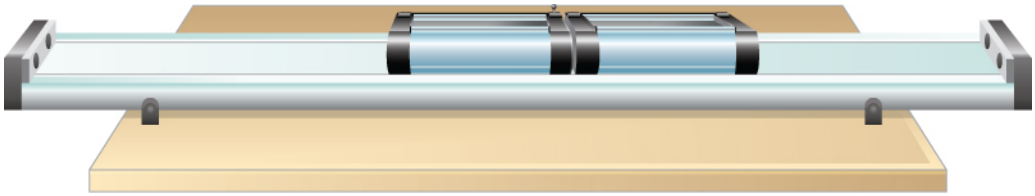


FIGURA 9.16 Dos carros de laboratorio colisionan y se pegan tras la colisión.

Estrategia

Tenemos una colisión. Nos dan masas y velocidades iniciales; nos piden la velocidad final. Todo esto sugiere utilizar la conservación del momento como método de solución. Sin embargo, solo podemos utilizarla si tenemos un sistema cerrado. Por lo tanto, tenemos que asegurarnos de que el sistema que elegimos no tenga ninguna fuerza externa neta sobre este, y de que la colisión no modifique su masa.

Definir el sistema como los dos carros cumple los requisitos de un sistema cerrado: la masa combinada de los dos carros ciertamente no cambia, y aunque los carros definitivamente ejercen fuerzas el uno sobre el otro, esas fuerzas son internas al sistema, por lo que no cambian el momento del sistema como un todo. En la dirección vertical, los pesos de los carros se cancelan por las fuerzas normales sobre los carros procedentes de la pista.

Solución

La conservación del momento es

$$\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{f} = \vec{\mathbf{p}}_\mathbf{i}.$$

Defina la dirección de sus vectores de velocidad inicial como la dirección de la $x+$. El momento inicial es entonces

$$\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{i} = m_1 v_1 \hat{\mathbf{i}} + m_2 v_2 \hat{\mathbf{i}}.$$

El momento final de los carros ahora enlazados es

$$\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{f} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{f}.$$

Igualando:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{f} &= m_1 v_1 \hat{\mathbf{i}} + m_2 v_2 \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{f} &= \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)\hat{\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

Al sustituir los números dados:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{f} &= \left[\frac{(0{,}675\ \text{kg})(0{,}75\ \text{m/s}) + (0{,}5\ \text{kg})(1{,}33\ \text{m/s})}{1{,}175\ \text{kg}}\right]\hat{\mathbf{i}} \\ &= (0{,}997\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

Importancia

Los principios que se aplican aquí a dos carros de laboratorio se aplican de forma idéntica a todos los objetos de cualquier tipo o tamaño. Incluso para los fotones, los conceptos de momento y conservación del momento siguen siendo de crucial importancia incluso a esa escala. (Como no tienen masa, el momento de un fotón se define de forma muy diferente al momento de los objetos ordinarios. Lo aprenderá cuando estudie física cuántica).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.3

Supongamos que el segundo carro, más pequeño, se ha movido inicialmente hacia la izquierda. ¿Cuál habría sido el signo de la velocidad final en este caso?

EJEMPLO 9.7

Una superpelota que rebota

Una superpelota de masa 0,25 kg se deja caer desde el reposo desde una altura de $h = 1{,}50$ m sobre el suelo. Rebota sin pérdida de energía y vuelve a su altura inicial (Figura 9.17).

a. ¿Cuál es el cambio de momento de la superpelota durante su rebote en el suelo?

b. ¿Cuál fue el cambio de momento de la Tierra debido a la colisión de la pelota con el suelo?
c. ¿Cuál fue el cambio de velocidad de la Tierra como resultado de esta colisión?

(Este ejemplo demuestra que hay que tener cuidado con la definición del sistema).

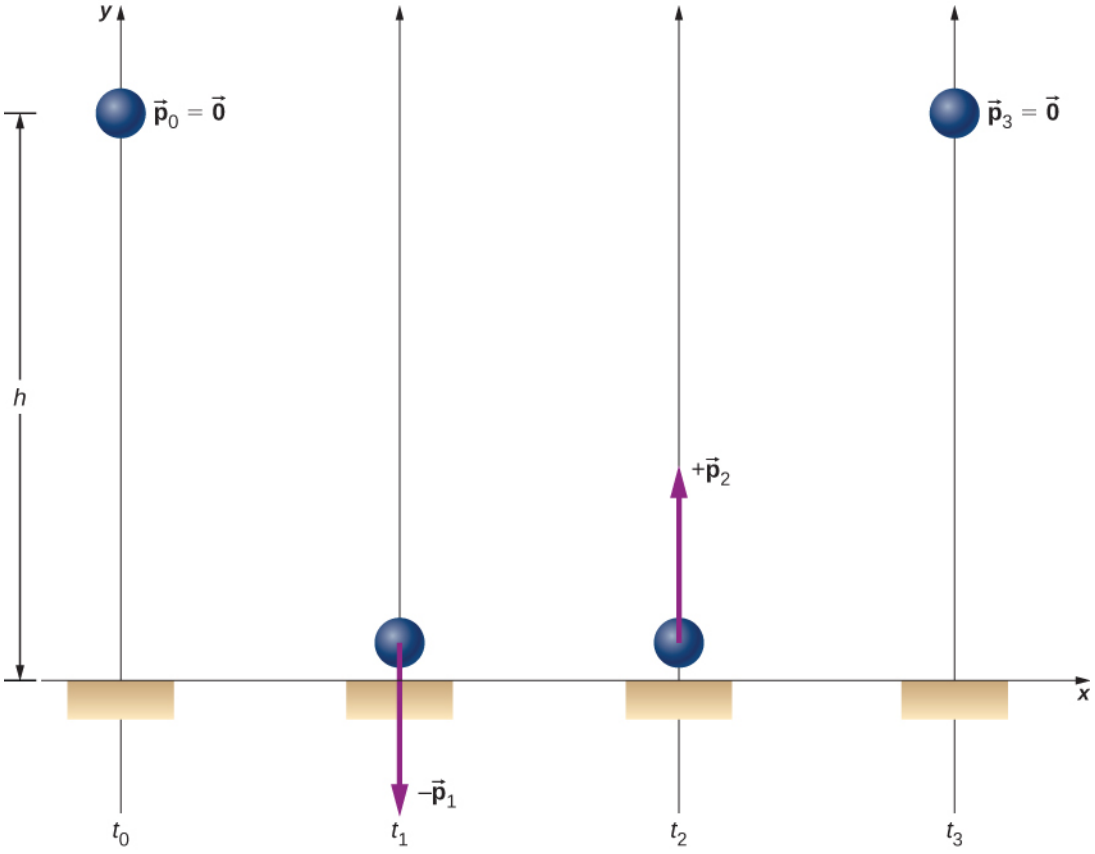


FIGURA 9.17 Se deja caer una superpelota al suelo (t_0), golpea el suelo (t_1), rebota (t_2), y vuelve a su altura inicial (t_3).

Estrategia

Dado que solo se nos pregunta por el cambio de momento de la pelota, definimos nuestro sistema como la pelota. No obstante, está claro que no se trata de un sistema cerrado; la gravedad aplica una fuerza hacia abajo sobre la pelota mientras cae, y la fuerza normal del suelo aplica una fuerza durante el rebote. Por lo tanto, no podemos utilizar la conservación del momento como estrategia. En su lugar, simplemente determinamos el momento de la pelota justo antes de que choque con el suelo y justo después, y calculamos la diferencia. Tenemos la masa de la pelota, así que necesitamos sus velocidades.

Solución

a. Como se trata de un problema unidimensional, utilizamos la forma escalar de las ecuaciones. Supongamos:
   - p_0 = la magnitud del momento de la pelota en el tiempo t_0, en el momento en que se soltó; como se soltó desde el reposo, este es cero.
   - p_1 = la magnitud del momento de la pelota en el tiempo t_1, el instante justo antes de que toque el suelo.
   - p_2 = la magnitud del momento de la pelota en el tiempo t_2, justo después de perder el contacto con el suelo tras el rebote.

   El cambio de momento de la pelota es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{p}} &= \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 \\ &= p_2\hat{\mathbf{j}} - \left(-p_1\hat{\mathbf{j}}\right) \\ &= (p_2 + p_1)\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Su velocidad justo antes de caer al suelo se determina a partir de la conservación de la energía o de la cinemática. Aquí utilizamos la cinemática; debería volver a resolverlo al utilizar la conservación de la energía y confirmar que obtiene el mismo resultado.
Queremos la velocidad justo antes de que toque el suelo (en el momento t_1). Conocemos su velocidad inicial $v_0 = 0$ (en el tiempo t_0), la altura a la que cae y su aceleración; no conocemos el tiempo de caída. Podríamos calcularlo, pero en su lugar utilizamos

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = -\hat{\mathbf{j}}\sqrt{2gy} = -5{,}4\ \text{m/s}\hat{\mathbf{j}}.$$

Así, la pelota tiene un momento de

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{p}}_1 &= -(0{,}25\ \text{kg})\left(-5{,}4\ \text{m/s}\hat{\mathbf{j}}\right) \\ &= -(1{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

No tenemos una manera fácil de calcular el momento después del rebote. En cambio, razonamos a partir de la simetría de la situación.
Antes del rebote, la pelota comienza con velocidad cero y cae 1,50 m bajo la influencia de la gravedad, hasta alcanzar cierta cantidad de momento justo antes de tocar el suelo. En el viaje de vuelta (después del rebote), comienza con cierta cantidad de momento, sube los mismos 1,50 m que cayó y termina con velocidad cero. Por lo tanto, el movimiento después del rebote era la imagen espejo del movimiento antes del rebote. A partir de esta simetría, debe ser cierto que el momento de la pelota después del rebote debe ser igual y opuesto a su momento antes del rebote. (Este es un argumento sutil, pero crucial; asegúrese de entenderlo antes de continuar).
Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{p}}_2 = -\vec{\mathbf{p}}_1 = +(1{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{\mathbf{j}}.$$

Así, el cambio de momento de la pelota durante el rebote es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{p}} &= \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 \\ &= (1{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{\mathbf{j}} - (-1{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{\mathbf{j}} \\ &= +(2{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

b. ¿Cuál fue el cambio de momento de la Tierra debido a la colisión de la pelota con el suelo?
Su respuesta instintiva puede haber sido "cero; la Tierra es demasiado masiva para que esa pequeña pelota la haya afectado" o, posiblemente, "más que cero, pero totalmente despreciable". Pero no, si redefinimos nuestro sistema para que sea la superpelota + la Tierra, entonces este sistema es cerrado (despreciando la tracción gravitacional del Sol, de la Luna y de los demás planetas del sistema solar), y por ende, el cambio total de momento de este nuevo sistema deberá ser cero. Por consiguiente, el cambio de momento de la Tierra es exactamente de la misma magnitud:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{Tierra}} = -2{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\hat{\mathbf{j}}.$$

c. ¿Cuál fue el cambio de velocidad de la Tierra como resultado de esta colisión?
Aquí es donde su instinto quizá sea correcto:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{v}}_{\text{Tierra}} &= \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{Tierra}}}{M_{\text{Tierra}}} \\ &= -\frac{2{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{5.97\times10^{24}\ \text{kg}}\hat{\mathbf{j}} \\ &= -\left(4{,}7\times10^{-25}\ \text{m/s}\right)\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Este cambio de la velocidad de la Tierra *es* totalmente despreciable.

Importancia

Es importante darse cuenta de que la respuesta a la parte (c) no es una velocidad; es un cambio de velocidad,

lo que es muy diferente. Sin embargo, para que se haga una idea de lo pequeño que es ese cambio de velocidad, suponga que se mueve a una velocidad de $4{,}7 \times 10^{-25}$ m/s. A esta velocidad, tardaría unos 7 millones de años en recorrer una distancia equivalente al diámetro de un átomo de hidrógeno.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.4

¿El cambio de momento de la pelota habría sido mayor, menor o igual si hubiera colisionado con el suelo y se hubiera detenido (sin rebotar)?

¿El cambio de momento de la pelota habría sido mayor, menor o igual si hubiera colisionado con el suelo y se hubiera detenido (sin rebotar)?

EJEMPLO 9.8

Hockey sobre hielo 1

Dos discos de hockey de idéntica masa se encuentran en una pista de hockey sobre hielo plana y horizontal. El disco rojo está inmóvil; el disco azul se mueve a 2,5 m/s hacia la izquierda (Figura 9.18). Colisiona con el disco rojo inmóvil. Los discos tienen una masa de 15 g. Tras la colisión, el disco rojo se mueve a 2,5 m/s, hacia la izquierda. ¿Cuál es la velocidad final del disco azul?

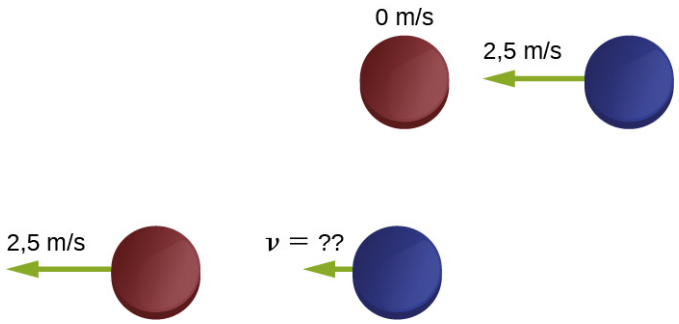


FIGURA 9.18 Dos discos de hockey idénticos colisionando. El diagrama superior muestra los discos en el instante anterior a la colisión, mientras que el diagrama inferior muestra los discos en el instante posterior a la colisión. La fuerza externa neta es cero.

Estrategia

Nos indican que tenemos dos objetos que colisionan, nos proporcionan las masas y las velocidades iniciales, y una velocidad final; nos piden las dos velocidades finales. La conservación del momento parece una buena estrategia. Definamos el sistema como los dos discos; no hay fricción, por lo que tenemos un sistema cerrado.

Antes de ver la solución, ¿cuál cree que será la respuesta?

La velocidad final del disco azul será:

- cero
- 2,5 m/s hacia la izquierda
- 2,5 m/s hacia la derecha
- 1,25 m/s hacia la izquierda
- 1,25 m/s hacia la derecha
- otra cosa

Solución

Defina la dirección de la $x+$ para que apunte hacia la derecha. Entonces, la conservación del momento se lee

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{f}} &= \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}} \\ mv_{\mathrm{r_f}}\,\hat{\mathbf{i}} + mv_{\mathrm{b_f}}\,\hat{\mathbf{i}} &= mv_{\mathrm{r_i}}\,\hat{\mathbf{i}} - mv_{\mathrm{b_i}}\,\hat{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

Antes de la colisión, el momento del sistema está única y exclusivamente en el disco azul. Así,

$$\begin{aligned} mv_{\mathrm{r_f}}\,\hat{\mathbf{i}} + mv_{\mathrm{b_f}}\,\hat{\mathbf{i}} &= -mv_{\mathrm{b_i}}\,\hat{\mathbf{i}} \\ v_{\mathrm{r_f}}\,\hat{\mathbf{i}} + v_{\mathrm{b_f}}\,\hat{\mathbf{i}} &= -v_{\mathrm{b_i}}\,\hat{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

(Recuerde que las masas de los discos son iguales). Sustituyendo los números:

$$\begin{aligned} -(2{,}5\ \mathrm{m/s})\,\hat{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{b_f}} &= -(2{,}5\ \mathrm{m/s})\,\hat{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{b_f}} &= 0. \end{aligned}$$

Importancia

Evidentemente, los dos discos simplemente intercambiaron su momento. El disco azul transfirió todo su momento al disco rojo. De hecho, esto es lo que ocurre en una colisión semejante, en la que $m_1 = m_2$.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.5

Incluso si hubiera algo de fricción en el hielo, todavía es posible utilizar la conservación del momento para resolver este problema, aunque tendría que imponer una condición adicional en el problema. ¿Cuál es esa condición adicional?

EJEMPLO 9.9

Aterrizaje de *Philae*

El 12 de noviembre de 2014, la Agencia Espacial Europea aterrizó con éxito una sonda llamada *Philae* en el cometa 67P / Churyumov / Gerasimenko (Figura 9.19). Sin embargo, durante el aterrizaje, la sonda en realidad hizo contacto con el suelo tres veces, porque rebotó dos veces. Calculemos cuánto ha cambiado la velocidad del cometa como resultado del primer rebote.

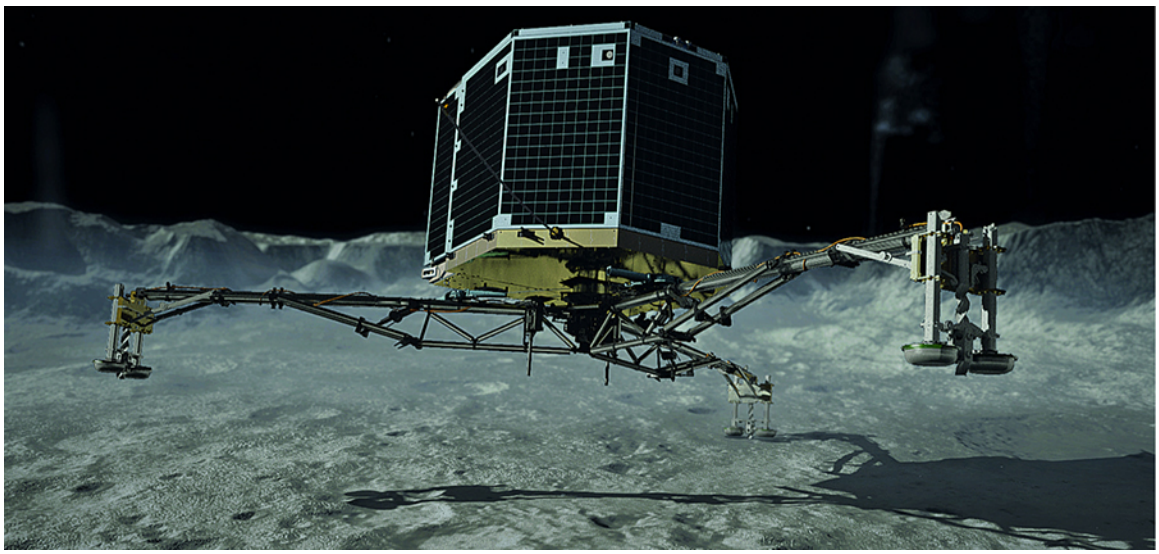


FIGURA 9.19 Representación artística del aterrizaje de *Philae* en un cometa (créditos: modificación del trabajo del "DLR German Aerospace Center"/Flickr).

Definamos hacia arriba como la dirección de la $+y$, perpendicular a la superficie del cometa, y $y = 0$ como la superficie del cometa. Esto es lo que sabemos:

- La masa del cometa 67P: $M_c = 1{,}0 \times 10^{13}$ kg
- La aceleración debida a la gravedad del cometa: $\vec{\mathbf{a}} = -\left(5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2\right)\hat{\mathbf{j}}$
- La masa de *Philae*: $M_p = 96$ kg
- Rapidez de aterrizaje inicial: $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = -(1{,}0\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$
- Rapidez inicial hacia arriba debido al primer rebote: $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = (0{,}38\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$
- Tiempo de impacto del aterrizaje: $\Delta t = 1{,}3$ s

Estrategia

Nos preguntan cuánto ha cambiado la rapidez del cometa, pero no sabemos mucho al respecto, más allá de su masa y la aceleración que provoca su gravedad. Sin embargo, *se* nos indica que el módulo de aterrizaje *Philae* colisiona con (aterriza en) el cometa y rebota. Una colisión sugiere el momento como estrategia para resolver este problema.

Si definimos un sistema formado por *Philae* y el cometa 67/P, entonces no hay ninguna fuerza externa neta sobre este sistema, y por ende, el momento de este sistema se conserva. (Ignoraremos la fuerza gravitacional del sol). Así, si calculamos el cambio de momento del módulo de aterrizaje, tenemos automáticamente el cambio de momento del cometa. Además, el cambio de velocidad del cometa guarda relación directa con su cambio de momento como resultado de la "colisión" del módulo de aterrizaje con este.

Solución

Supongamos que $\vec{\mathbf{p}}_1$ sea el momento de *Philae* en el momento justo antes del aterrizaje, y $\vec{\mathbf{p}}_2$ sea su momento justo después del primer rebote. Entonces su momento justo antes de aterrizar fue

$$\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{1} = M_p\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = (96\ \text{kg})\left(-1{,}0\ \text{m/s}\hat{\mathbf{j}}\right) = -(96\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$$

y justo después fue

$$\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{2} = M_p\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = (96\ \text{kg})\left(+0{,}38\ \text{m/s}\hat{\mathbf{j}}\right) = (36{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Por consiguiente, el cambio de momento del módulo de aterrizaje durante el primer rebote es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{p}} &= \vec{\mathbf{p}}_\mathbf{2} - \vec{\mathbf{p}}_\mathbf{1} \\ &= (36{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}} - \left(-96{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\hat{\mathbf{j}}\right) = (133\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

Observe la importancia de incluir el signo negativo del momento inicial.

Ahora para el cometa. Dado que el momento del sistema deberá conservarse, el momento del *cometa* cambió exactamente en el negativo de este:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{c} = -\Delta\vec{\mathbf{p}} = -(133\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Por consiguiente, su cambio de velocidad es

$$\Delta\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{c} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{c}}{M_c} = \frac{-(133\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}}{1{,}0 \times 10^{13}\ \text{kg}} = -\left(1{,}33 \times 10^{-11}\ \text{m/s}\right)\hat{\mathbf{j}}.$$

Importancia

Se trata de un cambio de velocidad muy pequeño, de una milésima de mil millonésima de metro por segundo. Sin embargo, lo más importante es que *no* es cero.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.6

Los cambios de momento de *Philae* y del cometa 67/P fueron iguales (en magnitud). ¿Fueron iguales los impulsos experimentados por *Philae* y el cometa? ¿Y las fuerzas? ¿Y los cambios de energías cinéticas?

9.4 Tipos de colisiones

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Identificar el tipo de colisión.
- Calificar correctamente una colisión como elástica o inelástica.
- Utilizar la energía cinética junto con el momento y el impulso para analizar una colisión.

Aunque el momento se conserva en todas las interacciones, no todas las interacciones (colisiones o explosiones) son iguales. Entre las posibilidades se encuentran:

- Un solo objeto puede estallar en varios objetos (explosiones).
- Varios objetos pueden colisionar y pegarse, para formar un solo objeto (inelástico).
- Varios objetos pueden colisionar y rebotar entre sí, para quedar como varios objetos (elásticos). Si rebotan el uno contra el otro, pueden retroceder a la misma rapidez con la que se acercaban antes de la colisión, o pueden alejarse más lentamente.

Por lo tanto, es útil categorizar los diferentes tipos de interacciones, según el movimiento de los objetos que interactúan antes y después de la interacción.

Explosiones

La primera posibilidad es que un solo objeto se rompa en dos o más pedazos. Un ejemplo de ello es un petardo, o un arco y una flecha, o un cohete que se eleva en el aire hacia el espacio. Estos pueden ser difíciles de analizar si el número de fragmentos después de la colisión es superior a tres o cuatro; sin embargo, el momento total del sistema antes y después de la explosión es idéntico.

Observe que, si el objeto está inicialmente inmóvil, entonces el sistema (que es solo el objeto) no tiene momento ni energía cinética. Después de la explosión, el momento neto de todas las piezas del objeto debe sumar cero (ya que el momento de este sistema cerrado no puede cambiar). Sin embargo, el sistema *tendrá* una gran cantidad de energía cinética después de la explosión, aunque no tenía ninguna antes. Así, vemos que, aunque el momento del sistema se conserva en una explosión, la energía cinética del sistema definitivamente no lo hace: aumenta. Esta interacción, un objeto que se convierte en muchos, con un aumento de la energía cinética del sistema, se denomina **explosión**.

¿De dónde proviene la energía? ¿Sigue siendo válida la conservación de la energía? Sí; alguna forma de energía potencial se convierte en energía cinética. En el caso de la pólvora que arde y empuja una bala, la energía potencial química se convierte en energía cinética de la bala, y del arma que recula. En el caso de un arco y una flecha, es la energía potencial elástica en la cuerda del arco.

Inelástica

La segunda posibilidad es la inversa: que dos o más objetos colisionen entre sí y se peguen, para formar (tras la colisión) un único objeto compuesto. La masa total de este objeto compuesto es la suma de las masas de los objetos originales, y el nuevo objeto único se desplaza a una velocidad dictada por la conservación del momento. Sin embargo, resulta de nuevo que, aunque el momento total del sistema de objetos permanezca constante, la energía cinética no lo hace; esta vez, sin embargo, la energía cinética disminuye. Este tipo de colisión se denomina **inelástica**.

Cualquier colisión en la que los objetos se peguen entre sí dará lugar a la máxima pérdida de energía cinética (es decir, K_f será un mínimo).

Una colisión de este tipo se denomina **perfectamente inelástica**. En el caso extremo, varios objetos colisionan, se pegan y permanecen inmóviles después de la colisión. Dado que los objetos están todos inmóviles después de la colisión, la energía cinética final también es cero; por lo tanto, la pérdida de energía cinética es máxima.

- Si $0 < K_f < K_i$, la colisión es inelástica.
- Si K_f es la energía más baja, o la energía que pierden ambos objetos es la mayor, la colisión es perfectamente inelástica (los objetos se pegan).

- Si $K_f = K_i$, la colisión es elástica.

Elástica

El caso extremo del otro lado es si dos o más objetos se acercan, colisionan y rebotan entre sí, y luego se alejan el uno del otro a la misma rapidez relativa a la que se acercaron. En este caso, la energía cinética total del sistema se conserva. Dicha interacción se denomina **elástica**.

En cualquier interacción de un sistema cerrado de objetos, el momento total del sistema se conserva ($\vec{\mathbf{p}}_f = \vec{\mathbf{p}}_i$) pero la energía cinética puede que no:

- Si $0 < K_f < K_i$, la colisión es inelástica.
- Si $K_f = 0$, la colisión es perfectamente inelástica.
- Si $K_f = K_i$, la colisión es elástica.
- Si $K_f > K_i$, la interacción es una explosión.

La cuestión de todo esto es que, al analizar una colisión o una explosión, se puede utilizar tanto el momento como la energía cinética.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Colisiones

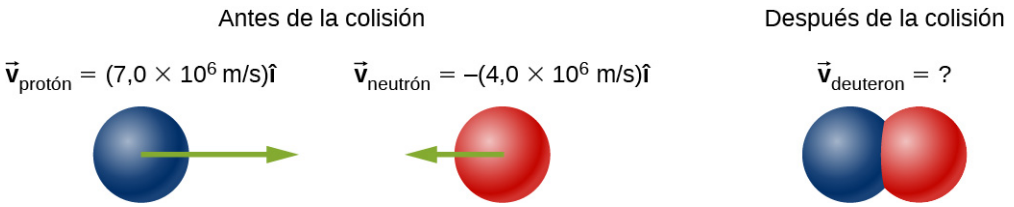
Un sistema cerrado siempre conserva el momento; también podría conservar la energía cinética, pero muy a menudo no lo hace. Los problemas de energía-momento confinados a un plano (como el nuestro) suelen tener dos incógnitas. En general, este enfoque funciona bien:

1. Defina un sistema cerrado.
2. Escriba la expresión de la conservación del momento.
3. Si la energía cinética se conserva, escriba la expresión de la conservación de la energía cinética; si no, escriba la expresión del cambio de energía cinética.
4. Ahora tiene dos ecuaciones en dos incógnitas, que resuelve por métodos estándar.

EJEMPLO 9.10

Formación de un deuterón

Un protón (masa $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) colisiona con un neutrón (con esencialmente la misma masa que el protón) para formar una partícula que recibe el nombre de *deuterón*. ¿Cuál es la velocidad del deuterón si se forma a partir de un protón que se mueve con velocidad $7{,}0 \times 10^6$ m/s hacia la izquierda y un neutrón que se mueve a velocidad $4{,}0 \times 10^6$ m/s hacia la derecha?



Estrategia

Defina el sistema como las dos partículas. Se trata de una colisión, por lo que primero debemos identificar de qué tipo es. Ya que se nos dice que las dos partículas forman una sola tras la colisión, esto significa que la colisión es perfectamente inelástica. Así, la energía cinética no se conserva, pero el momento sí. Por lo tanto, utilizamos la conservación del momento para determinar la velocidad final del sistema.

Solución

Trate las dos partículas como si tuvieran masas idénticas *M*. Utilice los subíndices p, n y d para protón,

neutrón y deuterón, respectivamente. Este es un problema unidimensional, por lo que tenemos

$$Mv_{\mathrm{p}} - Mv_{\mathrm{n}} = 2Mv_{\mathrm{d}}.$$

Las masas se dividen:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{n}} &= 2v_{\mathrm{d}} \\ 7{,}0 \times 10^6\ \mathrm{m/s} - 4{,}0 \times 10^6\ \mathrm{m/s} &= 2v_{\mathrm{d}} \\ v_{\mathrm{d}} &= 1{,}5 \times 10^6\ \mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Así, la velocidad es $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}} = \left(1{,}5 \times 10^6\ \mathrm{m/s}\right)\hat{\mathbf{i}}$.

Importancia

Así es como funcionan esencialmente los colisionadores de partículas como el Gran Colisionador de Hadrones: Aceleran las partículas hasta una rapidez muy elevada (grandes momentos), pero en direcciones opuestas. Esto maximiza la creación de las llamadas "partículas hijas".

EJEMPLO 9.11

Hockey sobre hielo 2

(Esta es la variación de un ejemplo anterior).

Dos discos de hockey sobre hielo de diferentes masas se encuentran en una pista de hockey plana y horizontal. El disco rojo tiene una masa de 15 gramos y está inmóvil; el disco azul tiene una masa de 12 gramos y se mueve a 2,5 m/s hacia la izquierda. Colisiona con el disco rojo inmóvil (Figura 9.20). Si la colisión es perfectamente elástica, ¿cuáles son las velocidades finales de los dos discos?

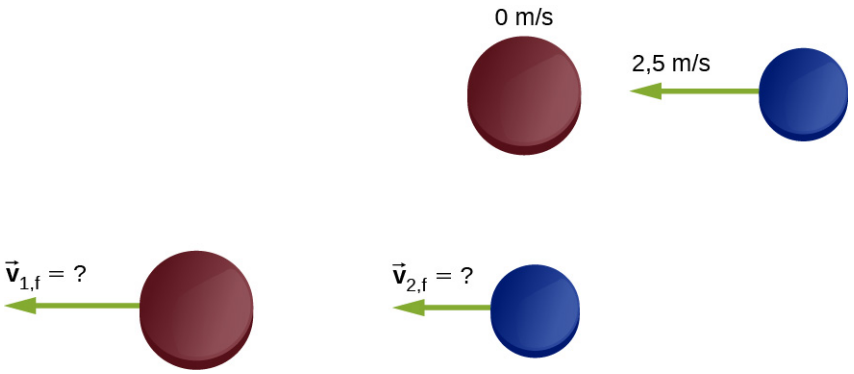


FIGURA 9.20 Dos discos de hockey diferentes colisionando. El diagrama superior muestra los discos en el instante anterior a la colisión, y el diagrama inferior muestra los discos en el instante posterior a la colisión. La fuerza externa neta es cero.

Estrategia

Nos dicen que tenemos dos objetos que colisionan, nos indican sus masas y velocidades iniciales, y nos piden ambas velocidades finales. La conservación del momento parece ser una buena estrategia; defina el sistema como los dos discos. No hay fricción, por lo que tenemos ningún sistema cerrado. Tenemos dos incógnitas (las dos velocidades finales), pero solo una ecuación. El comentario de que la colisión es perfectamente elástica es la pista sugiere que la energía cinética también se conserva en esta colisión. Eso nos da nuestra segunda ecuación.

El momento inicial y la energía cinética inicial del sistema residen enteramente y solo en el segundo disco (el azul); la colisión transfiere parte de este momento y energía al primer disco.

Solución

La conservación del momento, en este caso, se lee

$$\begin{aligned} p_\mathrm{i} &= p_\mathrm{f} \\ m_2 v_{2,\mathrm{i}} &= m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}. \end{aligned}$$

La conservación de la energía cinética se lee

$$\begin{aligned} K_\mathrm{i} &= K_\mathrm{f} \\ \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{i}}^2 &= \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2. \end{aligned}$$

Ahí están nuestras dos ecuaciones en dos incógnitas. El álgebra es tediosa, pero no es terriblemente difícil; sin duda hay que trabajar en ella. La solución es

$$\begin{aligned} v_{1,\mathrm{f}} &= \frac{(m_1 - m_2) v_{1,\mathrm{i}} + 2 m_2 v_{2,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2} \\ v_{2\mathrm{f}} &= \frac{(m_2 - m_1) v_{2,\mathrm{i}} + 2 m_1 v_{1,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Al sustituir los números dados, obtenemos

$$\begin{aligned} v_{1,\mathrm{f}} &= 2{,}22 \ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v_{2,\mathrm{f}} &= -0{,}28 \ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Importancia

Observe que, después de la colisión, el disco azul se mueve hacia la derecha; su dirección de movimiento se ha invertido. El disco rojo se mueve ahora hacia la izquierda.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.7

Hay una segunda solución al sistema de ecuaciones resuelto en este ejemplo (porque la ecuación de la energía es cuadrática): $v_{1,\mathrm{f}} = -2{,}5$ m/s, $v_{2,\mathrm{f}} = 0$. Esta solución es inaceptable desde el punto de vista físico; ¿qué tiene de malo?

EJEMPLO 9.12

Thor contra Iron Man

La película de 2012 *Los Vengadores* tiene una escena en la que Iron Man y Thor luchan. Al principio de la pelea, Thor lanza su martillo a Iron Man; lo golpea y lo lanza ligeramente al aire y contra un pequeño árbol, que se rompe. En el video, Iron Man está parado cuando el martillo lo golpea. La distancia entre Thor y Iron Man es de aproximadamente 10 m, y el martillo tarda aproximadamente 1 s en llegar a Iron Man después de que Thor lo suelta. El árbol está a unos 2 m detrás de Iron Man, que golpea en unos 0,75 s. Además, según el, la trayectoria de Iron Man hacia el árbol es muy cercana a la horizontal. Asumiendo que la masa total de Iron Man es de 200 kg:

a. Calcule la masa del martillo de Thor
b. Calcule cuánta energía cinética se perdió en esta colisión.

Estrategia

Tras la colisión, el martillo de Thor está en contacto con Iron Man todo el tiempo, por lo que se trata de una colisión perfectamente inelástica. Así, con la elección correcta del sistema cerrado, esperamos que el momento se conserve, pero no la energía cinética. Utilizamos los números dados para estimar el momento inicial, la energía cinética inicial y la energía cinética final. Ya que se trata de un problema unidimensional, podemos pasar directamente a la forma escalar de las ecuaciones.

Solución

a. En primer lugar, planteamos la conservación del momento. Para ello, necesitamos un sistema cerrado. La elección aquí es el sistema (martillo + Iron Man), desde el momento de la colisión hasta el momento justo antes de que Iron Man y el martillo golpeen el árbol. Supongamos:
   - M_{H} = masa del martillo
   - M_{I} = masa de Iron Man
   - v_{H} = velocidad del martillo antes de golpear a Iron Man
   - v = velocidad combinada de Iron Man + martillo después de la colisión

   De nuevo, la velocidad inicial de Iron Man era cero. La conservación del momento aquí se lee:
   $$M_{\mathrm{H}} v_{\mathrm{H}} = (M_{\mathrm{H}} + M_{\mathrm{I}})\, v.$$
   Se nos pide que calculemos la masa del martillo, por lo que tenemos
   $$\begin{aligned} M_{\mathrm{H}} v_{\mathrm{H}} &= M_{\mathrm{H}} v + M_{\mathrm{I}} v \\ M_{\mathrm{H}} (v_{\mathrm{H}} - v) &= M_{\mathrm{I}} v \\ M_{\mathrm{H}} &= \frac{M_{\mathrm{I}} v}{v_{\mathrm{H}} - v} \\ &= \frac{(200\ \mathrm{kg})\left(\frac{2\ \mathrm{m}}{0{,}75\ \mathrm{s}}\right)}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(\frac{2\ \mathrm{m}}{0{,}75\ \mathrm{s}}\right)} \\ &= 73\ \mathrm{kg}. \end{aligned}$$
   Teniendo en cuenta las incertidumbres de nuestras estimaciones, esto debería expresarse con una sola cifra significativa; por lo tanto, $M_{\mathrm{H}} = 7 \times 10^{1}\ \mathrm{kg}$.

b. La energía cinética inicial del sistema, al igual que el momento inicial, está toda en el martillo:
   $$\begin{aligned} K_{\mathrm{i}} &= \tfrac{1}{2} M_{\mathrm{H}} v_{\mathrm{H}}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(70\ \mathrm{kg})\,(10\ \mathrm{m/s})^2 \\ &= 3.500\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$
   Después de la colisión,
   $$\begin{aligned} K_{\mathrm{f}} &= \tfrac{1}{2}(M_{\mathrm{H}} + M_{\mathrm{I}})\, v^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(70\ \mathrm{kg} + 200\ \mathrm{kg})\,(2{,}67\ \mathrm{m/s})^2 \\ &= 960\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$
   Así, hubo una pérdida de $3.500\ \mathrm{J} - 960\ \mathrm{J} = 2.540\ \mathrm{J}$.

Importancia

Por otras escenas de la película, Thor aparentemente puede controlar la velocidad del martillo con su mente. Es posible, por lo tanto, que mentalmente haga que el martillo mantenga su velocidad inicial de 10 m/s mientras Iron Man es conducido hacia atrás, hacia el árbol. De ser así, esto representaría una fuerza externa en nuestro sistema, por lo que no estaría cerrado. Sin embargo, el control mental de Thor sobre su martillo está fuera del alcance de este libro.

EJEMPLO 9.13

Analizar un accidente de tráfico

En un semáforo, un camión grande (3.000 kg) choca con un auto pequeño (1.200 kg) inmóvil. El camión se detiene instantáneamente; el auto se desliza en línea recta y se detiene tras deslizarse 10 metros. El coeficiente de fricción, medido entre los neumáticos del auto y la carretera, era de 0,62. ¿Qué tan rápido se movía el camión al momento del impacto?

Estrategia

Al principio pareciera que no tenemos suficiente información para resolver este problema. Aunque conocemos la rapidez inicial del auto, no conocemos la rapidez del camión (de hecho, eso es lo que se nos pide que calculemos), por lo que no conocemos el momento inicial del sistema. Del mismo modo, conocemos la rapidez final del camión, pero no la del auto inmediatamente después del impacto. El hecho de que el auto acabara deslizándose hasta una rapidez de cero no ayuda con el momento final, ya que una fuerza de fricción externa lo provocó. Tampoco podemos calcular el impulso, ya que no conocemos el tiempo de colisión, como tampoco el tiempo que el auto se deslizó antes de detenerse. Una estrategia útil es imponer una restricción al análisis.

Supongamos que definimos un sistema formado solo por el camión y el auto. El momento de este sistema no se conserva, debido a la fricción entre el auto y la carretera. Sin embargo, si *pudiéramos* determinar la rapidez del auto en el instante posterior al impacto, antes de que la fricción tuviera algún efecto medible en el auto, entonces podríamos considerar que el momento del sistema se conserva, con esa restricción.

¿Podemos hallar la rapidez final del auto? Sí; invocamos el teorema de trabajo-energía cinética.

Solución

Primero, defina algunas variables. Supongamos que:

- M_c y M_T sean las masas del auto y del camión, respectivamente
- $v_{\text{T,i}}$ y$v_{\text{T,f}}$ sean las velocidades del camión antes y después de la colisión, respectivamente
- $v_{\text{c,i}}$ y$v_{\text{c,f}}$ Z sean las velocidades del auto antes y después de la colisión, respectivamente
- K_i y K_f sean las energías cinéticas del auto inmediatamente después de la colisión, y después de que el auto haya dejado de deslizarse (así que $K_\text{f} = 0$).
- d sea la distancia que el auto se desliza después de la colisión antes de detenerse.

Ya que en realidad queremos la rapidez inicial del camión, y dado que el camión no forma parte del cálculo de trabajo-energía, empecemos con la conservación del momento. Para el sistema auto + camión, la conservación del momento se lee

$$\begin{aligned} p_\text{i} &= p_\text{f} \\ M_\text{c} v_{\text{c,i}} + M_\text{T} v_{\text{T,i}} &= M_\text{c} v_{\text{c,f}} + M_\text{T} v_{\text{T,f}}. \end{aligned}$$

Ya que la velocidad inicial del auto era cero, al igual que la velocidad final del camión, esto se simplifica a

$$v_{\text{T,i}} = \frac{M_\text{c}}{M_\text{T}} v_{\text{c,f}}.$$

Así que ahora necesitamos la rapidez del auto inmediatamente después del impacto. Recordemos que

$$W = \Delta K$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_\text{f} - K_\text{i} \\ &= 0 - \tfrac{1}{2} M_\text{c} v_{\text{c,f}}^2. \end{aligned}$$

También,

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = Fd\cos\theta.$$

El trabajo se realiza a lo largo de la distancia que el auto se desliza, que hemos llamado *d*. Igualando:

$$Fd\cos\theta = -\frac{1}{2} M_\text{c} v_{\text{c,f}}^2.$$

La fricción es la fuerza sobre el auto que realiza el trabajo para detener el deslizamiento. Con una carretera nivelada, la fuerza de fricción es

$$F = \mu_\text{k} M_\text{c} g.$$

Dado que el ángulo entre las direcciones del vector de fuerza de fricción y el desplazamiento d es $180°$, y $\cos(180°) = -1$, tenemos

$$-(\mu_k M_c g)\, d = -\frac{1}{2} M_c v_{c,f}^2$$

(Observe que la masa del auto se divide; evidentemente, la masa del auto no importa).

Si se resuelve la rapidez del auto inmediatamente después de la colisión, se obtiene

$$v_{c,f} = \sqrt{2\mu_k g d}.$$

Al sustituir los números dados:

$$\begin{aligned} v_{c,f} &= \sqrt{2(0{,}62)\left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\ \text{m})}. \\ &= 11{,}0\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la rapidez inicial del camión:

$$v_{T,i} = \left(\frac{1.200\ \text{kg}}{3.000\ \text{kg}}\right)\left(11{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 4{,}4\ \text{m/s}.$$

Importancia

Este es un ejemplo del tipo de análisis que realizan los investigadores de los grandes accidentes de tráfico. Del análisis y el cálculo precisos del momento y de la energía dependen muchas consecuencias jurídicas y financieras.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.8

Supongamos que no hubo fricción (la colisión se produjo sobre el hielo); eso haría que μ_k sea cero, y por lo tanto $v_{c,f} = \sqrt{2\mu_k g d} = 0$, lo cual es obviamente erróneo. ¿Cuál es el error en esta conclusión?

Colisiones subatómicas y momento

La conservación del momento es crucial para nuestra comprensión de las partículas atómicas y subatómicas porque gran parte de lo que sabemos sobre estas partículas procede de experimentos de colisión.

A principios del siglo XX, la estructura del átomo suscitó un gran interés y debate. Se sabía que los átomos contienen dos tipos de partículas con carga eléctrica: electrones con carga negativa y protones con carga positiva. (Se sospechaba la existencia de una partícula eléctricamente neutra, pero esto no se confirmaría sino hasta 1932). La pregunta era, ¿cómo estaban dispuestas estas partículas en el átomo? ¿Estaban distribuidas uniformemente por el volumen del átomo (como propuso J.J. Thomson), o dispuestas en las esquinas de polígonos regulares (que era el modelo de Gilbert Lewis), o anillos de carga negativa que rodean el núcleo cargado positivamente, más bien como los anillos planetarios que rodean Saturno (como sugirió Hantaro Nagaoka), o algo más?

El físico neozelandés Ernest Rutherford, junto con el físico alemán Hans Geiger y el físico británico Ernest Marsden, realizaron el crucial experimento en 1909. Bombardearon una fina lámina de oro con un haz de partículas alfa de alta energía (es decir, de alta rapidez) (el núcleo de un átomo de helio). Las partículas alfa colisionaron con los átomos de oro y sus velocidades posteriores se detectaron y analizaron, mediante el empleo de la conservación del momento y la conservación de la energía.

Si las cargas de los átomos de oro estuvieran distribuidas uniformemente (según Thomson), entonces las partículas alfa deberían colisionar con ellas y casi todas serían desviadas a través de muchos ángulos, todos pequeños; el modelo de Nagaoka arrojaría un resultado similar. Si los átomos estuvieran dispuestos como

polígonos regulares (Lewis), las partículas alfa se desviarían en un número relativamente pequeño de ángulos.

Lo que *realmente* ocurrió es que casi *ninguna* de las partículas alfa fue desviada. Las que lo fueron, se desviaron en grandes ángulos, algunos cerca de 180°, esas partículas alfa invirtieron completamente su dirección (Figura 9.21). Ninguno de los modelos atómicos existentes podría explicar esto. Con el tiempo, Rutherford desarrolló un modelo del átomo que se acercaba mucho más a lo que tenemos ahora, de nuevo, utilizando la conservación del momento y la energía como punto de partida.

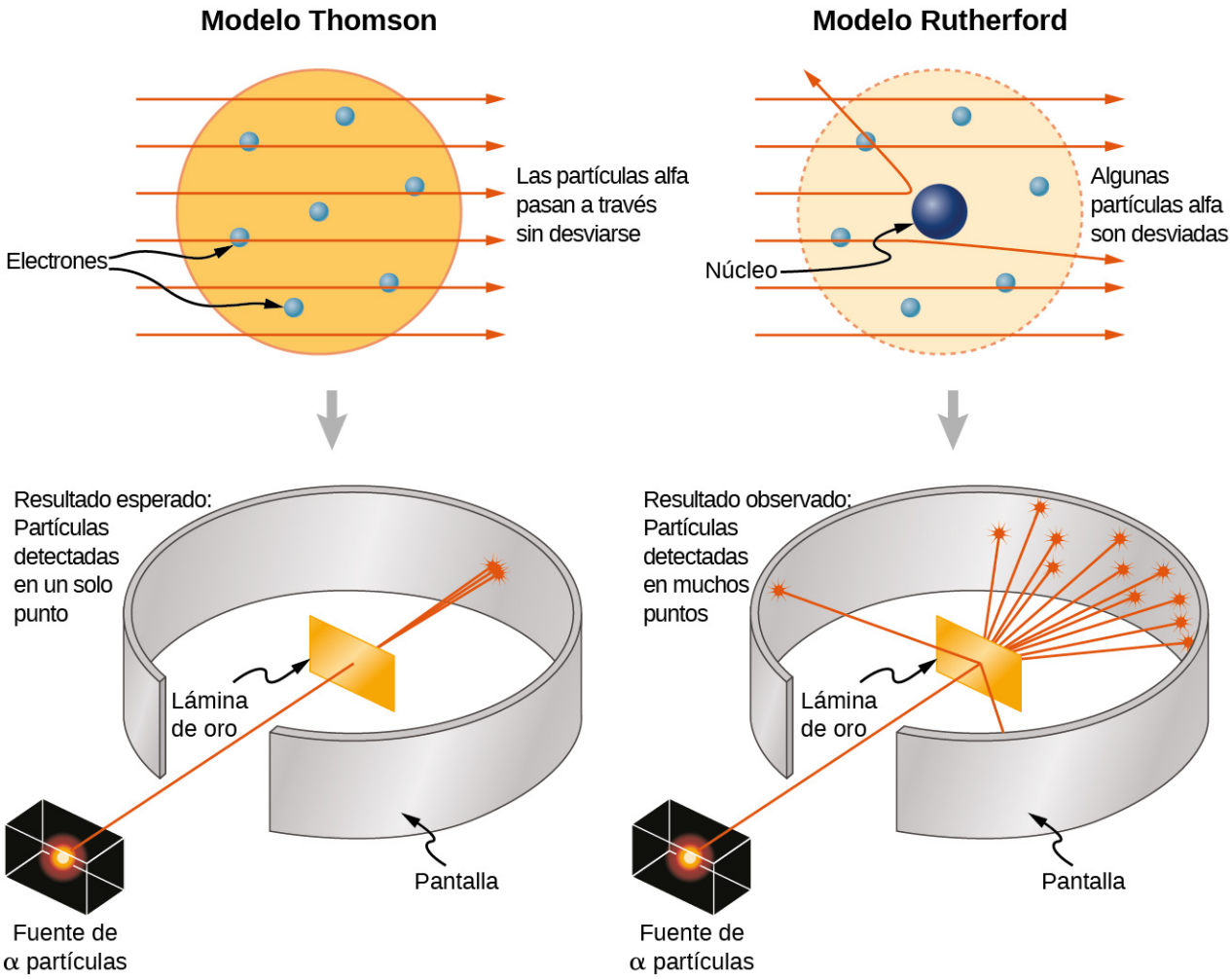


FIGURA 9.21 Los modelos de Thomson y Rutherford del átomo. El modelo de Thomson predijo que casi todas las partículas alfa incidentes se dispersarían y en ángulos pequeños. Rutherford y Geiger descubrieron que casi ninguna de las partículas alfa se dispersaba, aunque las pocas que se desviaban lo hacían con ángulos muy grandes. Los resultados de los experimentos de Rutherford no concuerdan con el modelo de Thomson. Rutherford utilizó la conservación del momento y la energía para desarrollar un nuevo y mejor modelo del átomo: el modelo nuclear.

9.5 Colisiones en varias dimensiones

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Expresar el momento como un vector bidimensional.
- Escribir las ecuaciones de conservación del momento en forma de componentes.
- Calcular el momento en dos dimensiones, como una cantidad vectorial.

Es mucho más común que las colisiones se produzcan en dos dimensiones; es decir, el ángulo entre los vectores de la velocidad inicial no es ni cero ni 180°. Veamos qué complicaciones surgen de esto.

La primera idea que necesitamos es que el momento es un vector. Como todos los vectores, puede expresarse

como una suma de componentes perpendiculares (normalmente, aunque no siempre, un componente x y un componente y, y, si es necesario, un componente z). Así, cuando escribimos el enunciado de la conservación del momento para un problema, nuestros vectores de momento pueden expresarse, y normalmente se expresarán, en forma de componentes.

La segunda idea que necesitamos proviene del hecho de que el momento está relacionado con la fuerza:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

Expresando tanto la fuerza como el momento en forma de componentes,

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F_z = \frac{dp_z}{dt}.$$

Recuerde que estas ecuaciones son simplemente la segunda ley de Newton, en forma vectorial y en forma de componentes. Sabemos que la segunda ley de Newton se cumple en cada dirección, independientemente de las demás. Por lo tanto, se deduce (a través de la tercera ley de Newton) que la conservación del momento también es cierta en cada dirección de forma independiente.

Estas dos ideas motivan la solución de problemas bidimensionales. Escribimos la expresión de la conservación del momento dos veces: una en la dirección de la xy otra en la dirección de la y.

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{f},x} &= p_{1,\mathrm{i},x} + p_{2,\mathrm{i},x} \\ p_{\mathrm{f},y} &= p_{1,\mathrm{i},y} + p_{2,\mathrm{i},y} \end{aligned} \qquad \textbf{9.18}$$

Este procedimiento se muestra gráficamente en la Figura 9.22.

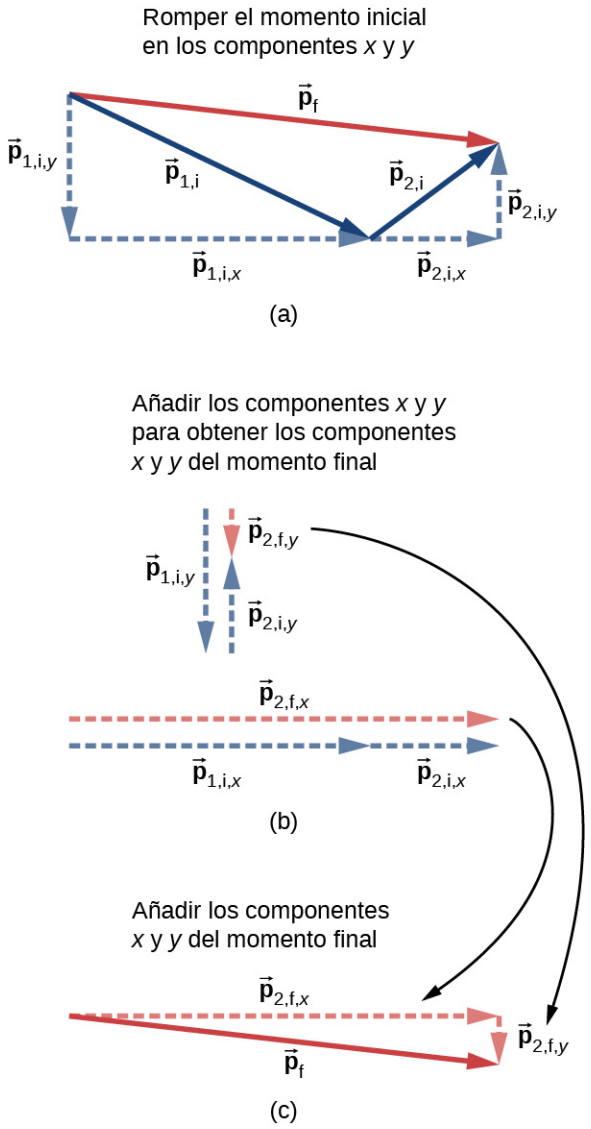


FIGURA 9.22 (a) Para los problemas bidimensionales de momento, descomponga los vectores de momento inicial en sus componentes *x* y *y*. (b) Sume los componentes *x* y *y* por separado. De este modo se obtienen los componentes *x* y *y* del momento final, que se muestran como vectores rojos discontinuos. (c) Sumando estos componentes se obtiene el momento final.

Resolvemos cada una de estas dos ecuaciones componentes de forma independiente para obtener los componentes *x* y *y* del vector de velocidad deseado:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{f},x} &= \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i},x} + m_2 v_{2,\mathrm{i},x}}{m} \\ v_{\mathrm{f},y} &= \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i},y} + m_2 v_{2,\mathrm{i},y}}{m}. \end{aligned}$$

(Aquí, m representa la masa total del sistema). Finalmente, combine estos componentes mediante el teorema de Pitágoras,

$$v_\mathrm{f} = \left|\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{f}\right| = \sqrt{v_{\mathrm{f},x}^2 + v_{\mathrm{f},y}^2}.$$

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Conservación del momento en dos dimensiones

El método para resolver un problema bidimensional (o incluso tridimensional) de conservación del momento es generalmente el mismo que el método para resolver un problema unidimensional, excepto que hay que conservar el momento en ambas (o en las tres) dimensiones simultáneamente:

1. Identifique un sistema cerrado.
2. Escriba la ecuación que representa la conservación del momento en la dirección de la *x*, y resuélvala para la cantidad deseada. Si está calculando una cantidad vectorial (velocidad, normalmente), esto le dará el componente *x* del vector.
3. Escriba la ecuación que representa la conservación del momento en la dirección de la *y*, y resuelva. Esto le dará el componente *y* de su cantidad vectorial.
4. Suponiendo que está calculando una cantidad vectorial, utilice el teorema de Pitágoras para calcular su magnitud, utilizando los resultados de los pasos 3 y 4.

EJEMPLO 9.14

Colisión de tráfico

Un auto pequeño de 1.200 kg de masa que viaja hacia el este a 60 km/h colisiona en una intersección con un camión de 3.000 kg de masa que viaja hacia el norte a 40 km/h (Figura 9.23). Los dos vehículos se enganchan. ¿Cuál es la velocidad de los restos combinados del accidente?

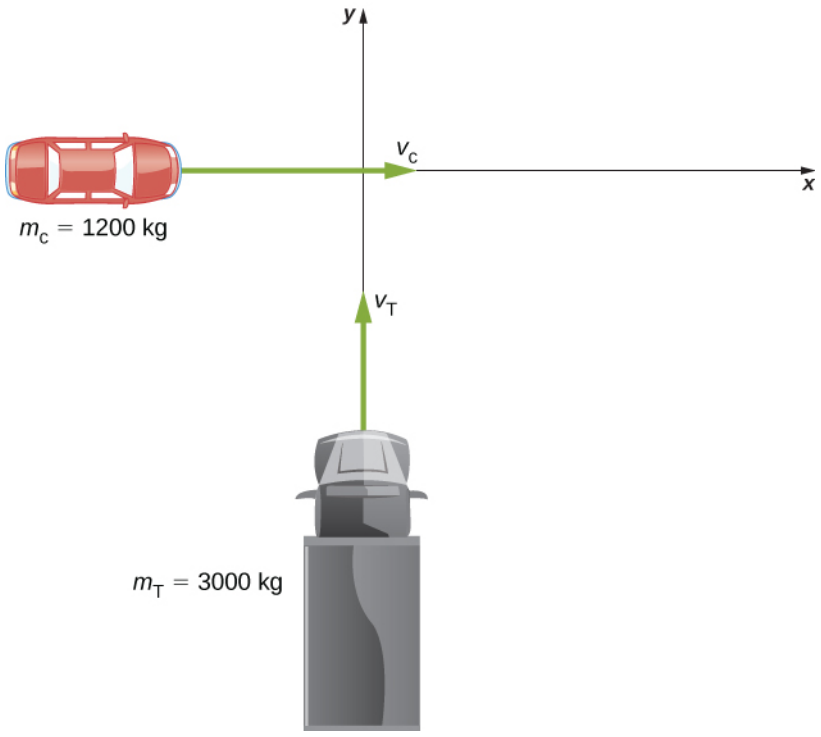


FIGURA 9.23 Un camión grande que circula hacia el norte está a punto de colisionar con un auto pequeño que circula hacia el este. El vector de momento final tiene componentes *x* y *y*.

Estrategia

En primer lugar, necesitamos un sistema cerrado. El sistema natural a elegir es el (auto + camión), pero este sistema no es cerrado; la fricción de la carretera actúa sobre ambos vehículos. Evitamos este problema al restringir la pregunta para calcular la velocidad en el instante justo después de la colisión, de modo que la

fricción no haya tenido aún ningún efecto sobre el sistema. Con esta restricción, el momento se conserva para este sistema.

Dado que hay dos direcciones involucradas, hacemos la conservación del momento dos veces: una en la dirección de la x y otra en la dirección de la y.

Solución

Antes de la colisión el momento total es

$$\vec{\mathbf{p}} = m_{\mathrm{c}}\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{c}} + m_{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{T}}.$$

Después de la colisión, los restos del accidente tienen momento

$$\vec{\mathbf{p}} = (m_{\mathrm{c}} + m_{\mathrm{T}})\,\vec{\mathbf{v}}_{w}.$$

En vista de que el sistema es cerrado, el momento debe conservarse, por lo que tenemos

$$m_{\mathrm{c}}\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} + m_{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{T}} = (m_{\mathrm{c}} + m_{\mathrm{T}})\,\vec{\mathbf{v}}_{w}.$$

Hay que tener cuidado; los dos momentos iniciales no son paralelos. Hay que sumar vectorialmente (Figura 9.24).

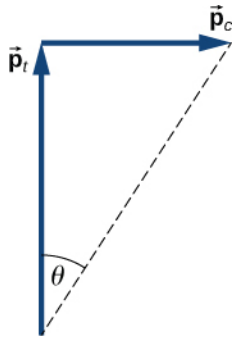


FIGURA 9.24 Suma gráfica de vectores de momento. Observe que, aunque la velocidad del auto es mayor que la del camión, su momento es menor.

Si definimos que la dirección de la $x+$ apunta hacia el este y la dirección de la $+y$ apunta hacia el norte, como en la figura, entonces (convenientemente),

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{c}} &= p_{\mathrm{c}}\hat{\mathbf{i}} = m_{\mathrm{c}}v_{\mathrm{c}}\hat{\mathbf{i}}\\ \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}} &= p_{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{j}} = m_{\mathrm{T}}v_{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en la dirección de la x:

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{c}}v_{\mathrm{c}} &= (m_{\mathrm{c}} + m_{\mathrm{T}})\,v_{\mathrm{w},x}\\ v_{\mathrm{w},x} &= \left(\frac{m_{\mathrm{c}}}{m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{T}}}\right)v_{\mathrm{c}}\end{aligned}$$

y en la dirección de la y:

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{T}}v_{\mathrm{T}} &= (m_{\mathrm{c}} + m_{\mathrm{T}})\,v_{\mathrm{w},y}\\ v_{\mathrm{w},y} &= \left(\frac{m_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{T}}}\right)v_{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene

$$\begin{aligned}|\vec{\mathbf{v}}_w| &= \sqrt{\left[\left(\frac{m_c}{m_c+m_t}\right)v_c\right]^2+\left[\left(\frac{m_t}{m_c+m_t}\right)v_t\right]^2}\\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{1.200\text{ kg}}{4.200\text{ kg}}\right)\left(16{,}67\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right]^2+\left[\left(\frac{3.000\text{ kg}}{4.200\text{ kg}}\right)\left(11{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right]^2}\\ &= \sqrt{\left(4{,}76\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2+\left(7{,}93\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}\\ &= 9{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 33{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.\end{aligned}$$

En cuanto a su dirección, al utilizar el ángulo que se muestra en la figura,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{w,x}}{v_{w,y}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7{,}93\text{ m/s}}{4{,}76\text{ m/s}}\right) = 59°.$$

Este ángulo está al este del norte, o $31°$ en el sentido contrario de las agujas del reloj desde la dirección de la x +.

Importancia

En la práctica, los investigadores de accidentes suelen trabajar en la "dirección opuesta": miden la distancia de las marcas de derrape en la carretera (lo que da la distancia de frenado) y utilizan el teorema de trabajo-energía junto con la conservación del momento para determinar la rapidez y dirección de los autos antes de la colisión. Hemos visto ese análisis en una sección anterior.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.9

Supongamos que las velocidades iniciales *no* son perpendiculares entre sí. ¿Cómo cambiaría esto tanto el resultado físico como el análisis matemático de la colisión?

EJEMPLO 9.15

Explosión de tanque de buceo

Un tanque de buceo común es un cilindro de aluminio que pesa 31,7 libras vacío (Figura 9.25). Cuando está lleno de aire comprimido, la presión interna está entre 2.500 y 3.000 libras por pulgada cuadrada (pounds per square inch, psi). Supongamos que un tanque de este tipo, que ha estado inmóvil, estalla de repente en tres pedazos. El primer pedazo, que pesa 10 libras, sale disparado horizontalmente a 235 millas por hora; el segundo pedazo (7 libras) sale disparado a 172 millas por hora, también en el plano horizontal, pero a un ángulo de $19°$ con respecto al primer pedazo. ¿Cuál es la masa y la velocidad inicial del tercer pedazo? (Haga todo el trabajo y exprese su respuesta final en unidades del SI).

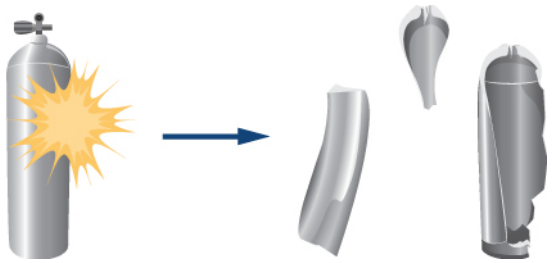


FIGURA 9.25 Un tanque de buceo estalla en tres pedazos.

Estrategia

Para utilizar la conservación del momento, necesitamos un sistema cerrado. Si definimos el sistema como el tanque de buceo, este no es un sistema cerrado, ya que la gravedad es una fuerza externa. Sin embargo, el problema pide solo la velocidad inicial del tercer pedazo, por lo que podemos descartar el efecto de la

gravedad y considerar el tanque por sí mismo como un sistema cerrado. Observe que, para este sistema, el vector de momento inicial es cero.

Elegimos un sistema de coordenadas en el que todo el movimiento se produce en el plano *xy*. Luego, escribimos las ecuaciones de conservación del momento en cada dirección, para obtener los componentes *x* y *y* del momento del tercer pedazo, de los que obtenemos su magnitud (mediante el teorema de Pitágoras) y su dirección. Finalmente, al dividir este momento entre la masa del tercer pedazo, obtenemos la velocidad.

Solución

En primer lugar, salgamos de todas las conversiones a unidades del SI:

$$31{,}7\ \text{lb} \times \frac{1\ \text{kg}}{2{,}2\ \text{lb}} \rightarrow 14{,}4\ \text{kg}$$

$$10\ \text{lb} \rightarrow 4{,}5\ \text{kg}$$

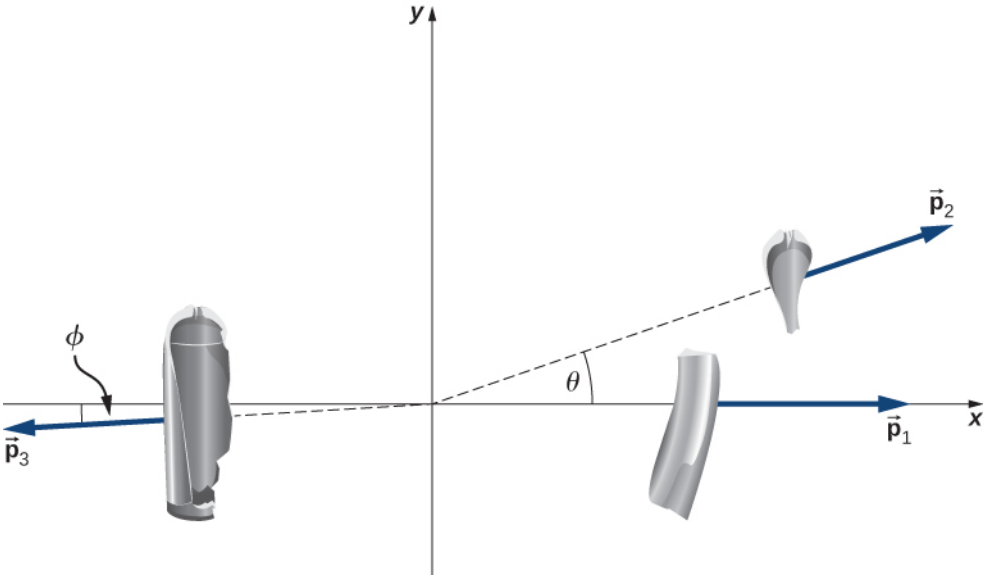
$$235\ \frac{\text{millas}}{\text{hora}} \times \frac{1\ \text{hora}}{3.600\ \text{s}} \times \frac{1.609\ \text{m}}{\text{milla}} = 105\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$7\ \text{lb} \rightarrow 3{,}2\ \text{kg}$$

$$172\ \frac{\text{milla}}{\text{hora}} = 77\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_3 = 14{,}4\ \text{kg} - (4{,}5\ \text{kg} + 3{,}2\ \text{kg}) = 6{,}7\ \text{kg}.$$

Ahora aplicamos la conservación del momento en cada dirección.



dirección de la *x*:

$$\begin{aligned} p_{f,x} &= p_{0,x} \\ p_{1,x} + p_{2,x} + p_{3,x} &= 0 \\ m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x} + p_{3,x} &= 0 \\ p_{3,x} &= -m_1 v_{1,x} - m_2 v_{2,x} \end{aligned}$$

dirección de la *y*:

$$\begin{aligned} p_{f,y} &= p_{0,y} \\ p_{1,y} + p_{2,y} + p_{3,y} &= 0 \\ m_1 v_{1,y} + m_2 v_{2,y} + p_{3,y} &= 0 \\ p_{3,y} &= -m_1 v_{1,y} - m_2 v_{2,y} \end{aligned}$$

A partir de nuestro sistema elegido de coordenadas, escribimos los componentes x como

$$\begin{aligned} p_{3,x} &= -m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos\theta \\ &= -(4{,}5\ \text{kg})\left(105\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right) - (3{,}2\ \text{kg})\left(77\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cos(19°) \\ &= -705\ \tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Para la dirección de la y, tenemos

$$\begin{aligned} p_{3y} &= 0 - m_2 v_2 \operatorname{sen}\theta \\ &= -(3{,}2\ \text{kg})\left(77\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)\operatorname{sen}(19°) \\ &= -80{,}2\ \tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Esto da la magnitud de p_3:

$$\begin{aligned} p_3 &= \sqrt{p_{3,x}^2 + p_{3,y}^2} \\ &= \sqrt{\left(-705\ \tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-80{,}2\ \tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}\right)} \\ &= 710\ \tfrac{\text{kg·m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad del tercer pedazo es

$$v_3 = \frac{p_3}{m_3} = \frac{710\ \frac{\text{kg·m}}{\text{s}}}{6{,}7\ \text{kg}} = 106\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La dirección de su vector de velocidad es la misma que la de su vector de momento:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{p_{3,y}}{p_{3,x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{80{,}2\ \frac{\text{kg·m}}{\text{s}}}{705\ \frac{\text{kg·m}}{\text{s}}}\right) = 6{,}49°.$$

Dado que ϕ está por debajo del eje de la $-x$, el ángulo real es $183{,}5°$ desde la dirección de la $x+$.

Importancia

Las enormes velocidades aquí son típicas; la explosión de un tanque de cualquier gas comprimido puede atravesar fácilmente la pared de una casa y causar lesiones importantes o la muerte. Afortunadamente, este tipo de explosiones son extremadamente raras, en términos porcentuales.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.10

Observe que en el análisis y la solución se ha descartado la masa del aire en el tanque. ¿Cómo cambiaría el método de solución si se incluyera el aire? ¿Qué diferencia cree que habría en la respuesta final?

9.6 Centro de masa

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el significado y la utilidad del concepto de centro de masa.
- Calcular el centro de masa de un sistema dado.
- Aplicar el concepto de centro de masa en dos y tres dimensiones.
- Calcular la velocidad y la aceleración del centro de masa.

Hasta ahora hemos eludido un asunto importante: cuando decimos que un objeto se mueve (más correctamente, se acelera) de una manera que obedece a la segunda ley de Newton, hemos pasado por alto el hecho de que todos los objetos están hechos realmente de muchas partículas constituyentes. Un auto tiene un motor, un volante, asientos, pasajeros; un balón de fútbol es cuero y goma con aire adentro; un ladrillo está hecho de átomos. Hay muchos tipos diferentes de partículas y, por lo general, no están distribuidas uniformemente en el objeto. ¿Cómo incluimos estos hechos en nuestros cálculos?

Además, un objeto extendido puede cambiar de forma mientras se mueve, como un globo de agua o un gato que cae (Figura 9.26). Esto implica que las partículas constituyentes aplican fuerzas internas entre sí, además de la fuerza externa que actúa en el objeto como un todo. Queremos ser capaces de manejar esto también.

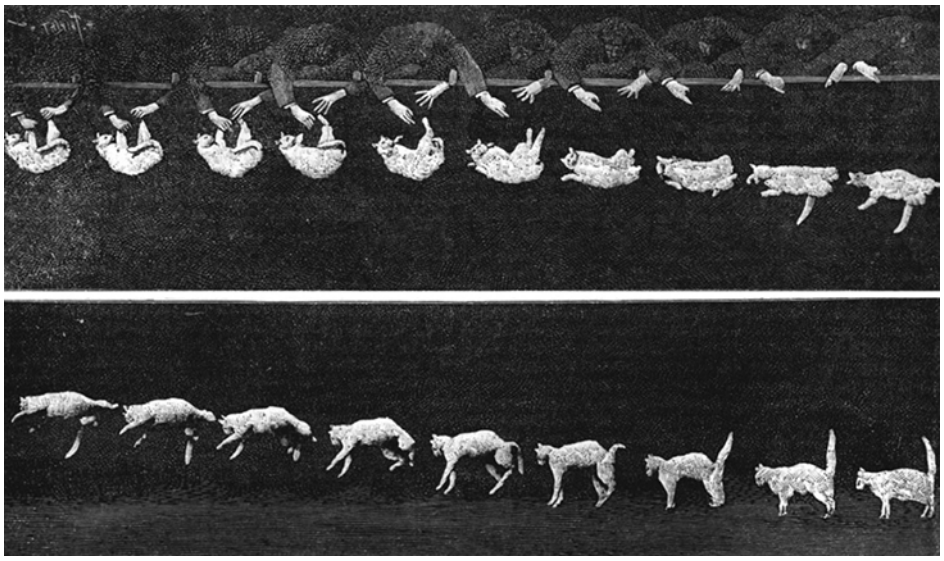


FIGURA 9.26 Mientras el gato cae, su cuerpo realiza complicados movimientos para poder caer de pie, pero un punto del sistema se mueve con la simple aceleración uniforme de la gravedad.

El problema que tenemos ante nosotros, por tanto, es determinar qué parte de un objeto extendido obedece a la segunda ley de Newton cuando se aplica una fuerza externa y determinar cómo el movimiento del objeto en su conjunto se ve afectado por las fuerzas internas y externas.

Está advertido: Para tratar correctamente esta nueva situación, debemos ser rigurosos y completamente generales. No haremos ninguna suposición sobre la naturaleza del objeto, ni de las partículas que lo componen, ni de las fuerzas internas o externas. Por lo tanto, los argumentos serán complejos.

Fuerzas internas y externas

Supongamos que tenemos un objeto extendido de masa M, formado por N partículas que interactúan. Vamos a marcar sus masas como m_j, donde $j = 1, 2, 3, \ldots, N$. Observe que

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j. \tag{9.19}$$

Si aplicamos alguna **fuerza externa** neta $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ sobre el objeto, cada partícula experimenta alguna "parte" o

alguna fracción de esa fuerza externa. Supongamos que:

$$\vec{\mathbf{f}}_j^{\text{ext}} = \text{la fracción de la fuerza externa que determinada partícula } j \text{experimenta.}$$

Observe que estas fracciones de la fuerza total no son necesariamente iguales; de hecho, prácticamente nunca lo son. (*Pueden* serlo, pero normalmente no lo son). Por lo tanto, en general,

$$\vec{\mathbf{f}}_1^{\text{ext}} \neq \vec{\mathbf{f}}_2^{\text{ext}} \neq \cdots \neq \vec{\mathbf{f}}_N^{\text{ext}}.$$

Luego, suponemos que cada una de las partículas que componen nuestro objeto puede interactuar (aplicar fuerzas sobre) todas las demás partículas del objeto. No trataremos de adivinar qué tipo de fuerzas son. Sin embargo, en vista de que estas fuerzas son el resultado de partículas del objeto que actúan sobre otras partículas del mismo objeto, nos referimos a ellas como **fuerzas internas** $\vec{\mathbf{f}}_j^{\text{int}}$; así:

$\vec{\mathbf{f}}_j^{\text{int}}$ = la fuerza interna neta que determinada partícula j experimenta de todas las demás partículas que componen el objeto.

Ahora, la fuerza *neta*, interna más externa, sobre la partícula j determinada es la suma vectorial de estas:

$$\vec{\mathbf{f}}_j = \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{int}} + \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{ext}}. \tag{9.20}$$

donde de nuevo, esto es para todas las N partículas; $j = 1, 2, 3, \ldots, N$.

Como resultado de esta fuerza fraccional, el momento de cada partícula cambia:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}}_j &= \frac{d\vec{\mathbf{p}}_j}{dt} \\ \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{int}} + \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{ext}} &= \frac{d\vec{\mathbf{p}}_j}{dt}. \end{aligned} \tag{9.21}$$

La fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el *objeto* es la suma vectorial de estas fuerzas:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} &= \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{int}} + \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{ext}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{int}} + \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{ext}}. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Esta fuerza neta cambia el momento del objeto como un todo, y el cambio neto del momento del objeto deberá ser la suma vectorial todos y cada uno de los cambios del momento de todas las partículas:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{\mathbf{p}}_j}{dt}. \tag{9.23}$$

Combinando la Ecuación 9.22 y la Ecuación 9.23 da

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{int}} + \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{ext}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{\mathbf{p}}_j}{dt}. \tag{9.24}$$

Pensemos ahora en estas sumatorias. En primer lugar, considere el término de fuerzas internas; recuerde que cada $\vec{\mathbf{f}}_j^{\text{int}}$ es la fuerza que ejercen las demás partículas del objeto sobre la partícula j determinada. Sin embargo, según la tercera ley de Newton, por cada una de estas fuerzas deberá haber otra que tenga la misma magnitud, pero de signo contrario (que apunte en la dirección opuesta). Estas fuerzas no se cancelan; sin embargo, no es eso lo que estamos haciendo en la sumatoria. Más bien, simplemente estamos *sumando matemáticamente* todos los vectores de fuerza internos. Es decir, en general, las fuerzas internas para cualquier parte individual del objeto no se cancelarán, pero cuando se suman todas las fuerzas internas, estas deben cancelarse por pares. Se deduce, por lo tanto, que la suma de todas las fuerzas internas deberá ser cero:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{int}} = 0.$$

(Este argumento es sutil, pero crucial; tómese el tiempo suficiente para entenderlo completamente).

En relación con las fuerzas externas, esta suma es simplemente la fuerza externa total que se aplicó a todo el objeto:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{ext}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}.$$

Como resultado,

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{\mathbf{p}}_j}{dt}. \tag{9.25}$$

Este es un resultado importante. La Ecuación 9.25 nos dice que el cambio total del momento de todo el objeto (todas las N partículas) se debe solo a las fuerzas externas; las fuerzas internas no cambian el momento del objeto en su conjunto. Por eso no puede levantarse a sí mismo por los aires al pararse en una cesta y halar las asas. Para el sistema de usted + cesta, su fuerza de tracción hacia arriba es una fuerza interna.

Fuerza y momento

Recuerde que nuestro objetivo real es determinar la ecuación de movimiento para todo el objeto (todo el sistema de partículas). Para ello, definamos:

$\vec{\mathbf{p}}_{\text{CM}}$ = el momento total del sistema de N partículas (la razón del subíndice quedará clara en breve)

Entonces tenemos

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{CM}} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_j,$$

y, por lo tanto, la Ecuación 9.25 puede escribirse simplemente como

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\text{CM}}}{dt}. \tag{9.26}$$

Dado que este cambio de momento lo causa únicamente la fuerza externa neta, hemos suprimido el subíndice "ext".

Esta es la segunda ley de Newton, pero ahora para todo el objeto extendido. Si esto le parece un poco anticlimático, recuerde lo que se esconde en su interior: $\vec{\mathbf{p}}_{\text{CM}}$ es la suma vectorial del momento de (en principio) cientos de miles de miles de millones de partículas ($6{,}02 \times 10^{23}$), todo ello causado por una simple fuerza externa neta, que se puede calcular.

Centro de masa

Nuestra siguiente tarea es determinar qué parte del objeto extendido, si es que hay alguna, obedece a la Ecuación 9.26.

Es tentador dar el siguiente paso; ¿significa algo la siguiente ecuación?

$$\vec{\mathbf{F}} = M\vec{\mathbf{a}} \tag{9.27}$$

Si *significa* algo (¿aceleración de qué, exactamente?), entonces podríamos escribir

$$M\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\text{CM}}}{dt}$$

y, por lo tanto,

$$M\vec{\mathbf{a}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{\mathbf{p}}_j}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_j.$$

lo que se deduce porque la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.

Ahora, $\vec{\mathbf{p}}_j$ es el momento de la partícula j determinada. Definiendo las posiciones de las partículas constituyentes (en relación con algún sistema de coordenadas) como $\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{j} = \left(x_j, y_j, z_j\right)$, así, tenemos

$$\vec{\mathbf{p}}_j = m_j\vec{\mathbf{v}}_j = m_j\frac{d\vec{\mathbf{r}}_j}{dt}.$$

Sustituyendo de nuevo, obtenemos

$$\begin{aligned} M\vec{\mathbf{a}} &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} m_j\frac{d\vec{\mathbf{r}}_j}{dt} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{\mathbf{r}}_j. \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados por M (la masa total del objeto extendido) nos da

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{\mathbf{r}}_j\right). \qquad 9.28$$

Así, el punto del objeto que traza la trayectoria dictada por la fuerza aplicada en la Ecuación 9.27 está dentro del paréntesis en la Ecuación 9.28.

Si observamos este cálculo, veremos que (dentro del paréntesis) estamos calculando el producto de la masa de cada partícula por su posición, sumando todas las N y dividiendo esta suma entre la masa total de partículas que hemos sumado. Esto recuerda una media; si nos inspiramos en ella, la interpretaremos (vagamente) como la posición media ponderada de la masa del objeto extendido. En realidad, recibe el nombre de **centro de masa** del objeto. Observe que la posición del centro de masa tiene unidades de metros; eso apunta a una definición:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{\mathbf{r}}_j. \qquad 9.29$$

Así, el punto que obedece a la Ecuación 9.26 (y por tanto también a la Ecuación 9.27) es el centro de masa del objeto, que se encuentra en el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}}$.

Quizás le sorprenda saber que no es necesario que haya una masa real en el centro de masa de un objeto. Por ejemplo, una esfera de acero hueca con un vacío en su interior es esféricamente simétrica (lo que significa que su masa se distribuye uniformemente alrededor del centro de la esfera); toda la masa de la esfera está fuera en su superficie, sin masa en su interior. No obstante, se puede demostrar que el centro de masa de la esfera está en su centro geométrico, lo que parece razonable. Así, no hay masa en la posición del centro de masa de la esfera. (Otro ejemplo es una dona). El procedimiento para encontrar el centro de masa se ilustra en la Figura 9.27.

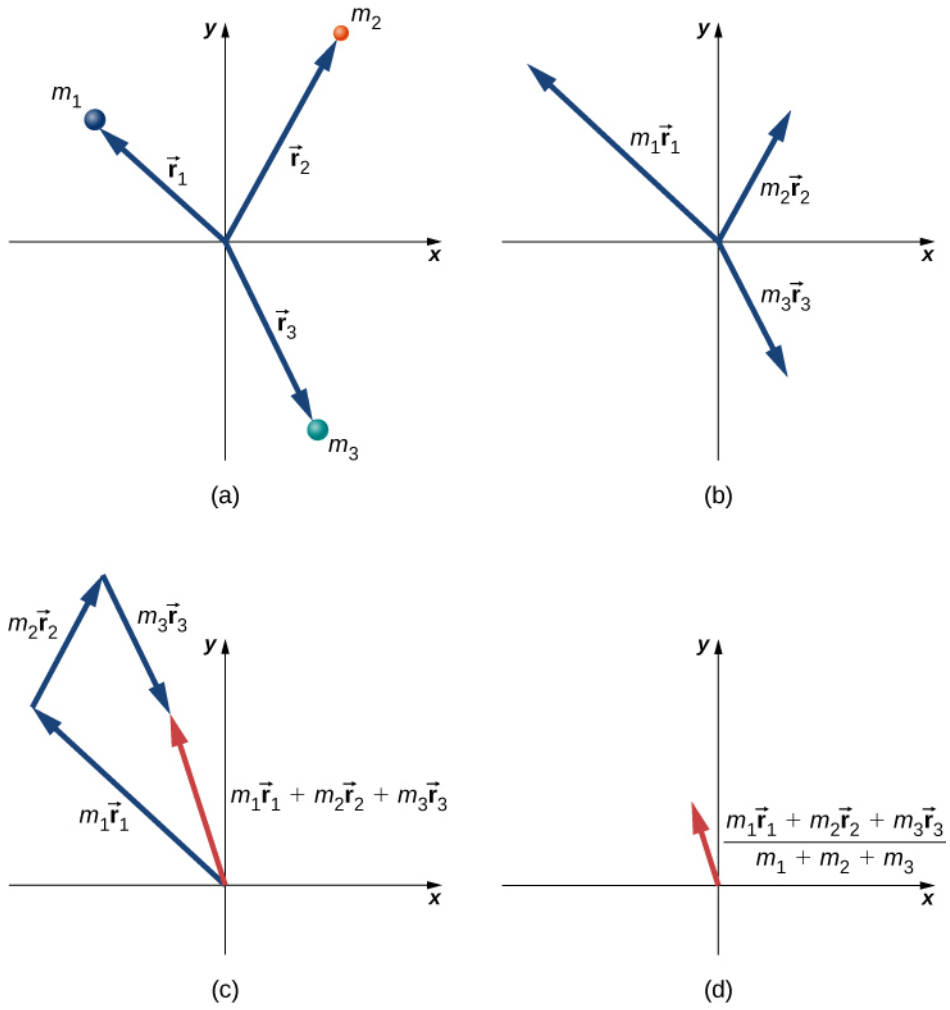


FIGURA 9.27 Hallar el centro de masa de un sistema de tres partículas diferentes. (a) Se crean vectores de posición para cada objeto. (b) Los vectores de posición se multiplican por la masa del objeto correspondiente. (c) Se suman los vectores escalados de la parte (b). (d) El vector final se divide entre la masa total. Este vector apunta al centro de masa del sistema. Observe que, en el centro de masa de este sistema, no hay ninguna masa.

Dado que $\vec{\mathbf{r}}_j = x_j\hat{\mathbf{i}} + y_j\hat{\mathbf{j}} + z_j\hat{\mathbf{k}}$, se deduce que:

$$r_{\mathrm{CM},x} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j x_j \qquad \textbf{9.30}$$

$$r_{\mathrm{CM},y} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j y_j \qquad \textbf{9.31}$$

$$r_{\mathrm{CM},z} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j z_j \qquad \textbf{9.32}$$

y, por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}} = r_{\mathrm{CM},x}\hat{\mathbf{i}} + r_{\mathrm{CM},y}\hat{\mathbf{j}} + r_{\mathrm{CM},z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$r_{\mathrm{CM}} = \left|\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}}\right| = \left(r_{\mathrm{CM},x}^2 + r_{\mathrm{CM},y}^2 + r_{\mathrm{CM},z}^2\right)^{1/2}.$$

Por lo tanto, puede calcular los componentes del vector del centro de masa individualmente.

Por último, para completar la cinemática, la velocidad instantánea del centro de masa se calcula exactamente como se pueda presumir:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\mathbf{r}}_j\right) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\mathbf{v}}_j \qquad 9.33$$

y este, al igual que la posición, tiene componentes x, y y z.

Para calcular el centro de masa en situaciones reales, recomendamos el siguiente procedimiento:

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Calcular del centro de masa

El centro de masa de un objeto es un vector de posición. Así, para calcularlo, siga estos pasos:

1. Defina su sistema de coordenadas. Normalmente, el origen se sitúa en la ubicación de una de las partículas. Sin embargo, esto no es necesario.
2. Determine las coordenadas de la x, la y, la z de cada partícula que compone el objeto.
3. Determine la masa de cada partícula y súmela para obtener la masa total del objeto. Observe que la masa del objeto en el origen *deberá* incluirse en la masa total.
4. Calcule los componentes x, y, y z del vector de centro de masa, utilizando la Ecuación 9.30, la Ecuación 9.31, y la Ecuación 9.32.
5. Si es necesario, utilice el teorema de Pitágoras para determinar su magnitud.

Aquí hay dos ejemplos que le darán una idea de lo que es el centro de masa.

EJEMPLO 9.16

Centro de masa del sistema Tierra-Luna

Utilizando los datos del anexo del texto, determine a qué distancia está el centro de masa del sistema Tierra-Luna del centro de la Tierra. Compare esta distancia con el radio de la Tierra y comenta el resultado. Ignore los demás objetos del sistema solar.

Estrategia

Obtenemos las masas y la distancia de separación de la Tierra y la Luna, imponemos un sistema de coordenadas y utilizamos la Ecuación 9.29 con solo $N = 2$ objetos. Utilizamos un subíndice "e" para referirnos a la Tierra, y un subíndice "m" para referirnos a la Luna.

Solución

Defina el origen del sistema de coordenadas como el centro de la Tierra. Luego, con solo dos objetos, la Ecuación 9.29 se convierte en

$$R = \frac{m_{\text{e}} r_{\text{e}} + m_{\text{m}} r_{\text{m}}}{m_{\text{e}} + m_{\text{m}}}.$$

A partir del Apéndice D,

$$m_{\text{e}} = 5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

$$m_{\text{m}} = 7{,}36 \times 10^{22}\ \text{kg}$$

$$r_{\text{m}} = 3{,}82 \times 10^{8}\ \text{m}.$$

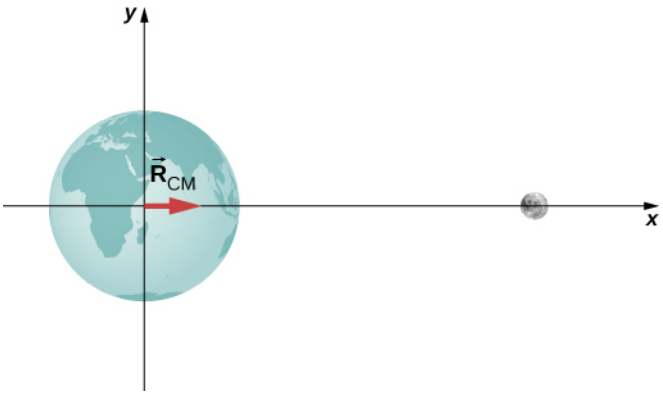
Definimos el centro de la Tierra como el origen, por lo que $r_{\text{e}} = 0$ m. Insertando esto en la ecuación de R se

obtiene

$$R = \frac{\left(5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg}\right)(0\ \text{m}) + \left(7{,}36 \times 10^{22}\ \text{kg}\right)\left(3{,}82 \times 10^{8}\ \text{m}\right)}{5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg} + 7{,}36 \times 10^{22}\ \text{kg}}$$
$$= 4{,}64 \times 10^{6}\ \text{m}.$$

Importancia

El radio de la Tierra es $6{,}37 \times 10^{6}$ m, por lo que el centro de masa del sistema Tierra-Luna es (6,37 - 4,64) $\times 10^{6}$ m $= 1{,}73 \times 10^{6}$ m $= 1.730$ km (aproximadamente 1080 millas) *por debajo* de la superficie de la Tierra. Se muestra la ubicación del centro de masa (no a escala).



COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.11

Supongamos que incluimos el sol en el sistema. ¿Dónde se situaría aprocimadamente el centro de masa del sistema Tierra-Luna-Sol? (Siéntase libre de calcularlo realmente).

EJEMPLO 9.17

Centro de masa de un cristal de sal

La Figura 9.28 muestra un solo cristal de cloruro de sodio (sal de mesa común). Los iones sodio y cloruro forman una sola unidad, NaCl. Cuando varias unidades de NaCl se agrupan, forman una red cúbica. El cubo más pequeño posible (llamado *celda unitaria*) está formado por cuatro iones de sodio y cuatro de cloruro, alternados. La longitud de una arista de este cubo (es decir, la longitud de enlace) es $2{,}36 \times 10^{-10}$ m. Halle la ubicación del centro de masa de la celda unitaria. Especifíquelo por sus coordenadas $\left(r_{\text{CM},x}, r_{\text{CM},y}, r_{\text{CM},z}\right)$, o por r_{CM} y dos ángulos.

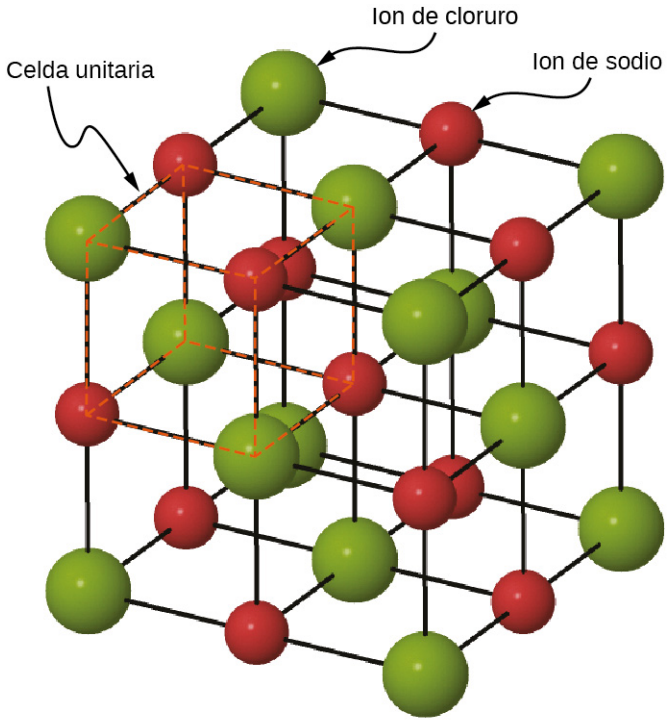


FIGURA 9.28 Dibujo de un cristal de cloruro de sodio (NaCl).

Estrategia

Podemos buscar todas las masas de iones. Si imponemos un sistema de coordenadas a la celda unitaria, esto nos dará las posiciones de los iones. Podemos entonces aplicar la Ecuación 9.30, la Ecuación 9.31 y la Ecuación 9.32 (junto con el teorema de Pitágoras).

Solución

Defina el origen en la ubicación del ion de cloruro en la parte inferior izquierda de la celda unitaria. La Figura 9.29 muestra el sistema de coordenadas.

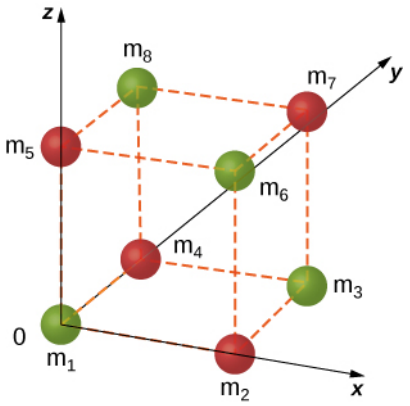


FIGURA 9.29 Una sola celda unitaria de un cristal de NaCl.

Hay ocho iones en este cristal, por lo que $N = 8$:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{8} m_j \vec{\mathbf{r}}_j.$$

La masa de cada uno de los iones de cloruro es

$$35{,}453\text{u} \times \frac{1{,}660 \times 10^{-27}\ \text{kg}}{\text{u}} = 5{,}885 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

por lo que tenemos

$$m_1 = m_3 = m_6 = m_8 = 5{,}885 \times 10^{-26}\ \text{kg}.$$

Para los iones de sodio,

$$m_2 = m_4 = m_5 = m_7 = 3{,}816 \times 10^{-26}\ \text{kg}.$$

Por lo tanto, la masa total de la celda unitaria es

$$M = (4)\left(5{,}885 \times 10^{-26}\ \text{kg}\right) + (4)\left(3{,}816 \times 10^{-26}\ \text{kg}\right) = 3{,}880 \times 10^{-25}\ \text{kg}.$$

A partir de la geometría, las ubicaciones son

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{r}}_1 &= 0\\
\vec{\mathbf{r}}_2 &= \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{i}}\\
\vec{\mathbf{r}}_3 &= r_{3x}\hat{\mathbf{i}} + r_{3y}\hat{\mathbf{j}} = \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{j}}\\
\vec{\mathbf{r}}_4 &= \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{j}}\\
\vec{\mathbf{r}}_5 &= \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\vec{\mathbf{k}}\\
\vec{\mathbf{r}}_6 &= r_{6x}\hat{\mathbf{i}} + r_{6z}\hat{\mathbf{k}} = \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{k}}\\
\vec{\mathbf{r}}_7 &= r_{7x}\hat{\mathbf{i}} + r_{7y}\hat{\mathbf{j}} + r_{7z}\hat{\mathbf{k}} = \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{k}}\\
\vec{\mathbf{r}}_8 &= r_{8y}\hat{\mathbf{j}} + r_{8z}\hat{\mathbf{k}} = \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\hat{\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\left|\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM},x}\right| &= \sqrt{r_{\text{CM},x}^2 + r_{\text{CM},y}^2 + r_{\text{CM},z}^2}\\
&= \tfrac{1}{M}\sum_{j=1}^{8} m_j (r_x)_j\\
&= \tfrac{1}{M}(m_1 r_{1x} + m_2 r_{2x} + m_3 r_{3x} + m_4 r_{4x} + m_5 r_{5x} + m_6 r_{6x} + m_7 r_{7x} + m_8 r_{8x})\\
&= \frac{1}{3{,}8804 \times 10^{-25}\ \text{kg}}\left[\left(5{,}885 \times 10^{-26}\ \text{kg}\right)(0\,\text{m}) + \left(3{,}816 \times 10^{-26}\ \text{kg}\right)\left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\right.\\
&\quad + \left(5{,}885 \times 10^{-26}\ \text{kg}\right)\left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right)\\
&\quad + \left(3{,}816 \times 10^{-26}\ \text{kg}\right)\left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right) + 0 + 0\\
&\quad \left. + \left(3{,}816 \times 10^{-26}\ \text{kg}\right)\left(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}\right) + 0\right]\\
&= 1{,}18 \times 10^{-10}\ \text{m}.
\end{aligned}$$

Cálculos semejantes dan como resultado $r_{\text{CM},y} = r_{\text{CM},z} = 1{,}18 \times 10^{-10}$ m (se podría argumentar que esto debe ser cierto, por simetría, aunque es una buena idea comprobarlo).

Importancia

Si bien se trata de un buen ejercicio para determinar el centro de masa dado un ion de cloruro en el origen, en realidad el origen podría elegirse en cualquier ubicación. Por lo tanto, no hay ninguna aplicación significativa del centro de masa de una celda unitaria más allá de un ejercicio.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.12

Suponga que tiene un cristal de sal macroscópico (es decir, un cristal lo suficientemente grande como para ser visible a simple vista). Está formado por un *gran* número de celdas unitarias. ¿Está el centro de masa de este

cristal necesariamente en el centro geométrico del mismo?

De estos ejemplos se desprenden dos conceptos cruciales:

1. Como en todos los problemas, deberá definir el sistema de coordenadas y el origen. En relación con los cálculos del centro de masa, a menudo tiene sentido elegir que el origen esté situado en una de las masas del sistema. Esa elección define automáticamente que su distancia en la Ecuación 9.29 sea cero. Sin embargo, deberá incluir la masa del objeto en su origen en su cálculo de M, la masa total en la Ecuación 9.19. En el ejemplo del sistema Tierra-Luna, esto significa incluir la masa de la Tierra. Si no lo hubiera hecho, habría acabado con el centro de masa del sistema en el centro de la Luna, lo cual es claramente erróneo.
2. En el segundo ejemplo (el cristal de sal), observe que no hay masa alguna en el lugar del centro de masa. Este es un ejemplo de lo que dijimos anteriormente, que no tiene que haber ninguna masa real en el centro de masa de un objeto.

Centro de masa de objetos continuos

Si el objeto en cuestión tiene su masa distribuida uniformemente en el espacio, y no como una colección de partículas separadas, entonces $m_j \rightarrow dm$, y la sumatoria se convierte en una integral:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm. \qquad 9.34$$

En este contexto, r es una dimensión característica del objeto (el radio de una esfera, la longitud de una varilla larga). Para generar un integrando que pueda calcularse realmente, es necesario expresar el elemento de masa diferencial dm como una función de la densidad de masa del objeto continuo, y la dimensión r. Un ejemplo lo aclarará.

EJEMPLO 9.18

CM de un aro delgado uniforme

Encuentre el centro de masa de un aro (o anillo) delgado uniforme de masa M y radio r.

Estrategia

En primer lugar, la simetría del aro sugiere que el centro de masa debería estar en su centro geométrico. Si definimos nuestro sistema de coordenadas de forma que el origen se encuentre en el centro del aro, la integral debería evaluarse a cero.

Sustituimos dm por una expresión que implica la densidad del aro y el radio del mismo. Entonces tenemos una expresión que podemos integrar realmente. Como el aro se describe como "delgado", lo tratamos como un objeto unidimensional, ignorando el grosor del aro. Por lo tanto, su densidad se expresa como el número de kilogramos de material por metro. Dicha densidad se denomina **densidad lineal de masa** y recibe el símbolo λ; esta es la letra griega "lambda", que equivale a la letra inglesa "l" (de "lineal").

Dado que el aro se describe como uniforme, esto significa que la densidad lineal de masa λ es constante. Así, para obtener nuestra expresión para el elemento de masa diferencial dm, multiplicamos λ por una longitud diferencial del aro, sustituimos e integramos (con límites adecuados para la integral definida).

Solución

En primer lugar, definiremos nuestro sistema de coordenadas y las variables pertinentes (Figura 9.30).

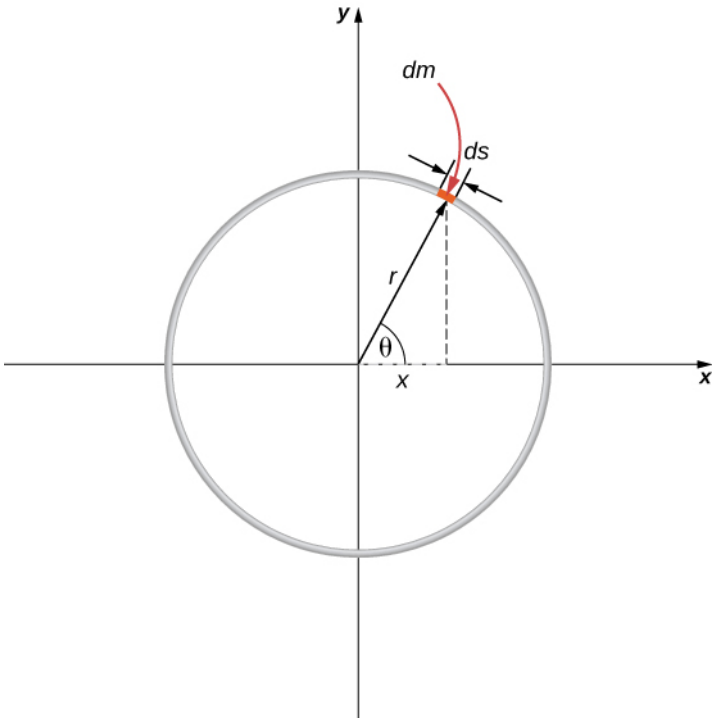


FIGURA 9.30 Hallar el centro de masa de un aro uniforme. Expresamos las coordenadas de un trozo diferencial del aro, y luego integramos alrededor del aro.

El centro de masa se calcula con la Ecuación 9.34:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_a^b \vec{\mathbf{r}}\,dm.$$

Tenemos que determinar los límites de integración a y b. Expresando $\vec{\mathbf{r}}$ en forma de componentes obtenemos

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_a^b \left[(r\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + (r\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{\mathbf{j}}\right] dm.$$

En el diagrama, resaltamos un trozo del aro que tiene una longitud diferencial ds; por tanto, tiene una masa diferencial $dm = \lambda ds$. Sustituyendo:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_a^b \left[(r\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + (r\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{\mathbf{j}}\right] \lambda ds.$$

Sin embargo, la longitud de arco ds subtiende un ángulo diferencial $d\theta$, por lo que tenemos

$$ds = r\,d\theta$$

y, por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_a^b \left[(r\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + (r\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{\mathbf{j}}\right] \lambda r\,d\theta.$$

Un paso más: Dado que λ es la densidad lineal de masa, se calcula al dividir la masa total entre la longitud del aro:

$$\lambda = \frac{M}{2\pi r}$$

lo que nos da

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} &= \tfrac{1}{M}\int_a^b \left[(r\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + (r\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{\mathbf{j}}\right]\left(\frac{M}{2\pi r}\right) r\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_a^b \left[(r\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + (r\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{\mathbf{j}}\right] d\theta.\end{aligned}$$

Observe que la variable de integración es ahora el ángulo θ. Esto nos dice que los límites de integración (alrededor del aro circular) son $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, así que $a = 0$ y $b = 2\pi$. Además, por comodidad, separamos la integral en los componentes x y y de $\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}}$. La expresión integral final es

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} &= r_{\text{CM},x}\,\hat{\mathbf{i}} + r_{\text{CM},y}\,\hat{\mathbf{j}} \\ &= \left[\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (r\cos\theta)\,d\theta\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (r\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta\right]\hat{\mathbf{j}} \\ &= 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{0}}\end{aligned}$$

como se esperaba.

Centro de masa y conservación del momento

¿Cómo se relaciona todo esto con la conservación del momento?

Suponga que tiene N objetos con masas $m_1, m_2, m_3, \ldots m_N$ y velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_N$. El centro de masa de los objetos es

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\mathbf{r}}_j.$$

Su velocidad es

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\vec{\mathbf{r}}_j}{dt} \qquad 9.35$$

y, por lo tanto, el momento inicial del centro de masa es

$$\begin{aligned}\left[M\tfrac{d\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}}}{dt}\right]_{\text{i}} &= \sum_{j=1}^{N} m_j \tfrac{d\vec{\mathbf{r}}_{j,\text{i}}}{dt} \\ M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM,i}} &= \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\mathbf{v}}_{j,\text{i}}.\end{aligned}$$

Después de que estas masas se muevan e interactúen entre sí, el momento del centro de masa es

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM,f}} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\mathbf{v}}_{j,\text{f}}.$$

No obstante, la conservación del momento nos indica que el lado derecho de ambas ecuaciones deberá ser igual, lo que se expresa como

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM,f}} = M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM,i}}. \qquad 9.36$$

Este resultado implica que la conservación del momento se expresa en términos del centro de masa del sistema. Observe que, cuando un objeto se mueve por el espacio sin ninguna fuerza externa neta que actúe sobre este, una sola partícula del objeto puede acelerar en varias direcciones, con diversas magnitudes, dependiendo de la fuerza interna neta que actúe sobre ese objeto en cualquier momento. (Recuerde que solo desaparece la suma vectorial de todas las fuerzas internas, no la fuerza interna sobre una sola partícula). Así,

el momento de dicha partícula no será constante, sino que el momento de todo el objeto extendido lo será, de acuerdo con la Ecuación 9.36.

La Ecuación 9.36 implica otro resultado importante: como M representa la masa de todo el sistema de partículas, es necesariamente constante. (Si no lo es, no tenemos un sistema cerrado, por lo que no podemos esperar que el momento del sistema se conserve). Como resultado, la Ecuación 9.36 implica que, para un sistema cerrado,

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM,f}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM,i}}. \tag{9.37}$$

Es decir, *en ausencia de una fuerza externa, la velocidad del centro de masa nunca cambia.*

Podría encoger los hombros y señalar: "Bueno, sí, eso es solo la primera ley de". No obstante, recuerde que la primera ley de Newton analiza la velocidad constante de una partícula, mientras que la Ecuación 9.37 se aplica al centro de masa de una (posiblemente vasta) colección de partículas que interactúan, ¡y que puede que no haya ninguna partícula en absoluto en el centro de masa! Por lo tanto, este es un resultado realmente notable.

EJEMPLO 9.19

Espectáculo de fuegos artificiales

Cuando un cohete de fuegos artificiales explota, miles de fragmentos brillantes vuelan hacia afuera en todas las direcciones, y caen a la Tierra en un elegante y bello espectáculo (Figura 9.31). Describa lo que ocurre, en términos de conservación del momento y del centro de masa.



FIGURA 9.31 Estos fuegos artificiales que estallan son un claro ejemplo de la conservación del momento y del movimiento del centro de masa.

La imagen muestra una simetría radial en torno a los puntos centrales de las explosiones; esto sugiere la idea de centro de masa. También podemos apreciar el movimiento parabólico de las partículas incandescentes, lo que nos hace pensar en el movimiento de proyectil.

Solución

Inicialmente, el cohete pirotécnico se lanza y vuela más o menos recto hacia arriba; tal es la causa de la estela

blanca más o menos recta que se eleva en el cielo por debajo de la explosión en la parte superior derecha de la imagen (la explosión amarilla). Esta estela no es parabólica porque el proyectil explosivo, durante su fase de lanzamiento, es en realidad un cohete; el impulso que le aplica la eyección del combustible ardiendo aplica una fuerza sobre el proyectil durante el intervalo de subida. (Este es un fenómeno que estudiaremos en la siguiente sección). El proyectil tiene múltiples fuerzas sobre este; por lo tanto, no está en caída libre antes de la explosión.

En el momento de la explosión, los miles de fragmentos incandescentes vuelan hacia el exterior, siguiendo un patrón radialmente simétrico. La simetría de la explosión es el resultado de que todas las fuerzas internas sumen cero $\left(\sum_j \vec{\mathbf{f}}_j^{\text{int}} = 0\right)$; por cada fuerza interna, hay otra de igual magnitud y de sentido contrario.

Sin embargo, como aprendimos anteriormente, estas fuerzas internas no pueden cambiar el momento del centro de masa del proyectil (ahora explotado). Dado que la fuerza del cohete ha desaparecido, el centro de masa del proyectil es ahora un proyectil (la única fuerza sobre este es la gravedad), por lo que su trayectoria se vuelve parabólica. Las dos explosiones rojas de la izquierda muestran la trayectoria de sus centros de masa en un momento ligeramente más largo después de la explosión en comparación con la explosión amarilla de la parte superior derecha.

De hecho, si se observan detenidamente las tres explosiones, se puede ver que las estelas brillantes no son realmente simétricas radialmente, sino que son algo más densas en un lado que en el otro. En concreto, la explosión amarilla y la explosión central inferior son ligeramente más densas en su lado derecho, y la explosión superior izquierda es más densa en su lado izquierdo. Esto se debe al momento de sus centros de masa; las diferentes densidades de las estelas se deben al momento que tenía cada pieza del proyectil en el momento de su explosión. El fragmento de la explosión de la parte superior izquierda de la imagen tenía un momento que apuntaba hacia arriba y hacia la izquierda; el momento del fragmento del medio apuntaba hacia arriba y ligeramente hacia la derecha, y la explosión del lado derecho apuntaba claramente hacia arriba y hacia la derecha (como lo demuestra la estela blanca de los gases de escape del cohete visible debajo de la explosión amarilla).

Por último, cada fragmento es un proyectil en sí mismo, que traza miles de parábolas brillantes.

Importancia

En el análisis, aseveramos: "...el centro de masa del proyectil es ahora un proyectil (la única fuerza sobre este es la gravedad)...". Esto no es del todo exacto, ya que puede no haber ninguna masa en el centro de masa; en cuyo caso, no podría haber ninguna fuerza actuando sobre ella. En realidad, esto no es más que una abreviatura verbal para describir el hecho de que las fuerzas gravitacionales sobre todas las partículas actúan de manera tal que el centro de masa cambia de posición exactamente como si toda la masa del proyectil estuviera siempre situada en la posición del centro de masa.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.13

¿Cómo cambiaría el espectáculo de fuegos artificiales en el espacio profundo, lejos de cualquier fuente de gravedad?

A veces se oye a alguien describir una explosión diciendo algo así como: "Los fragmentos del objeto explotado se mueven siempre de forma que el centro de masa sigue moviéndose en su trayectoria original". Esto hace que parezca que el proceso es algo mágico: ¿cómo puede ser que, en *cada* explosión, *siempre* parezca que los fragmentos se mueven de la manera correcta para que el movimiento del centro de masa no cambie? Dicho así, sería difícil creer que ninguna explosión hace algo diferente.

La explicación de esta coincidencia aparentemente sorprendente es: Definimos el centro de masa con precisión, así que esto es exactamente lo que obtendríamos. Recordemos que primero definimos el momento del sistema:

$$\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{CM}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{\mathbf{p}}_j}{dt}.$$

Entonces concluimos que la fuerza externa neta sobre el sistema (si la hay) cambió este momento:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{CM}}}{dt}$$

y luego (y aquí está el punto) definimos una aceleración que obedezca a la segunda ley de Newton. Es decir, exigimos que seamos capaces de escribir

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{M}$$

lo cual requiere que

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\mathbf{r}}_j\right).$$

donde la cantidad dentro del paréntesis es el centro de masa de nuestro sistema. Por lo tanto, no es sorprendente que el centro de masa obedezca a la segunda ley de Newton; lo definimos para que así fuera.

9.7 Propulsión de cohetes

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la aplicación de la conservación del momento cuando la masa cambia con el tiempo, así como la velocidad.
- Calcular la rapidez de un cohete en el espacio vacío, en algún momento, dadas las condiciones iniciales.
- Calcular la rapidez de un cohete en el campo gravitacional de la Tierra, en algún momento, dadas las condiciones iniciales.

Ahora tratamos el caso en el que la masa de un objeto cambia. Analizamos el movimiento de un cohete, que cambia su velocidad (y, por ende, su momento) al expulsar los gases del combustible quemado, lo que hace que se acelere en la dirección opuesta a la velocidad del combustible expulsado (vea la Figura 9.32). Específicamente: Un cohete con todo el combustible en el espacio profundo tiene una masa total m_0 (esta masa incluye la masa inicial del combustible). En algún momento, el cohete tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ y masa m; esta masa es una combinación de la masa del cohete vacío y la masa del combustible restante no quemado que contiene. (Nos referimos a m como la "masa instantánea" y $\vec{\mathbf{v}}$ como "velocidad instantánea"). El cohete acelera al quemar el combustible que lleva y expulsar los gases quemados de escape. Si la tasa de combustión del combustible es constante, y la velocidad a la que se expulsa el escape también es constante, ¿cuál es el cambio de velocidad del cohete como resultado de la quema de todo su combustible?



FIGURA 9.32 El transbordador espacial tenía varias piezas reutilizables. Los propulsores de combustible sólido situados a ambos lados se recuperaban y reabastecían de combustible después de cada vuelo, y todo el orbitador volvía a la Tierra para ser utilizado en vuelos posteriores. El gran tanque de combustible líquido se gastó. El transbordador espacial era un complejo conjunto de tecnologías, que empleaba tanto combustible sólido como líquido, y fue pionero en el uso de baldosas de cerámica como escudos térmicos de reentrada. Como resultado, permitía realizar varios lanzamientos en lugar de cohetes de un solo uso (créditos: modificación de un trabajo de la NASA).

Análisis físico

A continuación, se describe lo que ocurre, para que se haga una idea de la física implicada.

- Cuando los motores de los cohetes funcionan, expulsan continuamente gases quemados de combustible, que tienen masa y velocidad, y por ende, cierto momento. Por conservación del momento, el momento del cohete cambia en esta misma cantidad (con el signo contrario). Supondremos que el combustible quemado se expulsa a una tasa constante, lo que significa que la tasa de cambio del momento del cohete también es constante. Con la Ecuación 9.9, esto representa una fuerza constante sobre el cohete.
- Sin embargo, a medida que pasa el tiempo, la masa del cohete (que incluye la masa del combustible restante) disminuye continuamente. Así, aunque la fuerza sobre el cohete es constante, la aceleración resultante no lo es; aumenta continuamente.
- Entonces, el cambio total de la velocidad del cohete dependerá de la cantidad de masa de combustible que se queme, y esa dependencia no es lineal.

El problema hace que cambien la masa y la velocidad del cohete; también cambia la masa total de los gases expulsados. Si definimos nuestro sistema como el cohete + el combustible, entonces se trata de un sistema cerrado (ya que el cohete está en el espacio profundo, no hay fuerzas externas que actúen sobre este sistema); como resultado, el momento se conserva para este sistema. Así, podemos aplicar la conservación del momento para responder la pregunta (Figura 9.33).

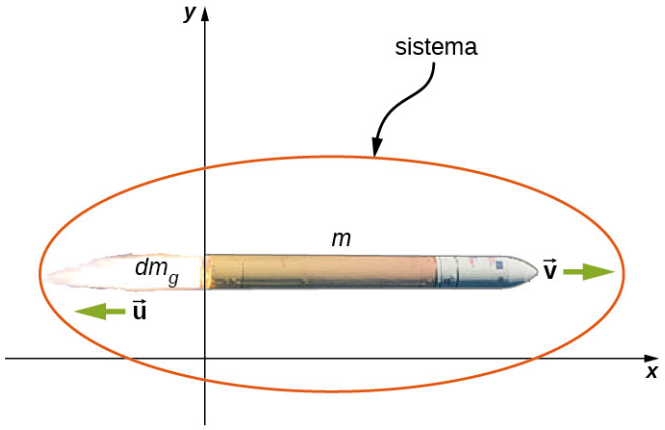


FIGURA 9.33 El cohete acelera hacia la derecha debido a la expulsión de parte de su masa de combustible hacia la izquierda. La conservación del momento nos permite determinar el cambio de velocidad resultante. La masa m es la masa total instantánea del cohete (es decir, la masa del cuerpo del cohete más la masa del combustible en ese momento) (créditos: modificación del trabajo de la NASA / Bill Ingalls).

En el mismo momento en que la masa total instantánea del cohete es m (es decir, m es la masa del cuerpo del cohete más la masa del combustible en ese momento), definimos que la velocidad instantánea del cohete como $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\mathbf{i}}$ (en la dirección de la x+); esta velocidad se mide en relación con un sistema de referencia inercial (la Tierra, por ejemplo). Así, el momento inicial del sistema es

$$\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}} = mv\hat{\mathbf{i}}.$$

Los motores del cohete queman combustible a un ritmo constante y expulsan los gases de escape en la dirección de la -x. Durante un intervalo infinitesimal dt, los motores expulsan una masa infinitesimal (positiva) de gas dm_g a la velocidad $\vec{\mathbf{u}} = -u\hat{\mathbf{i}}$; observe que, aunque la velocidad del cohete $v\hat{\mathbf{i}}$ se mide con respecto a la Tierra, la velocidad de los gases de escape se mide con respecto al cohete (en movimiento). Por lo tanto, medido con respecto a la Tierra, el gas de escape tiene una velocidad $(v - u)\hat{\mathbf{i}}$.

A consecuencia de la expulsión del gas combustible, la masa del cohete disminuye en dm_g, y su velocidad aumenta en $dv\hat{\mathbf{i}}$. Por lo tanto, si se incluye tanto el cambio para el cohete como el cambio para el gas de escape, el momento final del sistema es

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{f}} &= \vec{\mathbf{p}}_{\text{cohete}} + \vec{\mathbf{p}}_{\text{gas}} \\ &= \left(m - dm_g\right)(v + dv)\,\hat{\mathbf{i}} + dm_g(v - u)\hat{\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

Como todos los vectores están en la dirección de la x, dejamos de lado la notación vectorial. Aplicando la conservación del momento, obtenemos

$$\begin{aligned}p_{\mathrm{i}} &= p_{\mathrm{f}} \\ mv &= \left(m - dm_g\right)(v + dv) + dm_g(v - u) \\ mv &= mv + mdv - dm_g v - dm_g dv + dm_g v - dm_g u \\ mdv &= dm_g dv + dm_g u.\end{aligned}$$

Ahora, dm_g y dv son muy pequeños cada uno; por lo tanto, su producto $dm_g dv$ es muy, muy pequeño, mucho menor que los otros dos términos de esta expresión. Por lo tanto, ignoramos este término y obtenemos:

$$mdv = dm_g u.$$

Nuestro siguiente paso es recordar que, dado que dm_g representa un aumento en la masa de los gases expulsados, también deberá representar una disminución en la masa del cohete:

$$dm_g = -dm.$$

Sustituyendo esto, tenemos

$$mdv = -dmu$$

o

$$dv = -u\frac{dm}{m}.$$

Integrando desde la masa inicial m_0 hasta la masa final m del cohete obtenemos el resultado que buscamos:

$$\begin{aligned}\int_{v_\text{i}}^{v} dv &= -u\int_{m_0}^{m}\frac{1}{m}dm \\ v - v_\text{i} &= u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\end{aligned}$$

y así, nuestra respuesta final es

$$\Delta v = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right). \qquad 9.38$$

Este resultado se denomina **ecuación del cohete**. Fue derivado originalmente por el físico soviético Konstantin Tsiolkovsky en 1897. Nos da el cambio de velocidad que obtiene el cohete al quemar una masa de combustible que disminuye la masa total del cohete de m_0 hasta m. Como se esperaba, la relación entre Δv y el cambio de masa del cohete es no lineal.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Propulsión de cohetes

En los problemas de cohetes, las preguntas más comunes son calcular el cambio de velocidad debido a la quema de alguna cantidad de combustible durante algún tiempo o determinar la aceleración que resulta de la quema de combustible.

1. Para determinar el cambio de velocidad, utilice la ecuación del cohete en la Ecuación 9.38.
2. Para determinar la aceleración, calcule la fuerza mediante el teorema del momento-impulso; utilice la ecuación del cohete para determinar el cambio de velocidad.

EJEMPLO 9.20

Empuje en una nave espacial

Una nave espacial se mueve en el espacio sin gravedad en una trayectoria recta cuando su piloto decide acelerar hacia adelante. Enciende los propulsores, y el combustible quemado es expulsado a una tasa constante de $2{,}0 \times 10^2$ kg/s, a una rapidez (relativa al cohete) de $2{,}5 \times 10^2$ m/s. La masa inicial de la nave y su combustible no quemado es $2{,}0 \times 10^4$ kg, y los propulsores están encendidos durante 30 s.

a. ¿Cuál es el empuje (la fuerza aplicada al cohete por el combustible expulsado) sobre la nave espacial?
b. ¿Cuál es la aceleración de la nave en función del tiempo?
c. ¿Cuáles son las aceleraciones de la nave en t = 0, 15, 30 y 35 s?

Estrategia

a. La fuerza sobre la nave es igual a la tasa de cambio del momento del combustible.
b. Conociendo la fuerza de la parte (a), podemos utilizar la segunda ley de Newton para calcular la aceleración consiguiente. La clave aquí es que, aunque la fuerza aplicada a la nave es constante (el combustible se expulsa a una tasa constante), la masa de la nave no lo es; por lo tanto, la aceleración causada por la fuerza no será constante. Por lo tanto, esperamos obtener una función $a(t)$.
c. Utilizaremos la función que obtenemos en la parte (b), y solo sustituiremos los números dados. Importante: Esperamos que la aceleración sea mayor a medida que pasa el tiempo, ya que la masa que se

acelera disminuye continuamente (el combustible se expulsa del cohete).

Solución

a. El momento del gas combustible expulsado es

$$p = m_g v.$$

La velocidad de eyección $v = 2{,}5 \times 10^2\,\text{m/s}$ es constante, y por ende, la fuerza es

$$F = \frac{dp}{dt} = v\frac{dm_g}{dt} = -v\frac{dm}{dt}.$$

Ahora, $\frac{dm_g}{dt}$ es la tasa de cambio de la masa del combustible; el problema dice que es $2{,}0 \times 10^2\,\text{kg/s}$. Sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned} F &= v\frac{dm_g}{dt} \\ &= \left(2{,}5 \times 10^2\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(2{,}0 \times 10^2\ \tfrac{\text{kg}}{\text{s}}\right) \\ &= 5 \times 10^4\ \text{N}. \end{aligned}$$

b. Anteriormente, definimos m como la masa combinada del cohete vacío más la cantidad de combustible no quemado que contenía: $m = m_R + m_g$. De la segunda ley de Newton,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{m_R + m_g}.$$

La fuerza es constante y la masa vacía del cohete m_R es constante, pero la masa de combustible m_g está disminuyendo a una tasa uniforme; en concreto:

$$m_g = m_g(t) = m_{g_0} - \left(\frac{dm_g}{dt}\right)t.$$

Esto nos da

$$a(t) = \frac{F}{m_{g_\text{i}} - \left(\frac{dm_g}{dt}\right)t} = \frac{F}{M - \left(\frac{dm_g}{dt}\right)t}.$$

Observe que, como era de esperar, la aceleración es una función del tiempo. Sustituyendo los números dados:

$$a(t) = \frac{5 \times 10^4\ \text{N}}{2{,}0 \times 10^4\ \text{kg} - \left(2{,}0 \times 10^2\ \tfrac{\text{kg}}{\text{s}}\right)t}.$$

c. En $t = 0\,\text{s}$:

$$a(0\,\text{s}) = \frac{5 \times 10^4\ \text{N}}{2{,}0 \times 10^4\ \text{kg} - \left(2{,}0 \times 10^2\ \tfrac{\text{kg}}{\text{s}}\right)(0\,\text{s})} = 2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

En $t = 15\,\text{s},\ a(15\,\text{s}) = 2{,}9\,\text{m/s}^2$.
En $t = 30\,\text{s},\ a(30\,\text{s}) = 3{,}6\,\text{m/s}^2$.
La aceleración va en aumento, como esperábamos.

Importancia

Observe que la aceleración no es constante, por lo que las magnitudes dinámicas deberán calcularse mediante integrales o (más fácilmente) mediante la conservación de la energía total.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 9.14

¿Cuál es la diferencia física (o la relación) entre $\frac{dm}{dt}$ y $\frac{dm_g}{dt}$ en este ejemplo?

Cohete en un campo gravitacional

Analicemos ahora el cambio de velocidad del cohete durante la fase de lanzamiento, desde la superficie de la Tierra. Para mantener las matemáticas manejables, restringiremos nuestra atención a las distancias para las cuales la aceleración causada por la gravedad puede tratarse como una g constante.

El análisis es similar, salvo que ahora hay una fuerza externa de $\vec{\mathbf{F}} = -mg\hat{\mathbf{j}}$ actuando en nuestro sistema. Esta fuerza aplica un impulso $d\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{F}}dt = -mgdt\hat{\mathbf{j}}$, que es igual al cambio de momento. Esto nos da

$$\begin{aligned} d\vec{\mathbf{p}} &= d\vec{\mathbf{J}} \\ \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{f}} - \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}} &= -mgdt\hat{\mathbf{j}} \\ \left[\left(m - dm_g\right)(v + dv) + dm_g(v - u) - mv\right]\hat{\mathbf{j}} &= -mgdt\hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

y así

$$mdv - dm_g u = -mgdt$$

donde hemos vuelto a ignorar el término $dm_g dv$ y eliminado la notación vectorial. A continuación, sustituimos dm_g con $-dm$:

$$\begin{aligned} mdv + dmu &= -mgdt \\ mdv &= -dmu - mgdt. \end{aligned}$$

Dividiendo entre m obtenemos

$$dv = -u\frac{dm}{m} - gdt$$

e integrando, tenemos

$$\Delta v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - g\Delta t. \qquad 9.39$$

Como es lógico, la velocidad del cohete se ve afectada por la aceleración (constante) de la gravedad.

Recuerde que Δt es el tiempo de combustión del combustible. Ahora bien, en ausencia de gravedad, la Ecuación 9.38 implica que es indiferente el tiempo que se tarda en quemar toda la masa de combustible; el cambio de velocidad no depende de Δt. Sin embargo, en presencia de la gravedad, importa mucho. El término $-g\Delta t$ en la Ecuación 9.39 nos indica que, cuanto *mayor* sea el tiempo de combustión, *menor* será el cambio de velocidad del cohete. Esta es la razón por la que el lanzamiento de un cohete es tan espectacular en el primer momento del despegue: Es esencial quemar el combustible lo más rápido posible, para obtener la mayor cantidad de Δv como sea posible.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

centro de masa posición media ponderada de la masa

densidad lineal de masa λ, expresada como el número de kilogramos de material por metro

ecuación del cohete derivada por el físico soviético Konstantin Tsiolkovsky en 1897, nos da el cambio de velocidad que el cohete obtiene al quemar una masa de combustible que disminuye la masa total del cohete de m_i hasta m

elástica colisión que conserva la energía cinética

explosión un solo objeto se rompe en varios objetos; la energía cinética no se conserva en las explosiones

fuerza externa fuerza aplicada a un objeto extendido que cambia el momento del objeto extendido en su conjunto

fuerza interna fuerza que ejercen entre sí las partículas simples que componen un objeto extendido. Las fuerzas internas pueden ser de atracción o de repulsión

impulso efecto de aplicar una fuerza sobre un sistema durante un intervalo de tiempo, que suele ser pequeño, pero no tiene por qué serlo

inelástica colisión que no conserva la energía cinética

ley de conservación del momento el momento total de un sistema cerrado no puede cambiar

momento medida de la cantidad de movimiento que tiene un objeto; toma en cuenta tanto la velocidad del objeto como su masa; concretamente, es el producto de la masa por la velocidad; es una cantidad vectorial

perfectamente inelástica colisión tras la cual todos los objetos están inmóviles, la energía cinética final es cero, y la pérdida de energía cinética es máxima

sistema objeto o colección de objetos cuyo movimiento se está investigando actualmente; sin embargo, su sistema se define al comienzo del problema, por lo que usted deberá mantener esa definición para todo el problema

sistema cerrado sistema para el que la masa es constante y la fuerza externa neta sobre el sistema es cero

teorema del momento-impulso el cambio de momento de un sistema es igual al impulso que se aplica al sistema

Ecuaciones Clave

Definición de momento	$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$
Impulso	$\vec{J} \equiv \int_{t_\text{i}}^{t_\text{f}} \vec{F}(t)dt \text{ o } \vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{F}}_\text{ave}\Delta t$
Teorema del momento-impulso	$\vec{\mathbf{J}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}$
Fuerza media a partir del momento	$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t}$
Fuerza instantánea a partir del momento (segunda ley de Newton)	$\vec{\mathbf{F}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$
Conservación del momento	$\frac{d\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{1}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{2}}{dt} = 0 \text{ o } \vec{\mathbf{p}}_\mathbf{1} + \vec{\mathbf{p}}_\mathbf{2} = \text{constante}$
Conservación generalizada del momento	$\sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_\mathbf{j} = \text{constante}$
Conservación del momento en dos dimensiones	$p_{\text{f},x} = p_{1,\text{i},x} + p_{2,\text{i},x}$ $p_{\text{f},y} = p_{1,\text{i},y} + p_{2,\text{i},y}$

Fuerzas externas	$\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{\mathbf{p}}_j}{dt}$
Segunda ley de Newton para un objeto extendido	$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\text{CM}}}{dt}$
Aceleración del centro de masa	$\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{\mathbf{r}}_j\right) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{\mathbf{a}}_j$
Posición del centro de masa para un sistema de partículas	$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{\mathbf{r}}_j$
Velocidad del centro de masa	$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{\mathbf{r}}_j\right) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{\mathbf{v}}_j$
Posición del centro de masa de un objeto continuo	$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm$
Ecuación del cohete	$\Delta v = u \ln\left(\frac{m_{\text{i}}}{m}\right)$

Resumen

9.1 Momento lineal

- El movimiento de un objeto depende tanto de su masa como de su velocidad. El momento es un concepto que describe esto. Es un concepto útil y poderoso, tanto desde el punto de vista computacional como teórico. La unidad del SI para el momento es el kg· m/s.

9.2 Impulso y colisiones

- Cuando se aplica una fuerza sobre un objeto durante cierto tiempo, el objeto experimenta un impulso.
- Este impulso es igual al cambio de momento del objeto.
- La segunda ley de Newton en términos de momento establece que la fuerza neta aplicada a un sistema es igual a la tasa de cambio del momento que la fuerza provoca.

9.3 Conservación del momento lineal

- La ley de conservación del momento establece que el momento de un sistema cerrado es constante en el tiempo (se conserva).
- El sistema cerrado (o aislado) se define como aquel en el que la masa permanece constante y la fuerza externa neta es cero.
- El momento total del sistema se conserva *solo* cuando el sistema está cerrado.

9.4 Tipos de colisiones

- La colisión elástica es aquella que conserva la energía cinética.
- La colisión inelástica no conserva la energía cinética.
- El momento se conserva, independientemente de que la energía cinética se conserve o no.
- El análisis de los cambios de energía cinética y la conservación del momento permiten calcular las velocidades finales en términos de velocidades y masas iniciales en colisiones unidimensionales de dos cuerpos.

9.5 Colisiones en varias dimensiones

- El enfoque de las colisiones bidimensionales consiste en elegir un sistema de coordenadas conveniente y dividir el movimiento en componentes a lo largo de ejes perpendiculares.
- El momento se conserva en ambas direcciones de forma simultánea e independiente.
- El teorema de Pitágoras da la magnitud del vector de momento mediante el empleo de los componentes *x* y *y*, calculados con la conservación del momento en cada dirección.

9.6 Centro de masa

- Un objeto extendido (formado por muchos objetos) tiene un vector de posición definido, que recibe el nombre de centro de masa.
- El centro de masa puede considerarse, de forma imprecisa, como la ubicación media de la masa total del objeto.
- El centro de masa de un objeto traza la trayectoria dictada por la segunda ley de Newton, debido a la fuerza externa neta.
- Las fuerzas internas de un objeto extendido no pueden alterar el momento del objeto extendido en su conjunto.

9.7 Propulsión de cohetes

- Un cohete es un ejemplo de conservación del momento en el que la masa del sistema no es constante, ya que el cohete expulsa combustible para proporcionar empuje.
- La ecuación del cohete nos da el cambio de velocidad que obtiene el cohete al quemar una masa de combustible y que disminuye la masa total del cohete.

Preguntas Conceptuales

9.1 Momento lineal

1. Un objeto que tiene una masa pequeña y un objeto que tiene una masa grande tienen el mismo momento. ¿Qué objeto tiene la mayor energía cinética?
2. Un objeto con una masa pequeña y otro objeto con una masa grande tienen la misma energía cinética. ¿Qué masa tiene el mayor momento?

9.2 Impulso y colisiones

3. ¿Es posible que una fuerza pequeña produzca un impulso mayor sobre un objeto dado que una fuerza grande? Explique.
4. ¿Por qué es mucho más peligrosa una caída de 10 metros sobre hormigón que una caída de 10 metros sobre agua?
5. ¿Qué fuerza externa es responsable de cambiar el momento de un auto que circula por una carretera horizontal?
6. Un trozo de masilla y una pelota de tenis con la misma masa se lanzan contra una pared a la misma velocidad. ¿Qué objeto experimenta una mayor fuerza de la pared o las fuerzas son iguales? Explique.

9.3 Conservación del momento lineal

7. ¿En qué circunstancias se conserva el momento?
8. ¿Puede conservarse el momento de un sistema si hay fuerzas externas que actúan sobre este? Si es así, ¿en qué condiciones? Si no, ¿por qué no?
9. Explique en términos de momento y de las leyes de Newton cómo la resistencia del aire en un auto se debe en parte a que empuja el aire en su dirección de movimiento.
10. ¿Pueden los objetos de un sistema tener momento mientras el momento del sistema es cero? Razone su respuesta.
11. Un velocista acelera desde los bloques de salida. ¿Puede considerarlo un sistema cerrado? Explique.
12. Un cohete en el espacio profundo (gravedad cero) acelera al expulsar gas caliente de sus propulsores. ¿El cohete constituye un sistema cerrado? Explique.

9.4 Tipos de colisiones

13. Dos objetos de igual masa se mueven con velocidades iguales y opuestas cuando colisionan. ¿Puede perderse toda la energía cinética en la colisión?
14. Describa un sistema en el que el momento se conserva, pero la energía mecánica no. Ahora, lo contrario: Describa un sistema en el que la energía cinética se conserva, pero el momento no.

9.5 Colisiones en varias dimensiones

15. El momento de un sistema puede conservarse en una dirección y no conservarse en otra. ¿Cuál es el ángulo entre las direcciones? Dé un ejemplo.

9.6 Centro de masa

16. Supongamos que un proyectil de fuegos artificiales estalla y se rompe en tres grandes trozos para los que la resistencia del aire es despreciable. ¿Cómo afecta la explosión al movimiento del centro de masa? ¿Cómo se vería afectado si las piezas experimentaran una resistencia del aire significativamente mayor que el proyectil intacto?

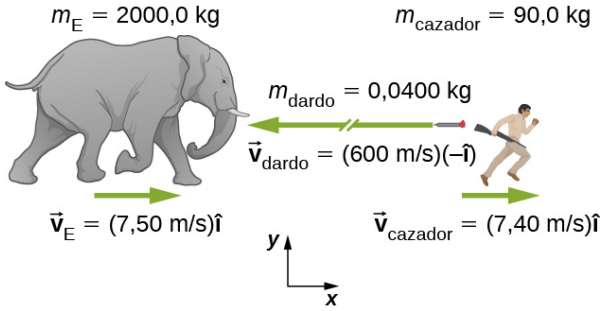
9.7 Propulsión de cohetes

17. Es posible que la velocidad de un cohete sea mayor que la velocidad de escape de los gases que expulsa. En ese caso, la velocidad y el momento del gas están en la misma dirección que la del cohete. ¿Cómo puede el cohete seguir obteniendo empuje al expulsar los gases?

Problemas

9.1 Momento lineal

18. Un elefante y un cazador tienen un enfrentamiento.

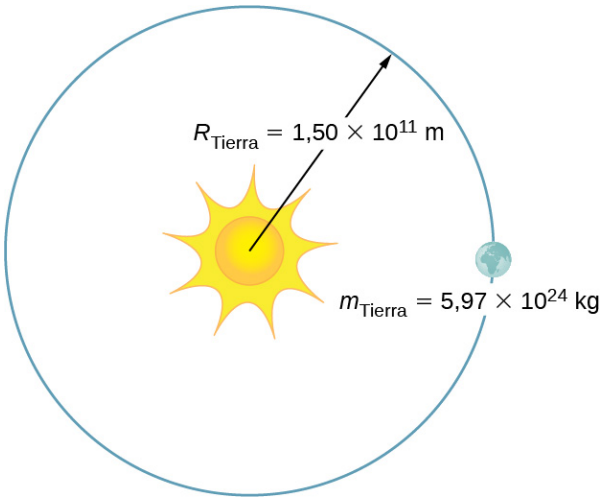


a. Calcule el momento del elefante de 2.000,0 kg que embiste al cazador a una velocidad de 7,50 m/s.
b. Calcule la relación entre el momento del elefante y el momento de un dardo tranquilizante de 0,0400 kg disparado a una velocidad de 600 m/s.
c. ¿Cuál es el momento del cazador de 90,0 kg que corre a 7,40 m/s después de perder al elefante?

19. Una patinadora de 40 kg de masa lleva una caja de 5 kg de masa. La patinadora tiene una velocidad de 5 m/s con respecto al suelo y se desliza sin ningún tipo de fricción sobre una superficie lisa.
a. Halle el momento de la caja con respecto al suelo.
b. Halle el momento de la caja con respecto al suelo después de que ella pone la caja en la superficie sin fricción de patinaje.

20. Un auto de 2.000 kg de masa circula a una velocidad constante de 10 m/s hacia el este. ¿Cuál es el momento del auto?

21. La masa de la Tierra es $5{,}97 \times 10^{24}$ kg y su radio orbital es un promedio de $1{,}50 \times 10^{11}$ m. Calcule la magnitud de su momento lineal en el lugar del diagrama.



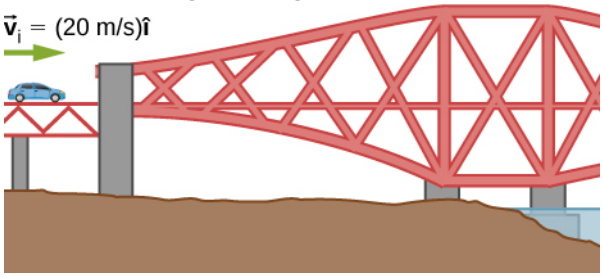
22. Si una tormenta deja caer 1 cm de lluvia sobre un área de 10 km^2 en el periodo de 1 hora, ¿cuál es el momento de la lluvia que cae en un segundo? Supongamos que la velocidad límite de una gota de lluvia es de 10 m/s.

23. ¿Cuál es el momento medio de una avalancha que desplaza una capa de nieve de 40 cm de espesor en un área de 100 m por 500 m sobre una distancia de 1 km por una colina en 5,5 s? Suponga una densidad de 350 kg/m^3 para la nieve.

24. ¿Cuál es el momento medio de un velocista de 70,0 kg que corre la carrera de 100 m en 9,65 s?

9.2 Impulso y colisiones

25. Una persona de 75,0 kg va en un auto que circula a 20,0 m/s cuando el auto choca con un pilar de un puente (vea la siguiente figura).

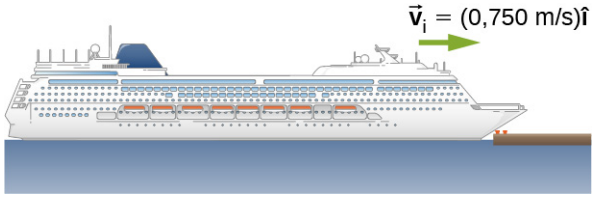


a. Calcule la fuerza media sobre la persona si la detiene un tablero acolchado que comprime una media de 1,00 cm.
b. Calcule la fuerza media sobre la persona si la

detiene una bolsa de aire que comprime una media de 15,0 cm.

26. Uno de los peligros de los viajes espaciales son los escombros de las misiones anteriores. Hay varios miles de objetos en órbita alrededor de la Tierra que son lo suficientemente grandes como para ser detectados por el radar, pero hay un número mucho mayor de objetos muy pequeños, como copos de pintura. Calcule la fuerza ejercida por un trozo de pintura de 0,100 mg que golpea la ventana de una nave espacial a una rapidez relativa de $4{,}00 \times 10^3$ m/s, dado que la colisión dura $6{,}00 \times 10^{-8}$ s.

27. Un crucero con una masa de $1{,}00 \times 10^7$ kg choca contra un muelle a una velocidad de 0,750 m/s. Se detiene tras recorrer 6,00 m, lo que daña el barco, el muelle y las finanzas del capitán del remolcador. Calcule la fuerza media ejercida sobre el muelle; utilice el concepto de impulso. (*Pista*: Primero, calcule el tiempo que tardó el barco en entrar en reposo, suponiendo una fuerza constante).



28. Calcule la rapidez final de un jugador de rugby de 110 kg que corre inicialmente a 8,00 m/s, pero que colisiona frontalmente con un poste acolchado de la portería y experimenta una fuerza hacia atrás de $1{,}76 \times 10^4$ N por $5{,}50 \times 10^{-2}$ s.

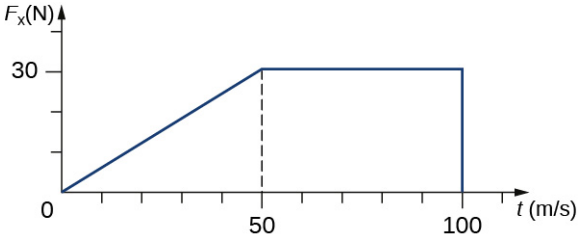
29. El agua de una manguera de incendios apunta horizontalmente a una pared, a una tasa de 50,0 kg/s y una rapidez de 42,0 m/s. Calcule la fuerza ejercida sobre la pared, suponiendo que el momento horizontal del agua se reduce a cero.

30. Un martillo de 0,450 kg se mueve horizontalmente a 7,00 m/s cuando golpea un clavo y se detiene tras clavar el clavo 1,00 cm en una tabla. Supongamos una aceleración constante del par martillo-clavo.

a. Calcule la duración del impacto.
b. ¿Cuál fue la fuerza media que se ejerce sobre el clavo?

31. ¿Cuál es el momento (como función del tiempo) de una partícula de 5,0 kg que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}(t) = \left(2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0t\hat{\mathbf{j}}\right)$ m/s? ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre esta partícula?

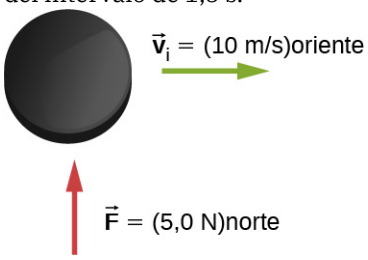
32. En la siguiente figura se representa el componente *x* de una fuerza ejercida por un hierro 7 sobre una pelota de golf de 46 g en función del tiempo:



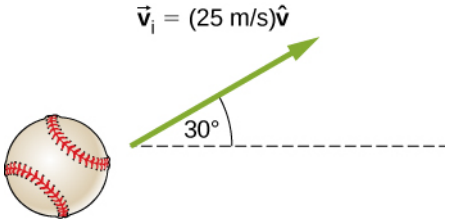
a. Halle el componente *x* del impulso durante los intervalos
   i. [0, 50 ms], y
   ii. [50 ms, 100 ms]

b. Halle el cambio en el componente *x* del momento durante los intervalos
   iii. [0, 50 ms], y
   iv. [50 ms, 100 ms]

33. Un disco de hockey de 150 g de masa se desliza hacia el este sobre una mesa sin fricción a una velocidad de 10 m/s. De repente, se aplica al disco una fuerza constante de magnitud 5 N y dirección hacia el norte durante 1,5 s. Halle los componentes norte y este del momento al final del intervalo de 1,5 s.



34. Una pelota de 250 g de masa se lanza a una velocidad inicial de 25 m/s, en un ángulo de 30° con respecto a la dirección horizontal. Ignore la resistencia del aire. ¿Cuál es el momento de la pelota después de 0,2 s? (Para realizar este problema, halle primero los componentes del momento, y luego construya la magnitud y dirección del vector de momento a partir de los componentes).



9.3 Conservación del momento lineal

35. Los vagones se acoplan al tropezar entre sí. Supongamos que dos vagones cargados se acercan, el primero tiene una masa de $1{,}50 \times 10^5$ kg y una

velocidad de $(0{,}30\ \text{m/s})\hat{\mathbf{i}}$, y el segundo con una masa de $1{,}10 \times 10^5$ kg y una velocidad de $-(0{,}12\ \text{m/s})\hat{\mathbf{i}}$. ¿Cuál es su velocidad final?

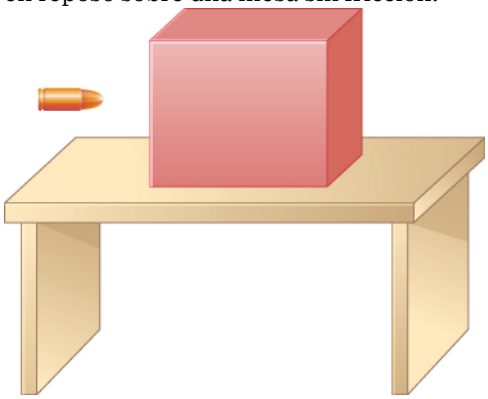


36. Dos discos idénticos chocan elásticamente en una mesa de hockey de aire. El disco 1 estaba originalmente en reposo; el disco 2 tiene una rapidez de entrada de 6,00 m/s y se dispersa en un ángulo de 30° con respecto a su dirección de entrada. ¿Cuál es la velocidad (magnitud y dirección) del disco 1 tras la colisión?





37. La siguiente figura muestra una bala de 200 g de masa que se desplaza horizontalmente hacia el este con una rapidez de 400 m/s, y que golpea un bloque de masa 1,5 kg que está inicialmente en reposo sobre una mesa sin fricción.



Tras golpear el bloque, la bala se incrusta y el bloque y la bala se mueven juntos como una unidad.

a. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la velocidad de la combinación bloque / bala inmediatamente después del impacto?
b. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del impulso del bloque sobre la bala?
c. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del impulso de la bala sobre el bloque?
d. Si la bala tardó 3 m/s para cambiar la rapidez de 400 m/s a la rapidez final tras el impacto, ¿cuál es la fuerza media entre el bloque y la bala durante este tiempo?

38. Un niño de 20 kg se desplaza a 3,3 m/s por un terreno llano en un vagón de 4,0 kg. El niño deja caer una pelota de 1,0 kg por la parte trasera del vagón. ¿Cuál es la rapidez final del niño y del vagón?

39. Un pez globo de 4,5 kg se expande hasta el 40 % de su masa al tomar agua. Cuando el pez globo se ve amenazado, suelta el agua hacia la amenaza para avanzar rápidamente. ¿Cuál es la relación de la rapidez del pez globo hacia delante con la rapidez del agua expulsada hacia atrás?

40. Explique por qué un cañón retrocede cuando dispara un proyectil.

41. Dos patinadores artísticos se mueven en la misma dirección; la patinadora que va adelante se desplaza a 5,5 m/s y el que la sigue, a 6,2 m/s. Cuando el patinador que va detrás alcanza a la patinadora que va adelante, la levanta sin aplicar ninguna fuerza horizontal sobre sus patines. Si el patinador que va detrás es un 50 % más pesado que la patinadora que va adelante, cuyo peso es de 50 kg, ¿cuál es su rapidez después de que él la levanta?

42. Un vagón de carga de 2.000 kg viaja a 4,4 m/s por debajo de una terminal de cereales, que vierte el grano directamente en el vagón. Si la rapidez del vagón cargado no debe ser inferior a 3,0 m/s, ¿cuál es la masa máxima de grano que puede cargar?

9.4 Tipos de colisiones

43. Una bola de boliche de 5,50 kg, que se mueve a 9,00 m/s, colisiona con un pin de 0,850 kg, que se dispersa en un ángulo de 15,8° respecto a la dirección inicial de la bola de bolos y con una rapidez de 15,0 m/s.

a. Calcule la velocidad final (magnitud y dirección) de la bola de bolos.
b. ¿Es elástica la colisión?

44. Ernest Rutherford (primer neozelandés galardonado con el Premio Nobel de Química) demostró, mediante la dispersión de núcleos de helio-4 desde núcleos de oro-197, que los núcleos eran muy pequeños y densos. La energía del núcleo de helio entrante era $8{,}00 \times 10^{-13}$ J, y las masas de los núcleos de helio y oro eran $6{,}68 \times 10^{-27}$ kg y $3{,}29 \times 10^{-25}$ kg, respectivamente (observe que su cociente de masas es de 4 a 197).

a. Si un núcleo de helio se dispersa en un ángulo de

120° durante una colisión elástica con un núcleo de oro, calcule la rapidez final del núcleo de helio y la velocidad final (magnitud y dirección) del núcleo de oro.



b. ¿Cuál es la energía cinética final del núcleo de helio?

45. Un jugador de hockey sobre hielo de 90,0 kg golpea un disco de 0,150 kg, lo que da al disco una velocidad de 45,0 m/s. Si ambos están inicialmente en reposo y si el hielo no tiene fricción, ¿qué distancia retrocede el jugador en el tiempo que tarda el disco en llegar a la portería situada a 15,0 m?

46. Un petardo de 100 g se lanza verticalmente al aire y estalla en dos pedazos en el pico de su trayectoria. Si un pedazo de 72 g se proyecta horizontalmente hacia la izquierda a 20 m/s, ¿cuál es la rapidez y la dirección del otro pedazo?

47. En una colisión elástica, un auto de choque de 400 kg choca directamente por detrás con un segundo auto de choque idéntico que se desplaza en la misma dirección. La rapidez inicial del auto de choques de adelante es de 5,60 m/s y la del auto que lo sigue es de 6,00 m/s. Suponiendo que la masa de los conductores es mucho, mucho menor que la de los autos de choque, ¿cuál es su rapidez final?

48. Repita el problema anterior si la masa del auto de choque de adelante es un 30,0 % mayor que la del auto de choque que lo sigue.

49. Una partícula alfa (^{4}He) sufre una colisión elástica con un núcleo inmóvil de uranio(^{235}U). ¿Qué porcentaje de la energía cinética de la partícula alfa se transfiere al núcleo de uranio? Suponga que la colisión es unidimensional.

50. Está de pie en una superficie helada muy resbaladiza y lanza un balón de fútbol de 1 kg en horizontal a una rapidez de 6,7 m/s. ¿Cuál es su velocidad cuando suelta el balón? Suponga que su masa es de 65 kg.

51. Una niña de 35 kg baja una colina en un trineo relativamente sin masa y luego se desplaza por la sección plana de la parte inferior, donde una segunda niña de 35 kg salta sobre el trineo cuando éste pasa a su lado. Si la rapidez del trineo es de 3,5 m/s antes de que la segunda niña se suba, ¿cuál es su rapidez después de que ella se sube?

52. Un niño baja en trineo por una colina y llega a un lago cubierto de hielo sin fricción a 10,0 m/s. En el centro del lago hay una roca de 1.000 kg. Cuando el trineo choca con la roca, es impulsado hacia atrás desde la roca. La colisión es una colisión elástica. Si la masa del niño es de 40,0 kg y la del trineo es de 2,50 kg, ¿cuál es la rapidez del trineo y de la roca tras la colisión?

9.5 Colisiones en varias dimensiones

53. Un halcón de 0,90 kg se sumerge a 28,0 m/s en un ángulo de caída de 35°. Atrapa una paloma de 0,325 kg por detrás en pleno vuelo. ¿Cuál es su velocidad combinada después del impacto si la velocidad inicial de la paloma era de 7,00 m/s dirigida horizontalmente? Observe que $\hat{\mathbf{v}}_{1,i}$ es un vector unitario que apunta en la dirección en la que el halcón vuela inicialmente.

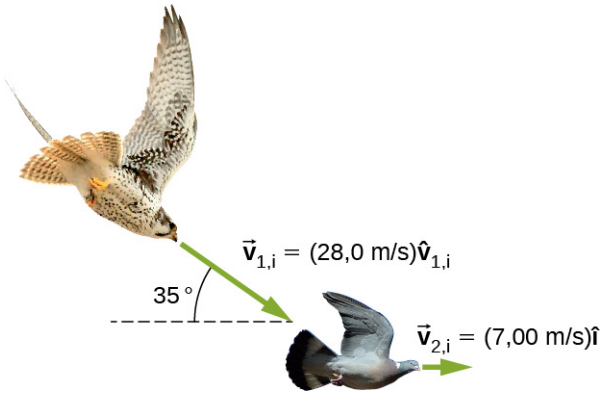
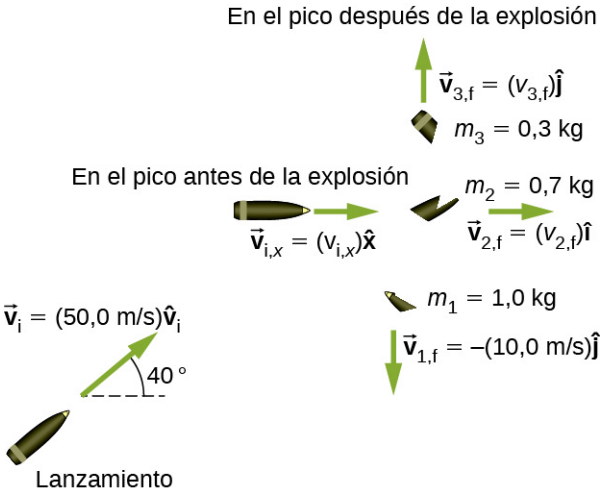


FIGURA 9.34 (créditos: "halcón", modificación del trabajo de "Servicio de Pesca y Vida Silvestre de los EE. UU. [U.S. Fish and Wildlife Service, USFWS] región Mountain-Prairie"/Flickr; "paloma", modificación del trabajo de Jacob Spinks).

54. Una bola de billar, marcada como 1, que se mueve horizontalmente, golpea a otra bola de billar, marcada como 2, que está en reposo. Antes del impacto, la bola 1 se movía a una rapidez de 3,00 m/s, y después del impacto se mueve a 0,50 m/s a 50° de la dirección original. Si las dos bolas tienen masas iguales de 300 g, ¿cuál es la velocidad de la bola 2 después del impacto?

55. Un proyectil de masa 2,0 kg se dispara al aire con un ángulo de 40,0° al horizonte a una rapidez de 50,0 m/s. En el punto más alto de su vuelo, el proyectil se rompe en tres partes de masa 1,0 kg, 0,7 kg y 0,3 kg. La parte de 1,0 kg cae en línea recta después de la

ruptura con una rapidez inicial de 10,0 m/s, el pedazo de 0,7 kg se mueve en la dirección original hacia adelante, y el pedazo de 0,3 kg va en línea recta hacia arriba.



a. Calcule la rapidez de los pedazos de 0,3 kg y 0,7 kg inmediatamente después de la ruptura.
b. ¿A qué altura del punto de ruptura llega el pedazo de 0,3 kg antes de entrar en reposo?
c. ¿Dónde aterriza el pedazo de 0,7 kg en relación con el lugar desde donde salió disparado?

56. Dos asteroides colisionan y se pegan. El primer asteroide tiene una masa de 15×10^3 kg y se desplaza inicialmente a 770 m/s. El segundo asteroide tiene una masa de 20×10^3 kg y se desplaza a 1.020 m/s. Sus velocidades iniciales formaban un ángulo de 20° entre sí. ¿Cuál es la rapidez final y la dirección con respecto a la velocidad del primer asteroide?

57. Un cohete de 200 kg en el espacio profundo se mueve a una velocidad de $(121 \text{ m/s})\,\hat{i} + (38{,}0 \text{ m/s})\,\hat{j}$. De repente, estalla en tres pedazos; el primero (78 kg) se desplaza a $-(321 \text{ m/s})\,\hat{i} + (228 \text{ m/s})\,\hat{j}$ y el segundo (56 kg) se desplaza a $(16{,}0 \text{ m/s})\,\hat{i} - (88{,}0 \text{ m/s})\,\hat{j}$. Calcule la velocidad del tercer pedazo.

58. Un protón que viaja a $3{,}0 \times 10^6$ m/s se dispersa elásticamente desde una partícula alfa inicialmente estacionaria y se desvía en un ángulo de 85° con respecto a su velocidad inicial. Dado que la partícula alfa tiene cuatro veces la masa del protón, ¿qué porcentaje de su energía cinética inicial conserva el protón tras la colisión?

59. Tres ciervos de 70 kg están de pie sobre una roca plana de 200 kg que está en un estanque cubierto de hielo. Se produce un disparo y los ciervos se dispersan; el ciervo A corre a $(15 \text{ m/s})\,\hat{i} + (5{,}0 \text{ m/s})\,\hat{j}$, el ciervo B corre a $(-12 \text{ m/s})\,\hat{i} + (8{,}0 \text{ m/s})\,\hat{j}$, y el ciervo C corre a $(1{,}2 \text{ m/s})\,\hat{i} - (18{,}0 \text{ m/s})\,\hat{j}$. ¿Cuál es la velocidad de la roca sobre la que estaban parados?

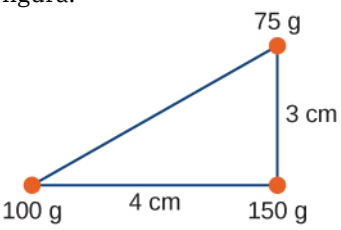
60. Una familia está patinando. El padre (75 kg) patina a 8,2 m/s y colisiona y se pega a la madre (50 kg), que se movía inicialmente a 3,3 m/s y a 45° respecto a la velocidad del padre. La pareja choca entonces con su hija (30 kg), que estaba inmóvil, y los tres se deslizan juntos. ¿Cuál es su velocidad final?

61. Un átomo de oxígeno (masa 16 u) que se mueve a 733 m/s a 15,0° con respecto a la dirección $\hat{i}$ colisiona y se pega a una molécula de oxígeno (masa 32 u) que se mueve a 528 m/s a 128° con respecto a la dirección $\hat{i}$. Los dos se pegan para formar el ozono. ¿Cuál es la velocidad final de la molécula de ozono?

62. Dos autos de la misma masa se acercan a una intersección perpendicular de cuatro vías con mucho hielo. El auto A viaja hacia el norte a 30 m/s y el auto B viaja hacia el este. Colisionan y se pegan, para llegar a 28° al norte del este. ¿Cuál era la velocidad inicial del auto B?

9.6 Centro de masa

63. Se colocan tres masas puntuales en los ángulos de un triángulo como se muestra en la siguiente figura.



Encuentre el centro de masa del sistema de tres masas.

64. Dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia horizontal D se sueltan desde la misma altura h al mismo tiempo. Halle la posición vertical del centro de masa de estas dos partículas en un momento anterior a que las dos partículas choquen contra el suelo. Supongamos que no hay resistencia del aire.

65. Dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia horizontal D se sueltan desde la misma altura h en distintos tiempos. La partícula 1 comienza en $t = 0$, y la partícula 2 se suelta en $t = T$. Halle la posición vertical del centro de masa en un momento anterior al impacto de la primera partícula contra el suelo. Supongamos que no hay resistencia del aire.

66. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven uniformemente en diferentes círculos de radios R_1 y R_2 en torno al origen en el plano x, y. Las coordenadas de la x y la y del centro de masa y de la partícula 1 se dan como sigue (donde la longitud está en metros y t en segundos):
$x_1(t) = 4\cos(2t), y_1(t) = 4\text{sen}(2t)$

y:
$x_{CM}(t) = 3\cos(2t), y_{CM}(t) = 3\text{sen}(2t)$.

a. Calcule el radio del círculo en el que se mueve la partícula 1.
b. Halle las coordenadas de la x y la y de la partícula 2 y el radio del círculo en el que se desplaza esta partícula.

67. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven uniformemente en diferentes círculos de radios R_1 y R_2 alrededor del origen en el plano x, y. Se dan las coordenadas de las dos partículas en metros como sigue ($z = 0$ para ambas). Aquí t está en segundos:

$$x_1(t) = 4\cos(2t)$$
$$y_1(t) = 4\,\text{sen}(2t)$$
$$x_2(t) = 2\cos\left(3t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$y_2(t) = 2\,\text{sen}\left(3t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

a. Calcule el radio de los círculos de movimiento de ambas partículas.
b. Halle las coordenadas de la x y la $y$del centro de masa.
c. Decida si el centro de masa se mueve en un círculo al trazar su trayectoria.

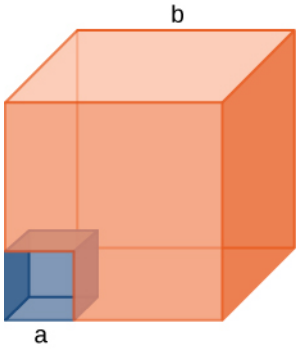
68. Calcule el centro de masa de una varilla de un metro de largo, hecha de 50 cm de hierro (densidad $8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) y 50 cm de aluminio (densidad $2{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

69. Calcule el centro de masa de una varilla de longitud L cuya densidad de masa cambia de un extremo a otro de forma cuadrática. Es decir, si la varilla está dispuesta a lo largo del eje de la x con un extremo en el origen y el otro en $x = L$, la densidad viene dada por $\rho(x) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)\left(\frac{x}{L}\right)^2$, donde ρ_0 y ρ_1 son valores constantes.

70. Calcule el centro de masa de un bloque rectangular de longitud a y anchura b que tiene una densidad no uniforme tal que cuando el rectángulo se coloca en el plano x,y con una esquina en el origen y el bloque puesto en el primer cuadrante con las dos aristas a lo largo de los ejes de la xy la y, la densidad viene dada por$\rho(x, y) = \rho_0 x$, donde ρ_0 es una constante.

71. Calcule el centro de masa de un material rectangular de longitud a y anchura b formado por un material de densidad no uniforme. La densidad es tal que cuando el rectángulo se sitúa en el plano xy, la densidad viene dada por $\rho(x, y) = \rho_0 xy$.

72. Un cubo de lado a se recorta de otro cubo de lado b como se muestra en la figura siguiente.



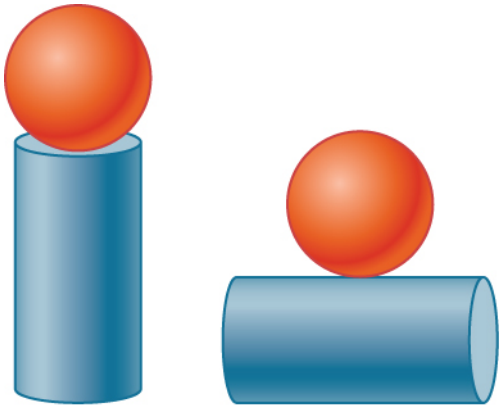
Halle la ubicación del centro de masa de la estructura. (*Pista:* Piense en la parte que falta como una masa negativa superpuesta a una masa positiva).

73. Calcule el centro de masa de un cono de densidad uniforme que tiene un radio R en la base, altura h y masa M. Suponga que el origen está en el centro de la base del cono y tenga la $+z$ pasando por el vértice del cono.

74. Calcule el centro de masa de un alambre delgado de masa m y longitud L doblado en forma semicircular. Suponga que el origen está en el centro del semicírculo y haga que el alambre se arquee desde el eje de la x +, cruce el eje de la $+y$ y termine en el eje de la -x.

75. Calcule el centro de masa de una placa semicircular delgada uniforme de radio R. Suponga que el origen está en el centro del semicírculo, el arco de la placa va del eje de la x + al eje de la -x, y el eje de la z es perpendicular a la placa.

76. Calcule el centro de masa de una esfera de masa M y radio R y de un cilindro de masa m, radio r y altura h dispuestos como se muestra a continuación.



Exprese sus respuestas en un sistema de coordenadas que tenga el origen en el centro del cilindro.

9.7 Propulsión de cohetes

77. (a) Un calamar de 5,00 kg inicialmente en reposo expulsa 0,250 kg de fluido con una velocidad de 10,0 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del calamar si la eyección se realiza en 0,100 s y existe una fuerza de fricción de 5,00 *N* que se opone al movimiento del calamar?
(b) ¿Cuánta energía se pierde por el trabajo realizado contra la fricción?

78. Un cohete despega de la Tierra y alcanza una rapidez de 100 m/s en 10,0 s. Si la rapidez de escape es de 1.500 m/s y la masa de combustible quemada es de 100 kg, ¿cuál era la masa inicial del cohete?

79. Repita el problema anterior, pero para un cohete que despega de una estación espacial, donde no hay más gravedad que la despreciable, debido a la estación espacial.

80. ¿Cuánto combustible se necesitaría para que un cohete de 1.000 kg (esta es su masa sin combustible) despegara de la Tierra y alcanzara 1.000 m/s en 30 s? La velocidad de escape es de 1.000 m/s.

81. ¿Qué velocidad de escape es necesaria para acelerar un cohete en el espacio profundo de 800 m/s a 1.000 m/s en 5,0 s si la masa total del cohete es de 1.200 kg y solo le quedan 50 kg de combustible?

82. **Resultados poco razonables** Se ha informado de que los calamares saltan desde el océano y recorren 30,0 m (medidos horizontalmente) antes de volver a entrar en el agua.
(a) Calcule la velocidad inicial del calamar si sale del agua con un ángulo de 20,0°, suponiendo que la sustentación del aire es insignificante y la resistencia del aire también.
(b) El calamar se propulsa chorreando agua. ¿Qué fracción de su masa tendría que expulsar para alcanzar la velocidad encontrada en la parte anterior? El agua se expulsa a 12,0 m/s; se ignoran la fuerza gravitacional y la fricción.
(c) ¿Qué es lo que no es razonable en los resultados?
(d) ¿Qué premisa no es razonable, o qué premisas son incongruentes?

Problemas Adicionales

83. Dos canoeros de 70 kg reman en una sola canoa de 50 kg. Su remo mueve la canoa a 1,2 m/s con respecto al agua, y el río en el que están fluye a 4 m/s con respecto a la tierra. ¿Cuál es su momento con respecto a la tierra?

84. ¿Qué tiene una magnitud mayor de momento: un elefante de 3.000 kg que se mueve a 40 km/h o un guepardo de 60 kg que se mueve a 112 km/h?

85. Una conductora aplica los frenos y reduce la velocidad de su auto en un 20 % sin cambiar la dirección en la que se mueve el auto. ¿En cuánto cambia el momento del auto?

86. Su amigo afirma que el momento es la masa multiplicada por la velocidad, por lo que las cosas con más masa tienen más momento. ¿Está de acuerdo? Explique.

87. Es más probable que se rompa un vaso en un suelo de cemento que si se deja caer desde la misma altura en césped. Explíquelo en términos de impulso.

88. Su auto deportivo de 1.500 kg acelera de 0 a 30 m/s en 10 s. ¿Qué fuerza media se ejerce sobre este durante esta aceleración?

89. Una pelota de masa m se deja caer. ¿Cuál es la fórmula del impulso ejercido sobre la pelota desde el instante en que se deja caer hasta un tiempo arbitrario τ más tarde? Ignore la resistencia del aire.

90. Repita el problema anterior, pero incluya una fuerza de arrastre debida al aire de $f_{\text{arrastre}} = -b\vec{v}$.

91. Un huevo de 5,0 g cae desde un mostrador de 90 cm de altura al suelo y se rompe. ¿Qué impulso ejerce el suelo sobre el huevo?

92. Un auto choca contra un gran árbol que no se mueve. El auto pasa de 30 m/s a 0 en 1,3 m. (a) ¿Qué impulso aplica el cinturón de seguridad al

conductor, suponiendo que sigue el mismo movimiento que el auto? (b) ¿Cuál es la fuerza media aplicada sobre el conductor por el cinturón de seguridad?

93. Dos jugadores de hockey se acercan de frente; cada uno se desplaza a la misma rapidez v_i. Chocan y se enredan, caen y se alejan a una rapidez $v_i/5$. ¿Cuál es la relación de sus masas?

94. Va en su bicicleta de 10 kg a 15 m/s y un insecto de 5,0 g choca y salpica en su casco. El insecto volaba inicialmente a 2,0 m/s en la misma dirección que usted. Si su masa es de 60 kg, (a) ¿cuál es el momento inicial suyo más el de su bicicleta? (b) ¿cuál es el momento inicial del insecto? (c) ¿cuál es su cambio de velocidad debido a la colisión con el insecto? (d) ¿cuál habría sido el cambio de velocidad si el insecto viajara en sentido contrario?

95. Una carga de grava se vierte directamente en un vagón de carga de 30.000 kg que circula a 2,2 m/s en un tramo recto de ferrocarril. Si la rapidez del vagón tras recibir la grava es de 1,5 m/s, ¿qué masa de grava ha recibido?

96. Dos carros en una pista recta chocan de frente. El primer carro se desplaza a 3,6 m/s en la dirección de la *x* positiva y el segundo se mueve a 2,4 m/s en la dirección opuesta. Tras la colisión, el segundo carro sigue moviéndose en su dirección inicial a 0,24 m/s. Si la masa del segundo carro es 5,0 veces la del primero, ¿cuál es la velocidad final del primer carro?

97. Un astronauta de 100 kg se encuentra separado de su nave espacial por 10 m y se aleja de ella a 0,1 m/s. Para volver a la nave espacial, lanza una bolsa de herramientas de 10 kg lejos de la nave a 5,0 m/s. ¿Cuánto tiempo tardará en volver a la nave espacial?

98. Derive las ecuaciones que dan la rapidez final de dos objetos que colisionan elásticamente, donde la masa de los objetos es m_1 y m_2 y la rapidez inicial es $v_{1,i}$ y $v_{2,i} = 0$ (es decir, el segundo objeto está inmóvil inicialmente).

99. Repita el problema anterior en el caso en que la rapidez inicial del segundo objeto sea distinta a cero.

100. Un niño baja en trineo por una colina y choca a 5,6 m/s con un trineo inmóvil, idéntico al suyo. El niño es lanzado hacia delante a la misma rapidez; atrás deja los dos trineos que se traban juntos y se deslizan hacia delante más lentamente. ¿Cuál es la rapidez de los dos trineos después de esta colisión?

101. Para el problema anterior, calcule la rapidez final de cada trineo para el caso de una colisión elástica.

102. Un jugador de fútbol de 90 kg salta verticalmente en el aire para atrapar un balón de fútbol de 0,50 kg que se lanza esencialmente en horizontal hacia él a 17 m/s. ¿Cuál es su velocidad horizontal después de atrapar el balón?

103. Tres paracaidistas caen en picada hacia la tierra. Al principio se agarran el uno al otro, pero luego se separan. Dos paracaidistas de 70 y 80 kg de masa adquieren velocidades horizontales de 1,2 m/s al norte y 1,4 m/s al sureste, respectivamente. ¿Cuál es la velocidad horizontal del tercer paracaidista, cuya masa es de 55 kg?

104. Dos bolas de billar están en reposo y se tocan en una mesa de billar. La bola blanca se desplaza a 3,8 m/s a lo largo de la línea de simetría entre estas bolas y las golpea simultáneamente. Si la colisión es elástica, ¿cuál es la velocidad de las tres bolas después de la colisión?

105. Una bola de billar que viaja a $(2{,}2\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{i}} - (0{,}4\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$ choca contra una pared que está alineada en la dirección $\hat{\mathbf{j}}$. Suponiendo que la colisión es elástica, ¿cuál es la velocidad final de la bola?

106. Dos bolas de billar idénticas colisionan. La primera viaja inicialmente a $(2{,}2\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{i}} - (0{,}4\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$ y la segunda a $-(1{,}4\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{i}} + (2{,}4\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$. Supongamos que colisionan cuando el centro de la bola 1 está en el origen y el centro de la bola 2 está en el punto $(2R, 0)$ donde R es el radio de las bolas. ¿Cuál es la velocidad final de cada bola?

107. Repita el problema anterior si las bolas chocan cuando el centro de la bola 1 está en el origen y el centro de la bola 2 está en el punto $(0, 2R)$.

108. Repita el problema anterior si las bolas chocan cuando el centro de la bola 1 está en el origen y el centro de la bola 2 está en el punto $\left(\sqrt{3}R/2,\ R/2\right)$

109. ¿Dónde está el centro de masa de un alambre semicircular de radio R que está centrado en el origen, comienza y termina en el eje de la *x*, y se encuentra en el plano *x*,*y*?

110. ¿Dónde está el centro de masa de una rebanada de pizza cortada en ocho trozos iguales? Supongamos que el origen está en el vértice de la rebanada y midamos los ángulos con respecto a un borde de la rebanada. El

radio de la pizza es R.

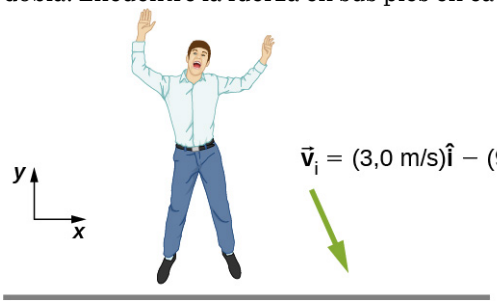
111. Si el 1 % de la masa de la Tierra se transfiriera a la Luna, ¿a qué distancia se desplazaría el centro de masa del sistema Tierra-Luna-población? La masa de la Tierra es $5{,}97 \times 10^{24}$ kg y la de la Luna es $7{,}34 \times 10^{22}$ kg. El radio de la órbita de la Luna es de aproximadamente $3{,}84 \times 10^{5}$ m.

112. Su amigo se pregunta cómo un cohete sigue subiendo al cielo una vez que está lo suficientemente alto sobre la superficie de la Tierra como para que sus gases expulsados ya no empujen sobre la superficie. ¿Cómo responde usted?

113. Para aumentar la aceleración de un cohete, ¿hay que lanzar piedras por la ventanilla delantera del cohete o por la trasera?

Problemas De Desafío

114. Una persona de 65 kg salta desde la ventana del primer piso de un edificio en llamas y aterriza casi verticalmente en el suelo, a una velocidad horizontal de 3 m/s y vertical de -9 m/s. Al impactar con el suelo, es llevado al reposo en poco tiempo. La fuerza que experimentan sus pies depende de si mantiene las rodillas rígidas o las dobla. Encuentre la fuerza en sus pies en cada caso.



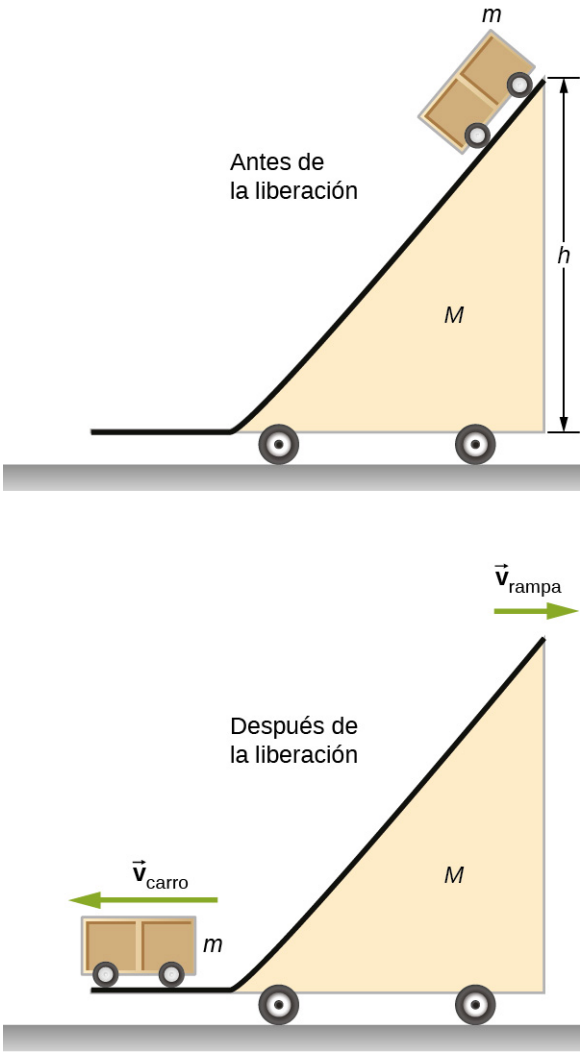
a. Primero halle el impulso en la persona por el impacto en el suelo. Calcule tanto su magnitud como su dirección.
b. Halle la fuerza media sobre los pies si la persona mantiene la pierna rígida y recta y su centro de masa desciende únicamente 1 cm verticalmente y 1 cm horizontalmente durante el impacto.
c. Halle la fuerza media sobre los pies si la persona dobla las piernas durante el impacto de forma que su centro de masa descienda 50 cm en vertical y 5 cm en horizontal durante el impacto.
d. Compare los resultados de las partes (b) y (c), y saque conclusiones sobre cuál forma es mejor.

Tendrá que calcular el tiempo que dura el impacto con suposiciones razonables sobre la desaceleración. Aunque la fuerza no es constante durante el impacto, es aceptable trabajar con una fuerza media constante para este problema.

115. Dos proyectiles de masa m_1 y m_2 se disparan a la misma rapidez, pero en direcciones opuestas desde dos lugares de lanzamiento separados por una distancia D. Ambos alcanzan el mismo punto en su punto más alto y golpean allí. Como resultado del impacto, se pegan y se mueven como un solo cuerpo después. Halle el lugar en el que aterrizarán.

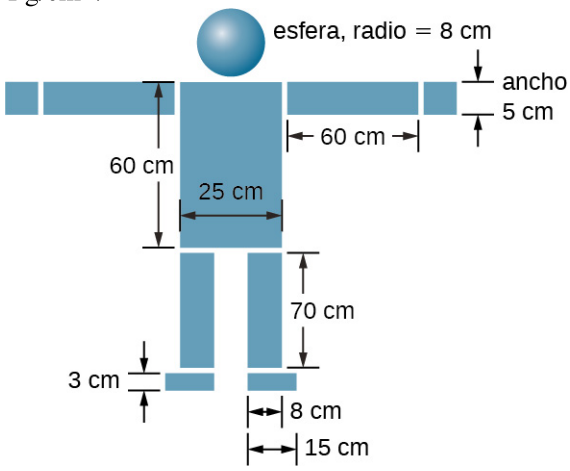
116. Dos objetos idénticos (como las bolas de billar) tienen una colisión unidimensional en la que uno está inicialmente inmóvil. Después de la colisión, el objeto que se mueve queda inmóvil y el otro se mueve con la misma rapidez que tenía el otro originalmente. Demuestre que, tanto el momento como la energía cinética se conservan.

117. Una rampa de masa M reposa en una superficie horizontal. Se coloca un pequeño carro de masa m en la parte superior de la rampa y se suelta.



¿Cuál es la velocidad de la rampa y del carro con respecto al suelo en el instante en que el carro sale de la rampa?

118. Halle el centro de masa de la estructura dada en la figura siguiente. Supongamos un grosor uniforme de 20 cm, y una densidad uniforme de $1\ \text{g/cm}^3$.



CAPÍTULO 10
Rotación de un eje fijo



Figura 10.1 Parque eólico de Brazos, en el oeste de Texas. En 2012, los parques eólicos de los EE. UU. generaban 60 gigavatios de potencia, capacidad suficiente para abastecer de energía a 15 millones de hogares durante un año (créditos: modificación del trabajo del Departamento de Energía de los EE. UU.).

ESQUEMA DEL CAPITULO

10.1 Variables rotacionales
10.2 Rotación con aceleración angular constante
10.3 Relacionar cantidades angulares y traslacionales
10.4 Momento de inercia y energía cinética rotacional
10.5 Calcular momentos de inercia
10.6 Torque
10.7 Segunda ley de Newton para la rotación
10.8 Trabajo y potencia en el movimiento rotacional

INTRODUCCIÓN En los capítulos anteriores, hemos descrito el movimiento (cinemática) y cómo cambiar el movimiento (dinámica). Igualmente, hemos definido conceptos importantes como la energía para objetos que se consideran masas puntuales. Las masas puntuales, por definición, no tienen forma y, por ende, solo pueden experimentar un movimiento traslacional. Sin embargo, sabemos por la vida cotidiana que el movimiento rotacional también es muy importante y que muchos objetos que se mueven tienen tanto traslación como rotación. Los aerogeneradores de la imagen de apertura de nuestro capítulo son un excelente ejemplo de cómo el movimiento rotacional influye en nuestra vida cotidiana, ya que el mercado de las fuentes de energía limpia sigue creciendo.

En este capítulo comenzamos a tratar el movimiento rotacional, empezando por la rotación en un eje fijo. La rotación de eje fijo describe la rotación alrededor de un eje fijo de un cuerpo rígido; es decir, un objeto que no se deforma al moverse. Mostraremos cómo aplicar todas las ideas que hemos desarrollado hasta ahora sobre el

movimiento de traslación a un objeto que gira alrededor de un eje fijo. En el próximo capítulo, ampliaremos estas ideas a movimientos rotacionales más complejos, incluso objetos que rotan y se trasladan, y objetos que carecen de un eje de rotación fijo.

10.1 Variables rotacionales

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el significado físico de las variables rotacionales aplicadas a la rotación de eje fijo.
- Explicar cómo se relaciona la velocidad angular con la rapidez tangencial.
- Calcular la velocidad angular instantánea, dada la función de posición angular.
- Hallar la velocidad angular y la aceleración angular en un sistema en rotación.
- Calcular la aceleración angular media cuando la velocidad angular cambia.
- Calcular la aceleración angular instantánea, dada la función de velocidad angular.

Hasta ahora en este texto, hemos estudiado principalmente el movimiento de traslación, incluso las variables que lo describen: desplazamiento, velocidad y aceleración. Ahora ampliamos nuestra descripción del movimiento a la rotación, específicamente, el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo. Veremos que el movimiento de rotación se describe mediante un conjunto de variables relacionadas, parecidas a las que utilizamos en el movimiento de traslación.

Velocidad angular

El movimiento circular uniforme (ya comentado en Movimiento en dos y tres dimensiones) es un movimiento en círculo a rapidez constante. Aunque este es el caso más simple de movimiento rotacional, es muy útil para muchas situaciones, y lo utilizamos aquí para introducir las variables rotacionales.

En la Figura 10.2, mostramos una partícula que se mueve en círculo. El sistema de coordenadas es fijo y sirve como marco de referencia para definir la posición de la partícula. Su vector de posición desde el origen del círculo hasta la partícula barre el ángulo θ, que aumenta en sentido contrario de las agujas del reloj a medida que la partícula se desplaza por su trayectoria circular. El ángulo θ se denomina la **posición angular** de la partícula. A medida que la partícula se mueve en su trayectoria circular, también traza un arco de longitud s.

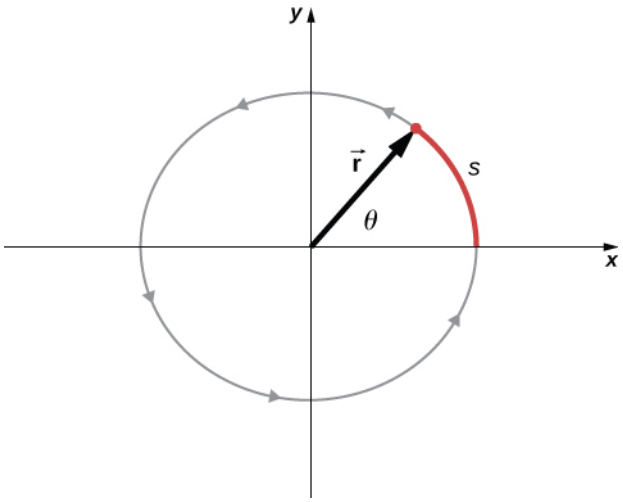


FIGURA 10.2 Una partícula sigue una trayectoria circular. Al moverse en sentido contrario a las agujas del reloj, barre un ángulo positivo θ con respecto al eje de la x y traza un arco de longitud s.

El ángulo se relaciona con el radio del círculo y la longitud del arco mediante

$$\theta = \frac{s}{r}. \qquad 10.1$$

El ángulo θ, la posición angular de la partícula a lo largo de su trayectoria, tiene unidades de radianes (rad).

Hay 2π radianes en $360°$. Observe que la medida del radián es un cociente de medidas de longitud, y por tanto es una cantidad adimensional. A medida que la partícula se mueve a lo largo de su trayectoria circular, su posición angular cambia y sufre desplazamientos angulares $\Delta\theta$.

Podemos asignar vectores a las cantidades en la Ecuación 10.1. El ángulo $\vec{\boldsymbol{\theta}}$ es un vector fuera de la página en la Figura 10.2. El vector de posición angular $\vec{\mathbf{r}}$ y la longitud del arco $\vec{\mathbf{s}}$ ambos se encuentran en el plano de la página. Estos tres vectores están relacionados entre sí por

$$\vec{\mathbf{s}} = \vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{r}}. \qquad 10.2$$

Es decir, la longitud del arco es el producto cruz del vector de ángulo y el vector de posición, como se muestra en la Figura 10.3.

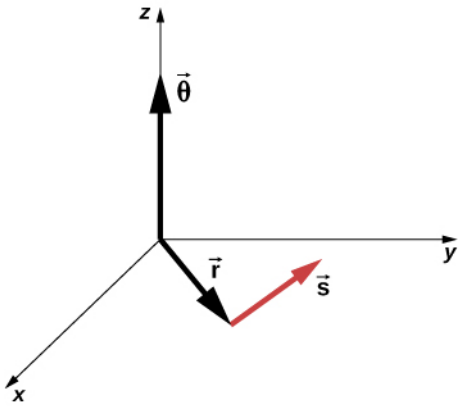


FIGURA 10.3 El vector de ángulo apunta a lo largo del eje de la z y el vector de posición y el vector de longitud de arco se encuentran en el plano xy. Vemos que $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{r}}$. Los tres vectores son perpendiculares entre sí.

La magnitud de la **velocidad angular**, denotada por ω, es la tasa de cambio en el tiempo del ángulo θ mientras la partícula se desplaza en su trayectoria circular. La **velocidad angular instantánea** se define como el límite en el que $\Delta t \to 0$ en la velocidad angular media $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}, \qquad 10.3$$

donde θ es el ángulo de rotación (Figura 10.2). Las unidades de la velocidad angular son radianes por segundo (rad/s). La velocidad angular también recibe el nombre de tasa de rotación en radianes por segundo. En muchas situaciones, se nos da la tasa de rotación en revoluciones/s o ciclos/s. Para hallar la velocidad angular, debemos multiplicar las revoluciones/s por 2π, dado que hay 2π radianes en una revolución completa. Dado que la dirección de un ángulo positivo en un círculo es contraria a las agujas del reloj, tomamos las rotaciones en sentido contrario a las agujas del reloj como positivas y las rotaciones en el sentido de las agujas del reloj como negativas.

Vemos cómo la velocidad angular está relacionada con la rapidez tangencial de la partícula al diferenciar la Ecuación 10.1 con respecto al tiempo. Reescribimos la Ecuación 10.1 como

$$s = r\theta.$$

Al tomar la derivada con respecto al tiempo y observar que el radio r es una constante, tenemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = \theta\frac{dr}{dt} + r\frac{d\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

donde $\theta\frac{dr}{dt} = 0$. Aquí $\frac{ds}{dt}$ es solo la rapidez tangencial v_t de la partícula en la Figura 10.2. Así, al utilizar la Ecuación 10.3, llegamos a

$$v_t = r\omega. \qquad 10.4$$

Es decir, la rapidez tangencial de la partícula es su velocidad angular por el radio del círculo. En la Ecuación 10.4, vemos que la rapidez tangencial de la partícula aumenta con su distancia al eje de rotación para una velocidad angular constante. Este efecto se muestra en la Figura 10.4. Dos partículas se colocan a diferentes radios en un disco en rotación a una velocidad angular constante. Al rotar el disco, la rapidez tangencial aumenta linealmente con el radio desde el eje de rotación. En la Figura 10.4, vemos que $v_1 = r_1\omega_1$ y $v_2 = r_2\omega_2$. Sin embargo, el disco tiene una velocidad angular constante, por lo que $\omega_1 = \omega_2$. Esto implica que $\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$ o $v_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right) v_1$. Así, dado que $r_2 > r_1$, $v_2 > v_1$.

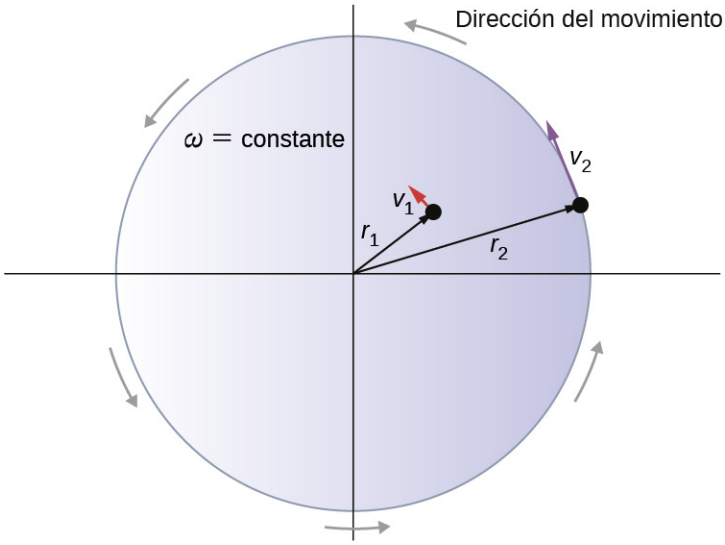


FIGURA 10.4 Dos partículas en un disco en rotación tienen distinta rapidez tangencial, dependiendo de su distancia al eje de rotación.

Hasta ahora, hemos hablado de la magnitud de la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$, que es una cantidad escalar: el cambio de posición angular con respecto al tiempo. El vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es el vector asociado a la velocidad angular y apunta a lo largo del eje de rotación. Esto es útil porque, cuando un cuerpo rígido está en rotación, queremos saber tanto el eje de rotación como la dirección en la que el cuerpo está en rotación alrededor del eje, en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario. La velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ nos brinda esta información. La velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ tiene una dirección determinada por la llamada regla de la mano derecha. La regla de la mano derecha es tal que si los dedos de su mano derecha se enrollan en sentido contrario al de las agujas del reloj desde el eje de la x (la dirección en la que θ aumenta) hacia el eje de la y, su pulgar apunta en la dirección del eje de la z positiva (Figura 10.5). La velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ que apunta a lo largo del eje de la z positiva corresponde, por tanto, a una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj, mientras que la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ que apunta al eje de la z negativa corresponde a una rotación en el sentido de las agujas del reloj.

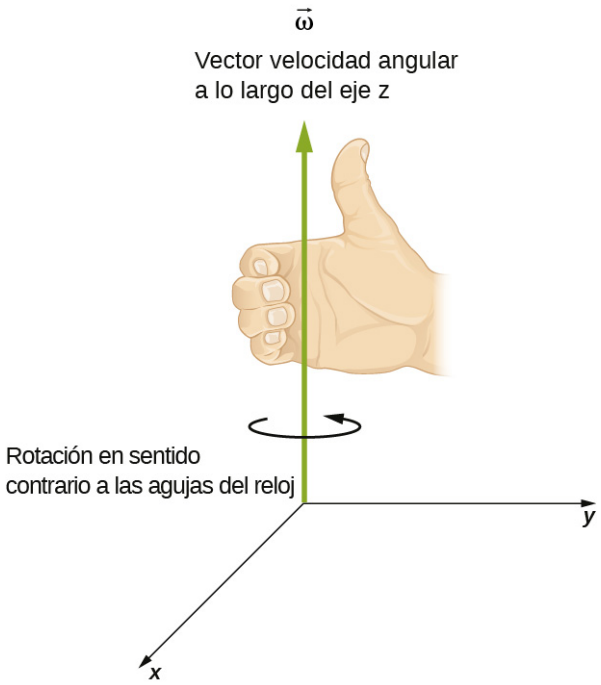


FIGURA 10.5 Para la rotación en sentido contrario a las agujas del reloj en el sistema indicado de coordenadas, la velocidad angular apunta en la dirección de la *z* positiva por la regla de la mano derecha.

De forma similar a la Ecuación 10.2, se puede establecer una relación de producto cruz con el vector de la velocidad tangencial, como se indica en la Ecuación 10.4. Por lo tanto, tenemos

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}. \tag{10.5}$$

Es decir, la velocidad tangencial es el producto cruz de la velocidad angular y el vector de posición, como se muestra en la Figura 10.6. De la parte (a) de esta figura, vemos que, con la velocidad angular en la dirección de la *z* positiva, la rotación en el plano *xy* es en sentido contrario a las agujas del reloj. En la parte (b), la velocidad angular está en la dirección de la *z* negativa, lo que da una rotación en el sentido de las agujas del reloj en el plano *xy*.

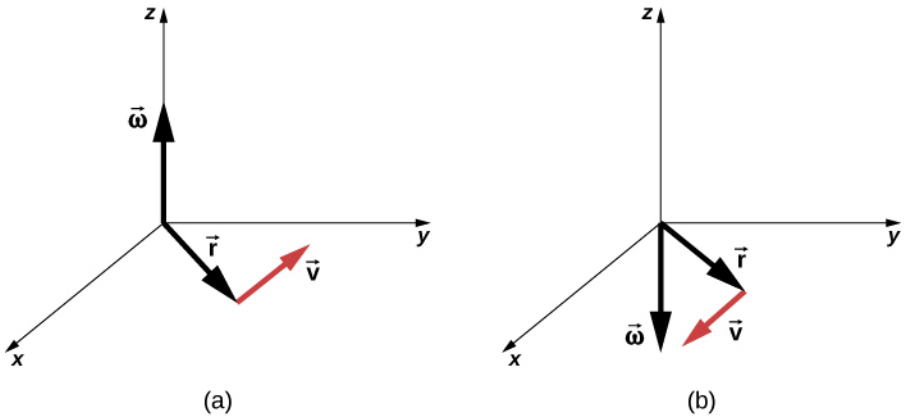


FIGURA 10.6 Los vectores mostrados son la velocidad angular, la posición y la velocidad tangencial. (a) La velocidad angular apunta en la dirección de la *z* positiva, lo que produce una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj en el plano *xy*. (b) La velocidad angular apunta en la dirección de la *z* negativa, lo que genera una rotación en el sentido de las agujas del reloj.

EJEMPLO 10.1

Rotación de un volante de inercia

Un volante de inercia rota de forma que barre un ángulo a la tasa de $\theta = \omega t = (45{,}0\ \text{rad/s})t$ radianes. El volante rota en sentido contrario a las agujas del reloj, visto en el plano de la página. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del volante de inercia? (b) ¿En qué sentido es la velocidad angular? (c) ¿Cuántos radianes rota el volante de inercia en 30 s? (d) ¿Cuál es la rapidez tangencial de un punto del volante de inercia a 10 cm del eje de rotación?

Estrategia

La forma funcional de la posición angular del volante de inercia se da en el problema como $\theta(t) = \omega t$, por lo que, al tomar la derivada con respecto al tiempo, hallaremos la velocidad angular. Utilizamos la regla de la mano derecha para calcular la velocidad angular. Para hallar el desplazamiento angular del volante de inercia durante 30 s, buscamos el desplazamiento angular $\Delta\theta$, donde el cambio de posición angular está entre 0 y 30 s. Para hallar la rapidez tangencial de un punto a una distancia del eje de rotación, multiplicamos su distancia por la velocidad angular del volante de inercia.

Solución

a. $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 45\ \text{rad/s}$. Vemos que la velocidad angular es una constante.
b. Por la regla de la mano derecha, doblamos los dedos en el sentido de la rotación, que es en sentido contrario a las agujas del reloj en el plano de la página, y el pulgar apunta en la dirección de la velocidad angular, que está fuera de la página.
c. $\Delta\theta = \theta(30\ \text{s}) - \theta(0\ \text{s}) = 45{,}0(30{,}0\ \text{s}) - 45{,}0(0\ \text{s}) = 1350{,}0\ \text{rad}$.
d. $v_t = r\omega = (0{,}1\ \text{m})(45{,}0\ \text{rad/s}) = 4{,}5\ \text{m/s}$.

Importancia

En 30 s, el volante de inercia ha rotado un buen número de revoluciones, unas 215 si dividimos el desplazamiento angular entre 2π. Un volante de inercia enorme puede servir para almacenar energía de este modo, si las pérdidas por fricción son mínimas. En investigaciones recientes se ha considerado la posibilidad de utilizar rodamientos superconductores sobre los que se apoya el volante de inercia, con una pérdida de energía cero debido a la fricción.

Aceleración angular

Acabamos de hablar de la velocidad angular en relación con un movimiento circular uniforme. Sin embargo, no todos los movimientos son uniformes. Imagínese a un patinador sobre hielo girando con los brazos extendidos: cuando mete los brazos, su velocidad angular aumenta. Alternativamente, piense que el disco duro de una computadora desacelera hasta el punto de detenerse a medida que disminuye la velocidad angular. Exploraremos estas situaciones más adelante, aunque ya percibimos la necesidad de definir una **aceleración angular** para describir situaciones en las que ω cambia. Cuanto más rápido sea el cambio en ω, mayor será la aceleración angular. Definimos la **aceleración angular instantánea** α como la derivada de la velocidad angular con respecto al tiempo:

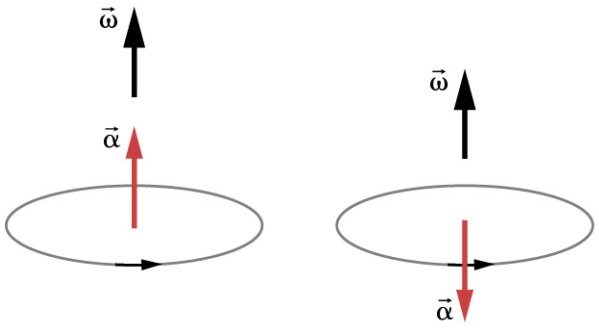
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}, \qquad 10.6$$

donde hemos tomado el límite de la aceleración angular media, $\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ como $\Delta t \to 0$.

Las unidades de la aceleración angular son (rad/s)/s, o rad/s^2.

De la misma manera que definimos el vector asociado a la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, podemos definir $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$, el vector asociado a la aceleración angular (Figura 10.7). Si la velocidad angular es a lo largo del eje de la z positiva, como en la Figura 10.5, y $\frac{d\omega}{dt}$ es positiva, entonces la aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ es positiva y apunta a lo largo del

eje de la $+z$-. Del mismo modo, si la velocidad angular $\vec{\omega}$ está a lo largo del eje de la z positiva y $\frac{d\omega}{dt}$ es negativa, entonces la aceleración angular es negativa y apunta a lo largo del eje de la $+z-$.



(a) Tasa de rotación en sentido contrario a las agujas del reloj y en aumento

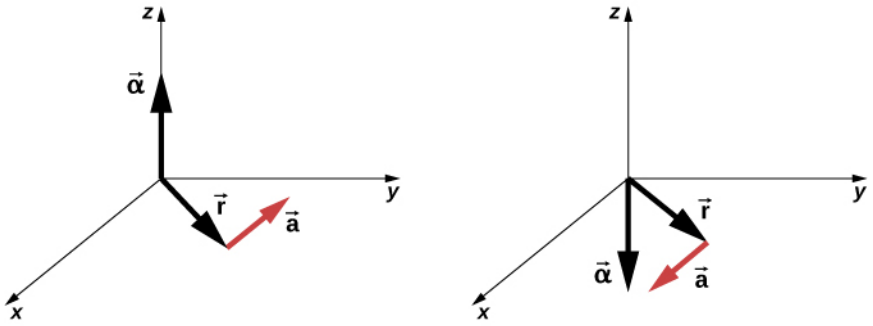
(b) Tasa de rotación en sentido contrario a las agujas del reloj y en disminución

FIGURA 10.7 La rotación es en sentido contrario a las agujas del reloj tanto en (a) como en (b) con la velocidad angular en la misma dirección. (a) La aceleración angular está en la misma dirección que la velocidad angular, lo que aumenta la tasa de rotación. (b) La aceleración angular está en la dirección opuesta a la velocidad angular, lo que disminuye la tasa de rotación.

Podemos expresar el vector de aceleración tangencial como un producto cruz de la aceleración angular y el vector de posición. Esta expresión se halla al tomar la derivada de tiempo de $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$ y se deja como ejercicio:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\mathbf{r}}. \qquad 10.7$$

La relación vectorial para la aceleración angular y la aceleración tangencial se muestra en la Figura 10.8.



(a) (b)

FIGURA 10.8 (a) La aceleración angular es en la dirección de la z positiva y produce una aceleración tangencial en sentido contrario a las agujas del reloj. (b) La aceleración angular es en la dirección de la z negativa y produce una aceleración tangencial en el sentido de las agujas del reloj.

Podemos relacionar la aceleración tangencial de un punto de un cuerpo en rotación a una distancia del eje de rotación de la misma manera que relacionamos la rapidez tangencial con la velocidad angular. Si diferenciamos la Ecuación 10.4 con respecto al tiempo, observando que el radio r es constante, obtenemos

$$a_t = r\alpha. \qquad 10.8$$

Así, la aceleración tangencial a_t es el radio por la aceleración angular. La Ecuación 10.4 y la Ecuación 10.8 son importantes para el análisis del movimiento rodadura (vea Momento angular).

Apliquemos estas ideas al análisis de algunos escenarios sencillos de rotación de eje fijo. Antes de hacerlo, presentamos una estrategia de resolución de problemas que puede aplicarse a la cinemática rotacional: la descripción del movimiento rotacional.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cinemática rotacional

1. Examine la situación para determinar que se trata de cinemática rotacional (movimiento rotacional).
2. Identifique exactamente lo que hay que determinar en el problema (identifique las incógnitas). Un esquema de la situación es útil.
3. Haga una lista completa de lo que se da o puede deducirse del problema tal y como está planteado (identifique los aspectos conocidos).
4. Resuelva la ecuación o ecuaciones apropiadas para la cantidad a determinar (la incógnita). Puede ser útil pensar en términos de un análogo traslacional, porque a estas alturas ya está familiarizado con las ecuaciones del movimiento traslacional.
5. Sustituya los valores conocidos junto con sus unidades en la ecuación correspondiente y obtenga soluciones numéricas completas con unidades. Utilice unidades de radianes para los ángulos.
6. Compruebe si su respuesta es razonable: ¿Tiene sentido su respuesta?

Apliquemos ahora esta estrategia de resolución de problemas a algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO 10.2

Una rueda de bicicleta que gira

Una mecánica de bicicletas monta una bicicleta en el soporte de reparación y hace girar la rueda trasera desde el reposo hasta una velocidad angular final de 250 rpm en 5,00 s. (a) Calcule la aceleración angular media en rad/s^2. (b) Si ahora pisa el freno, lo que provoca una aceleración angular de -87,3 rad/s^2, ¿cuánto tiempo tarda la rueda en detenerse?

Estrategia

La aceleración angular media puede hallarse directamente a partir de su definición $\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ porque la velocidad angular final y el tiempo están dados. Vemos que $\Delta\omega = \omega_{\text{final}} - \omega_{\text{inicial}} = 250$ rev/min y Δt es 5,00 s. Para la parte (b), conocemos la aceleración angular y la velocidad angular inicial. Podemos hallar el tiempo de parada al utilizar la definición de aceleración angular media y resolver para Δt, lo que arroja

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha}.$$

Solución

a. Al introducir la información conocida en la definición de aceleración angular, obtenemos

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{250\text{ rpm}}{5{,}00\text{ s}}.$$

Dado que $\Delta\omega$ está en revoluciones por minuto (rpm) y queremos las unidades estándar de rad/s^2 para la aceleración angular, necesitamos convertir de rpm a rad/s:

$$\Delta\omega = 250\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}} \cdot \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 26{,}2\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Al introducir esta cantidad en la expresión para α, obtenemos

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{26{,}2\text{ rad/s}}{5{,}00\text{ s}} = 5{,}24\text{ rad/s}^2.$$

b. Aquí la velocidad angular disminuye de 26,2 rad/s (250 rpm) a cero, por lo que $\Delta\omega$ es -26,2 rad/s, y α es de -87,3 rad/s^2. Así,

$$\Delta t = \frac{-26{,}2\text{ rad/s}}{-87{,}3\text{ rad/s}^2} = 0{,}300\text{ s}.$$

Importancia

Observe que la aceleración angular a medida que la mecánica hace girar la rueda es pequeña y positiva; se necesitan 5 s para producir una velocidad angular apreciable. Cuando pisa el freno, la aceleración angular es grande y negativa. La velocidad angular pasa rápidamente a cero.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.1

Las aspas del ventilador de un motor de reacción turbofán (mostradas a continuación) aceleran desde el reposo hasta una tasa de rotación de 40,0 rev/s en 20 s. El aumento de la velocidad angular del ventilador es constante en el tiempo. (El motor turbofán GE90-110B1 montado en un Boeing 777, como se muestra, es actualmente el mayor motor turbofán del mundo, capaz de alcanzar un empuje de 330 a 510 kN).

(a) ¿Cuál es la aceleración angular media?

(b) ¿Cuál es la aceleración angular instantánea en cualquier momento durante los primeros 20 s?



FIGURA 10.9 (créditos: "Bubinator"/ Wikimedia Commons).

EJEMPLO 10.3

Aerogenerador

Un aerogenerador (Figura 10.10) en un parque eólico se apaga para su mantenimiento. Tarda 30 s en pasar de su velocidad angular de funcionamiento a una parada completa, en la que la función de velocidad angular es $\omega(t) = [(t\text{s}^{-1} - 30{,}0)^2/100{,}0]\text{rad/s}$. Si el aerogenerador rota en sentido contrario a las agujas del reloj, de cara a la página, (a) ¿cuáles son las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración angular? (b) ¿Cuál es la aceleración angular media? (c) ¿Cuál es la aceleración angular instantánea en $t = 0{,}0,\ 15{,}0,\ 30{,}0\ \text{s}$?

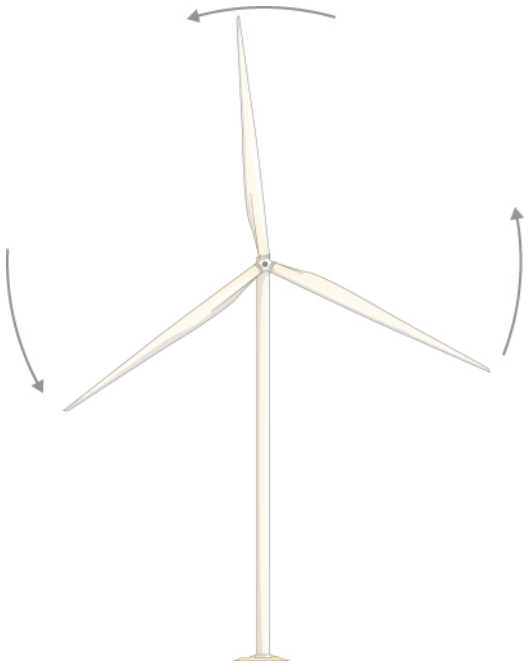


FIGURA 10.10 Aerogenerador que rota en sentido contrario a las agujas del reloj, visto de frente.

Estrategia

a. Se nos da el sentido rotacional del aerogenerador, que está en sentido contrario a las agujas del reloj en el plano de la página. Utilizando la regla de la mano derecha (Figura 10.5), podemos establecer las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración angular.
b. Calculamos las velocidades angulares inicial y final para obtener la aceleración angular media. Establecemos el signo de la aceleración angular a partir de los resultados de (a).
c. Tenemos la forma funcional de la velocidad angular, así que podemos hallar la forma funcional de la función de aceleración angular al tomar su derivada con respecto al tiempo.

Solución

a. Dado que el aerogenerador rota en sentido contrario a las agujas del reloj, la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ apunta hacia afuera de la página. Sin embargo, dado que la velocidad angular disminuye, la aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ apunta hacia la página, en el sentido contrario a la velocidad angular.
b. La velocidad angular inicial de la turbina, suponiendo que $t = 0,$ es $\omega = 9{,}0\ \text{rad/s}$. La velocidad angular final es cero, por lo que la aceleración angular media es
$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{0 - 9{,}0\ \text{rad/s}}{30{,}0 - 0\ \text{s}} = -0{,}3\ \text{rad/s}^2.$$
c. Al tomar la derivada de la velocidad angular con respecto al tiempo se obtiene
$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = (t - 30{,}0)/50{,}0\ \text{rad/s}^2$
$$\alpha(0{,}0\ \text{s}) = -0{,}6\ \text{rad/s}^2, \alpha(15{,}0\ \text{s}) = -0{,}3\ \text{rad/s}^2, \text{ y } \alpha(30{,}0\ \text{s}) = 0\ \text{rad/s}.$$

Importancia

A partir de los cálculos de (a) y (b) comprobamos que la aceleración angular α y la aceleración angular media $\overline{\alpha}$ son negativas. El aerogenerador tiene una aceleración angular en sentido contrario a su velocidad angular.

Ahora tenemos un vocabulario básico para hablar sobre la cinemática rotacional de eje fijo y las relaciones entre las variables rotacionales. En la siguiente sección se analizan más definiciones y conexiones.

10.2 Rotación con aceleración angular constante

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Derivar las ecuaciones cinemáticas para el movimiento rotacional con aceleración angular constante.
- Seleccionar de las ecuaciones cinemáticas para el movimiento rotacional con aceleración angular constante las ecuaciones apropiadas para resolver las incógnitas en el análisis de sistemas sometidos a rotación de eje fijo.
- Utilizar las soluciones halladas con las ecuaciones cinemáticas para verificar el análisis gráfico de la rotación de eje fijo con aceleración angular constante.

En la sección anterior, hemos definido las variables rotacionales de desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular. En esta sección, trabajamos con estas definiciones para derivar relaciones entre estas variables y utilizar estas relaciones para analizar el movimiento rotacional en un cuerpo rígido en torno a un eje fijo bajo una aceleración angular constante. Este análisis constituye la base de la cinemática rotacional. Si la aceleración angular es constante, las ecuaciones de la cinemática rotacional se simplifican, de forma similar a las ecuaciones de la cinemática lineal que se analizan en Movimiento a lo largo de una línea recta y Movimiento en dos y tres dimensiones. Podemos entonces utilizar este conjunto simplificado de ecuaciones para describir muchas aplicaciones en física e ingeniería, donde la aceleración angular del sistema es constante. La cinemática rotacional es también un prerrequisito para el estudio de la dinámica rotacional más adelante en este capítulo.

Cinemática del movimiento rotacional

Con nuestra intuición podemos empezar a ver cómo las cantidades rotacionales θ, ω, α, y t están relacionadas entre sí. Por ejemplo, hemos visto en la sección anterior que, si un volante de inercia tiene una aceleración angular en la misma dirección que su vector de velocidad angular, su velocidad angular aumenta con el tiempo, al igual que desplazamiento angular. Por el contrario, si la aceleración angular es opuesta al vector de velocidad angular, su velocidad angular disminuye con el tiempo. Podemos describir estas situaciones físicas y muchas otras con un conjunto coherente de ecuaciones cinemáticas rotacionales bajo una aceleración angular constante. El método para investigar el movimiento rotacional de esta manera se llama **cinemática del movimiento rotacional**.

Para empezar, observamos que, si el sistema rota bajo una aceleración constante, entonces la velocidad angular media sigue una relación simple porque la velocidad angular aumenta linealmente con el tiempo. La velocidad angular media es justo la mitad de la suma de los valores inicial y final:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_\mathrm{f}}{2}. \tag{10.9}$$

A partir de la definición de la velocidad angular media, hallaremos una ecuación que relacione la posición angular, la velocidad angular media y el tiempo:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Resolviendo para θ, tenemos

$$\theta_\mathrm{f} = \theta_0 + \bar{\omega}t, \tag{10.10}$$

donde hemos supuesto que $t_0 = 0$. Esta ecuación puede ser muy útil si conocemos la velocidad angular media del sistema. Entonces podríamos encontrar el desplazamiento angular en un tiempo determinado. A continuación, hallamos una ecuación que relaciona ω, α, y t. Para determinar esta ecuación, partimos de la definición de aceleración angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Reorganizamos esto para obtener $\alpha dt = d\omega$ y luego integramos ambos lados de esta ecuación desde los valores

iniciales hasta los finales, es decir, desde t_0 a t y ω_0 a ω_f. En el movimiento rotacional uniforme, la aceleración angular es constante, por lo que puede extraerse de la integral, para dar lugar a dos integrales definidas:

$$\alpha \int_{t_0}^{t} dt' = \int_{\omega_0}^{\omega_\mathrm{f}} d\omega.$$

Estableciendo $t_0 = 0$, tenemos

$$\alpha t = \omega_f - \omega_0.$$

Reorganizamos esto para obtener

$$\omega_\mathrm{f} = \omega_0 + \alpha t, \qquad \textbf{10.11}$$

donde ω_0 es la velocidad angular inicial. La Ecuación 10.11 es la contraparte rotacional de la ecuación cinemática lineal $v_\mathrm{f} = v_0 + at$. Con la Ecuación 10.11, hallaremos la velocidad angular de un objeto en cualquier tiempo t dada la velocidad angular inicial y la aceleración angular.

Hagamos ahora un tratamiento similar a partir de la ecuación $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. La reordenamos para obtener $\omega dt = d\theta$ e integramos de nuevo ambos lados de los valores iniciales a los finales; se observa que la aceleración angular es constante y no depende del tiempo. Sin embargo, esta vez, la velocidad angular no es constante (en general), por lo que sustituimos en lo que derivamos anteriormente:

$$\int_{t_0}^{t_f} (\omega_0 + \alpha t')dt' = \int_{\theta_0}^{\theta_\mathrm{f}} d\theta;$$

$$\int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \int_{t_0}^{t} \alpha t dt = \int_{\theta_0}^{\theta_\mathrm{f}} d\theta = \left[\omega_0 t' + \alpha\left(\frac{(t')^2}{2}\right)\right]_{t_0}^{t} = \omega_0 t + \alpha\left(\frac{t^2}{2}\right) = \theta_\mathrm{f} - \theta_0,$$

donde hemos supuesto que $t_0 = 0$. Ahora reordenamos para obtener

$$\theta_\mathrm{f} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \qquad \textbf{10.12}$$

La Ecuación 10.12 es la contraparte rotacional de la ecuación de la cinemática lineal que se encuentra en Movimiento a lo largo de una línea recta para la posición como función del tiempo. Esta ecuación nos da la posición angular de un cuerpo rígido en rotación en cualquier tiempo t dadas las condiciones iniciales (posición angular inicial y velocidad angular inicial) y la aceleración angular.

Hallaremos una ecuación que sea independiente del tiempo al resolver para t en la Ecuación 10.11 y sustituir en la Ecuación 10.12. La Ecuación 10.12 se convierte en

$$\begin{aligned}
\theta_\mathrm{f} &= \theta_0 + \omega_0\left(\tfrac{\omega_\mathrm{f}-\omega_0}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\tfrac{\omega_\mathrm{f}-\omega_0}{\alpha}\right)^2 \\
&= \theta_0 + \tfrac{\omega_0\omega_\mathrm{f}}{\alpha} - \tfrac{\omega_0^2}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\omega_\mathrm{f}^2}{\alpha} - \tfrac{\omega_0\omega_\mathrm{f}}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\omega_0^2}{\alpha} \\
&= \theta_0 + \tfrac{1}{2}\tfrac{\omega_\mathrm{f}^2}{\alpha} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\omega_0^2}{\alpha}, \\
\theta_\mathrm{f} - \theta_0 &= \tfrac{\omega_\mathrm{f}^2-\omega_0^2}{2\alpha}
\end{aligned}$$

o

$$\omega_\mathrm{f}^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Delta\theta). \qquad \textbf{10.13}$$

La Ecuación 10.10 a la Ecuación 10.13 describen la rotación en el eje fijo para una aceleración constante y se resumen en la Tabla 10.1.

Desplazamiento angular a partir de la velocidad angular media	$\theta_f = \theta_0 + \bar{\omega}t$
Velocidad angular a partir de la aceleración angular	$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$
Desplazamiento angular a partir de la velocidad angular y la aceleración angular	$\theta_f = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
Velocidad angular a partir del desplazamiento angular y la aceleración angular	$\omega_f^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha(\Delta\theta)$

TABLA 10.1 Ecuaciones cinemáticas

Aplicar las ecuaciones del movimiento rotacional

Ahora aplicaremos las relaciones cinemáticas clave para el movimiento rotacional a algunos ejemplos sencillos para tener una idea de cómo se pueden aplicar las ecuaciones a situaciones cotidianas.

EJEMPLO 10.4

Calcular la aceleración de un carrete de pesca

Un pescador de alta mar engancha un gran pez que se aleja nadando del barco, tirando del sedal de su carrete de pesca. Todo el sistema está inicialmente en reposo, y el sedal se desenrolla del carrete en un radio de 4,50 cm desde su eje de rotación. El carrete recibe una aceleración angular de $110\ \text{rad/s}^2$ durante 2,00 s (Figura 10.11).

(a) ¿Cuál es la velocidad angular final del carrete después de 2 s?

(b) ¿Cuántas revoluciones da el carrete?

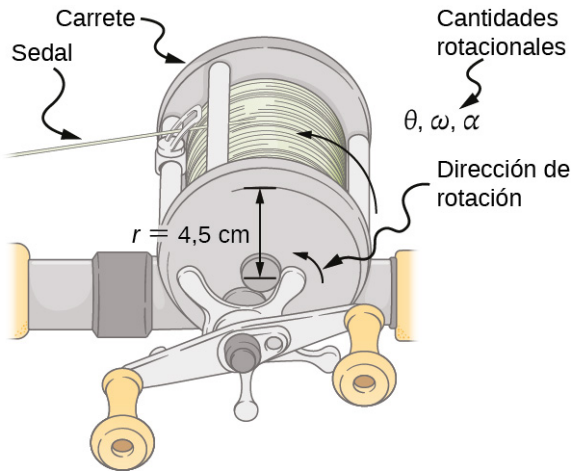


FIGURA 10.11 El sedal que sale de un carrete en rotación se mueve linealmente.

Estrategia

Identifique los aspectos conocidos y compárelos con las ecuaciones cinemáticas para la aceleración constante. Busque la ecuación adecuada que pueda resolverse para la incógnita; utilice los aspectos conocidos en la descripción del problema.

Solución

a. Se nos da α y t y queremos determinar ω. La ecuación más sencilla de utilizar es $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$, dado que se conocen todos los términos, además de la variable desconocida que buscamos. Se nos da que $\omega_0 = 0$

(parte del reposo), por lo que

$$\omega_f = 0 + (110\ \text{rad/s}^2)(2{,}00\ \text{s}) = 220\ \text{rad/s}.$$

b. Se nos pide que calculemos el número de revoluciones. Dado que $1\ \text{rev} = 2\pi\ \text{rad}$, hallaremos el número de revoluciones al calcular θ en radianes. Se nos da α y t, y sabemos que ω_0 es cero, por lo que podemos obtener θ utilizando

$$\begin{aligned}\theta_f &= \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 0 + 0 + (0{,}500)\left(110\ \text{rad/s}^2\right)(2{,}00\ \text{s})^2 = 220\ \text{rad}.\end{aligned}$$

Al convertir los radianes en revoluciones obtenemos

$$\text{Número de rev} = (220\ \text{rad})\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}} = 35{,}0\ \text{rev}.$$

Importancia

Este ejemplo ilustra que las relaciones entre las magnitudes rotacionales son muy análogas a las de las magnitudes lineales. Las respuestas a las preguntas son realistas. Tras desenrollarlo durante dos segundos, se comprueba que el carrete gira a 220 rad/s, es decir, a 2.100 rpm. (No es de extrañar que los carretes a veces emitan sonidos agudos).

En el ejemplo anterior, hemos considerado un carrete de pesca con una aceleración angular positiva. Consideremos ahora lo que ocurre con una aceleración angular negativa.

EJEMPLO 10.5

Calcular la duración cuando el carrete de pesca desacelera y se detiene

Ahora el pescador aplica un freno al carrete en rotación, hasta lograr una aceleración angular de $-300\ \text{rad/s}^2$. ¿Cuánto tiempo tarda el carrete en detenerse?

Estrategia

Se nos pide que calculemos el tiempo t que tarda en detenerse el carrete. Las condiciones iniciales y finales son diferentes a las del problema anterior, que implicaba el mismo carrete de pesca. Ahora vemos que la velocidad angular inicial es $\omega_0 = 220\ \text{rad/s}$ y la velocidad angular final ω es cero. La aceleración angular viene dada por $\alpha = -300\ \text{rad/s}^2$. Al examinar las ecuaciones disponibles, vemos que todas las cantidades menos t son conocidas en $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$, lo que facilita el empleo de esta ecuación.

Solución

La ecuación establece

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t.$$

Resolvemos la ecuación algebraicamente para t y luego sustituimos los valores conocidos como es habitual, para producir

$$t = \frac{\omega_f - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 220{,}0\ \text{rad/s}}{-300{,}0\ \text{rad/s}^2} = 0{,}733\ \text{s}.$$

Importancia

Hay que tener cuidado con los signos que indican las direcciones de las distintas cantidades. También observe que el tiempo para detener el carrete es muy breve porque la aceleración es bastante grande. Las líneas de pesca a veces se rompen debido a las aceleraciones que se producen, y los pescadores suelen dejar que el pez nade durante un tiempo antes de aplicar los frenos en el carrete. Un pez cansado es más lento y requiere una menor aceleración.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.2

Una centrifugadora utilizada en la extracción de ADN gira a una velocidad máxima de 7.000 rpm, para generar una "fuerza g" sobre la muestra que es 6.000 veces la fuerza de la gravedad. Si la centrifugadora tarda 10 segundos en llegar al reposo desde la máxima tasa de giro: (a) ¿Cuál es la aceleración angular de la centrifugadora? (b) ¿Cuál es el desplazamiento angular de la centrifugadora durante este tiempo?

EJEMPLO 10.6

Aceleración angular de una hélice

La Figura 10.12 muestra un gráfico de la velocidad angular de una hélice de un avión como función del tiempo. Su velocidad angular comienza en 30 rad/s y desciende linealmente hasta 0 rad/s en el transcurso de 5 segundos. (a) Calcule la aceleración angular del objeto y verifique el resultado utilizando las ecuaciones cinemáticas. (b) Calcule el ángulo por el que la hélice está en rotación durante esos 5 segundos y verifique su resultado por medio de las ecuaciones cinemáticas.

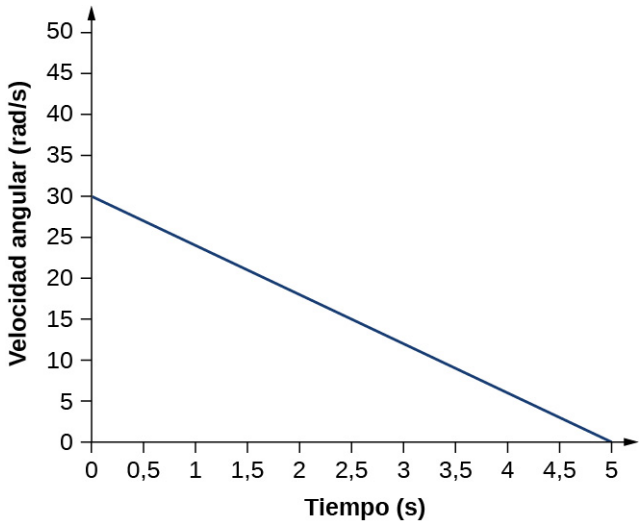


FIGURA 10.12 Gráfico de la velocidad angular de una hélice en función del tiempo.

Estrategia

a. Dado que la velocidad angular varía linealmente con el tiempo, sabemos que la aceleración angular es constante y no depende de la variable tiempo. La aceleración angular es la pendiente del gráfico de la velocidad angular en función del tiempo, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$. Para calcular la pendiente, leemos directamente de la Figura 10.12, y vemos que $\omega_0 = 30$ rad/s en $t = 0$ s y $\omega_f = 0$ rad/s en $t = 5$ s. A continuación, podemos verificar el resultado utilizando $\omega = \omega_0 + \alpha t$.

b. Utilizamos la ecuación $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; ya que la derivada tiempo del ángulo es la velocidad angular, hallaremos el desplazamiento angular al integrar la velocidad angular, lo que a partir de la figura significa tomar el área bajo el gráfico de la velocidad angular. En otras palabras:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_f} d\theta = \theta_f - \theta_0 = \int_{t_0}^{t_f} \omega(t)dt.$$

A continuación, utilizamos las ecuaciones cinemáticas en la aceleración constante para verificar el resultado.

Solución

a. Al calcular la pendiente, obtenemos

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{(0 - 30{,}0)\ \text{rad/s}}{(5{,}0 - 0)\ \text{s}} = -6{,}0\ \text{rad/s}^2.$$

Vemos que esto es exactamente la Ecuación 10.11 con un pequeño reordenamiento de los términos.

b. Hallaremos el área bajo la curva al calcular el área del triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura 10.13.

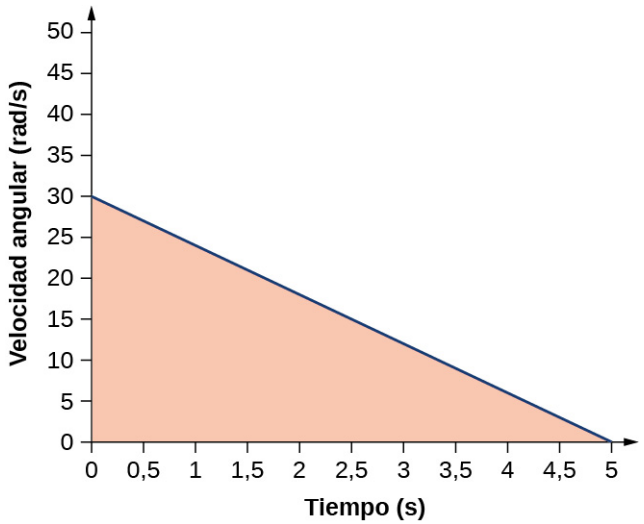


FIGURA 10.13 El área bajo la curva es el área del triángulo rectángulo.

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \text{área (triángulo)}; \\ \Delta\theta &= \tfrac{1}{2}(30\ \text{rad/s})(5\ \text{s}) = 75\ \text{rad}. \end{aligned}$$

Verificamos la solución mediante la Ecuación 10.12:

$$\theta_\text{f} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Estableciendo $\theta_0 = 0$, tenemos

$$\theta_0 = (30{,}0\ \text{rad/s})(5{,}0\ \text{s}) + \frac{1}{2}(-6{,}0\ \text{rad/s}^2)(5{,}0\ \text{rad/s})^2 = 150{,}0 - 75{,}0 = 75{,}0\ \text{rad}.$$

Esto verifica la solución derivada de calcular el área bajo la curva.

Importancia

Vemos en la parte (b) que hay enfoques alternativos para analizar la rotación del eje fijo con aceleración constante. Comenzamos con un enfoque gráfico y verificamos la solución por medio de las ecuaciones cinemáticas rotacionales. Dado que $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, podríamos realizar el mismo análisis gráfico sobre una curva de aceleración angular en función del tiempo. El área bajo la curva αen función del$t$ nos da el cambio de velocidad angular. Ya que la aceleración angular es constante en esta sección, se trata de un ejercicio sencillo.

10.3 Relacionar cantidades angulares y traslacionales

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Dada la ecuación cinemática lineal, escribir la ecuación cinemática rotacional correspondiente.
- Calcular las distancias lineales, las velocidades y las aceleraciones de los puntos de un sistema en rotación dadas las velocidades y aceleraciones angulares.

En esta sección, relacionamos cada una de las variables rotacionales con las variables traslacionales definidas en Movimiento a lo largo de una línea recta y Movimiento en dos y tres dimensiones. Esto completará nuestra capacidad para describir las rotaciones de los cuerpos rígidos.

Variables angulares frente a variables lineales

En Variables rotacionales, introducimos las variables angulares. Si comparamos las definiciones rotacionales con las definiciones de las variables cinemáticas lineales de Movimiento a lo largo de una línea recta y Movimiento en dos y tres dimensiones, encontramos que hay un mapeo de las variables lineales a las rotacionales. La posición lineal, la velocidad y la aceleración tienen sus contrapartes rotacionales, como podemos ver cuando las escribimos una al lado de la otra:

	Lineal	**Rotacional**
Posición	x	θ
Velocidad	$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración	$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Comparemos las variables lineales y rotacionales individualmente. La variable lineal de posición tiene unidades físicas de metros, mientras que la variable de posición angular tiene unidades adimensionales de radianes, como puede observarse en la definición de $\theta = \frac{s}{r}$, que es la relación de dos longitudes. La velocidad lineal tiene unidades de m/s, y su contraparte, la velocidad angular, tiene unidades de rad/s. En Variables rotacionales, vimos en el caso del movimiento circular que la rapidez lineal tangencial de una partícula a un radio r del eje de rotación está relacionada con la velocidad angular por la relación $v_\text{t} = r\omega$. Esto también podría aplicarse a los puntos de un cuerpo rígido que rota en torno a un eje fijo. En este caso, solo consideramos el movimiento circular. En el movimiento circular, tanto uniforme como no uniforme, existe una aceleración centrípeta (Movimiento en dos y tres dimensiones). El vector de aceleración centrípeta apunta hacia el interior de la partícula que ejecuta el movimiento circular hacia el eje de rotación. La derivación de la magnitud de la aceleración centrípeta se da en Movimiento en dos y tres dimensiones. A partir de esa derivación, la magnitud de la aceleración centrípeta resultó ser

$$a_\text{c} = \frac{v_\text{t}^2}{r}, \tag{10.14}$$

donde r es el radio del círculo.

Así, en el movimiento circular uniforme, cuando la velocidad angular es constante y la aceleración angular es cero, tenemos una aceleración lineal, es decir, una aceleración centrípeta, ya que la rapidez tangencial en la Ecuación 10.14 es una constante. Si existe un movimiento circular no uniforme, el sistema en rotación tiene una aceleración angular, y tenemos tanto una aceleración centrípeta lineal que está cambiando (porque v_t está cambiando) así como una aceleración tangencial lineal. Estas relaciones se indican en la Figura 10.14, donde presentamos las aceleraciones centrípeta y tangencial para el movimiento circular uniforme y no uniforme.

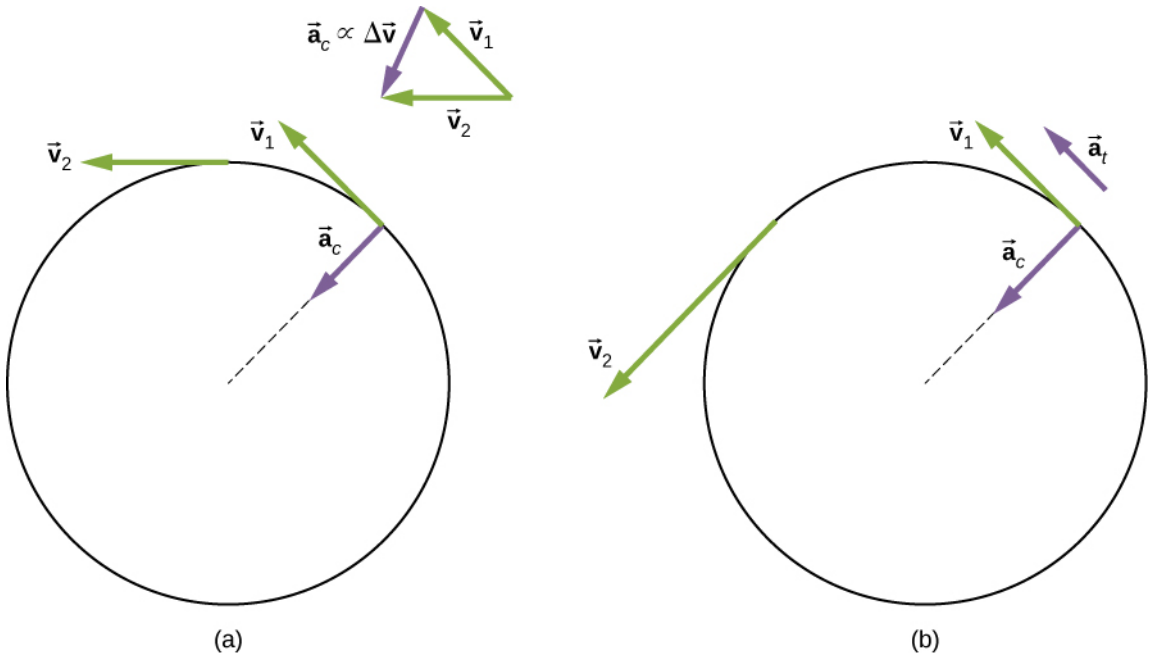


FIGURA 10.14 (a) Movimiento circular uniforme: la aceleración centrípeta a_c tiene su vector hacia el interior del eje de rotación. No hay aceleración tangencial. (b) Movimiento circular no uniforme: la aceleración angular produce una aceleración centrípeta hacia el interior que va cambiando de magnitud, más una aceleración tangencial a_t.

La aceleración centrípeta se debe al cambio en la dirección de la velocidad tangencial, mientras que la aceleración tangencial se debe a cualquier cambio en la magnitud de la velocidad tangencial. Los vectores de aceleración tangencial y centrípeta $\vec{\mathbf{a}}_t$ y $\vec{\mathbf{a}}_c$ son siempre perpendiculares entre sí, como se aprecia en la Figura 10.14. Para completar esta descripción, podemos asignar un vector de **aceleración lineal total** a un punto de un cuerpo rígido en rotación o a una partícula que ejecuta un movimiento circular a un radio r desde un eje fijo. El vector de aceleración lineal total $\vec{\mathbf{a}}$ es la suma vectorial de las aceleraciones centrípeta y tangencial,

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_c + \vec{\mathbf{a}}_t. \qquad 10.15$$

El vector de aceleración lineal total en el caso del movimiento circular no uniforme apunta a un ángulo entre los vectores de aceleración centrípeta y tangencial, como se muestra en la Figura 10.15. Dado que $\vec{\mathbf{a}}_c \perp \vec{\mathbf{a}}_t$, la magnitud de la aceleración lineal total es

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}.$$

Observe que, si la aceleración angular es cero, la aceleración lineal total es igual a la aceleración centrípeta.

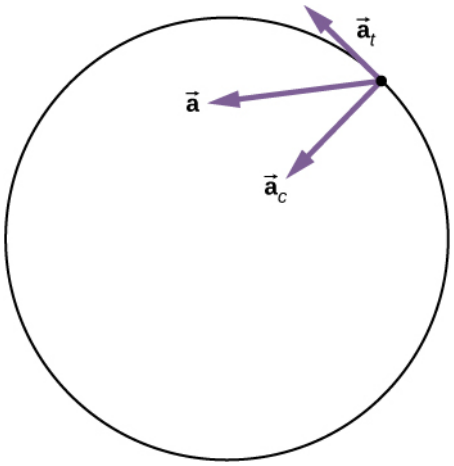


FIGURA 10.15 Una partícula ejecuta un movimiento circular y tiene una aceleración angular. La aceleración lineal total de la partícula es la suma vectorial de los vectores de aceleración centrípeta y de aceleración tangencial. El vector de aceleración lineal total forma un ángulo entre la aceleración centrípeta y la tangencial.

Relaciones entre el movimiento rotacional y traslacional

Podemos observar dos relaciones entre el movimiento rotacional y el traslacional.

1. En general, las ecuaciones cinemáticas lineales tienen sus contrapartes rotacionales. La Tabla 10.2 enumera las cuatro ecuaciones cinemáticas lineales y su contraparte rotacional. Los dos conjuntos de ecuaciones se parecen entre sí, pero describen dos situaciones físicas diferentes, es decir, la rotación y la traslación.

Rotacional	Traslacional
$\theta_f = \theta_0 + \bar{\omega}t$	$x = x_0 + \bar{v}t$
$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$	$v_f = v_0 + at$
$\theta_f = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Delta\theta)$	$v_f^2 = v_0^2 + 2a(\Delta x)$

TABLA 10.2 Ecuaciones cinemáticas rotacionales y traslacionales

2. La segunda correspondencia tiene que ver con la relación de las variables lineales y rotacionales en el caso especial del movimiento circular. Esto se muestra en la Tabla 10.3, donde en la tercera columna, hemos enumerado la ecuación de conexión que relaciona la variable lineal con la variable rotacional. Las variables rotacionales de velocidad angular y aceleración tienen subíndices que indican su definición en el movimiento circular.

Rotacional	Traslacional	Relación (r = radio)
θ	s	$\theta = \frac{s}{r}$
ω	v_t	$\omega = \frac{v_t}{r}$
α	a_t	$\alpha = \frac{a_t}{r}$

Rotacional	Traslacional	Relación (r = radio)
	a_c	$a_c = \frac{v_t^2}{r}$

TABLA 10.3 Cantidades rotacionales y traslacionales: movimiento circular

EJEMPLO 10.7

Aceleración lineal de una centrífuga

Una centrífuga tiene un radio de 20 cm y acelera desde una tasa de rotación máxima de 10.000 rpm hasta el reposo en 30 segundos bajo una aceleración angular constante. Rota en el sentido contrario de las agujas del reloj. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración total de un punto en la punta de la centrífuga en $t = 29{,}0$s? ¿Cuál es la dirección del vector de aceleración total?

Estrategia

Con la información dada, podemos calcular la aceleración angular, lo que nos permitirá calcular la aceleración tangencial. Hallaremos la aceleración centrípeta en $t = 0$ al calcular la rapidez tangencial en este momento. Con las magnitudes de las aceleraciones, podemos calcular la aceleración lineal total. A partir de la descripción de la rotación en el problema, podemos hacer un esquema de la dirección del vector de aceleración total.

Solución

La aceleración angular es

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - (1{,}0 \times 10^4)2\pi/60{,}0\text{ s(rad/s)}}{30{,}0\text{ s}} = -34{,}9\text{ rad/s}^2.$$

Por lo tanto, la aceleración tangencial es

$$a_t = r\alpha = 0{,}2\text{ m}(-34{,}9\text{ rad/s}^2) = -7{,}0\text{ m/s}^2.$$

La velocidad angular en $t = 29{,}0$ s es

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t = 1{,}0 \times 10^4\left(\tfrac{2\pi}{60{,}0\text{ s}}\right) + \left(-34{,}9\text{ rad/s}^2\right)(29{,}0\text{ s}) \\ &= 1047{,}2\text{ rad/s} - 1012{,}71 = 35{,}1\text{ rad/s}.\end{aligned}$$

Así, la rapidez tangencial en $t = 29{,}0$ s es

$$v_t = r\omega = 0{,}2\text{ m}(35{,}1\text{ rad/s}) = 7{,}0\text{ m/s}.$$

Ahora podemos calcular la aceleración centrípeta en $t = 29{,}0$ s:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(7{,}0\text{ m/s})^2}{0{,}2\text{ m}} = 245{,}0\text{ m/s}^2.$$

Ya que los dos vectores de aceleración son perpendiculares entre sí, la magnitud de la aceleración lineal total es

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(245{,}0)^2 + (-7{,}0)^2} = 245{,}1\text{ m/s}^2.$$

Dado que la centrífuga tiene una aceleración angular negativa, desacelera. El vector de aceleración total es el que se muestra en la Figura 10.16. El ángulo con respecto al vector de aceleración centrípeta es

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-7{,}0}{245{,}0} = -1{,}6°.$$

El signo negativo significa que el vector de aceleración total está inclinado en el sentido de las agujas del reloj.

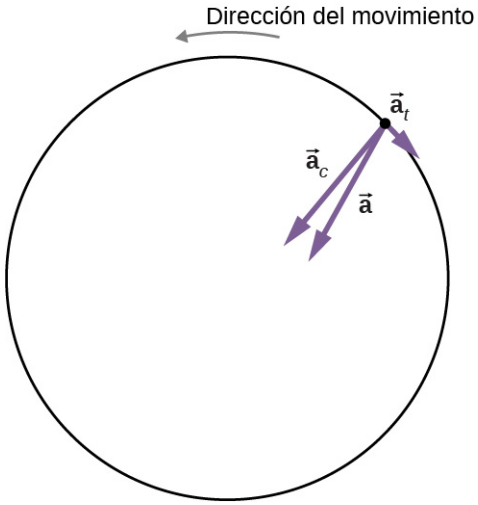


FIGURA 10.16 Los vectores de aceleración centrípeta, tangencial y total. La centrífuga desacelera, por lo que la aceleración tangencial es en el sentido de las agujas del reloj, opuesto al sentido de la rotación (en el sentido contrario de las agujas del reloj).

Importancia

En la Figura 10.16, vemos que el vector de aceleración tangencial es opuesto a la dirección de rotación. La magnitud de la aceleración tangencial es mucho menor que la aceleración centrípeta, por lo que el vector de aceleración lineal total formará un ángulo muy pequeño con respecto al vector de aceleración centrípeta.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.3

Un niño salta en un carrusel de 5 m de radio que está en reposo. Comienza a acelerar a una tasa constante hasta alcanzar una velocidad angular de 5 rad/s en 20 segundos. ¿Cuál es la distancia recorrida por el niño?

INTERACTIVO

Dé un vistazo a esta simulación de PhET (https://openstax.org/l/21rotatingdisk) para cambiar los parámetros de un disco en rotación (el ángulo inicial, la velocidad angular y la aceleración angular), y colocar insectos a diferentes distancias radiales del eje. Luego, la simulación le permite explorar la relación entre el movimiento circular y la posición *xy*, la velocidad y la aceleración de los insectos mediante vectores o gráficos.

10.4 Momento de inercia y energía cinética rotacional

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir las diferencias entre la energía cinética rotacional y traslacional.
- Definir el concepto físico de momento de inercia en términos de la distribución de la masa desde el eje rotacional.
- Explicar cómo el momento de inercia de los cuerpos rígidos afecta su energía cinética rotacional.
- Utilizar la conservación de la energía mecánica para analizar sistemas que sufren tanto rotación como traslación.
- Calcular la velocidad angular de un sistema en rotación cuando hay pérdidas de energía debido a fuerzas no conservativas.

Hasta ahora en este capítulo, hemos estado trabajando con la cinemática rotacional: la descripción del movimiento de un cuerpo rígido en rotación con un eje fijo de rotación. En esta sección, definimos dos nuevas

magnitudes que sirven para analizar las propiedades de los objetos en rotación: el momento de inercia y la energía cinética rotacional. Con estas propiedades definidas, tendremos dos herramientas importantes que necesitamos para analizar la dinámica rotacional.

Energía cinética rotacional

Cualquier objeto en movimiento tiene energía cinética. Sabemos cómo calcular esto para un cuerpo que experimenta un movimiento traslacional, pero ¿qué pasa con un cuerpo rígido que experimenta una rotación? Esto puede parecer complicado porque cada punto del cuerpo rígido tiene una velocidad diferente. Sin embargo, podemos utilizar la velocidad angular, que es la misma para todo el cuerpo rígido, a objeto de expresar la energía cinética de un objeto en rotación. La Figura 10.17 muestra un ejemplo de un cuerpo en rotación muy energético: una piedra eléctrica de amolar, impulsada por un motor. Saltan chispas y se generan ruidos y vibraciones mientras la piedra de amolar hace su trabajo. Este sistema tiene una energía considerable, parte de ella en forma de calor, luz, sonido y vibración. Sin embargo, la mayor parte de esta energía está en forma de **energía cinética rotacional**.

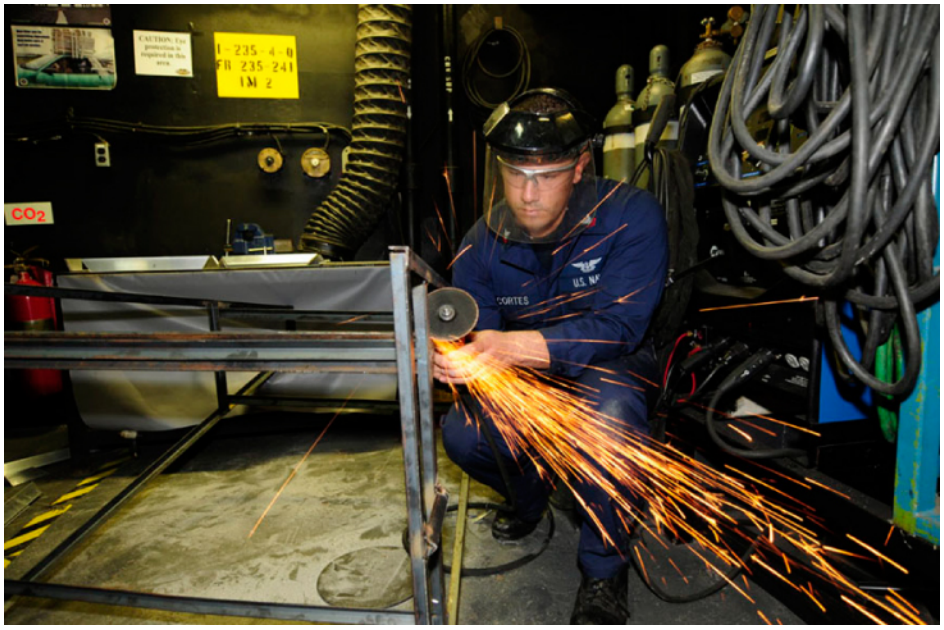


FIGURA 10.17 La energía cinética rotacional de la piedra de amolar se convierte en calor, luz, sonido y vibración (créditos: Zachary David Bell, Marina de los EE. UU.).

La energía en el movimiento rotacional no es ninguna nueva forma de energía, sino que es la energía asociada al movimiento rotacional, igual que la energía cinética en el movimiento traslacional. Sin embargo, ya que la energía cinética viene dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, y la velocidad es una cantidad que es diferente para cada punto de un cuerpo que rota en torno a un eje, tiene sentido encontrar una manera de escribir la energía cinética en términos de la variable ω, que es la misma para todos los puntos de un cuerpo rígido en rotación. Para una sola partícula que rota en torno a un eje fijo, esto es sencillo de calcular. Podemos relacionar la velocidad angular con la magnitud de la velocidad de traslación mediante la relación $v_t = \omega r$, donde r es la distancia de la partícula al eje de rotación y v_t es su rapidez tangencial. Al sustituir en la ecuación de la energía cinética, hallamos

$$K = \frac{1}{2}mv_t^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2.$$

En el caso de un cuerpo rígido en rotación, podemos dividir cualquier cuerpo en un gran número de masas más pequeñas, cada una con una masa m_j y una distancia al eje de rotación r_j, de manera que la masa total del cuerpo es igual a la suma de todas y cada una de las masas $M = \sum_j m_j$. Cada masa menor tiene una rapidez tangencial v_j, donde por el momento hemos suprimido el subíndice t. La energía cinética total del cuerpo

rígido en rotación es

$$K = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \sum_j \frac{1}{2} m_j (r_j \omega_j)^2$$

y dado que $\omega_j = \omega$ para todas las masas,

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j r_j^2\right)\omega^2. \qquad 10.16$$

Las unidades de la Ecuación 10.16 son julios (J). La ecuación en esta forma es completa, aunque poco manejable; tenemos que encontrar una manera de generalizarla.

Momento de inercia

Si comparamos la Ecuación 10.16 con la forma en que escribimos la energía cinética en Trabajo y energía cinética, $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, esto sugiere que tenemos una nueva variable rotacional que añadir a la lista de nuestras relaciones entre variables rotacionales y traslacionales. La cantidad $\sum_j m_j r_j^2$ es la contraparte de la masa en la ecuación de la energía cinética rotacional. Este es un término nuevo e importante para el movimiento rotacional. Esta cantidad recibe el nombre de **momento de inercia** I, con unidades de $\text{kg} \cdot \text{m}^2$:

$$I = \sum_j m_j r_j^2. \qquad 10.17$$

Por ahora, dejamos la expresión en forma de suma, representando el momento de inercia de un sistema de partículas puntuales que rotan en torno a un eje fijo. Observamos que el momento de inercia de una partícula puntual en torno a un eje fijo es simplemente mr^2, siendo r la distancia de la partícula puntual al eje de rotación. En la siguiente sección, exploramos la forma integral de esta ecuación, que puede utilizarse para calcular el momento de inercia de algunos cuerpos rígidos de forma regular.

El momento de inercia es la medida cuantitativa de la inercia rotacional, al igual que en el movimiento traslacional, y la masa es la medida cuantitativa de la inercia lineal, es decir, cuanto más masivo sea un objeto, más inercia tiene y mayor será su resistencia al cambio de velocidad lineal. Del mismo modo, cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo rígido o de un sistema de partículas, mayor será su resistencia al cambio de velocidad angular en torno a un eje fijo de rotación. Es interesante ver cómo varía el momento de inercia con r, la distancia al eje de rotación de las partículas de masa en la Ecuación 10.17. Los cuerpos rígidos y los sistemas de partículas con más masa concentrados a mayor distancia del eje de rotación tienen mayores momentos de inercia que los cuerpos y sistemas de la misma masa, pero concentrados cerca del eje de rotación. De esta manera, podemos ver que un cilindro hueco tiene más inercia rotacional que un cilindro sólido de la misma masa cuando rota en torno a un eje que pasa por el centro. Sustituyendo la Ecuación 10.17 en la Ecuación 10.16, la expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación se convierte en

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2. \qquad 10.18$$

De esta ecuación se desprende que la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación es directamente proporcional al momento de inercia y al cuadrado de la velocidad angular. Esto se aprovecha en los dispositivos de almacenamiento de energía de los volantes de inercia, que están diseñados para almacenar grandes cantidades de energía cinética rotacional. Muchos fabricantes de automóviles están probando ahora dispositivos de almacenamiento de energía en volantes de inercia en sus automóviles, como el volante de inercia, o sistema de recuperación de energía cinética, que se muestra en la Figura 10.18.



FIGURA 10.18 Volante de inercia del sistema de recuperación de energía cinética (Kinetic Energy Recovery System, KERS) utilizado en los autos (créditos: "cmonville"/Flickr).

Las magnitudes rotacional y traslacional para la energía cinética y la inercia se resumen en la Tabla 10.4. La columna de relación no se incluye porque no existe ninguna constante por la que podamos multiplicar la cantidad rotacional para obtener la cantidad traslacional, como se puede hacer con las variables en la Tabla 10.3.

Rotacional	Traslacional
$I = \sum_j m_j r_j^2$	m
$K = \frac{1}{2} I\omega^2$	$K = \frac{1}{2} mv^2$

TABLA 10.4 Energías cinéticas rotacionales y traslacionales e inercia

EJEMPLO 10.8

Momento de inercia de un sistema de partículas

Seis pequeñas arandelas están separadas por 10 cm en una varilla de masa insignificante y 0,5 m de longitud. La masa de cada arandela es de 20 g. La varilla rota en torno a un eje situado a 25 cm, como se muestra en la Figura 10.19. (a) ¿Cuál es el momento de inercia del sistema? (b) Si se quitan las dos arandelas más cercanas al eje, ¿cuál es el momento de inercia de las cuatro arandelas restantes? (c) Si el sistema con seis arandelas gira a 5 rev/s, ¿cuál es su energía cinética rotacional?

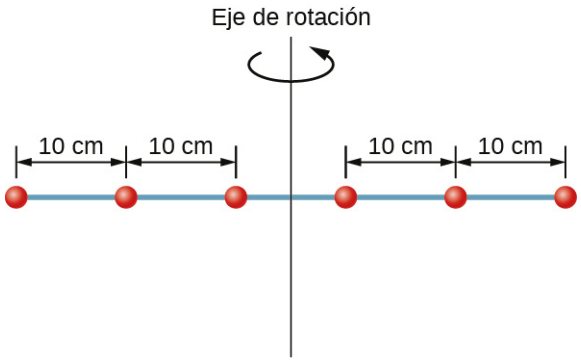


FIGURA 10.19 Seis arandelas están separadas por 10 cm en una varilla de masa despreciable y rotan en torno a un eje vertical.

Estrategia

a. Utilizamos la definición de momento de inercia para un sistema de partículas y realizamos la suma para evaluar esta cantidad. Las masas son todas iguales, así que podemos poner esa cantidad delante del símbolo de la suma.
b. Hacemos un cálculo similar.
c. Insertamos el resultado de (a) en la expresión de la energía cinética rotacional.

Solución

a. $I = \sum_j m_j r_j^2 = (0{,}02\,\text{kg})(2 \times (0{,}25\,\text{m})^2 + 2 \times (0{,}15\,\text{m})^2 + 2 \times (0{,}05\,\text{m})^2) = 0{,}0035\,\text{kg} \cdot \text{m}^2.$

b. $I = \sum_j m_j r_j^2 = (0{,}02\,\text{kg})(2 \times (0{,}25\,\text{m})^2 + 2 \times (0{,}15\,\text{m})^2) = 0{,}0034\,\text{kg} \cdot \text{m}^2.$

c. $K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(0{,}0035\,\text{kg} \cdot \text{m}^2)(5{,}0 \times 2\pi\,\text{rad/s})^2 = 1{,}73\,\text{J}.$

Importancia

Podemos ver los aportes individuales al momento de inercia. Las masas cercanas al eje de rotación tienen un aporte muy pequeño. Cuando las quitamos, tuvo un efecto muy pequeño en el momento de inercia.

En la siguiente sección, generalizamos la ecuación de suma para partículas puntuales y desarrollamos un método para calcular los momentos de inercia de los cuerpos rígidos. Por ahora, sin embargo, la Figura 10.20 ofrece valores de inercia rotacional para formas de objetos comunes alrededor de ejes específicos.

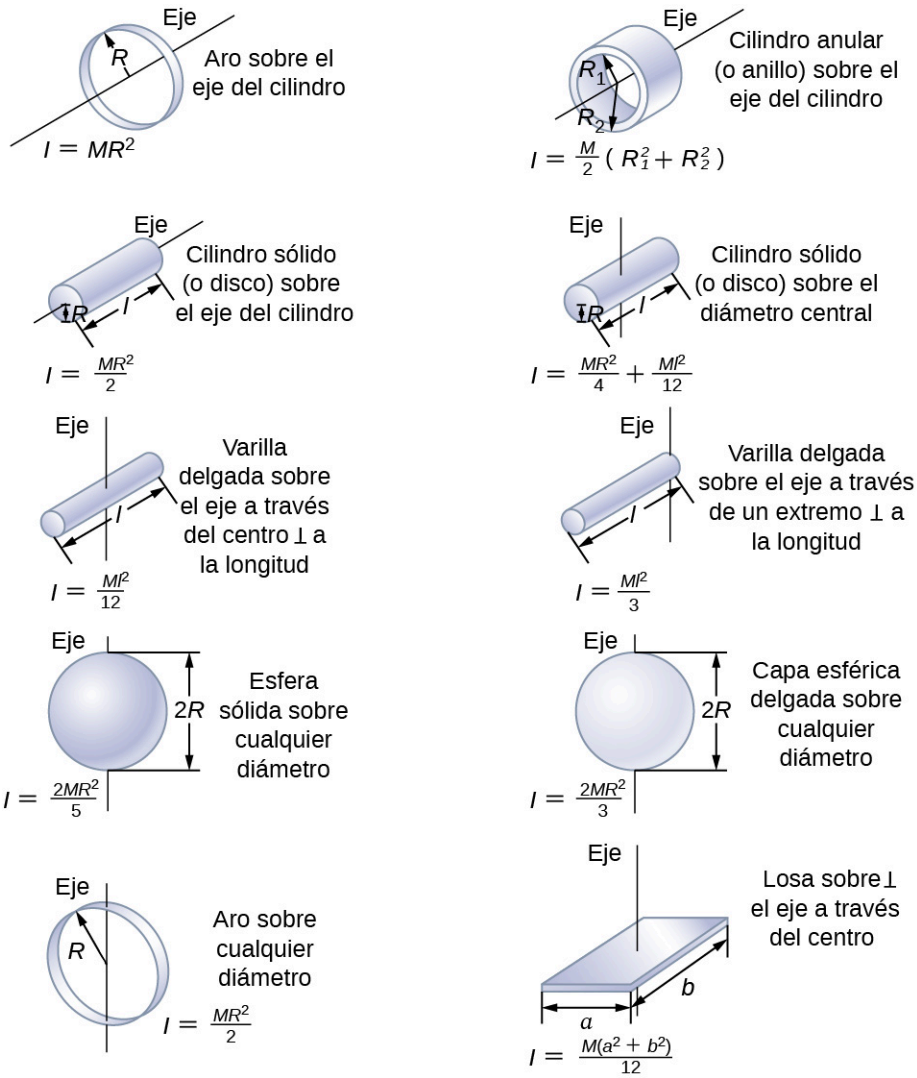


FIGURA 10.20 Valores de inercia rotacional para formas comunes de objetos.

Aplicación de la energía cinética rotacional

Apliquemos ahora las ideas de la energía cinética rotacional y la tabla de momentos de inercia para tener una idea de la energía asociada a algunos objetos en rotación. Los siguientes ejemplos también le harán sentirse cómodo utilizando estas ecuaciones. En primer lugar, veamos una estrategia general de resolución de problemas de energía rotacional.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Energía rotacional

1. Determine que la energía o el trabajo está implicado en la rotación.
2. Determine el sistema de interés. Un esquema suele ayudar.
3. Analice la situación para determinar los tipos de trabajo y energía implicados.
4. Si no hay pérdidas de energía debido a la fricción y otras fuerzas no conservativas, la energía mecánica se conserva, es decir, $K_\text{i} + U_\text{i} = K_\text{f} + U_\text{f}$.
5. Si hay fuerzas no conservativas, la energía mecánica no se conserva y otras formas de energía, como el calor y la luz, pueden entrar o salir del sistema. Determine cuáles son y calcúlelas según sea necesario.
6. Elimine los términos siempre que sea posible para simplificar el álgebra.
7. Evalúe la solución numérica para ver si tiene sentido en la situación física presentada en el enunciado del

problema.

EJEMPLO 10.9

Calcular la energía de los helicópteros

Un pequeño helicóptero de rescate típico tiene cuatro aspas: cada una mide 4,00 m de largo y tiene una masa de 50,0 kg (Figura 10.21). Las aspas pueden tomarse como varillas delgadas que rotan en torno a un extremo de un eje perpendicular a su longitud. El helicóptero tiene una masa total cargada de 1.000 kg. (a) Calcule la energía cinética rotacional en las aspas cuando giran a 300 rpm. (b) Calcule la energía cinética traslacional del helicóptero cuando vuela a 20,0 m/s, y compárela con la energía rotacional en las aspas.

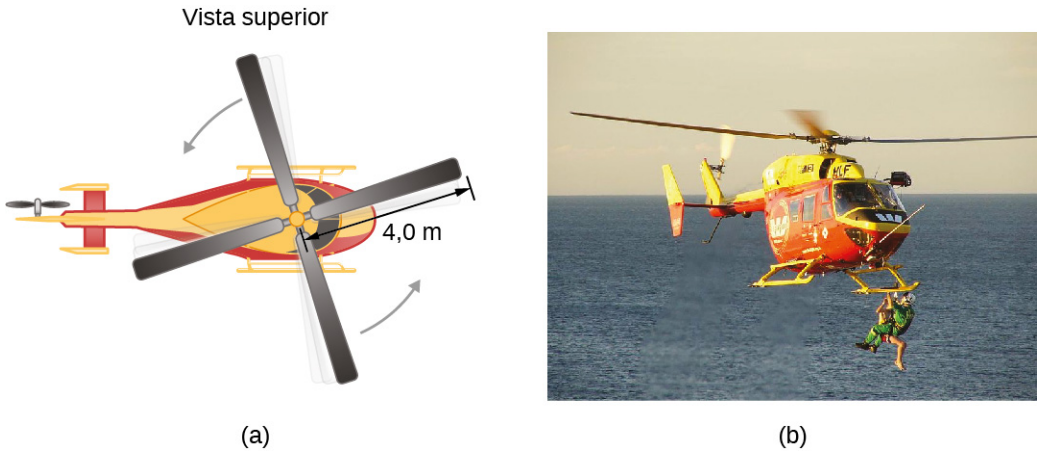


FIGURA 10.21 (a) Esquema de un helicóptero de cuatro aspas. (b) Una operación de rescate en el agua con un helicóptero del Servicio de Helicópteros de Rescate de Auckland Westpac (créditos b: modificación del trabajo de "111 Emergency"/Flickr).

Estrategia

Las energías cinéticas rotacional y traslacional pueden calcularse a partir de sus definiciones. El enunciado del problema arroja todas las constantes necesarias para evaluar las expresiones de las energías cinéticas rotacional y traslacional.

Solución

a. La energía cinética rotacional es

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Debemos convertir la velocidad angular a radianes por segundo y calcular el momento de inercia antes de poder encontrar K. La velocidad angular ω es

$$\omega = \frac{300 \text{ rev}}{1{,}00 \text{ min}} \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \frac{1{,}00 \text{ min}}{60{,}0 \text{ s}} = 31{,}4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

El momento de inercia de un aspa es el de una varilla delgada que rota en torno a su extremo, que figura en la Figura 10.20. El I total es cuatro veces este momento de inercia porque hay cuatro aspas. Así,

$$I = 4\frac{Ml^2}{3} = 4 \times \frac{(50{,}0 \text{ kg})(4{,}00 \text{ m})^2}{3} = 1067{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Al introducir ω y I en la expresión de la energía cinética rotacional da

$$K = 0{,}5(1.067 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(31{,}4 \text{ rad/s})^2 = 5{,}26 \times 10^5 \text{ J}.$$

b. Al introducir los valores dados en la ecuación de la energía cinética traslacional, obtenemos

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = (0{,}5)(1.000{,}0 \text{ kg})(20{,}0 \text{ m/s})^2 = 2{,}00 \times 10^5 \text{ J}.$$

Para comparar la energía cinética, tomamos el cociente entre la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional. Este cociente es

$$\frac{2{,}00 \times 10^5 \text{ J}}{5{,}26 \times 10^5 \text{ J}} = 0{,}380.$$

Importancia

El cociente entre la energía traslacional y la energía cinética rotacional es solo de 0,380. Este cociente nos indica que la mayor parte de la energía cinética del helicóptero está en sus aspas giratorias.

EJEMPLO 10.10

Energía en un búmeran

Una persona lanza un bumerán al aire, a una velocidad de 30,0 m/s en un ángulo de 40,0° con respecto a la horizontal (Figura 10.22). Tiene una masa de 1,0 kg y gira a 10,0 rev/s. El momento de inercia del bumerán viene dado por $I = \frac{1}{12}mL^2$ donde $L = 0{,}7$ m. (a) ¿Cuál es la energía total del bumerán cuando sale de la mano? (b) ¿A qué altura llega el bumerán desde la elevación de la mano, descartando la resistencia del aire?

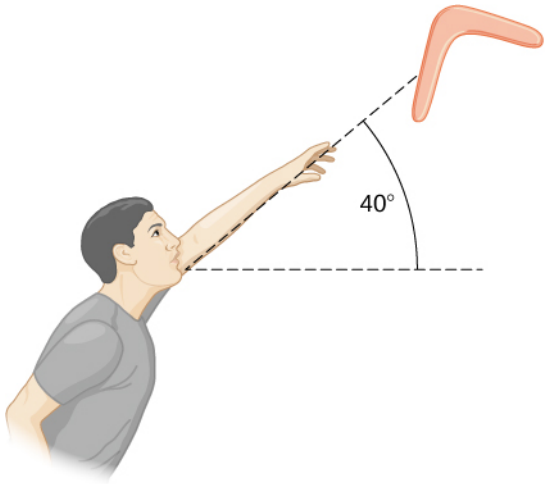


FIGURA 10.22 Un bumerán se lanza al aire en un ángulo inicial de 40°.

Estrategia

Utilizamos las definiciones de energía cinética rotacional y lineal para hallar la energía total del sistema. El problema señala que hay que descartar la resistencia del aire, por lo que no hay que preocuparse por la pérdida de energía. En la parte (b), utilizamos la conservación de la energía mecánica para hallar la altura máxima del bumerán.

Solución

a. Momento de inercia: $I = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}(1{,}0\text{ kg})(0{,}7\text{m})^2 = 0{,}041\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
Velocidad angular: $\omega = (10{,}0\text{ rev/s})(2\pi) = 62{,}83\text{ rad/s}$.
Por lo tanto, la energía cinética rotacional es

$$K_\text{R} = \frac{1}{2}(0{,}041\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(62{,}83\text{ rad/s})^2 = 80{,}93\text{ J}.$$

La energía cinética traslacional es

$$K_\text{T} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1{,}0\text{ kg})(30{,}0\text{ m/s})^2 = 450{,}0\text{ J}.$$

Por lo tanto, la energía total del bumerán es

$$K_\text{Total} = K_\text{R} + K_\text{T} = 80{,}93 + 450{,}0 = 530{,}93\text{ J}.$$

b. Utilizamos la conservación de la energía mecánica. Dado que el bumerán se lanza en ángulo, necesitamos escribir la energía total del sistema en términos de su energía cinética lineal al utilizar la velocidad en las direcciones de la x y la y. La energía total cuando el bumerán sale de la mano es

$$E_{\text{Antes}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

La energía total a la altura máxima es

$$E_{\text{Final}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh.$$

Por conservación de la energía mecánica, $E_{\text{Antes}} = E_{\text{Final}}$ por lo que tenemos, después de cancelar términos similares,

$$\frac{1}{2}mv_y^2 = mgh.$$

Dado que $v_y = 30{,}0\ \text{m/s}(\text{sen}\ 40°) = 19{,}28\ \text{m/s}$, hallamos

$$h = \frac{(19{,}28\ \text{m/s})^2}{2(9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 18{,}97\ \text{m}.$$

Importancia

En la parte (b), la solución demuestra cómo la conservación de energía es un método alternativo para resolver un problema que normalmente se resolvería utilizando la cinemática. En ausencia de resistencia del aire, la energía cinética rotacional no era un factor en la solución para la altura máxima.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.4

La hélice de un submarino nuclear tiene un momento de inercia de $800{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si la hélice sumergida tiene una tasa de rotación de 4,0 rev/s cuando se corta el motor, ¿cuál es la tasa de rotación de la hélice después de 5,0 s cuando la resistencia del agua ha quitado 50.000 J al sistema?

10.5 Calcular momentos de inercia

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Calcular el momento de inercia de cuerpos rígidos y uniformes.
- Aplicar el teorema de los ejes paralelos para hallar el momento de inercia sobre cualquier eje paralelo a uno ya conocido.
- Calcular el momento de inercia de los objetos compuestos.

En la sección anterior definimos el momento de inercia, pero no indicamos cómo calcularlo. En esta sección, mostramos cómo calcular el momento de inercia para varios tipos de objetos estándar, así como cómo utilizar los momentos de inercia conocidos para hallar el momento de inercia en un eje desplazado o en un objeto compuesto. Esta sección es bastante útil para ver cómo aplicar una ecuación general a objetos complejos (una habilidad que es fundamental en los cursos de física e ingeniería más avanzados).

Momento de inercia

Definimos el momento de inercia I de un objeto como $I = \sum_i m_i r_i^2$ para todas las masas puntuales que componen el objeto. Como r es la distancia al eje de rotación de cada pieza de masa que compone el objeto, el momento de inercia de cualquier objeto depende del eje elegido. Para ver esto, tomemos un ejemplo sencillo de dos masas en el extremo de una varilla sin masa (masa despreciable) (Figura 10.23) y calculemos el momento de inercia en torno a dos ejes diferentes. En este caso, la suma sobre las masas es sencilla porque las dos masas del extremo de la barra se pueden tomar como masas puntuales y, por tanto, la suma solo tiene dos términos.

En el caso con el eje en el centro de la barra, cada una de las dos masas m está a una distancia R del eje, dando un momento de inercia de

$$I_1 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

En el caso de que el eje esté en el extremo de la barra, pasando por una de las masas, el momento de inercia es

$$I_2 = m(0)^2 + m(2R)^2 = 4mR^2.$$

De este resultado, podemos concluir que es dos veces más difícil hacer rotar la barra en torno al extremo que en torno a su centro.

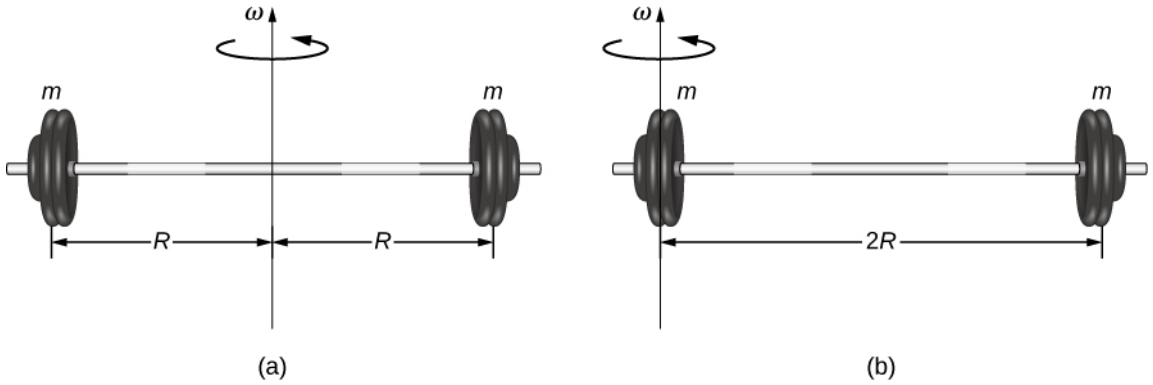


FIGURA 10.23 (a) Una barra con un eje de rotación por su centro; (b) una barra con un eje de rotación por un extremo.

En este ejemplo, teníamos dos masas puntuales y la suma era sencilla de calcular. Sin embargo, para tratar con objetos que no son puntuales, tenemos que pensar cuidadosamente en cada uno de los términos de la ecuación. La ecuación nos pide que sumemos cada "pieza de masa" a una determinada distancia del eje de rotación. Pero, ¿qué significa exactamente cada "pieza de masa"? Recordemos que, en nuestra derivación de esta ecuación, cada pieza de masa tenía la misma magnitud de velocidad, lo que significa que toda la pieza debía tener una única distancia r al eje de rotación. Sin embargo, esto no es posible, a menos que tomemos una pieza infinitesimalmente pequeña de masa dm, como se muestra en la Figura 10.24.

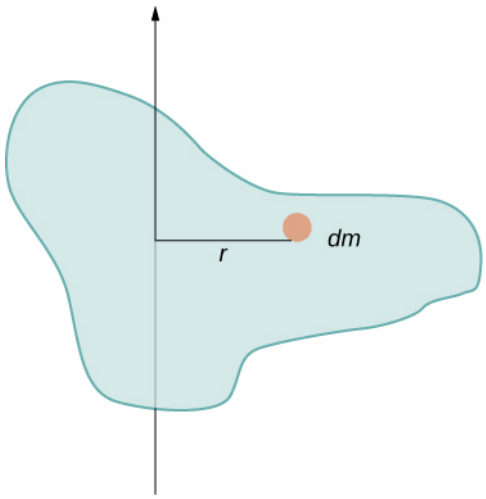


FIGURA 10.24 Utilizar una pieza infinitesimalmente pequeña de masa para calcular la contribución al momento de inercia total.

La necesidad de utilizar una pieza infinitesimalmente pequeña de masa dm sugiere que podemos escribir el momento de inercia al evaluar una integral sobre masas infinitesimales en lugar de hacer otra suma en masas finitas:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \text{ se convierte en } I = \int r^2 dm. \qquad 10.19$$

De hecho, esta es la forma que necesitamos para generalizar la ecuación para formas complejas. Lo mejor es trabajar en detalle con ejemplos específicos para tener una idea de cómo calcular el momento de inercia en formas específicas. En esto se centra la mayor parte del resto de esta sección.

Una varilla delgada y uniforme con un eje por el centro

Considere una varilla delgada uniforme (densidad y forma) de masa M y longitud L como se muestra en la Figura 10.25. Queremos una varilla delgada para poder suponer que el área de la sección transversal de la varilla es pequeña y que la varilla se puede considerar como una cadena de masas a lo largo de una línea recta unidimensional. En este ejemplo, el eje de rotación es perpendicular a la varilla y pasa por el punto medio para simplificar. Nuestra tarea consiste en calcular el momento de inercia en torno a este eje. Orientamos los ejes de manera que el eje de la z sea el eje de rotación y el eje de la x pase por la longitud de la varilla, como se muestra en la figura. Esta es una opción conveniente porque entonces podemos integrar a lo largo del eje de la x.

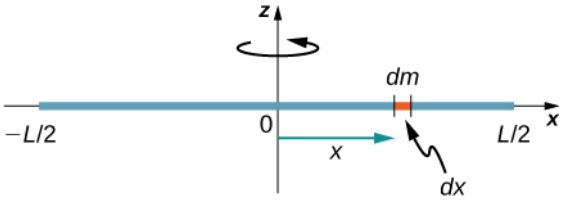


FIGURA 10.25 Cálculo del momento de inercia I para una varilla delgada uniforme en torno a un eje que pasa por el centro de la varilla.

Definimos dm como un pequeño elemento de masa que compone la varilla. La integral del momento de inercia es una integral sobre la distribución de masas. Sin embargo, sabemos cómo integrar sobre el espacio, no sobre la masa. Por lo tanto, tenemos que encontrar una forma de relacionar la masa con las variables espaciales. Para ello, utilizamos la **densidad lineal de masa** λ del objeto, que es la masa por unidad de longitud. Dado que la densidad de masa de este objeto es uniforme, podemos escribir

$$\lambda = \frac{m}{l} \text{ o } m = \lambda l.$$

Si tomamos la diferencial de cada lado de esta ecuación, hallamos

$$dm = d(\lambda l) = \lambda(dl)$$

dado que λ es constante. Hemos elegido orientar la varilla a lo largo del eje de la x por comodidad, y es aquí donde esta elección resulta muy útil. Observe que una pieza de la varilla dl se encuentra completamente a lo largo del eje de la x y tiene una longitud dx; de hecho, $dl = dx$ en esta situación. Por lo tanto, podemos escribir $dm = \lambda(dx)$, lo que nos da una variable de integración que sabemos cómo tratar. La distancia de cada pieza de masa dm al eje viene dada por la variable x, como se muestra en la figura. Al unir todo esto, obtenemos

$$I = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx.$$

El último paso es tener cuidado con nuestros límites de integración. La varilla se extiende desde $x = -L/2$ a $x = L/2$, ya que el eje está en el centro de la varilla en $x = 0$. Esto nos da

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \lambda\left(\tfrac{1}{3}\right)\left[\left(\tfrac{L}{2}\right)^3 - \left(\tfrac{-L}{2}\right)^3\right]$$
$$= \lambda\left(\tfrac{1}{3}\right)\tfrac{L^3}{8}(2) = \frac{M}{L}\left(\tfrac{1}{3}\right)\tfrac{L^3}{8}(2) = \tfrac{1}{12}ML^2.$$

A continuación, calculamos el momento de inercia para la misma varilla delgada uniforme, pero con otra

elección de eje para poder comparar los resultados. Es de esperar que el momento de inercia sea menor en torno a un eje que pasa por el centro de masa que en el eje de los extremos, tal y como ocurría en el ejemplo de la barra al principio de esta sección. Esto ocurre porque la masa se distribuye más lejos del eje de rotación.

Una varilla delgada y uniforme con un eje en el extremo

Consideremos ahora la misma varilla delgada y uniforme de masa M y longitud L, pero esta vez trasladamos el eje de rotación al extremo de la varilla. Queremos hallar el momento de inercia en torno a este nuevo eje (Figura 10.26). La cantidad dm se define de nuevo como un pequeño elemento de masa que compone la varilla. Al igual que antes, obtenemos

$$I = \int r^2\, dm = \int x^2\, dm = \int x^2 \lambda dx.$$

Sin embargo, esta vez tenemos otros límites de integración. La varilla se extiende desde $x = 0$ a $x = L$, ya que el eje está en el extremo de la varilla en $x = 0$. Por lo tanto, hallamos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \lambda \left(\tfrac{1}{3}\right)[(L)^3 - (0)^3] \\ &= \lambda \left(\tfrac{1}{3}\right) L^3 = \frac{M}{L}\left(\tfrac{1}{3}\right) L^3 = \tfrac{1}{3} M L^2. \end{aligned}$$

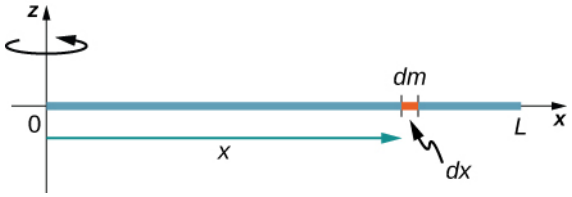


FIGURA 10.26 Cálculo del momento de inercia I para una varilla delgada y uniforme en torno a un eje que pasa por el extremo de la varilla.

Observe que la inercia rotacional de la varilla en torno a su extremo es mayor que la inercia rotacional en torno a su centro (en consonancia con el ejemplo de la barra) por un factor de cuatro.

El teorema del eje paralelo

La similitud entre el proceso de hallar el momento de inercia de una varilla en torno a un eje que pasa por su centro y en torno a un eje que pasa por su extremo es sorprendente, y sugiere que podría haber un método más sencillo para determinar el momento de inercia de una varilla en torno a cualquier eje paralelo al eje que pasa por el centro de masa. Dicho eje se denomina **eje paralelo**. Existe un teorema para esto, llamado **teorema del eje paralelo**, que enunciamos aquí, pero no derivamos en este texto.

Teorema del eje paralelo

Supongamos que m sea la masa de un objeto y d sea la distancia desde un eje que pasa por el centro de masa del objeto hasta un nuevo eje. Entonces tenemos

$$I_{\text{eje paralelo}} = I_{\text{centro de masa}} + md^2. \qquad \textbf{10.20}$$

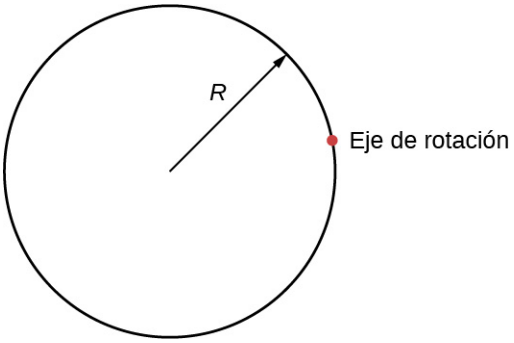
Apliquemos esto a los ejemplos de varillas resueltos anteriormente:

$$I_{\text{extremo}} = I_{\text{centro de masa}} + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)mL^2 = \frac{1}{3}mL^2.$$

Este resultado concuerda con nuestro cálculo más extenso de arriba. Esta es una ecuación útil que aplicamos en algunos de los ejemplos y problemas.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.5

¿Cuál es el momento de inercia de un cilindro de radio R y masa m en torno a un eje que pasa por un punto de la superficie, como se muestra a continuación?



Un disco delgado y uniforme en torno a un eje que pasa por el centro

Integrar para hallar el momento de inercia de un objeto bidimensional es un poco más complicado, pero una forma se hace comúnmente en este nivel de estudio: un disco delgado y uniforme en torno a un eje que pasa por su centro (Figura 10.27).

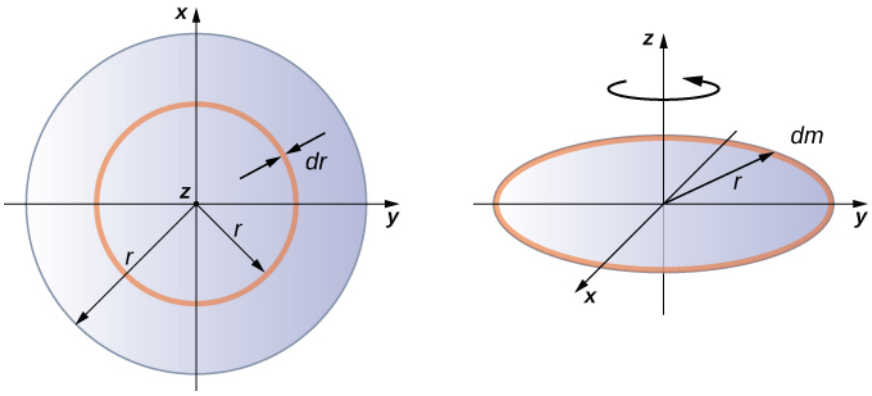


FIGURA 10.27 Calcular el momento de inercia de un disco delgado en torno a un eje que pasa por su centro.

Dado que el disco es delgado, podemos tomar la masa como distribuida enteramente en el plano xy. Comenzamos de nuevo con la relación para la **densidad de masa superficial**, que es la masa por unidad de área de superficie. Al ser uniforme, la densidad de masa superficial σ es constante:

$$\sigma = \frac{m}{A} \quad \text{o} \quad \sigma A = m, \text{ entonces } dm = \sigma(dA).$$

Ahora utilizamos una simplificación para el área. Se puede pensar que el área está formada por una serie de anillos delgados, donde cada anillo es un incremento de masa dm de radio r equidistante del eje, como se muestra en la parte (b) de la figura. El área infinitesimal de cada anillo dA viene dada, por lo tanto, por la longitud de cada anillo ($2\pi r$) por la anchura infinitesimal de cada anillo dr:

$$A = \pi r^2, dA = d(\pi r^2) = \pi dr^2 = 2\pi r dr.$$

El área completa del disco se compone entonces de la suma de todos los anillos delgados con un rango de radios de 0 a R. Este rango de radios se convierte entonces en nuestros límites de integración para dr, es decir, integramos desde $r = 0$ a $r = R$. Si juntamos todo esto, tenemos

$$I = \int_0^R r^2 \sigma(2\pi r)dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = 2\pi\sigma\left(\frac{R^4}{4} - 0\right)$$
$$= 2\pi\frac{m}{A}\left(\frac{R^4}{4}\right) = 2\pi\frac{m}{\pi R^2}\left(\frac{R^4}{4}\right) = \frac{1}{2}mR^2.$$

Observe que esto coincide con el valor dado en la Figura 10.20.

Cálculo del momento de inercia de los objetos compuestos

Consideremos ahora un objeto compuesto como el que aparece en la Figura 10.28, que representa un disco delgado en el extremo de una varilla delgada. Esto no se puede integrar fácilmente para hallar el momento de inercia porque no es un objeto uniforme. Sin embargo, si volvemos a la definición inicial del momento de inercia como una suma, podemos razonar que el momento de inercia de un objeto compuesto se halla a partir de la suma de cada parte del objeto:

$$I_{\text{total}} = \sum_i I_i. \qquad 10.21$$

Es importante señalar que los momentos de inercia de los objetos en la Ecuación 10.21 están *en torno a un eje común*. En el caso de este objeto, se trataría de una varilla de longitud L que rota en torno a su extremo, y un disco delgado de radio R que rota en torno a un eje desplazado del centro en una distancia $L + R$, donde R es el radio del disco. Definamos la masa de la varilla como m_{r} y la masa del disco como m_{d}.

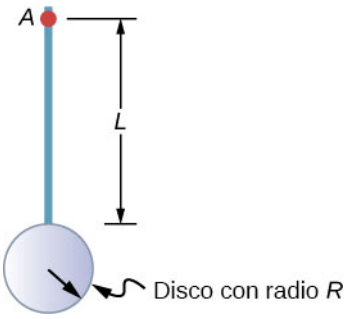


FIGURA 10.28 Objeto compuesto que consiste de un disco en el extremo de una varilla. El eje de rotación está situado en *A*.

El momento de inercia de la varilla es simplemente $\frac{1}{3}m_{\text{r}}L^2$, pero tenemos que utilizar el teorema del eje paralelo para hallar el momento de inercia del disco en torno al eje mostrado. El momento de inercia del disco en torno a su centro es $\frac{1}{2}m_{\text{d}}R^2$ y aplicamos el teorema del eje paralelo $I_{\text{eje paralelo}} = I_{\text{centro de masa}} + md^2$ para hallar

$$I_{\text{eje paralelo}} = \frac{1}{2}m_{\text{d}}R^2 + m_{\text{d}}(L + R)^2.$$

Si sumamos el momento de inercia de la varilla más el momento de inercia del disco con el eje de rotación desplazado, hallamos que el momento de inercia del objeto compuesto es

$$I_{\text{total}} = \frac{1}{3}m_{\text{r}}L^2 + \frac{1}{2}m_{\text{d}}R^2 + m_{\text{d}}(L + R)^2.$$

Aplicar los cálculos del momento de inercia para resolver problemas

Examinemos ahora algunas aplicaciones prácticas del cálculo del momento de inercia.

EJEMPLO 10.11

Persona en un carrusel

Un niño de 25 kg se encuentra a una distancia $r = 1{,}0$ m del eje de un carrusel en rotación (Figura 10.29). El carrusel puede tomarse como un disco sólido uniforme, con una masa de 500 kg y un radio de 2,0 m. Halle el momento de inercia de este sistema.

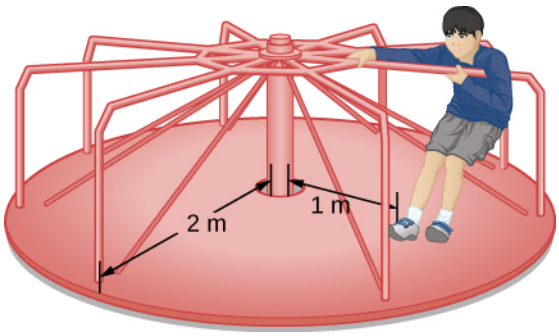


FIGURA 10.29 Calcular el momento de inercia de un niño en un carrusel.

Estrategia

Este problema implica el cálculo de un momento de inercia. Nos dan la masa y la distancia al eje de rotación del niño, así como la masa y el radio del carrusel. Dado que la masa y el tamaño del niño son mucho más pequeños que el carrusel, podemos calcular aproximadamente al niño como una masa puntual. La notación que utilizamos es $m_{\text{c}} = 25$ kg, $r_{\text{c}} = 1{,}0$ m, $m_{\text{m}} = 500$ kg, $r_{\text{m}} = 2{,}0$ m.

Nuestro objetivo es hallar $I_{\text{total}} = \sum_i I_i$.

Solución

Para el niño (child, c), $I_{\text{c}} = m_{\text{c}} r^2$, y para el carrusel (merry-go-round, m), $I_{\text{m}} = \frac{1}{2} m_{\text{m}} r^2$. Por lo tanto,

$$I_{\text{total}} = 25(1)^2 + \frac{1}{2}(500)(2)^2 = 25 + 1.000 = 1.025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

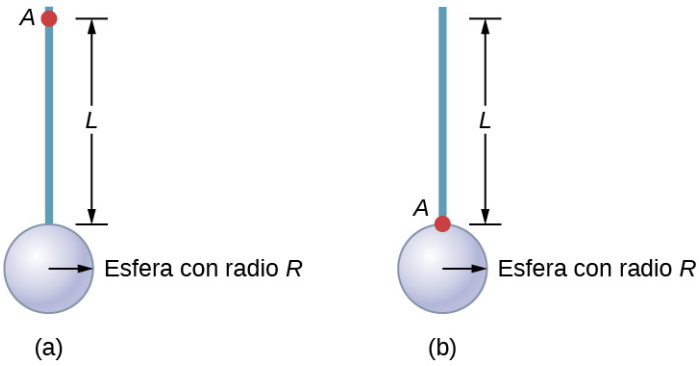
Importancia

El valor debería aproximarse al momento de inercia del carrusel por sí mismo porque tiene mucha más masa distribuida fuera del eje que el niño.

EJEMPLO 10.12

Varilla y esfera sólida

Halle el momento de inercia de la combinación de varilla y esfera sólida en torno a los dos ejes, como se muestra a continuación. La varilla tiene una longitud de 0,5 m y una masa de 2,0 kg. El radio de la esfera es de 20,0 cm y tiene una masa de 1,0 kg.



Estrategia

Dado que en ambos casos tenemos un objeto compuesto, podemos utilizar el teorema del eje paralelo para hallar el momento de inercia en torno a cada eje. En (a), el centro de masa de la esfera está situado a una distancia $L + R$ desde el eje de rotación. En (b), el centro de masa de la esfera está situado a una distancia R del eje de rotación. En ambos casos, el momento de inercia de la varilla está en torno a un eje situado en un extremo. Consulte en la Tabla 10.4 los momentos de inercia de los distintos objetos.

a. $I_{\text{total}} = \sum_i I_i = I_{\text{Varilla}} + I_{\text{Esfera}}$;

$I_{\text{Esfera}} = I_{\text{centro de masa}} + m_{\text{Esfera}}(L + R)^2 = \frac{2}{5} m_{\text{Esfera}} R^2 + m_{\text{Esfera}}(L + R)^2$;

$I_{\text{total}} = I_{\text{Varilla}} + I_{\text{Esfera}} = \frac{1}{3} m_{\text{Varilla}} L^2 + \frac{2}{5} m_{\text{Esfera}} R^2 + m_{\text{Esfera}}(L + R)^2$;

$I_{\text{total}} = \frac{1}{3}(2{,}0\ \text{kg})(0{,}5\ \text{m})^2 + \frac{2}{5}(1{,}0\ \text{kg})(0{,}2\ \text{m})^2 + (1{,}0\ \text{kg})(0{,}5\ \text{m} + 0{,}2\ \text{m})^2$;

$I_{\text{total}} = (0{,}167 + 0{,}016 + 0{,}490)\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0{,}673\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

b. $I_{\text{Esfera}} = \frac{2}{5} m_{\text{Esfera}} R^2 + m_{\text{Esfera}} R^2$;

$I_{\text{total}} = I_{\text{Varilla}} + I_{\text{Esfera}} = \frac{1}{3} m_{\text{Varilla}} L^2 + \frac{2}{5} m_{\text{Esfera}} R^2 + m_{\text{Esfera}} R^2$;

$I_{\text{total}} = \frac{1}{3}(2{,}0\ \text{kg})(0{,}5\ \text{m})^2 + \frac{2}{5}(1{,}0\ \text{kg})(0{,}2\ \text{m})^2 + (1{,}0\ \text{kg})(0{,}2\ \text{m})^2$;

$I_{\text{total}} = (0{,}167 + 0{,}016 + 0{,}04)\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0{,}223\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Importancia

El uso del teorema del eje paralelo facilita el cálculo del momento de inercia de los objetos compuestos. Vemos que el momento de inercia es mayor en (a) que en (b). Esto se debe a que el eje de rotación está más cerca del centro de masa del sistema en (b). La analogía simple es la de una varilla. El momento de inercia en torno a un extremo es $\frac{1}{3} mL^2$, pero el momento de inercia a través del centro de masa a lo largo de su longitud es $\frac{1}{12} mL^2$.

EJEMPLO 10.13

Velocidad angular de un péndulo

Un péndulo en forma de varilla (Figura 10.30) se suelta del reposo con un ángulo de 30°. Tiene una longitud de 30 cm y una masa de 300 g. ¿Cuál es su velocidad angular en su punto más bajo?

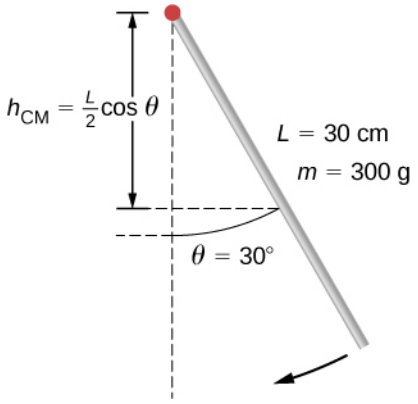


FIGURA 10.30 Un péndulo en forma de varilla se suelta del reposo con un ángulo de 30°.

Estrategia

Utilice la conservación de la energía para resolver el problema. En el punto de liberación, el péndulo tiene energía potencial gravitacional, que se determina a partir de la altura del centro de masa sobre su punto más bajo en la oscilación. En la parte inferior de la oscilación, toda la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética rotacional.

Solución

El cambio en la energía potencial es igual al cambio en la energía cinética rotacional, $\Delta U + \Delta K = 0$.

En la parte superior de la oscilación: $U = mgh_{\text{cm}} = mg\frac{L}{2}(\cos\theta)$. En la parte inferior de la oscilación, $U = mg\frac{L}{2}$.

En la parte superior de la oscilación, la energía cinética rotacional es $K = 0$. En la parte inferior de la oscilación, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Por lo tanto:

$$\Delta U + \Delta K = 0 \Rightarrow (mg\frac{L}{2}(1 - \cos\theta) - 0) + (0 - \frac{1}{2}I\omega^2) = 0$$

o

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mg\frac{L}{2}(1 - \cos\theta).$$

Resolviendo para ω, tenemos

$$\omega = \sqrt{mg\frac{L}{I}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{mg\frac{L}{1/3mL^2}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{g\frac{3}{L}(1 - \cos\theta)}.$$

Insertando los valores numéricos, tenemos

$$\omega = \sqrt{9{,}8\ \text{m/s}^2\ \frac{3}{0{,}3\ \text{m}}(1 - \cos 30)} = 3{,}6\ \text{rad/s}.$$

Importancia

Observe que la velocidad angular del péndulo no depende de su masa.

10.6 Torque

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir cómo la magnitud de un torque depende de la magnitud del brazo de palanca y del ángulo que forma el vector de fuerza con el brazo de palanca.
- Determinar el signo (positivo o negativo) de un torque con la regla de la mano derecha.
- Calcular cada uno de los torques en torno a un eje común y sumarlos para hallar el torque neto.

Una magnitud importante para describir la dinámica de un cuerpo rígido en rotación es el torque. Vemos la aplicación del torque de muchas maneras en nuestro mundo. Todos tenemos una intuición sobre el torque, como cuando utilizamos una llave grande para desenroscar un tornillo difícil. El torque actúa de forma invisible, como cuando pisamos el acelerador en un auto, lo que hace que el motor ponga torque adicional en el tren de transmisión. También, cada vez que movemos nuestro cuerpo desde una posición de pie, aplicamos un torque a nuestras extremidades. En esta sección, definimos el torque y argumentamos la ecuación para calcular el torque para un cuerpo rígido con rotación de eje fijo.

Definir el torque

Hasta ahora hemos definido muchas variables que son equivalentes rotacionales a sus contrapartes traslacionales. Consideremos cuál debe ser la contrapartida de la fuerza. Dado que las fuerzas cambian el movimiento de traslación de los objetos, la contraparte rotacional deberá relacionarse con el cambio del movimiento de rotación de un objeto alrededor de un eje. Llamamos **torque** a esta contrapartida rotacional.

En la vida cotidiana, rotamos objetos alrededor de un eje todo el tiempo, así que intuitivamente ya sabemos mucho sobre el torque. Piense, por ejemplo, en cómo rotamos una puerta para abrirla. En primer lugar, sabemos que una puerta se abre con lentitud si empujamos demasiado cerca de sus bisagras; es más eficaz hacer rotar una puerta abierta si empujamos lejos de las bisagras. En segundo lugar, sabemos que debemos empujar perpendicularmente al plano de la puerta; si empujamos paralelamente al plano de la puerta, no podremos hacerla rotar. En tercer lugar, cuanto mayor sea la fuerza, más eficaz será para abrir la puerta; cuanto más fuerte sea el empujón, la puerta se abrirá más rápidamente. El primer punto implica que, cuanto más lejos se aplique la fuerza del eje de rotación, mayor será la aceleración angular; el segundo implica que la eficacia depende del ángulo en el que se aplica la fuerza; el tercero implica que la magnitud de la fuerza también debe formar parte de la ecuación. Observe que, para la rotación en un plano, el torque tiene dos direcciones posibles. El torque es en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario de las agujas del reloj con respecto al punto de apoyo elegido. La Figura 10.31 muestra rotaciones en sentido contrario de las agujas del reloj.

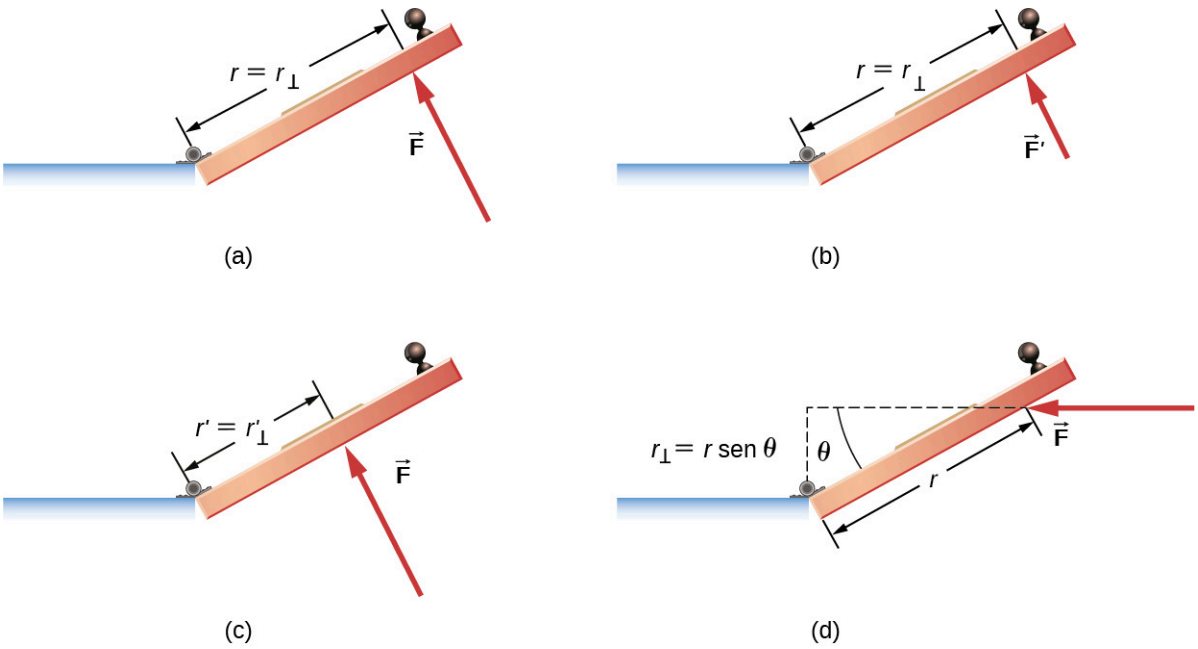


FIGURA 10.31 El torque es la eficacia de giro o torsión de una fuerza, ilustrada aquí para la rotación de una puerta sobre sus bisagras (vista desde arriba). El torque tiene tanto magnitud como dirección. (a) Un torque en el sentido contrario de las agujas del reloj es producido por una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actuando a una distancia r de las bisagras (el punto de apoyo). (b) Se produce un torque menor en el sentido contrario de las agujas del reloj cuando una fuerza menor $\vec{\mathbf{F}}'$ actúa a la misma distancia r de las bisagras. (c) La misma fuerza que en (a) produce un torque menor en el sentido contrario de las agujas del reloj cuando se aplica a una distancia menor de las bisagras. (d) Se produce un torque menor en el sentido contrario de las agujas del reloj si la fuerza de la misma magnitud que (a) actúa a la misma distancia que (a), pero con un ángulo θ que es menor a $90°$.

Consideremos ahora cómo definir los torques en el caso general de las tres dimensiones.

Torque

Cuando una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a un punto P cuya posición es $\vec{\mathbf{r}}$ respecto a O (Figura 10.32), el torque $\vec{\tau}$ alrededor de O es

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}. \qquad \textbf{10.22}$$

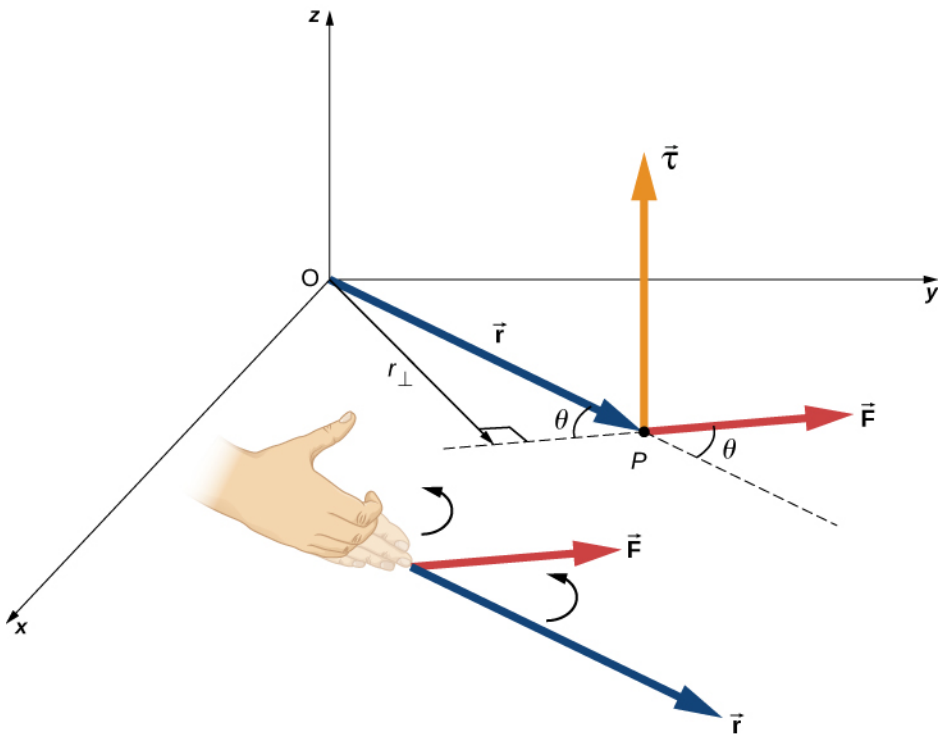


FIGURA 10.32 El torque es perpendicular al plano definido por $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ y su dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

A partir de la definición del producto cruz, el torque $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ y tiene una magnitud

$$|\vec{\boldsymbol{\tau}}| = |\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}| = rF\text{sen}\,\theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$. La unidad SI de torque es newtons por metros, que se escribe como $\text{N} \cdot \text{m}$. La cantidad $r_\perp = r\text{sen}\,\theta$ es la distancia perpendicular de O a la línea determinada por el vector $\vec{\mathbf{F}}$ y se denomina **brazo de palanca**. Observe que, cuanto mayor sea el brazo de palanca, mayor será la magnitud del torque. En términos del brazo de palanca, la magnitud del torque es

$$|\vec{\boldsymbol{\tau}}| = r_\perp F. \qquad 10.23$$

El producto cruz $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ también nos indica el signo del torque. En la Figura 10.32, el producto cruz $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ es a lo largo del eje de la z positiva, que, por convención, es un torque positivo. Si $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ es a lo largo del eje de la z negativa; esto produce un torque negativo.

Si consideramos un disco que rota libremente en torno a un eje que pasa por el centro, como se muestra en la Figura 10.33, podemos ver cómo el ángulo entre el radio $\vec{\mathbf{r}}$ y la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ afecta a la magnitud del torque. Si el ángulo es cero, el torque es cero; si el ángulo es $90°$, el torque es máximo. El torque en la Figura 10.33 es positivo porque la dirección del torque por la regla de la mano derecha está fuera de la página a lo largo del eje de la z positiva. El disco rota en el sentido contrario de las agujas del reloj debido al torque, en la misma dirección que la aceleración angular positiva.

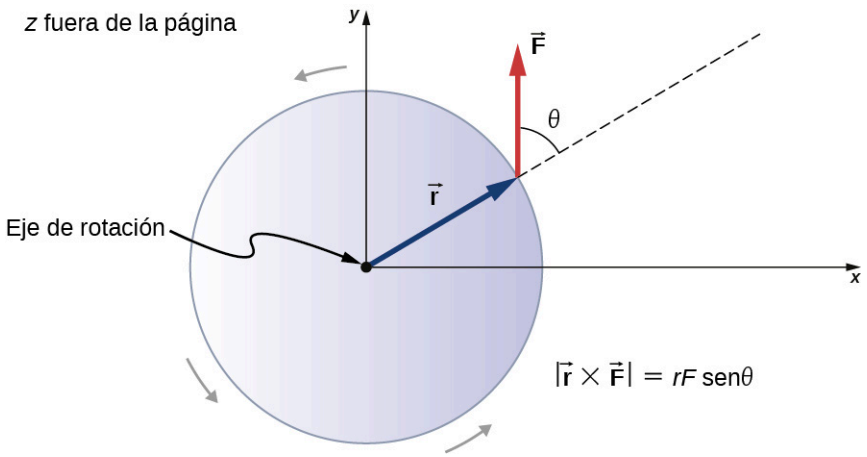


FIGURA 10.33 Un disco rotar libremente en torno a su eje por el centro. La magnitud del torque en el disco es $rF\text{sen}\,\theta$. Cuando $\theta = 0°$, el torque es cero y el disco no rota. Cuando $\theta = 90°$, el torque es máximo y el disco rota con la máxima aceleración angular.

Se puede calcular cualquier número de torques en torno a un eje determinado. Cada uno de los torques se suman para producir un torque neto en torno al eje. Cuando se asigna el signo apropiado (positivo o negativo) a la magnitud de cada uno de los torques en torno a un eje determinado, el torque neto al eje es la suma de todos y cada uno de los torques:

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \sum_i |\vec{\tau}_i|. \qquad 10.24$$

Calcular el torque neto para cuerpos rígidos en un eje fijo

En los siguientes ejemplos, calculamos el torque tanto de forma abstracta y aplicado a un cuerpo rígido.

En primer lugar, introducimos una estrategia de resolución de problemas.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Hallar el torque neto

1. Elija un sistema de coordenadas con el punto de apoyo o eje de rotación como origen del sistema seleccionado de coordenadas.
2. Determine el ángulo entre el brazo de palanca $\vec{\mathbf{r}}$ y el vector de fuerza.
3. Tome el producto cruz de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ para determinar si el torque es positivo o negativo en torno al punto de apoyo o eje.
4. Evalúe la magnitud del torque por medio de $r_\perp F$.
5. Asigne el signo apropiado, positivo o negativo, a la magnitud.
6. Sume los torques para hallar el torque neto.

EJEMPLO 10.14

Calcular el torque

En la Figura 10.34 se muestran cuatro fuerzas en lugares y orientaciones particulares con respecto a un sistema de coordenadas *xy* determinado. Halle el torque debido a cada fuerza en torno al origen, y luego utilice sus resultados para hallar el torque neto en torno al origen.

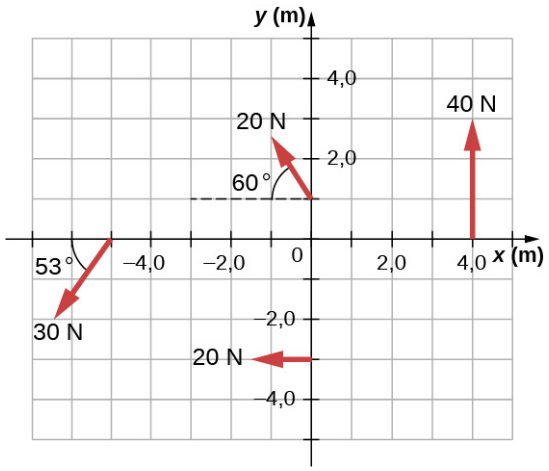


FIGURA 10.34 Cuatro fuerzas que producen torques.

Estrategia

Este problema requiere el cálculo del torque. Todas las cantidades conocidas, fuerzas con direcciones y brazos de palanca, se indican en la figura. El objetivo es hallar cada torque y el torque neto al sumar todos y cada uno de los torques. Tenga cuidado de asignar el signo correcto a cada torque mediante el producto cruz de $\vec{\mathbf{r}}$ y el vector de fuerza $\vec{\mathbf{F}}$.

Solución

Utilice $|\vec{\boldsymbol{\tau}}| = r_{\perp} F = rF\text{sen}\,\theta$ para hallar la magnitud y $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ para determinar el signo del torque.

El torque para la fuerza de 40 N en el primer cuadrante viene dado por $(4)(40)\text{sen}\,90° = 160\ \text{N} \cdot \text{m}$.

El producto cruz de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ está fuera de la página, es positivo.

El torque para la fuerza de 20 N en el tercer cuadrante viene dado por-$(3)(20)\text{sen}\,90° = -60\ \text{N} \cdot \text{m}$.

El producto cruz de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ está dentro de la página, por lo que es negativo.

El torque para la fuerza 30 N en el tercer cuadrante viene dado por $(5)(30)\text{sen}\,53° = 120\ \text{N} \cdot \text{m}$.

El producto cruz de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ está fuera de la página, es positivo.

El torque para la fuerza de 20 N en el segundo cuadrante viene dado por $(1)(20)\text{sen}\,30° = 10\ \text{N} \cdot \text{m}$.

El producto cruz de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ está fuera de la página.

Por lo tanto, el torque neto es $\tau_{\text{neto}} = \sum_i |\boldsymbol{\tau}_i| = 160 - 60 + 120 + 10 = 230\ \text{N} \cdot \text{m}$.

Importancia

Observe que cada fuerza que actúa en el sentido contrario de las agujas del reloj tiene un torque positivo, mientras que cada fuerza que actúa en el sentido de las agujas del reloj tiene un torque negativo. El torque es mayor cuando la distancia, la fuerza o los componentes perpendiculares son mayores.

EJEMPLO 10.15

Calcular el torque en un cuerpo rígido

La Figura 10.35 muestra varias fuerzas que actúan en diferentes lugares y ángulos sobre un volante de inercia. Tenemos $|\vec{\mathbf{F}}_1| = 20\ \text{N}$, $|\vec{\mathbf{F}}_2| = 30\ \text{N}$, $|\vec{\mathbf{F}}_3| = 30\ \text{N}$, y $r = 0{,}5\ \text{m}$. Calcule el torque neto en el volante de inercia en torno a un eje que pasa por el centro.

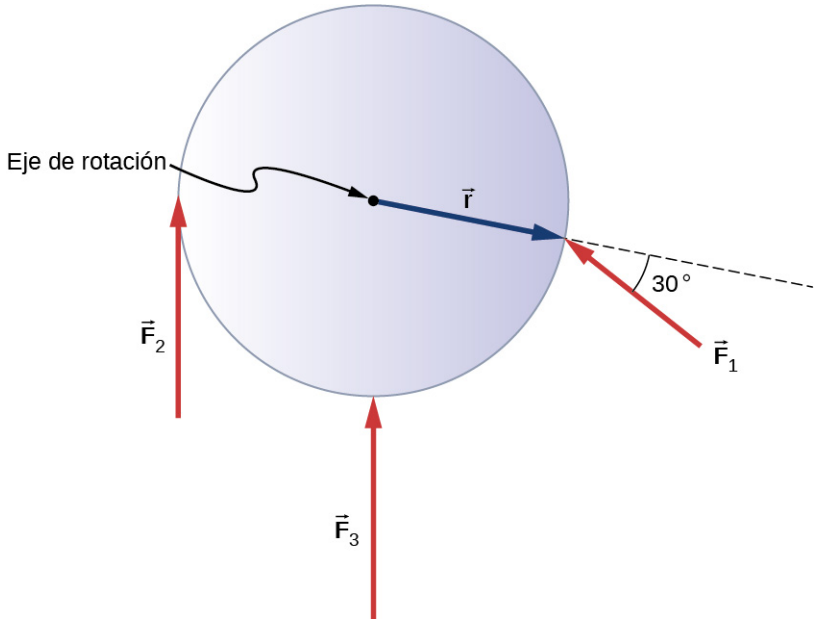


FIGURA 10.35 Tres fuerzas que actúan sobre un volante de inercia.

Estrategia

Calculamos cada torque individualmente, mediante el producto cruz, y determinamos el signo del torque. Luego sumamos los torques para dar con el torque neto.

Solución

Comenzamos con $\vec{\mathbf{F}}_1$. Si nos fijamos en la Figura 10.35, vemos que $\vec{\mathbf{F}}_1$ forma un ángulo de $90° + 60°$ con el radio del vector $\vec{\mathbf{r}}$. Tomando el producto cruz, vemos que está fuera de la página y por lo tanto es positivo. También vemos esto al calcular su magnitud:

$$|\vec{\boldsymbol{\tau}}_1| = rF_1 \operatorname{sen} 150° = 0{,}5 \text{ m}(20 \text{ N})(0{,}5) = 5{,}0 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

A continuación, examinamos $\vec{\mathbf{F}}_2$. El ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}_2$ y $\vec{\mathbf{r}}$ es $90°$ y el producto cruz está en la página, por lo que el torque es negativo. Su valor es

$$|\vec{\boldsymbol{\tau}}_2| = -rF_2 \operatorname{sen} 90° = -0{,}5 \text{ m}(30 \text{ N}) = -15{,}0 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Cuando evaluamos el torque debido a $\vec{\mathbf{F}}_3$, vemos que el ángulo que forma con $\vec{\mathbf{r}}$ es cero, por lo que $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_3 = 0$. Por lo tanto, $\vec{\mathbf{F}}_3$ no produce ningún torque en el volante de inercia.

Evaluamos la suma de los torques:

$$\tau_{\text{neto}} = \sum_i |\boldsymbol{\tau}_i| = 5 - 15 = -10 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Importancia

El eje de rotación está en el centro de masa del volante de inercia. Dado que el volante de inercia está en un eje fijo, no se traslada libremente. Si estuviera en una superficie sin fricción y no estuviera fijo, $\vec{\mathbf{F}}_3$ provocaría la traslación del volante de inercia, así como $\vec{\mathbf{F}}_1$. Su movimiento sería una combinación de traslación y rotación.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.6

Un gran barco oceánico encalla cerca de la costa, como ocurrió con el *Costa Concordia*, y queda en un ángulo como el que se muestra a continuación. La tripulación de salvamento deberá aplicar un torque para enderezar el barco con el fin de hacerlo flotar para su transporte. Una fuerza de $5{,}0 \times 10^5$ N actuando en el punto *A* deberá aplicarse para enderezar el barco. ¿Cuál es el torque sobre el punto de contacto del barco con el suelo

(Figura 10.36)?

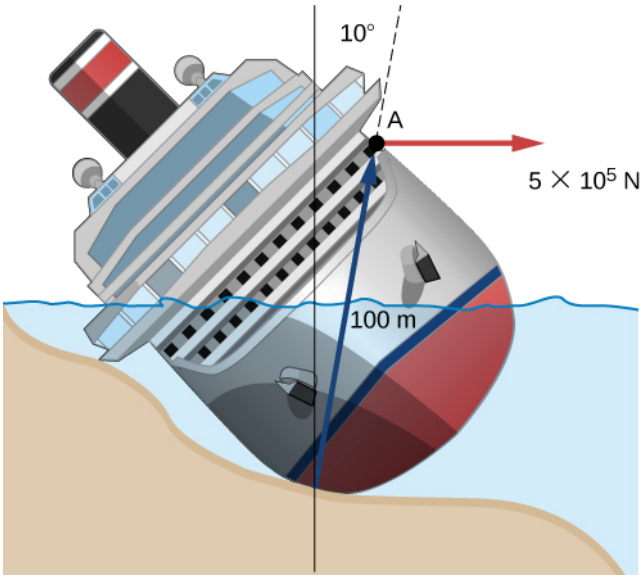


FIGURA 10.36 Un barco encalla y se inclina, por lo que es necesario aplicar un torque para devolverlo a la posición vertical.

10.7 Segunda ley de Newton para la rotación

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Calcular los torques en los sistemas que rotan en torno a un eje fijo para hallar la aceleración angular.
- Explicar cómo los cambios en el momento de inercia de un sistema en rotación inciden en la aceleración angular con un torque fijo aplicado.

En esta sección reunimos todos los elementos aprendidos hasta ahora en este capítulo para analizar la dinámica de los cuerpos rígidos en rotación. Hemos analizado el movimiento con la cinemática y la energía cinética rotacional, pero aún no hemos conectado estas ideas con la fuerza o el torque. En esta sección introducimos el equivalente rotacional a la segunda ley del movimiento de Newton y lo aplicamos a cuerpos rígidos con rotación de eje fijo.

Segunda ley de Newton para la rotación

Hasta ahora hemos hallado muchas contrapartes a los términos traslacionales utilizados a lo largo de este texto; la más reciente, el torque, es el análogo rotacional de la fuerza. Esto plantea la pregunta: ¿Existe una ecuación análoga a la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, que implique al torque y al movimiento rotacional? Para investigarlo, comenzamos con la segunda ley de Newton para una sola partícula que rota alrededor de un eje y ejecuta un movimiento circular. Ejerzamos una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre una masa puntual m que se encuentra a una distancia r de un punto de apoyo (Figura 10.37). La partícula está obligada a moverse en una trayectoria circular de radio fijo y la fuerza es tangente al círculo. Aplicamos la segunda ley de Newton para determinar la magnitud de la aceleración $a = F/m$ en dirección a $\vec{\mathbf{F}}$. Recordemos que la magnitud de la aceleración tangencial es proporcional a la magnitud de la aceleración angular por $a = r\alpha$. Sustituyendo esta expresión en la segunda ley de Newton, obtenemos

$$F = mr\alpha.$$

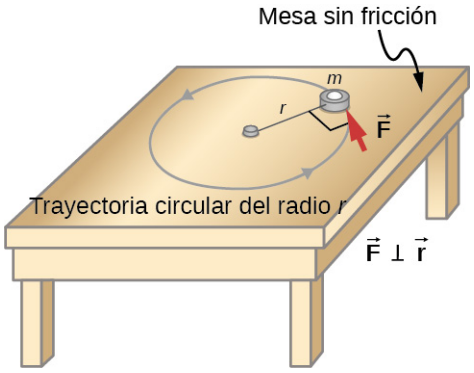


FIGURA 10.37 Un objeto se apoya en una mesa horizontal sin fricción y está unido a un punto de apoyo por una cuerda que suministra fuerza centrípeta. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica al objeto perpendicularmente al radio *r*, lo que provoca su aceleración en torno al punto de apoyo. La fuerza es perpendicular a *r*.

Multiplique ambos lados de esta ecuación por *r*,

$$rF = mr^2\alpha.$$

Observe que el lado izquierdo de esta ecuación es el torque en torno al eje de rotación, donde *r* es el brazo de palanca y *F* es la fuerza, perpendicular a *r*. Recuerde que el momento de inercia de una partícula puntual es $I = mr^2$. Por lo tanto, el torque aplicado perpendicularmente a la masa puntual en la Figura 10.37 es

$$\tau = I\alpha.$$

El torque sobre la partícula es igual al momento de inercia sobre el eje de rotación por la aceleración angular. Podemos generalizar esta ecuación a un cuerpo rígido que rota en torno a un eje fijo.

Segunda ley de Newton para la rotación

Si, sobre un cuerpo rígido actúa más de un torque en torno a un eje fijo, la suma de los torques es igual al momento de inercia por la aceleración angular:

$$\sum_i \tau_i = I\alpha. \qquad \textbf{10.25}$$

El término $I\alpha$ es una cantidad escalar y puede ser positiva o negativa (en el sentido contrario de las agujas del reloj o en el sentido de las agujas del reloj), dependiendo del signo del torque neto. Recuerde la convención de que la aceleración angular en el sentido contrario de las agujas del reloj es positiva. Así, si un cuerpo rígido rota en el sentido de las agujas del reloj y experimenta un torque positivo (en el sentido contrario de las agujas del reloj), la aceleración angular será positiva.

La Ecuación 10.25 es **la segunda ley de Newton para la rotación** y establece cómo relacionar el torque, el momento de inercia y la cinemática rotacional. Esto se denomina ecuación de la **dinámica rotacional**. Con esta ecuación, podemos resolver toda una clase de problemas relacionados con la fuerza y la rotación. Es lógico que la relación de la fuerza necesaria para hacer rotar un cuerpo incluya el momento de inercia, ya que es la cantidad que nos indica lo fácil o difícil que es cambiar el movimiento de rotación de un objeto.

Derivar la segunda ley de Newton para la rotación en forma vectorial

Como antes, cuando calculamos la aceleración angular, también podemos hallar el vector de torque. La segunda ley $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ nos indica la relación entre la fuerza neta y la forma de modificar el movimiento de traslación de un objeto. Tenemos un equivalente vectorial rotacional de esta ecuación, que se hallará al utilizar la Ecuación 10.7 y la Figura 10.8. La Ecuación 10.7 relaciona la aceleración angular con los vectores de posición y de aceleración tangencial:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\mathbf{r}}.$$

Formamos el producto cruz de esta ecuación con $\vec{\mathbf{r}}$ y utilizamos una identidad de producto cruz (tenga en cuenta que $\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}} = 0$):

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\mathbf{r}}) = \vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) - \vec{\mathbf{r}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}}) = \vec{\boldsymbol{\alpha}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = \vec{\boldsymbol{\alpha}} r^2.$$

Ahora formamos el producto cruz de la segunda ley de Newton con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$,

$$\Sigma(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}) = \vec{\mathbf{r}} \times (m\vec{\mathbf{a}}) = m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}} = mr^2\vec{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Al identificar el primer término de la izquierda como la suma de los torques, y mr^2 como el momento de inercia, llegamos a la segunda ley de Newton para la rotación en forma vectorial:

$$\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = I\vec{\boldsymbol{\alpha}}. \qquad 10.26$$

Esta ecuación es exactamente la Ecuación 10.25, pero con el torque y la aceleración angular como vectores. Un punto importante es que el vector de torque está en la misma dirección que la aceleración angular.

Aplicar la ecuación de la dinámica rotacional

Antes de aplicar la ecuación de la dinámica rotacional a algunas situaciones cotidianas, repasemos una estrategia general de resolución de problemas para utilizarla con esta categoría de problemas.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Dinámica rotacional

1. Examine la situación para determinar que el torque y la masa están involucrados en la rotación. Dibuje un esquema minucioso de la situación.
2. Determine el sistema de interés.
3. Dibuje un diagrama de cuerpo libre. Es decir, dibuje y marque todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de interés.
4. Identifique el punto de apoyo. Si el objeto está en equilibrio, debe estarlo para todos los puntos de apoyo posibles: elija el que más simplifique su trabajo.
5. Aplique $\sum_i \tau_i = I\alpha$, el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton, para resolver el problema. Hay que tener cuidado de utilizar el momento de inercia correcto y tener en cuenta el torque alrededor del punto de rotación.
6. Como siempre, compruebe la solución para ver si es razonable.

EJEMPLO 10.16

Calcular el efecto de la distribución de masas en un carrusel

Piense en el padre que empuja un carrusel del parque infantil en la Figura 10.38. Ejerce una fuerza de 250 N en el borde del carrusel de 50,0 kg, que tiene un radio de 1,50 m. Calcule la aceleración angular producida (a) cuando no hay nadie en el carrusel y (b) cuando un niño de 18,0 kg se sienta a 1,25 m del centro. Considere que el propio carrusel es un disco uniforme con una fricción despreciable.

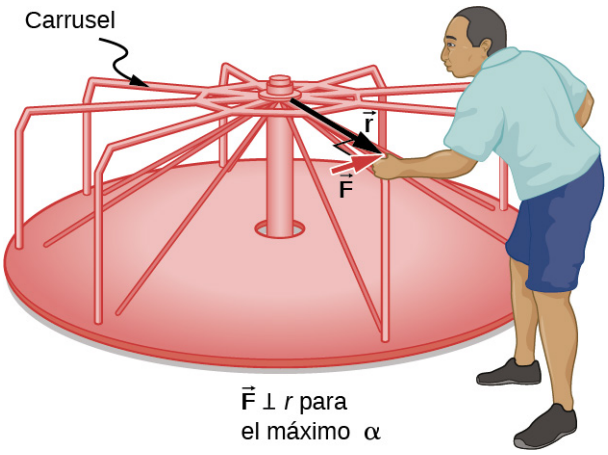


FIGURA 10.38 Un padre empuja un carrusel de un parque infantil por su borde y perpendicularmente a su radio para conseguir el máximo torque.

Estrategia

El torque neto viene dado directamente por la expresión $\sum_i \tau_i = I\alpha$, para resolver en α, primero debemos calcular el torque neto τ (que es el mismo en ambos casos) y el momento de inercia I (que es mayor en el segundo caso).

Solución

a. El momento de inercia de un disco sólido en torno a este eje se da en la Figura 10.20 como

$$\frac{1}{2}MR^2.$$

Tenemos $M = 50{,}0\ \text{kg}$ y $R = 1{,}50\ \text{m}$, así que

$$I = (0{,}500)(50{,}0\ \text{kg})(1{,}50\ \text{m})^2 = 56{,}25\ \text{kg-m}^2.$$

Para hallar el torque neto, observamos que la fuerza aplicada es perpendicular al radio y la fricción es despreciable, por lo que

$$\tau = rF\,\text{sen}\,\theta = (1{,}50\ \text{m})(250{,}0\ \text{N}) = 375{,}0\ \text{N-m}.$$

Ahora, después de sustituir los valores conocidos, hallamos que la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{375{,}0\ \text{N-m}}{56{,}25\ \text{kg-m}^2} = 6{,}67\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

b. Esperamos que la aceleración angular del sistema sea menor en esta parte porque el momento de inercia es mayor cuando el niño está en el carrusel. Para hallar el momento de inercia total I, primero hallamos el momento de inercia del niño (child, c) I_c al calcular aproximadamente al niño como una masa puntual a una distancia de 1,25 m del eje. Luego

$$I_\text{c} = mR^2 = (18{,}0\ \text{kg})(1{,}25\ \text{m})^2 = 28{,}13\ \text{kg-m}^2.$$

El momento de inercia total es la suma de los momentos de inercia del carrusel y del niño (en torno al mismo eje):

$$I = 28{,}13\ \text{kg-m}^2 + 56{,}25\ \text{kg-m}^2 = 84{,}38\ \text{kg-m}^2.$$

Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación para α se obtiene

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{375{,}0\ \text{N-m}}{84{,}38\ \text{kg-m}^2} = 40{,}44\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Importancia

La aceleración angular es menor cuando el niño está en el carrusel que cuando el carrusel está vacío, como era de esperar. Las aceleraciones angulares halladas son bastante grandes, en parte debido a que la fricción se consideró despreciable. Si, por ejemplo, el padre siguiera empujando perpendicularmente durante 2,00 s,

daría al carrusel una velocidad angular de 13,3 rad/s cuando está vacío, pero apenas 8,89 rad/s cuando el niño está montado en este. En términos de revoluciones por segundo, estas velocidades angulares son 2,12 rev/s y 1,41 rev/s, respectivamente. El padre acabaría corriendo a unos 50 km/h en el primer caso.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.7

Las aspas del ventilador de un motor a reacción tienen un momento de inercia $30{,}0\ \text{kg-m}^2$. En 10 s, rota en el sentido contrario de las agujas del reloj desde el reposo hasta una tasa de rotación de 20 rev/s. (a) ¿Qué torque deberá aplicarse a las aspas para lograr esta aceleración angular? (b) ¿Cuál es el torque necesario para llevar las aspas del ventilador que giran a 20 rev/s hasta el reposo en 20 s?

10.8 Trabajo y potencia en el movimiento rotacional

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Utilizar el teorema de trabajo-energía para analizar la rotación y calcular el trabajo realizado en un sistema cuando se rota alrededor de un eje fijo para un desplazamiento angular finito.
- Resolver la velocidad angular de un cuerpo rígido en rotación con el teorema de trabajo-energía.
- Hallar la potencia entregada a un cuerpo rígido en rotación dado el torque aplicado y la velocidad angular.
- Resumir las variables y ecuaciones rotacionales y relacionarlas con sus homólogas traslacionales.

Hasta ahora en el capítulo, hemos abordado ampliamente la cinemática y la dinámica para cuerpos rígidos en rotación alrededor de un eje fijo. En esta última sección, definimos el trabajo y la potencia en el contexto de la rotación alrededor de un eje fijo, lo que tiene aplicaciones tanto en la física como en la ingeniería. El análisis del trabajo y la potencia hace que nuestro tratamiento del movimiento rotacional sea casi completo, con la excepción del movimiento rodadura y el momento angular, que se analizan en Momento angular. Comenzamos esta sección con un tratamiento del teorema de trabajo-energía para la rotación.

Trabajo para el movimiento rotacional

Ahora, que hemos determinado cómo calcular la energía cinética para cuerpos rígidos en rotación, podemos proceder a analizar el trabajo realizado en un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo. La Figura 10.39 muestra un cuerpo rígido que ha rotado a través de un ángulo $d\theta$ de A a B bajo la influencia de una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$. La fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica al punto P, cuya posición es $\vec{\mathbf{r}}$, y el cuerpo rígido se ve obligado a rotar alrededor de un eje fijo que es perpendicular a la página y pasa por O. El eje de rotación es fijo, por lo que el vector $\vec{\mathbf{r}}$ se mueve en un círculo de radio r, y el vector $d\vec{\mathbf{s}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$.

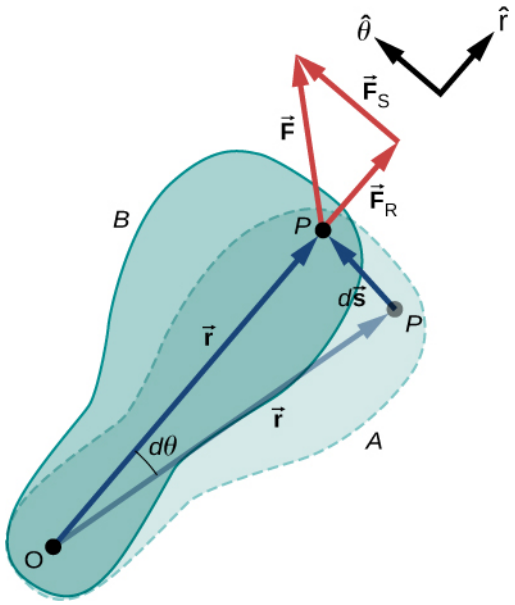


FIGURA 10.39 Un cuerpo rígido rota a través de un ángulo $d\theta$ de *A* a *B* por la acción de una fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada al punto *P*.

A partir de la Ecuación 10.2, tenemos

$$\vec{\mathbf{s}} = \vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{r}}.$$

Así,

$$d\vec{\mathbf{s}} = d(\vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{r}}) = d\vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\boldsymbol{\theta}} = d\vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{r}}.$$

Observe que $d\vec{\mathbf{r}}$ es cero porque $\vec{\mathbf{r}}$ está fijado en el cuerpo rígido desde el origen *O* hasta el punto *P*. Al utilizar la definición de trabajo, obtenemos

$$W = \int \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot (d\vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{r}}) = \int d\vec{\boldsymbol{\theta}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}})$$

donde utilizamos la identidad $\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{a}})$. Al observar que $(\vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{F}) = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$, llegamos a la expresión del **trabajo rotacional** realizado en un cuerpo rígido:

$$W = \int \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\theta}}. \qquad \textbf{10.27}$$

El trabajo total realizado en un cuerpo rígido es la suma de los torques integrados en el ángulo a través del cual rota el cuerpo. El trabajo incremental es

$$dW = \left(\sum_i \tau_i \right) d\theta \qquad \textbf{10.28}$$

donde hemos tomado el producto punto en la Ecuación 10.27, y dejamos solo los torques a lo largo del eje de rotación. En un cuerpo rígido, todas las partículas rotan a través del mismo ángulo; así, el trabajo de cada fuerza externa es igual al torque por el ángulo incremental común $d\theta$. La cantidad $\left(\sum_i \tau_i \right)$ es el torque neto sobre el cuerpo debido a las fuerzas externas.

Del mismo modo, hallamos la energía cinética de un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo al sumar la energía cinética de cada partícula que compone el cuerpo rígido. Dado que el teorema de trabajo-energía $W_i = \Delta K_i$ es válido para cada partícula, es válido para la suma de las partículas y el cuerpo entero.

Teorema de trabajo-energía para la rotación

El teorema de trabajo-energía para un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo es

$$W_{AB} = K_B - K_A \tag{10.29}$$

donde

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

y el trabajo rotacional realizado por una fuerza neta que hace rotar a un cuerpo del punto A al punto B es

$$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \left(\sum_i \tau_i \right) d\theta. \tag{10.30}$$

Damos una estrategia para utilizar esta ecuación al analizar el movimiento rotacional.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Teorema de trabajo-energía para el movimiento rotacional

1. Identifique las fuerzas sobre el cuerpo y dibuje un diagrama de cuerpo libre. Calcule el torque para cada fuerza.
2. Calcule el trabajo realizado durante la rotación del cuerpo por cada torque.
3. Aplique el teorema de trabajo-energía al igualar el trabajo neto realizado sobre el cuerpo con el cambio de energía cinética rotacional.

Veamos dos ejemplos y utilicemos el teorema de trabajo-energía para analizar el movimiento rotacional.

EJEMPLO 10.17

Trabajo y energía rotacional

Un torque de $12{,}0\ \text{N} \cdot \text{m}$ se aplica a un volante de inercia que rota alrededor de un eje fijo y tiene un momento de inercia de $30{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si el volante de inercia está inicialmente en reposo, ¿cuál es su velocidad angular después de girar ocho revoluciones?

Estrategia

Aplicamos el teorema de trabajo-energía. Por la descripción del problema sabemos cuál es el torque y el desplazamiento angular del volante de inercia. Entonces podemos resolver la velocidad angular final.

Solución

El volante de inercia gira ocho revoluciones, lo que 16π radianes. El trabajo realizado por el torque, que es constante y, por tanto, puede salir de la integral en la Ecuación 10.30, es

$$W_{AB} = \tau(\theta_B - \theta_A).$$

Aplicamos el teorema de trabajo-energía:

$$W_{AB} = \tau(\theta_B - \theta_A) = \frac{1}{2} I\omega_B^2 - \frac{1}{2} I\omega_A^2.$$

Con $\tau = 12{,}0\ \text{N} \cdot \text{m}, \theta_B - \theta_A = 16{,}0\pi\ \text{rad}, \ I = 30{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2,$ y $\omega_A = 0$, tenemos

$$12{,}0\ \text{N-m}(16{,}0\pi\ \text{rad}) = \frac{1}{2}(30{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(\omega_B^2) - 0.$$

Por lo tanto,

$$\omega_B = 6{,}3 \text{ rad/s}.$$

Es la velocidad angular del volante de inercia después de ocho revoluciones.

Importancia

El teorema de trabajo-energía es una forma eficaz de analizar el movimiento rotacional, al conectar el torque con la energía cinética rotacional.

EJEMPLO 10.18

Trabajo rotacional: Una polea

Una cuerda enrollada alrededor de la polea en la Figura 10.40 se hala con una fuerza constante hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}$ de 50 N de magnitud. El radio R y el momento de inercia I de la polea son 0,10 m y $2{,}5 \times 10^{-3}\text{kg-m}^2$, respectivamente. Si la cuerda no resbala, ¿cuál es la velocidad angular de la polea después de desenrollar 1,0 m de cuerda? Supongamos que la polea parte del reposo.

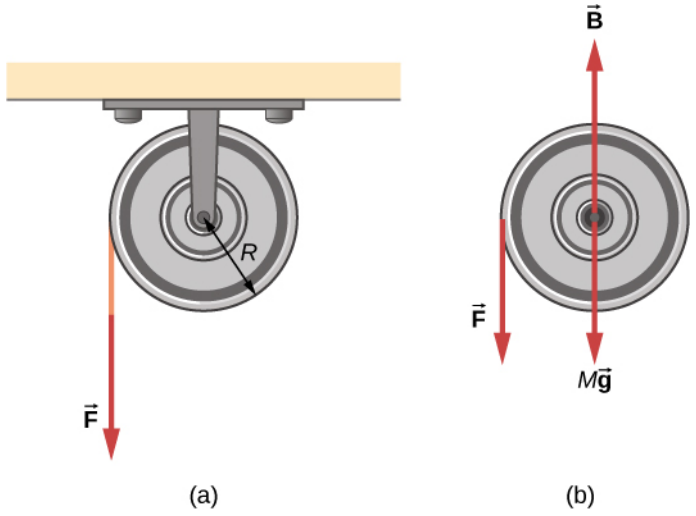


FIGURA 10.40 (a) Una cuerda se enrolla alrededor de una polea de radio R. (b) El diagrama de cuerpo libre.

Estrategia

Al observar el diagrama de cuerpo libre, vemos que ni $\vec{\mathbf{B}}$, la fuerza en los rodamientos de la polea, ni $M\vec{\mathbf{g}}$, el peso de la polea, ejerce un torque alrededor del eje rotacional, y por lo tanto no realiza ningún trabajo sobre la polea. Al rotar la polea a través de un ángulo θ, $\vec{\mathbf{F}}$ actúa a través de una distancia d tal que $d = R\theta$.

Solución

Dado que el torque debido a $\vec{\mathbf{F}}$ tiene una magnitud $\tau = RF$, tenemos

$$W = \tau\theta = (FR)\theta = Fd.$$

Si la fuerza sobre la cuerda actúa a través de una distancia de 1,0 m, tenemos, a partir del teorema de trabajo-energía

$$\begin{aligned} W_{AB} &= K_B - K_A \\ Fd &= \tfrac{1}{2}I\omega^2 - 0 \\ (50{,}0\text{ N})(1{,}0\text{ m}) &= \tfrac{1}{2}(2{,}5 \times 10^{-3}\text{kg-m}^2)\omega^2. \end{aligned}$$

Resolviendo para ω, obtenemos

$$\omega = 200{,}0 \text{ rad/s}.$$

Potencia para el movimiento rotacional

La potencia siempre sale a relucir en los debates sobre las aplicaciones en ingeniería y física. La potencia para el movimiento rotacional es tan importante como la potencia en el movimiento lineal y puede derivarse de forma similar a la del movimiento lineal cuando la fuerza es una constante. La potencia lineal cuando la fuerza es una constante es $P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$. Si el torque neto es constante en el desplazamiento angular, la Ecuación 10.25 se simplifica y el torque neto se puede sacar de la integral. En el siguiente análisis, asumimos que el torque neto es constante. Podemos aplicar al movimiento rotacional la definición de potencia derivada de Potencia. A partir de Trabajo y la energía cinética, la potencia instantánea (o simplemente la potencia) se define como la tasa de realización del trabajo,

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Si tenemos un torque neto constante, la Ecuación 10.25 se convierte en $W = \tau\theta$ y la potencia es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau\theta) = \tau\frac{d\theta}{dt}$$

o

$$P = \tau\omega. \qquad 10.31$$

EJEMPLO 10.19

Torque en una hélice de barco

Un motor de barco que funciona a $9{,}0 \times 10^4$ W funciona a 300 rev/min. ¿Cuál es el torque en el eje de la hélice?

Estrategia

Se nos da la tasa de rotación en rev/min y el consumo de energía, por lo que podemos calcular fácilmente el torque.

Solución

$$300{,}0\ \text{rev/min} = 31{,}4\ \text{rad/s};$$

$$\tau = \frac{P}{\omega} = \frac{9{,}0 \times 10^4\ \text{N} \cdot \text{m/s}}{31{,}4\ \text{rad/s}} = 2864{,}8\ \text{N} \cdot \text{m}.$$

Importancia

Cabe destacar que el radián es una unidad adimensional porque su definición es el cociente de dos longitudes. Por lo tanto, no aparece en la solución.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 10.8

Un torque constante de 500 kN · m se aplica a un aerogenerador para mantenerlo rotando a 6 rad/s. ¿Cuál es la potencia necesaria para que se mantenga rotando el aerogenerador?

Resumen de relaciones rotacionales y traslacionales

Las cantidades rotacionales y sus análogas lineales se resumen en tres tablas. La Tabla 10.5 resume las variables rotacionales para el movimiento circular alrededor de un eje fijo con sus análogas lineales y la ecuación de conexión, excepto para la aceleración centrípeta, que se mantiene por sí misma. La Tabla 10.6 resume las ecuaciones cinemáticas rotacionales y traslacionales. La Tabla 10.7 resume las ecuaciones dinámicas rotacionales junto con sus análogas lineales.

Rotacional	Traslacional	Relación
θ	x	$\theta = \frac{s}{r}$
ω	v_t	$\omega = \frac{v_t}{r}$
α	a_t	$\alpha = \frac{a_\mathrm{t}}{r}$
	a_c	$a_\mathrm{c} = \frac{v_\mathrm{t}^2}{r}$

TABLA 10.5 Variables rotacionales y traslacionales: resumen

Rotacional	Traslacional
$\theta_\mathrm{f} = \theta_0 + \bar{\omega}t$	$x = x_0 + \bar{v}t$
$\omega_\mathrm{f} = \omega_0 + \alpha t$	$v_\mathrm{f} = v_0 + at$
$\theta_\mathrm{f} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_\mathrm{f} = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_\mathrm{f}^2 = \omega^2{}_0 + 2\alpha(\Delta\theta)$	$v_\mathrm{f}^2 = v^2{}_0 + 2a(\Delta x)$

TABLA 10.6 Ecuaciones cinemáticas rotacionales y traslacionales: resumen

Rotacional	Traslacional
$I = \sum_i m_i r_i^2$	m
$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	$K = \frac{1}{2}mv^2$
$\sum_i \tau_i = I\alpha$	$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = m\vec{\mathbf{a}}$
$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \left(\sum_i \tau_i\right) d\theta$	$W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$
$P = \tau\omega$	$P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$

TABLA 10.7 Ecuaciones rotacionales y traslacionales: dinámica

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

aceleración angular tasa de tiempo del cambio de la velocidad angular
aceleración angular instantánea derivada de la velocidad angular con respecto al tiempo
aceleración lineal total suma vectorial del vector de aceleración centrípeta y del vector de aceleración tangencial
brazo de palanca distancia perpendicular desde la línea en la que se encuentra el vector de fuerza a un eje determinado
cinemática del movimiento rotacional describe las relaciones entre el ángulo de rotación, la velocidad angular, la aceleración angular y el tiempo
densidad de masa superficial masa por unidad de área σ de un objeto bidimensional
densidad lineal de masa la masa por unidad de longitud λ de un objeto unidimensional
dinámica rotacional análisis del movimiento rotacional en el que se utiliza el torque neto y el momento de inercia para hallar la aceleración angular
eje paralelo eje de rotación paralelo a un eje en torno al cual se conoce el momento de inercia de un objeto
energía cinética rotacional energía cinética debida a la rotación de un objeto; forma parte de su energía cinética total
momento de inercia masa rotacional de los cuerpos rígidos que se relaciona con lo fácil o difícil que será cambiar la velocidad angular del cuerpo rígido en rotación
posición angular ángulo que ha rotado un cuerpo en un sistema fijo de coordenadas
segunda ley de Newton para la rotación la suma de los torques en un sistema rotacional es igual a su momento de inercia por su aceleración angular
teorema del eje paralelo si se conoce el momento de inercia para un eje determinado, se puede hallar para cualquier eje paralelo a este
torque producto cruz de una fuerza y un brazo de palanca hacia un eje determinado
trabajo rotacional trabajo realizado sobre un cuerpo rígido debido a la suma de los torques integrados sobre el ángulo a través del cual rota el cuerpo
velocidad angular tasa de tiempo del cambio de la posición angular
velocidad angular instantánea derivada de la posición angular con respecto al tiempo

Ecuaciones Clave

Posición angular	$\theta = \frac{s}{r}$
Velocidad angular	$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$
Rapidez tangencial	$v_\mathrm{t} = r\omega$
Aceleración angular	$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Aceleración tangencial	$a_\mathrm{t} = r\alpha$
Velocidad angular media	$\overline{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_\mathrm{f}}{2}$
Desplazamiento angular	$\theta_\mathrm{f} = \theta_0 + \overline{\omega} t$
Velocidad angular a partir de una aceleración angular constante	$\omega_\mathrm{f} = \omega_0 + \alpha t$
Velocidad angular a partir del desplazamiento y la aceleración angular constante	$\theta_\mathrm{f} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Cambio en la velocidad angular	$\omega_{\mathrm{f}}^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Delta\theta)$
Aceleración total	$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{c}} + \vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{t}}$
Energía cinética rotacional	$K = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j r_j^2\right)\omega^2$
Momento de inercia	$I = \sum_j m_j r_j^2$
Energía cinética rotacional en términos del momento de inercia de un cuerpo rígido	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$
Momento de inercia de un objeto continuo	$I = \int r^2\, dm$
Teorema del eje paralelo	$I_{\text{eje paralelo}} = I_{\text{centro de masa}} + md^2$
Momento de inercia de un objeto compuesto	$I_{\text{total}} = \sum_i I_i$
Vector de torque	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$
Magnitud del torque	$\lvert\vec{\boldsymbol{\tau}}\rvert = r_\perp F$
Torque total	$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \sum_i \lvert\vec{\tau}_i\rvert$
Segunda ley de Newton para la rotación	$\sum_i \tau_i = I\alpha$
Trabajo incremental realizado por un torque	$dW = \left(\sum_i \tau_i\right) d\theta$
Teorema de trabajo-energía	$W_{AB} = K_B - K_A$
Trabajo rotacional realizado por la fuerza neta	$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \left(\sum_i \tau_i\right) d\theta$
Potencia rotacional	$P = \tau\omega$

Resumen

10.1 Variables rotacionales

- La posición angular θ de un cuerpo en rotación es el ángulo que ha rotado el cuerpo en un sistema de coordenadas fijo, que sirve como marco de referencia.
- La velocidad angular de un cuerpo en rotación alrededor de un eje fijo se define como ω(rad/s), la tasa rotacional del cuerpo en radianes por

segundo. La velocidad angular instantánea de un cuerpo en rotación $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$ es la derivada con respecto al tiempo de la posición angular θ, calculada al tomar el límite $\Delta t \to 0$ en la velocidad angular media $\overline{\omega} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$. La velocidad angular relaciona v_t con la rapidez tangencial de un punto del cuerpo en rotación mediante la relación $v_\mathrm{t} = r\omega$, donde r es el radio al punto y v_t es la rapidez tangencial en el punto dado.

- La velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ se calcula al utilizar la regla de la mano derecha. Si los dedos se doblan en el sentido de rotación alrededor de un eje fijo, el pulgar apunta en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ (vea la Figura 10.5).
- Si la velocidad angular del sistema no es constante, entonces el sistema tiene una aceleración angular. La aceleración angular media en un intervalo de tiempo determinado es la variación de la velocidad angular en ese intervalo, $\overline{\alpha} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$. La aceleración angular instantánea es la derivada de tiempo de la velocidad angular, $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$. La aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ se calcula al localizar la velocidad angular. Si la tasa de rotación de un cuerpo en rotación disminuye, la aceleración angular es en sentido contrario a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Si la tasa de rotación se incrementa, la aceleración angular es en la misma dirección que $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.
- La aceleración tangencial de un punto a un radio del eje de rotación es la aceleración angular por el radio al punto.

10.2 Rotación con aceleración angular constante

- La cinemática del movimiento rotacional describe las relaciones entre el ángulo de rotación (posición angular), la velocidad angular, la aceleración angular y el tiempo.
- En una aceleración angular constante, la velocidad angular varía linealmente. Por lo tanto, la velocidad angular media es la 1/2 de la velocidad angular inicial más la final en un tiempo determinado:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_\mathrm{f}}{2}.$$

- Utilizamos un análisis gráfico para hallar soluciones a la rotación de eje fijo con aceleración angular constante. A partir de la relación $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, hallamos que el área bajo la curva de velocidad angular en función del tiempo da el desplazamiento angular, $\theta_\mathrm{f} - \theta_0 = \Delta\theta = \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$. Los resultados del análisis gráfico se verificaron mediante las ecuaciones cinemáticas para una aceleración angular constante. Del mismo modo, dado que $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, el área bajo un gráfico de aceleración angular en función del tiempo da el cambio en la velocidad angular $\omega_f - \omega_0 = \Delta\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt$.

10.3 Relacionar cantidades angulares y traslacionales

- Las ecuaciones cinemáticas lineales tienen sus contrapartes rotacionales de tal manera que existe un mapeo de $x \to \theta, \quad v \to \omega, \quad a \to \alpha$.
- Un sistema que experimenta un movimiento circular uniforme tiene una velocidad angular constante, pero los puntos situados a una distancia r del eje de rotación tienen una aceleración centrípeta lineal.
- Un sistema que experimenta un movimiento circular no uniforme tiene una aceleración angular y, por lo tanto, tiene una aceleración lineal centrípeta y una aceleración lineal tangencial en un punto a una distancia r del eje de rotación.
- La aceleración lineal total es la suma vectorial del vector de aceleración centrípeta y del vector de aceleración tangencial. Ya que los vectores de aceleración centrípeta y tangencial son perpendiculares entre sí para el movimiento circular, la magnitud de la aceleración lineal total es $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_\mathrm{c}^2 + a_\mathrm{t}^2}$.

10.4 Momento de inercia y energía cinética rotacional

- La energía cinética rotacional es la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido o sistema de partículas en rotación, y viene dada por $K = \frac{1}{2} I\omega^2$, donde I es el momento de inercia, o "masa rotacional" del cuerpo rígido o sistema de partículas.
- El momento de inercia para un sistema de partículas puntuales que rotan en torno a un eje fijo es $I = \sum_j m_j r_j^2$, donde m_j es la masa de la partícula puntual y r_j es la distancia de la partícula puntual al eje de rotación. Debido al término r^2, el momento de inercia aumenta

como el cuadrado de la distancia al eje fijo de rotación. El momento de inercia es la contraparte rotacional de la masa en movimiento lineal.
- En los sistemas que están en rotación y traslación, la conservación de la energía mecánica puede utilizarse si no hay fuerzas no conservativas en funcionamiento. La energía mecánica total se conserva entonces y es la suma de las energías cinéticas rotacional y traslacional, y la energía potencial gravitacional.

10.5 Calcular momentos de inercia

- Los momentos de inercia se hallan al sumar o integrar cada "pieza de masa" que compone un objeto, multiplicado por el cuadrado de la distancia de cada "pieza de masa" al eje. En forma integral el momento de inercia es $I = \int r^2 \, dm$.
- El momento de inercia es mayor cuando la masa de un objeto está más alejada del eje de rotación.
- Es posible hallar el momento de inercia de un objeto en torno a un nuevo eje de rotación una vez que se conoce para un eje paralelo. Esto se denomina el teorema del eje paralelo dado por $I_{\text{eje paralelo}} = I_{\text{centro de masa}} + md^2$, donde d es la distancia del eje inicial al eje paralelo.
- El momento de inercia de un objeto compuesto es simplemente la suma de los momentos de inercia de cada uno de los objetos que lo componen.

10.6 Torque

- La magnitud de un torque en torno a un eje fijo se calcula al hallar el brazo de palanca hasta el punto donde se aplica la fuerza y utilizar la relación $|\vec{\boldsymbol{\tau}}| = r_\perp F$, donde $r_\perp$ es la distancia perpendicular del eje a la línea sobre la que se encuentra el vector de fuerza.
- El signo del torque se halla con la regla de la mano derecha. Si la página es el plano que contiene $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$, entonces $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ está fuera de la página para los torques positivos y dentro de la página para los torques negativos.
- El torque neto se halla al sumar cada uno de los torques en torno a un eje determinado.

10.7 Segunda ley de Newton para la rotación

- La segunda ley de Newton para la rotación, $\sum_i \tau_i = I\alpha$, establece que la suma de los torques en un sistema que rota en torno a un eje fijo es igual al producto del momento de inercia y la aceleración angular. Es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton del movimiento lineal.
- En la forma vectorial de la segunda ley de Newton para la rotación, el vector de torque $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ está en la misma dirección que la aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$. Si la aceleración angular de un sistema en rotación es positiva, el torque en el sistema también es positivo, y si la aceleración angular es negativa, el torque es negativo.

10.8 Trabajo y potencia en el movimiento rotacional

- El trabajo incremental dW en la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo es la suma de los torques alrededor del eje a por el ángulo incremental $d\theta$.
- El trabajo total realizado para la rotación de un cuerpo rígido a través de un ángulo θ alrededor de un eje fijo es la suma de los torques integrados sobre el desplazamiento angular. Si el torque es una constante como función de θ, entonces $W_{AB} = \tau(\theta_B - \theta_A)$.
- El teorema de trabajo-energía relaciona el trabajo rotacional realizado con el cambio en la energía cinética rotacional: $W_{AB} = K_B - K_A$ donde $K = \frac{1}{2} I\omega^2$.
- La potencia suministrada a un sistema que rota alrededor de un eje fijo es el torque por la velocidad angular, $P = \tau\omega$.

Preguntas Conceptuales

10.1 Variables rotacionales

1. Hay un reloj montado en la pared. Al mirarlo, ¿cuál es la dirección del vector de velocidad angular del segundero?
2. ¿Cuál es el valor de la aceleración angular del segundero del reloj de pared?
3. Un bate de béisbol se balancea. ¿Tienen todos los puntos del bate la misma velocidad angular? ¿La misma rapidez tangencial?
4. Las aspas de una batidora en una encimera rotan en el sentido de las agujas del reloj, vistas desde arriba. Si la batidora se pone a una velocidad mayor, ¿en qué sentido se produce la aceleración angular de las aspas?

10.2 Rotación con aceleración angular constante

5. Si un cuerpo rígido tiene una aceleración angular constante, ¿cuál es la forma funcional de la velocidad angular en términos de la variable tiempo?
6. Si un cuerpo rígido tiene una aceleración angular constante, ¿cuál es la forma funcional de la posición angular?
7. Si la aceleración angular de un cuerpo rígido es cero, ¿cuál es la forma funcional de la velocidad angular?
8. Una cuerda de sujeción sin masa con una masa atada a ambos extremos rota en torno a un eje fijo por el centro. ¿Puede la aceleración total de la combinación cuerda de sujeción/masa ser cero si la velocidad angular es constante?

10.3 Relacionar cantidades angulares y traslacionales

9. Explique por qué la aceleración centrípeta cambia la dirección de la velocidad en el movimiento circular, pero no su magnitud.
10. En el movimiento circular, la aceleración tangencial puede cambiar la magnitud de la velocidad, pero no su dirección. Razone su respuesta.
11. Supongamos que un trozo de comida está en el borde de un plato en rotación de un horno microondas. ¿Experimenta una aceleración tangencial distinta de cero, una aceleración centrípeta o ambas cuando: (a) el plato empieza a girar más rápido? (b) ¿el plato gira a velocidad angular constante? (c) ¿el plato se detiene?

10.4 Momento de inercia y energía cinética rotacional

12. ¿Qué pasaría si otro planeta del mismo tamaño que la Tierra se pusiera en órbita alrededor del Sol junto con la Tierra? ¿El momento de inercia del sistema aumentaría, disminuiría o se mantendría igual?
13. Una esfera sólida rota en torno a un eje que pasa por su centro a una tasa de rotación constante. Otra esfera hueca de la misma masa y radio rota en torno a su eje por el centro, a la misma tasa de rotación. ¿Qué esfera tiene mayor energía cinética rotacional?

10.5 Calcular momentos de inercia

14. Si un niño camina hacia el centro de un carrusel, ¿aumenta o disminuye el momento de inercia?
15. Un lanzador de disco rota con un disco en la mano antes de soltarlo. (a) ¿Cómo cambia su momento de inercia después de soltar el disco? (b) ¿Cuál sería la aproximación adecuada para calcular el momento de inercia del lanzador de disco y del disco?
16. ¿El aumento del número de aspas de una hélice aumenta o disminuye su momento de inercia, y por qué?
17. El momento de inercia de una varilla larga que gira alrededor de un eje por un extremo perpendicular a su longitud es $mL^2/3$. ¿Por qué este momento de inercia es mayor que si se hace girar una masa puntual m en el lugar del centro de masa de la varilla (en $L/2$) (que sería $mL^2/4$)?
18. ¿Por qué el momento de inercia de un aro que tiene una masa M y un radio R es mayor que el momento de inercia de un disco que tiene la misma masa y radio?

10.6 Torque

19. ¿Cuáles son los tres factores que inciden en el torque creado por una fuerza en relación con un punto de apoyo específico?
20. Dé un ejemplo en el que una pequeña fuerza ejerza un gran torque. Dé otro ejemplo en el que una fuerza grande ejerza un torque pequeño.
21. Al reducir la masa de una bicicleta de carreras, el mayor beneficio se obtiene al reducir la masa de los neumáticos y las llantas. ¿Por qué esto permite a un corredor alcanzar mayor aceleración que la que conseguiría una reducción idéntica de la masa del cuadro de la bicicleta?
22. ¿Puede una sola fuerza producir un torque cero?
23. ¿Puede un conjunto de fuerzas tener un torque neto que sea cero y una fuerza neta que no sea cero?
24. ¿Puede un conjunto de fuerzas tener una fuerza neta que sea cero y un torque neto que no sea cero?
25. En la expresión $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ ¿puede $|\vec{\mathbf{r}}|$ ser alguna vez menor que el brazo de palanca? ¿Puede ser igual al brazo de palanca?

10.7 Segunda ley de Newton para la rotación

26. Si quisiera detener una rueca con una fuerza constante, ¿en qué parte de la rueca aplicaría la fuerza para producir la máxima aceleración

negativa?

27. Una varilla gira en torno a un extremo. Dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}$ y $-\vec{\mathbf{F}}$ se aplican a ella. ¿En qué circunstancias no rotará la varilla?

Problemas

10.1 Variables rotacionales

28. Calcule la velocidad angular de la Tierra.

29. Una estrella del atletismo corre una carrera de 400 metros en una pista circular de 400 metros en 45 s. ¿Cuál es su velocidad angular suponiendo una rapidez constante?

30. Una rueda rota a una tasa constante de $2{,}0 \times 10^3$ rev/min . (a) ¿Cuál es su velocidad angular en radianes por segundo? (b) ¿Con qué ángulo gira en 10 s? Exprese la solución en radianes y grados.

31. Una partícula se desplaza 3,0 m a lo largo de un círculo de radio 1,5 m. (a) ¿Con qué ángulo rota? (b) Si la partícula realiza este recorrido en 1,0 s a rapidez constante, ¿cuál es su velocidad angular? (c) ¿Cuál es su aceleración?

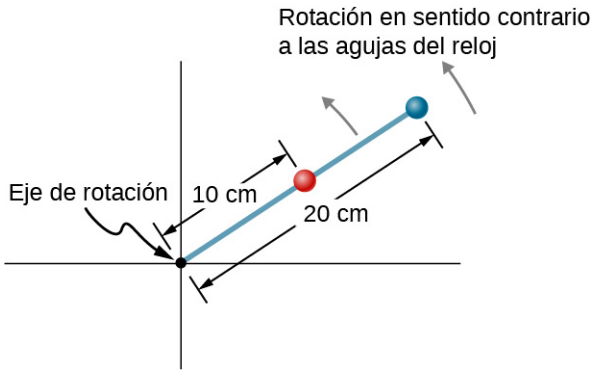
32. Un disco compacto rota a 500 rev/min. Si el diámetro del disco es de 120 mm, (a) ¿cuál es la rapidez tangencial de un punto situado en el borde del disco? (b) ¿en un punto situado a medio camino al centro del disco?

33. **Resultados poco razonables.** La hélice de un avión gira a 10 rev/s cuando el piloto apaga el motor. La hélice reduce su velocidad angular a una constante de $2{,}0$ rad/s^2 durante un periodo de 40 s. ¿Cuál es la tasa de rotación de la hélice en 40 s? ¿Es una situación razonable?

34. Un giroscopio desacelera desde una tasa inicial de 32,0 rad/s a una tasa de $0{,}700$ rad/s^2. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al reposo?

35. En el despegue, las hélices de un UAV (aeronave no tripulada) aumentan su velocidad angular durante 3,0 s desde el reposo a una tasa de $\omega = (25{,}0t)$ rad/s donde t se mide en segundos. (a) ¿Cuál es la velocidad angular instantánea de las hélices en $t = 2{,}0$ s? (b) ¿Cuál es la aceleración angular?

36. La posición angular de una varilla varía a $20{,}0t^2$ radianes desde el tiempo $t = 0$. La varilla tiene dos cuentas, como se muestra en la siguiente figura: una a 10 cm del eje de rotación y la otra a 20 cm del eje de rotación. (a) ¿Cuál es la velocidad angular instantánea de la varilla en $t = 5$ s? (b) ¿Cuál es la aceleración angular de la varilla? (c) ¿Cuál es la rapidez tangencial de las cuentas en $t = 5$ s? d) ¿Cuál es la aceleración tangencial de las cuentas en $t = 5$ s? (e) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de las cuentas en $t = 5$ s?



10.2 Rotación con aceleración angular constante

37. Una rueda tiene una aceleración angular constante de $5{,}0$ rad/s^2. Partiendo del reposo, gira 300 rad. (a) ¿Cuál es su velocidad angular final? (b) ¿Cuánto tiempo transcurre mientras gira los 300 radianes?

38. Durante un intervalo de tiempo de 6,0 s, un volante de inercia con una aceleración angular constante gira 500 radianes que adquieren una velocidad angular de 100 rad/s. (a) ¿Cuál es la velocidad angular al comienzo de los 6,0 s? (b) ¿Cuál es la aceleración angular del volante de inercia?

39. La velocidad angular de un cuerpo rígido en rotación aumenta de 500 a 1.500 rev/min en 120 s. (a) ¿Cuál es la aceleración angular del cuerpo? (b) ¿Con qué ángulo gira en estos 120 s?

40. Un volante de inercia pasa de 600 a 400 rev/min mientras rota a 40 revoluciones. (a) ¿Cuál es la aceleración angular del volante de inercia? (b) ¿Cuánto tiempo transcurre durante las 40 revoluciones?

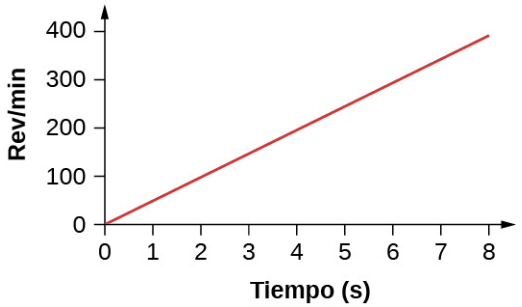
41. Una rueda de 1,0 m de radio rota a una aceleración angular de $4{,}0$ rad/s^2. (a) Si la velocidad angular inicial de la rueda es de 2,0 rad/s, ¿cuál es su velocidad angular después de 10 s? (b) ¿Con qué ángulo rota en el intervalo de 10 s? (c) ¿Cuáles son la velocidad tangencial y la aceleración de un punto del borde de la rueda al final del intervalo de 10 s?

42. Una rueda vertical de 50 cm de diámetro parte del reposo y rota a una aceleración angular constante de $5{,}0$ rad/s^2 en torno a un eje fijo que pasa por su centro en el sentido contrario de las agujas del reloj. (a) ¿Dónde está el punto que se encuentra inicialmente en la parte inferior de la

rueda en $t = 10$ s? (b) ¿Cuál es la aceleración lineal del punto en este instante?

43. Un disco circular de radio de 10 cm tiene una aceleración angular constante de $1{,}0$ rad/s^2; en $t = 0$ su velocidad angular es de 2,0 rad/s. (a) Determine la velocidad angular del disco en $t = 5{,}0$ s. (b) ¿Cuál es el ángulo que ha rotado durante este tiempo? (c) ¿Cuál es la aceleración tangencial de un punto del disco en $t = 5{,}0$ s?

44. A continuación se muestra la velocidad angular en función del tiempo de un ventilador en un aerodeslizador. (a) ¿Cuál es el ángulo por el que rotan las aspas del ventilador en los primeros 8 segundos? (b) Verifique su resultado con las ecuaciones cinemáticas.



45. Una varilla de 20 cm de longitud tiene dos cuentas sujetas en sus extremos. La varilla con cuentas comienza a rotar desde el reposo. Si las cuentas deben tener una rapidez tangencial de 20 m/s en 7 s, ¿cuál es la aceleración angular de la varilla para conseguirlo?

10.3 Relacionar cantidades angulares y traslacionales

46. En su punto álgido, un tornado tiene 60,0 m de diámetro y vientos de 500 km/h. ¿Cuál es su velocidad angular en revoluciones por segundo?

47. Un hombre se encuentra en un carrusel que gira a 2,5 rad/s. Si el coeficiente de fricción estática entre los zapatos del hombre y el carrusel es $\mu_S = 0{,}5$, ¿a qué distancia del eje de rotación puede permanecer sin deslizarse?

48. Una ultracentrífuga acelera desde el reposo hasta las 100.000 rpm en 2,00 min. (a) ¿Cuál es la aceleración angular media en rad/s^2? (b) ¿Cuál es la aceleración tangencial de un punto situado a 9,50 cm del eje de rotación? (c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta en m/s^2 y múltiplos de g de este punto a las máximas rpm? d) ¿Cuál es la distancia total recorrida durante la aceleración por un punto situado a 9,5 cm del eje de rotación de la ultracentrifugadora?

49. Un aerogenerador rota en el sentido contrario de las agujas del reloj a 0,5 rev/s y se detiene en 10 s. Sus álabes tienen una longitud de 20 m. (a) ¿Cuál es la aceleración angular del aerogenerador? (b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la punta de los álabes en $t = 0$ s? c) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la aceleración lineal total de la punta de los álabes en $t = 0$ s?

50. ¿Cuál es (a) la velocidad angular y (b) la velocidad lineal de un punto de la superficie terrestre en la latitud 30° N. Supongamos que el radio de la Tierra es de 6.309 km. (c) ¿A qué latitud su velocidad lineal sería de 10 m/s?

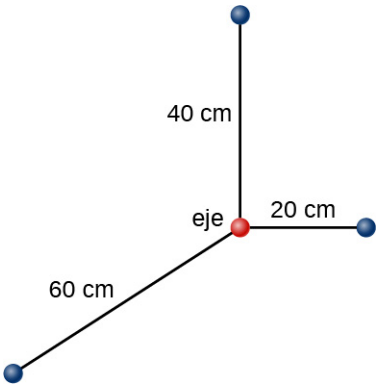
51. Un niño con una masa de 40 kg está sentado en el borde de un carrusel a una distancia de 3,0 m de su eje de rotación. El carrusel acelera desde el reposo hasta 0,4 rev/s en 10 s. Si el coeficiente de fricción estática entre el niño y la superficie del carrusel es de 0,6, ¿se cae el niño antes de 5 s?

52. Una rueda de bicicleta con un radio de 0,3 m rota desde el reposo hasta las 3 rev/s en 5 s. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del vector de aceleración total en el borde de la rueda a 1,0 s?

53. La velocidad angular de un volante de inercia de radio 1,0 m varía según $\omega(t) = 2{,}0t$. Grafique $a_c(t)$ y $a_t(t)$ de $t = 0$ a 3,0 s para $r = 1{,}0$ m. Analice estos resultados para explicar cuándo $a_c \gg a_t$ y cuándo $a_c \ll a_t$ para un punto del volante de inercia en un radio de 1,0 m.

10.4 Momento de inercia y energía cinética rotacional

54. En la siguiente figura se muestra un sistema de partículas puntuales. Cada partícula tiene una masa de 0,3 kg y todas se encuentran en el mismo plano. (a) ¿Cuál es el momento de inercia del sistema alrededor del eje dado? (b) Si el sistema gira a 5 rev/s, ¿cuál es su energía cinética rotacional?



55. (a) Calcule la energía cinética rotacional de la

Tierra sobre su eje. (b) ¿Cuál es la energía cinética rotacional de la Tierra en su órbita alrededor del Sol?

56. Calcule la energía cinética rotacional de una rueda de motocicleta de 12 kg si su velocidad angular es de 120 rad/s y su radio interior es de 0,280 m y el exterior de 0,330 m.

57. Un lanzador de béisbol lanza la pelota con un movimiento en el que hay rotación del antebrazo sobre la articulación del codo, así como otros movimientos. Si la velocidad lineal de la pelota respecto a la articulación del codo es de 20,0 m/s a una distancia de 0,480 m de la articulación y el momento de inercia del antebrazo es $0{,}500\ \text{kg-m}^2$, ¿cuál es la energía cinética rotacional del antebrazo?

58. Una clavadista da una voltereta durante una inmersión plegando las extremidades. Si su energía cinética rotacional es de 100 J y su momento de inercia al plegarse es $9{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, ¿cuál es su velocidad de rotación durante la voltereta?

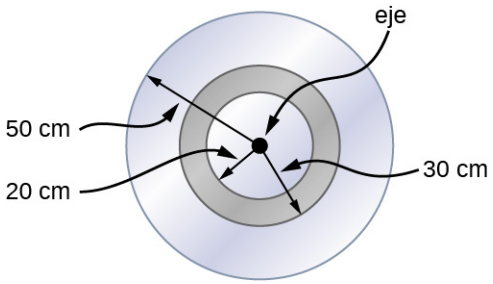
59. Un avión aterriza a 300 metros de altura cuando la hélice se desprende. El avión vuela a 40,0 m/s en horizontal. La hélice tiene un índice de rotación de 20 rev/s, un momento de inercia de $70{,}0\ \text{kg-m}^2$, y una masa de 200 kg. Descarte la resistencia del aire. (a) ¿Con qué velocidad de traslación golpea la hélice el suelo? (b) ¿Cuál es la tasa de rotación de la hélice al momento del impacto?

60. Si la resistencia del aire está presente en el problema anterior y reduce la energía cinética rotacional de la hélice en el momento del impacto en un 30 %, ¿cuál es la tasa de rotación de la hélice en el momento del impacto?

61. Una estrella de neutrones de masa 2×10^{30} kg y un radio de 10 km rota en un periodo de 0,02 segundos. ¿Cuál es su energía cinética rotacional?

62. Una lijadora eléctrica formada por un disco giratorio de 0,7 kg de masa y radio 10 cm rota a 15 rev/s. Cuando se aplica a una pared de madera rugosa, la tasa de rotación disminuye en un 20 %. (a) ¿Cuál es la energía cinética de rotación final del disco giratorio? (b) ¿Cuánto ha disminuido su energía cinética rotacional?

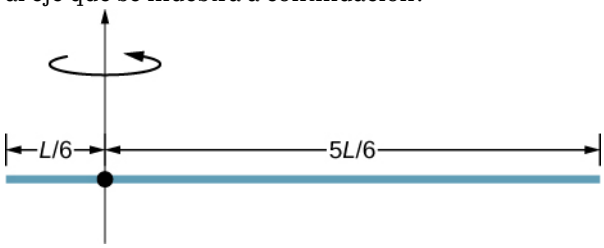
63. Un sistema consiste de un disco de 2,0 kg de masa y radio 50 cm sobre el que está montado un cilindro anular de 1,0 kg de masa con radio interior de 20 cm y exterior de 30 cm (vea abajo). El sistema gira alrededor de un eje que pasa por el centro del disco y del cilindro anular a 10 rev/s. (a) ¿Cuál es el momento de inercia del sistema? (b) ¿Cuál es su energía cinética rotacional?



10.5 Calcular momentos de inercia

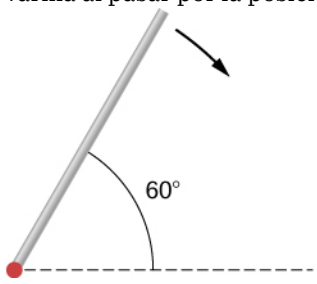
64. Al lanzar un balón de fútbol, un pateador rota su pierna en torno a la articulación de la cadera. El momento de inercia de la pierna es $3{,}75\ \text{kg-m}^2$ y su energía cinética rotacional es de 175 J. (a) ¿Cuál es la velocidad angular de la pierna? (b) ¿Cuál es la velocidad de la punta del zapato del jugador si está a 1,05 m de la articulación de la cadera?

65. Utilizando el teorema del eje paralelo, ¿cuál es el momento de inercia de la varilla de masa *m* en torno al eje que se muestra a continuación?



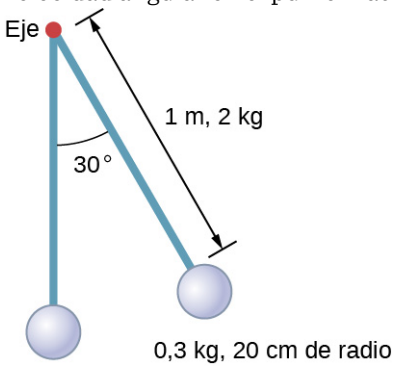
66. Halle el momento de inercia de la varilla en el problema anterior por integración directa.

67. Una varilla uniforme de masa 1,0 kg y longitud 2,0 m rota libremente en torno a un extremo (vea la figura siguiente). Si la varilla se suelta del reposo en un ángulo de $60°$ con respecto a la horizontal, ¿cuál es la rapidez de la punta de la varilla al pasar por la posición horizontal?

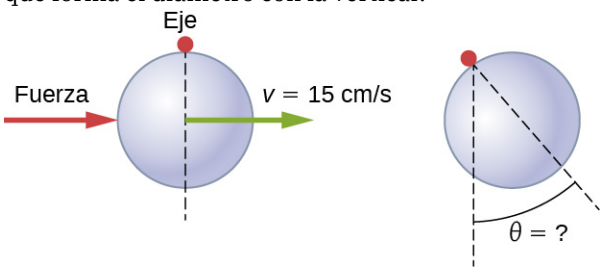


68. Un péndulo consiste en una varilla de masa 2 kg y longitud 1 m con una esfera maciza en un extremo con masa 0,3 kg y radio 20 cm (vea la siguiente figura). Si el péndulo se suelta del reposo con un ángulo de $30°$, ¿cuál es la

velocidad angular en el punto más bajo?



69. Una esfera sólida de 10 cm de radio se deja rotar libremente en torno a un eje. La esfera recibe un golpe fuerte de forma que su centro de masa parte de la posición indicada en la siguiente figura con una rapidez de 15 cm/s. ¿Cuál es el ángulo máximo que forma el diámetro con la vertical?

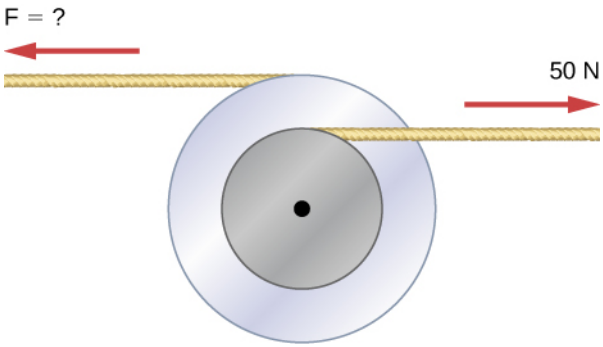


70. Calcule el momento de inercia por integración directa de una varilla delgada de masa M y longitud L en torno a un eje que pasa por la varilla en $L/3$, como se muestra a continuación. Compruebe su respuesta con el teorema del eje paralelo.



10.6 Torque

71. Dos volantes de inercia de masa despreciable y radios diferentes se unen y rotan en torno a un eje común (vea más abajo). El volante de inercia más pequeño, de 30 cm de radio, tiene una cuerda que ejerce una fuerza de tracción de 50 N sobre este. ¿Qué fuerza de tracción hay que aplicar a la cuerda que une el volante de inercia mayor de radio 50 cm para que la combinación no rote?

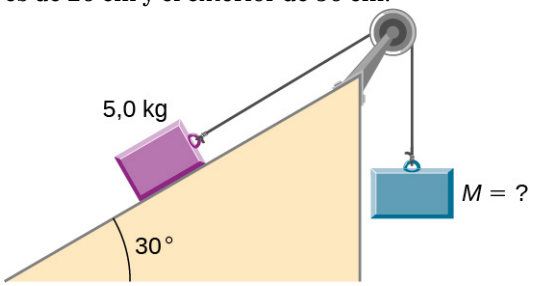


72. Los pernos de cabeza de cilindro de un auto deben apretarse con un torque de 62,0 N·m. Si un mecánico utiliza una llave de 20 cm de longitud, ¿qué fuerza perpendicular deberá ejercer sobre el extremo de la llave para apretar correctamente un perno?

73. a) Al abrir una puerta, la empuja perpendicularmente con una fuerza de 55,0 N a una distancia de 0,850 m de las bisagras. ¿Qué torque ejerce con respecto a las bisagras? b) ¿Importa que empuje a la misma altura que las bisagras? Solo hay un par de bisagras.

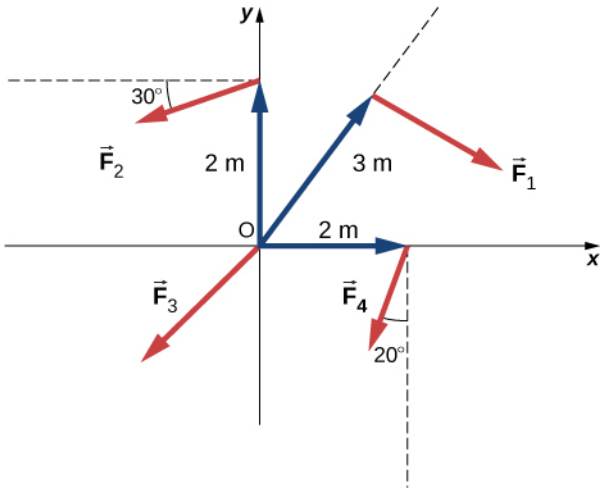
74. Al apretar un perno, se empuja perpendicularmente una llave con una fuerza de 165 N a una distancia de 0,140 m del centro del perno. ¿Cuánto torque ejerce en newton-metros (en relación con el centro del perno)?

75. ¿Qué masa colgante deberá colocarse en la cuerda para que la polea no rote? (Vea la siguiente figura). La masa en el plano sin fricción es de 5,0 kg. El radio interior de la polea es de 20 cm y el exterior de 30 cm.

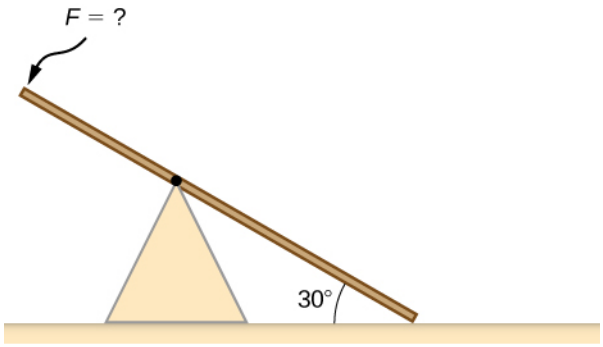


76. Un péndulo simple consiste en una cuerda sin masa de 50 cm de longitud, atada a un apoyo, y una pequeña masa de 1,0 kg, unida al otro extremo. ¿Cuál es el torque en torno al apoyo cuando el péndulo forma un ángulo de 40° con respecto a la vertical?

77. Calcule el torque en torno al eje de la z que está fuera de la página en el origen en la siguiente figura, dado que
$F_1 = 3\,\text{N},\ \ F_2 = 2\,\text{N},\ \ F_3 = 3\,\text{N},\ \ F_4 = 1{,}8\,\text{N}.$

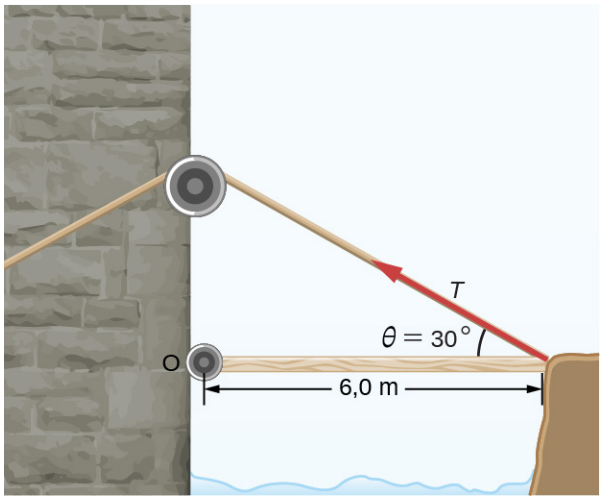


78. Un balancín tiene una longitud de 10,0 m y una masa uniforme de 10,0 kg, y reposa en un ángulo de 30° con respecto al suelo (vea la siguiente figura). El apoyo está situado a 6,0 m. ¿Qué magnitud de fuerza hay que aplicar perpendicularmente al balancín en el extremo elevado para que apenas empiece a rotar?

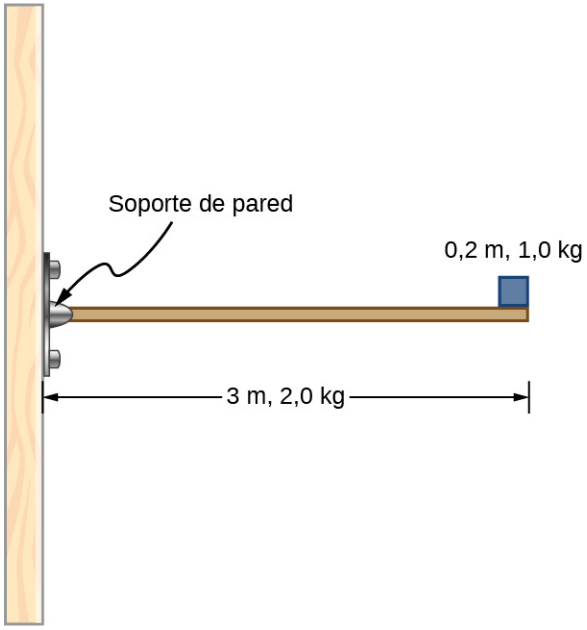


79. Un péndulo consiste en una varilla de 1 kg de masa y 1m de longitud, conectada a un apoyo con una esfera sólida unida en el otro extremo, con masa de 0,5 kg y radio de 30 cm. ¿Cuál es el torque en torno al apoyo cuando el péndulo forma un ángulo de 30° con respecto a la vertical?

80. Un torque de $5{,}00 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}$ es necesario para levantar un puente levadizo (vea la siguiente figura). ¿Cuál es la tensión necesaria para producir este torque? ¿Sería más fácil levantar el puente levadizo si el ángulo θ fuera más grande o más pequeño?



81. Una viga horizontal de 3 m de longitud y 2,0 kg de masa tiene una masa de 1,0 kg y 0,2 m de anchura apoyada en el extremo de la viga (vea la figura siguiente). ¿Cuál es el torque del sistema sobre el soporte en la pared?



82. ¿Qué fuerza debe aplicarse al extremo de una varilla a lo largo del eje de la x de 2,0 m de longitud para producir un torque en la varilla en torno al origen de $8{,}0\hat{\mathbf{k}}$ N · m?

83. Cuál es el torque en torno al origen de la fuerza $(5{,}0\hat{\mathbf{i}} - 2{,}0\hat{\mathbf{j}} + 1{,}0\hat{\mathbf{k}})$ N si se aplica en el punto cuya posición es: $\vec{\mathbf{r}} = \left(-2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}}\right)$ m?

10.7 Segunda ley de Newton para la rotación

84. Tiene una piedra de amolar (un disco) que pesa 90,0 kg, tiene un radio de 0,340 m y gira a 90,0 rpm, y presiona un hacha de acero contra ella con una fuerza radial de 20,0 N. (a) Suponiendo que el coeficiente cinético de fricción entre el

acero y la piedra es de 0,20, calcule la aceleración angular de la piedra de amolar. (b) ¿Cuántas vueltas dará la piedra antes de llegar al reposo?

85. Supongamos que ejerce una fuerza de 180 N tangencial a una piedra de amolar (un disco macizo) de 0,280 m de radio y 75,0 kg de peso. (a)¿Qué torque se ejerce? (b) ¿Cuál es la aceleración angular suponiendo que la fricción opuesta es insignificante? (c) ¿Cuál es la aceleración angular si hay una fuerza de fricción opuesta de 20,0 N ejercida a 1,50 cm del eje?

86. Un volante de inercia ($I = 50\,\text{kg-m}^2$) partiendo del reposo adquiere una velocidad angular de 200,0 rad/s mientras está sometido a un torque constante de un motor durante 5 s. (a) ¿Cuál es la aceleración angular del volante de inercia? (b) ¿Cuál es la magnitud del torque?

87. Se aplica un torque constante a un cuerpo rígido cuyo momento de inercia es $4{,}0\,\text{kg-m}^2$ alrededor del eje de rotación. Si la rueda parte del reposo y alcanza una velocidad angular de 20,0 rad/s en 10,0 s, ¿cuál es el torque aplicado?

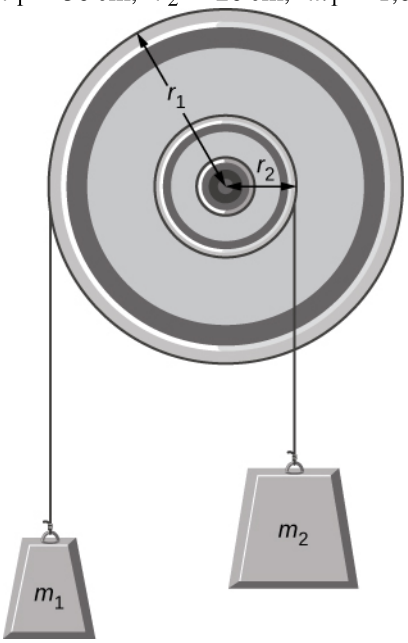
88. Se aplica un torque de 50,0 N-m a una rueda de esmeril ($I = 20{,}0\,\text{kg-m}^2$) durante 20 s. (a) Si parte del reposo, ¿cuál es la velocidad angular de la rueda de esmeril después de retirar el torque? (b) ¿En qué ángulo se desplaza la rueda mientras se aplica el torque?

89. Un volante de inercia ($I = 100{,}0\,\text{kg-m}^2$) que rota a 500,0 rev/min se pone en reposo por fricción en 2,0 min. ¿Cuál es el torque de fricción en el volante de inercia?

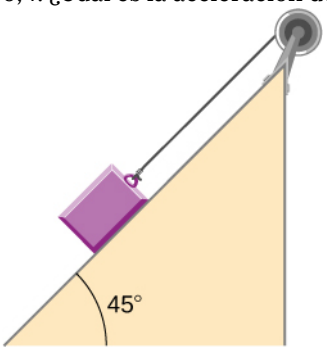
90. Una rueda de esmeril, cilíndrica y uniforme, de 50,0 kg de masa y 1,0 m de diámetro se pone en marcha mediante un motor eléctrico. La fricción en los rodamientos es despreciable. (a) ¿Qué torque debe aplicarse a la rueda para que pase del reposo a 120 rev/min en 20 revoluciones? (b) Una herramienta cuyo coeficiente de fricción cinética con la rueda es de 0,60 se presiona perpendicularmente contra la rueda con una fuerza de 40,0 N. ¿Qué torque debe suministrar el motor para mantener la rueda girando a una velocidad angular constante?

91. Supongamos que la Tierra no rotaba cuando se formó. Sin embargo, tras la aplicación de un torque uniforme después de 6 días, giraba a 1 revolución/día. (a) ¿Cuál fue la aceleración angular durante los 6 días? (b) ¿Qué torque se aplicó a la Tierra durante este periodo? (c) ¿Qué fuerza tangente a la Tierra en su ecuador produciría este torque?

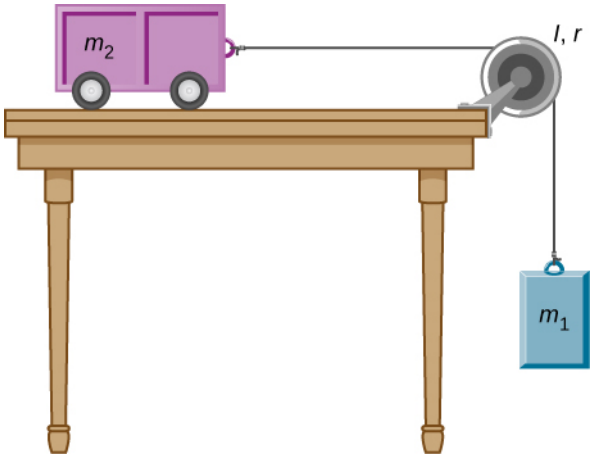
92. Una polea de momento de inercia de $2{,}0\,\text{kg-m}^2$ se monta en una pared como se muestra en la siguiente figura. Las cuerdas ligeras se enrollan alrededor de las dos circunferencias de la polea y se fijan las pesas. ¿Cuáles son (a) la aceleración angular de la polea y (b) la aceleración lineal de las pesas? Supongamos los siguientes datos:
$r_1 = 50\,\text{cm},\ r_2 = 20\,\text{cm},\ m_1 = 1{,}0\,\text{kg},\ m_2 = 2{,}0\,\text{kg}.$



93. Un bloque de masa 3 kg se desliza por un plano inclinado en un ángulo de 45° con una cuerda de sujeción sin masa unida a una polea de 1 kg de masa y 0,5 m de radio en la parte superior de la pendiente (vea la figura siguiente). La polea puede se puede tomar como un disco. El coeficiente de fricción cinética en el plano es de 0,4. ¿Cuál es la aceleración del bloque?



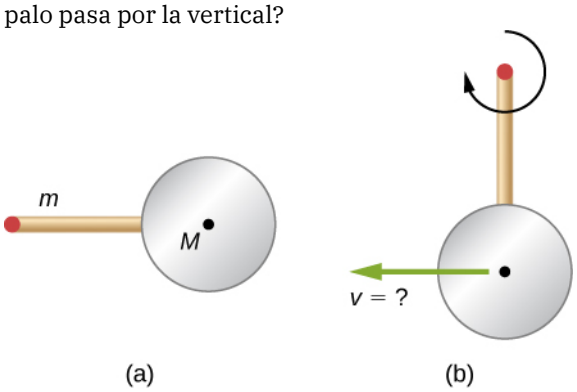
94. El carro que se muestra a continuación se desplaza por el tablero de la mesa a medida que el bloque cae. ¿Cuál es la aceleración del carro? Descarte la fricción y suponga los siguientes
datos:$m_1 = 2{,}0\,\text{kg}, m_2 = 4{,}0\,\text{kg}, I = 0{,}4\,\text{kg-m}^2, r = 20\,\text{cm}$



95. Una varilla uniforme de masa y longitud se sujeta verticalmente con dos cuerdas de masa despreciable, como se muestra a continuación. (a) Inmediatamente después de cortar la cuerda, ¿cuál es la aceleración lineal del extremo libre de la varilla? (b) ¿De la parte central de la varilla?



96. Un palo delgado de masa 0,2 kg y longitud $L = 0{,}5$ m está unido al borde de un disco metálico de masa $M = 2{,}0$ kg y radio $R = 0{,}3$ m. El palo es rota libremente en torno a un eje horizontal por su otro extremo (vea la siguiente figura). (a) Si la combinación se suelta con el palo horizontal, ¿cuál es la rapidez del centro del disco cuando el palo está en vertical? (b) ¿Cuál es la aceleración del centro del disco en el instante en que se suelta el palo? (c) ¿En el instante en que el palo pasa por la vertical?



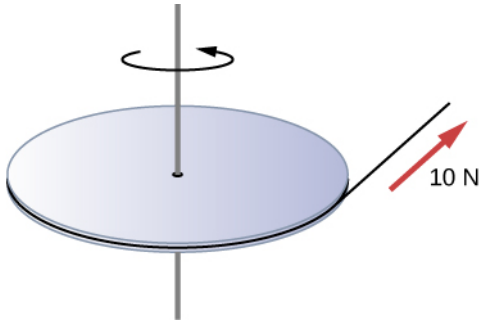
10.8 Trabajo y potencia en el movimiento rotacional

97. Un aerogenerador rota a 20 rev/min. Si su generación de potencia es de 2,0 MW, ¿cuál es el torque que produce el viento en el aerogenerador?

98. Un cilindro de arcilla de 20 cm de radio en un torno de alfarero gira a una tasa constante de 10 rev/s. El alfarero aplica una fuerza de 10 N a la arcilla con sus manos, donde el coeficiente de fricción es de 0,1 entre sus manos y la arcilla. ¿Cuál es la potencia que el alfarero tiene que entregar al torno para que siga girando a esta tasa constante?

99. Una piedra de amolar, cilíndrica y uniforme tiene una masa de 10 kg y un radio de 12 cm. (a) ¿Cuál es la energía cinética rotacional de la piedra de amolar cuando rota a $1{,}5 \times 10^3$ rev/min? b) Después de apagar el motor de la piedra de amolar, se presiona una cuchilla contra el borde exterior de la piedra de amolar con una fuerza perpendicular de 5,0 N. El coeficiente de fricción cinética entre la piedra de amolar y la cuchilla es de 0,80. Utilice el teorema de trabajo-energía para determinar cuántas vueltas da la piedra de amolar antes de pararse.

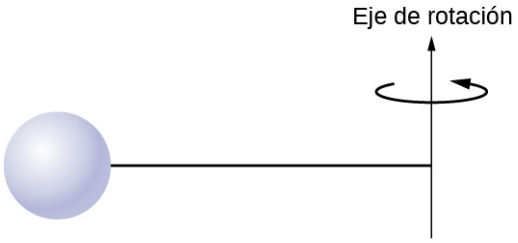
100. Un disco uniforme de 500 kg de masa y 0,25 m de radio está montado sobre rodamientos sin fricción para que pueda rotar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro (vea la siguiente figura). Se enrolla una cuerda alrededor del borde del disco y se hala de ella con una fuerza de 10 N. (a) ¿Qué trabajo realiza la fuerza en el instante en que el disco hace tres revoluciones, partiendo del reposo? (b) Determine el torque debido a la fuerza y, a continuación, calcule el trabajo realizado por este torque en el instante en que el disco hace tres revoluciones. (c) ¿Cuál es la velocidad angular en ese instante? (d) ¿Cuál es la generación de potencia de la fuerza en ese instante?



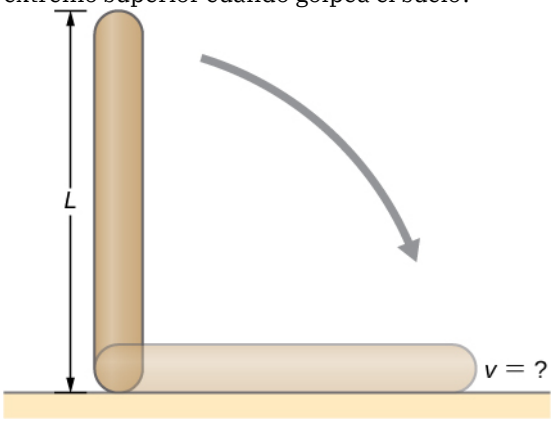
101. Una hélice es acelerada desde el reposo hasta

una velocidad angular de 1000 rev/min durante un periodo de 6,0 segundos por un torque constante de $2{,}0 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}$. (a) ¿Cuál es el momento de inercia de la hélice? (b) ¿Qué potencia se proporciona a la hélice 3,0 s después de que empiece su rotación?

102. Una esfera de 1,0 kg de masa y 0,5 m de radio está unida al extremo de una varilla sin masa de 3,0 m de longitud. La varilla rota en torno a un eje que se encuentra en el extremo opuesto de la esfera (vea abajo). El sistema rota horizontalmente alrededor del eje a una velocidad constante de 400 rev/min. Después de rotar a esta rapidez angular en el vacío, se introduce la resistencia del aire y proporciona una fuerza de 0,15 N en la esfera opuesta a la dirección del movimiento. ¿Cuál es la potencia que proporciona la resistencia del aire al sistema 100,0 s después de introducir la resistencia del aire?

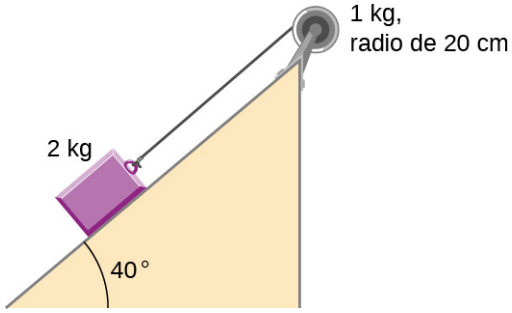


103. Una varilla uniforme de longitud L y masa M se sostiene verticalmente con un extremo apoyado en el suelo, como se muestra a continuación. Cuando la varilla se suelta, rota alrededor de su extremo inferior hasta que toca el suelo. Suponiendo que el extremo inferior de la varilla no resbale, ¿cuál es la velocidad lineal del extremo superior cuando golpea el suelo?

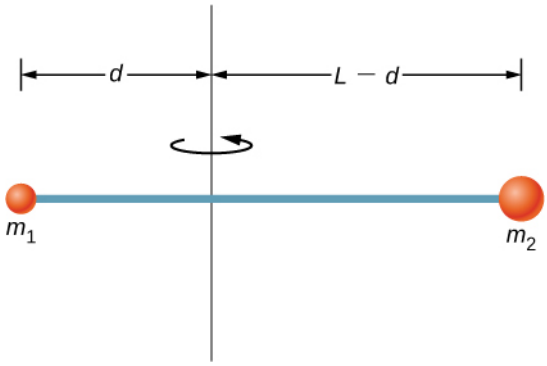


104. Un atleta en un gimnasio aplica una fuerza constante de 50 N a los pedales de una bicicleta a una tasa de movimiento de los pedales de 60 rev/min. La longitud de los brazos de los pedales es de 30 cm. ¿Cuál es la potencia que aplica el atleta a la bicicleta?

105. Un bloque de 2 kg en un plano inclinado sin fricción a $40°$ tiene una cuerda atada a una polea de 1 kg de masa y 20 cm de radio (vea la siguiente figura). (a) ¿Cuál es la aceleración del bloque por el plano? (b) ¿Cuál es el trabajo que realiza la cuerda sobre la polea?



106. Pequeños cuerpos de masa m_1 y m_2 se fijan en los extremos opuestos de una varilla rígida y delgada, de longitud L y masa M. La varilla está montada de manera que rote libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical (vea más abajo). A qué distancia d de m_1 debería estar el eje de rotación de tal manera que se requiera una cantidad mínima de trabajo para hacer rotar la varilla a una velocidad angular ω?



Problemas Adicionales

107. Un ciclista circula de forma que las ruedas de la bicicleta tienen una tasa de rotación de 3,0 rev/s. Si el ciclista frena de forma que la tasa de rotación de las ruedas disminuye a una tasa de $0{,}3 \text{ rev/s}^2$, ¿cuánto tiempo tarda el ciclista en detenerse por completo?

108. Calcule la velocidad angular del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol.

109. Un tocadiscos que rota a 33 1/3 rev/min desacelera y se detiene en 1,0 min. (a) ¿Cuál es la aceleración angular del tocadiscos suponiendo que es constante? (b) ¿Cuántas revoluciones da el tocadiscos mientras se detiene?

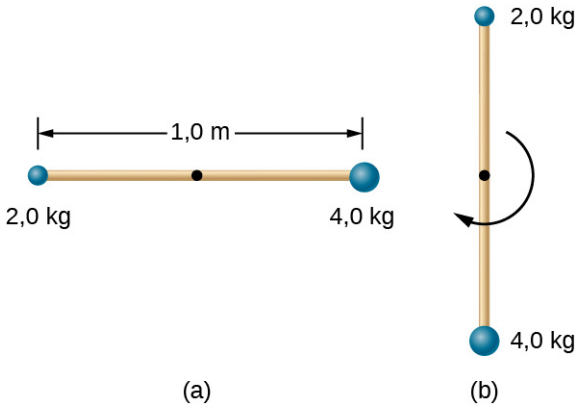
110. Con la ayuda de una cuerda, un giroscopio acelera desde el reposo hasta 32 rad/s en 0,40 s, a una aceleración angular constante. (a) ¿Cuál es su aceleración angular en rad/s^2? (b) ¿Cuántas revoluciones pasa en el proceso?

111. Supongamos que un poco de polvo cae en un CD. Si la velocidad de giro del CD es de 500 rpm, y el polvo está a 4,3 cm del centro, ¿cuál es la distancia total recorrida por el polvo en 3 minutos? (Ignore las aceleraciones debidas a lograr que el CD esté en rotación).

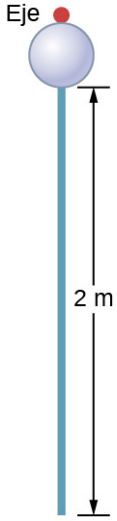
112. Un sistema de partículas puntuales rota alrededor de un eje fijo a 4 rev/s. Las partículas están fijas unas respecto a otras. Las masas y distancias al eje de las partículas puntuales son $m_1 = 0{,}1\ \text{kg}, r_1 = 0{,}2\ \text{m}$, $m_2 = 0{,}05\ \text{kg}, r_2 = 0{,}4\ \text{m}$, $m_3 = 0{,}5\ \text{kg}, r_3 = 0{,}01\ \text{m}$. (a) ¿Cuál es el momento de inercia del sistema? (b) ¿Cuál es la energía cinética rotacional del sistema?

113. Calcule el momento de inercia de un patinador dada la siguiente información. (a) El patinador de 60,0 kg se calcula aproximadamente como un cilindro con un radio de 0,110 m. (b) El patinador con los brazos extendidos calcula aproximadamente como un cilindro que pesa 52,5 kg, tiene un radio de 0,110 m y tiene dos brazos de 0,900 m de longitud que pesan 3,75 kg cada uno y se extienden en línea recta desde el cilindro como varillas que rotan sobre sus extremos.

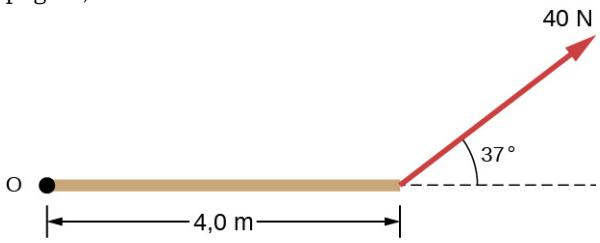
114. Un palo de 1,0 m de longitud y 6,0 kg de masa rota libremente en torno a un eje horizontal que pasa por el centro. En sus dos extremos se fijan pequeños cuerpos de masas 4,0 y 2,0 kg (vea la siguiente figura). El palo se libera de la posición horizontal. ¿Cuál es la velocidad angular del palo cuando oscila por la vertical?



115. Un péndulo consiste de una varilla de 2 m de longitud y 3 kg de masa, con una esfera sólida de 1 kg de masa y 0,3 m de radio unida a un extremo. El eje de rotación es el que se muestra a continuación. ¿Cuál es la velocidad angular del péndulo en su punto más bajo, si se suelta del reposo en un ángulo de 30°?



116. Calcule el torque de la fuerza de 40 N alrededor del eje que pasa por *O* y es perpendicular al plano de la página, como se muestra a continuación.



117. Dos niños empujan en lados opuestos de una puerta durante el juego. Ambos empujan horizontal y perpendicularmente a la puerta. Un niño empuja con una fuerza de 17,5 N a una distancia de 0,600 m de las bisagras, y el segundo niño empuja a una distancia de 0,450 m. ¿Qué fuerza debe ejercer el segundo niño para evitar que la puerta se mueva?

Supongamos que la fricción es despreciable.

118. La fuerza de $20\hat{\mathbf{j}}\,\text{N}$ se aplica en $\vec{\mathbf{r}} = (4{,}0\hat{\mathbf{i}} - 2{,}0\hat{\mathbf{j}})$ m. ¿Cuál es el torque de esta fuerza alrededor del origen?

119. Un motor de automóvil puede producir 200 N· m de torque. Calcule la aceleración angular producida si el 95,0 % de este torque se aplica al eje de transmisión, al eje y a las ruedas traseras de un auto, dada la siguiente información. El auto está suspendido para que las ruedas giren libremente. Cada rueda actúa como un disco de 15,0 kg que tiene un radio de 0,180 m. Las paredes de cada neumático actúan como un anillo anular de 2,00 kg que tiene un radio interior de 0,180 m y un radio exterior de 0,320 m. La banda de rodadura de cada neumático actúa como un aro de 10,0 kg de radio 0,330 m. El eje de 14,0 kg actúa como una varilla que tiene un radio de 2,00 cm. El eje de transmisión de 30,0 kg actúa como una varilla que tiene un radio de 3,20 cm.

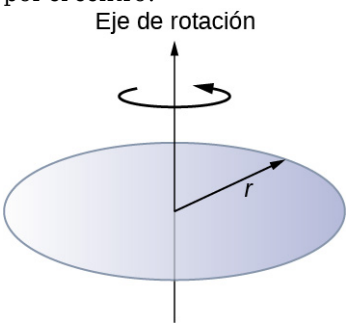
120. Una piedra de amolar con una masa de 50 kg y un radio de 0,8 m mantiene una tasa de rotación constante de 4,0 rev/s mediante un motor mientras se presiona una cuchilla contra el borde, con una fuerza de 5,0 N. El coeficiente de fricción cinética entre la piedra de amolar y la cuchilla es de 0,8. ¿Cuál es la potencia que proporciona el motor para mantener la piedra de amolar a una tasa de rotación constante?

Problemas De Desafío

121. La aceleración angular de un cuerpo rígido en rotación viene dada por $\alpha = (2{,}0 - 3{,}0t)\ \text{rad/s}^2$. Si el cuerpo comienza a rotar desde el reposo en $t = 0$, (a) ¿cuál es la velocidad angular? (b) ¿la posición angular? (c) ¿con qué ángulo rota en 10 s? (d) ¿dónde se encuentra el vector perpendicular al eje de rotación que indica $0°$ en $t = 0$ para $t = 10$ s?

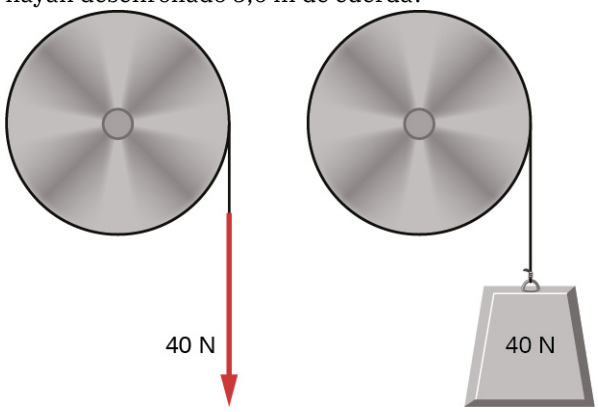
122. El día en la Tierra ha aumentado en 0,002 s en el último siglo. Si este aumento en el periodo de la Tierra es constante, ¿cuánto tiempo tardará la Tierra en llegar al reposo?

123. Un disco de masa m, radio R y área A tiene una densidad de masa superficial $\sigma = \frac{mr}{AR}$ (vea la siguiente figura). ¿Cuál es el momento de inercia del disco alrededor de un eje que pasa por el centro?



124. Zorch, el archienemigo del Hombre Rotación, decide ralentizar la rotación de la Tierra a una vez cada 28,0 h ejerciendo una fuerza opuesta y paralela en el ecuador. El Hombre Rotación no se preocupa inmediatamente, porque sabe que Zorch solo puede ejercer una fuerza de $40{,}00 \times 10^7\,\text{N}$ (un poco mayor que el empuje de un cohete Saturno V). ¿Cuánto tiempo debe empujar Zorch con esta fuerza para lograr su objetivo? (Este periodo da al Hombre Rotación tiempo para dedicarse a otros villanos).

125. Se enrolla una cuerda alrededor del borde de un cilindro macizo de radio 0,25 m, y se ejerce una fuerza constante de 40 N en la cuerda indicada, como se muestra en la siguiente figura. El cilindro está montado sobre rodamientos sin fricción y su momento de inercia es $6{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$. (a) Utilice el teorema de trabajo-energía para calcular la velocidad angular del cilindro después de que se hayan retirado 5,0 m de cuerda. (b) Si la fuerza de 40 N se sustituye por un peso de 40 N, ¿cuál es la velocidad angular del cilindro después de que se hayan desenrollado 5,0 m de cuerda?



CAPÍTULO 11
Momento angular



Figura 11.1 Un helicóptero tiene sus aspas de elevación principales girando para mantener la aeronave en el aire. Debido a la conservación del momento angular, el cuerpo del helicóptero querría girar en sentido contrario a las aspas, si no fuera por el pequeño rotor de la cola de la aeronave, que proporciona empuje para estabilizarla.

ESQUEMA DEL CAPITULO

11.1 Movimiento rodadura
11.2 Momento angular
11.3 Conservación del momento angular
11.4 Precesión de un giroscopio

INTRODUCCIÓN El momento angular es la contrapartida rotacional del momento lineal. Cualquier objeto masivo que rote en torno a un eje conlleva un momento angular, incluidos los volantes de inercia, los planetas, las estrellas, los huracanes, los tornados, los remolinos, etc. El helicóptero que aparece en la imagen de apertura del capítulo sirve para ilustrar el concepto de momento angular. Las aspas de elevación giran en torno a un eje vertical a través del cuerpo principal y transportan el momento angular. El cuerpo del helicóptero tiende a rotar en sentido contrario para conservar el momento angular. Los pequeños rotores de la cola de la aeronave proporcionan un contraempuje contra el cuerpo para evitar que esto ocurra, y el helicóptero se estabiliza por sí mismo. El concepto de conservación del momento angular se analiza más adelante en este capítulo. En la parte principal de este capítulo, exploramos las complejidades del momento angular de los cuerpos rígidos, como un trompo, y también de las partículas puntuales y los sistemas de partículas. Sin embargo, para ser exhaustivos, empezamos con un análisis del movimiento rodadura, que se basa en los conceptos del capítulo anterior.

11.1 Movimiento rodadura

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la física del movimiento rodadura sin deslizamiento.
- Explicar cómo se relacionan las variables lineales con las angulares para el caso del movimiento rodadura sin deslizamiento.
- Hallar la aceleración lineal y angular en el movimiento rodadura con y sin deslizamiento.
- Calcular la fuerza de fricción estática asociada al movimiento rodadura sin deslizamiento.
- Utilizar la conservación de energía para analizar el movimiento rodadura.

El movimiento rodadura es esa combinación común de movimiento rotacional y traslacional que vemos en todas partes, todos los días. Piense en las diferentes situaciones de ruedas que se mueven en un auto por una autopista, las ruedas de un avión que aterriza en una pista o las ruedas de un explorador robótico en otro planeta. Comprender las fuerzas y los torques que intervienen en el **movimiento rodadura** es un factor crucial en muchos tipos de situaciones diferentes.

Para analizar el movimiento rodadura en este capítulo, consulte la Figura 10.20 en Rotación de eje fijo para hallar los momentos de inercia de algunos objetos geométricos comunes. También sirve en otros cálculos que impliquen rotación.

Movimiento rodadura sin deslizamiento

El movimiento rodadura sin deslizamiento se ha observado desde la invención de la rueda. Por ejemplo, podemos observar la interacción de los neumáticos de un auto con la superficie de la carretera. Si el conductor pisa el acelerador hasta el fondo, de manera que los neumáticos giren sin que el auto avance, habrá fricción cinética entre las ruedas y la superficie de la carretera. Si el conductor pisa el acelerador lentamente, haciendo que el auto avance, entonces los neumáticos ruedan sin resbalar. Para la mayoría de la gente es sorprendente que, de hecho, la parte inferior de la rueda esté en reposo con respecto al suelo, lo que indica que debe haber fricción estática entre los neumáticos y la superficie de la carretera. En la Figura 11.2, la bicicleta está en movimiento y el ciclista se mantiene erguido. Los neumáticos están en contacto con la superficie de la carretera y, aunque están rodando, los partes inferiores de los neumáticos se deforman ligeramente, no resbalan y están en reposo con respecto a la superficie de la carretera durante un tiempo medible. Para que esto sea así, deberá haber fricción estática entre el neumático y la superficie de la carretera.

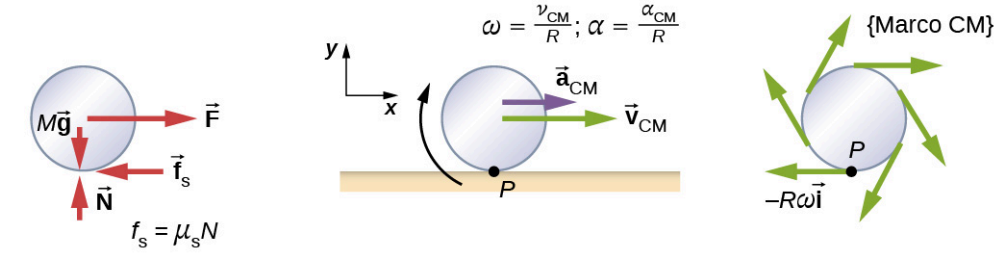


(a) (b)

FIGURA 11.2 (a) La bicicleta avanza y sus neumáticos no resbalan. La parte inferior de la rueda ligeramente deformada está en reposo con respecto a la superficie de la carretera durante un tiempo medible. (b) Esta imagen muestra que la parte superior de una rueda rodante aparece borrosa por su movimiento, pero la parte inferior está

instantáneamente en reposo (créditos: a. modificación del trabajo de Nelson Lourenço; b. modificación del trabajo de Colin Rose).

Para analizar la rodadura sin deslizamiento, primero derivamos las variables lineales de velocidad y aceleración del centro de masa de la rueda en términos de las variables angulares que describen el movimiento de la rueda. La situación se muestra en la Figura 11.3.



(a) Fuerzas en la rueda

(b) La rueda se mueve sin deslizarse

(c) El punto *P* tiene un vector velocidad en dirección negativa con respecto al centro de masa de la rueda

FIGURA 11.3 a) Una rueda es halada sobre una superficie horizontal por una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$. La fuerza de la fricción estática $\vec{\mathbf{f}}_{\mathrm{S}}, \left|\vec{\mathbf{f}}_{\mathrm{S}}\right| \leq \mu_{\mathrm{S}} N$ es lo suficientemente grande como para evitar que se deslice. (b) Los vectores de velocidad y aceleración lineal del centro de masa y las expresiones pertinentes para ω y α. El punto *P* está en reposo respecto a la superficie. (c) Respecto al marco del centro de masa (CM), el punto *P* tiene una velocidad lineal $-R\omega\hat{\mathbf{i}}$.

En la Figura 11.3(a), vemos los vectores de fuerza que intervienen para evitar el deslizamiento de la rueda. En (b), el punto *P* que toca la superficie está en reposo respecto a la superficie. En relación con el centro de masa, el punto *P* tiene una velocidad $-R\omega\hat{\mathbf{i}}$, donde *R* es el radio de la rueda y ω es la velocidad angular de la rueda en torno a su eje. Dado que la rueda está rodando, la velocidad de *P* con respecto a la superficie es su velocidad con respecto al centro de masa más la velocidad del centro de masa con respecto a la superficie:

$$\vec{\mathbf{v}}_P = -R\omega\hat{\mathbf{i}} + v_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{i}}.$$

Dado que la velocidad de *P* con respecto a la superficie es cero, $v_P = 0$, esto indica que

$$v_{\mathrm{CM}} = R\omega. \qquad 11.1$$

Así, la velocidad del centro de masa de la rueda es su radio por la velocidad angular alrededor de su eje. Mostramos la correspondencia de la variable lineal en el lado izquierdo de la ecuación con la variable angular en el lado derecho de la ecuación. Esto se hace a continuación para la aceleración lineal.

Si diferenciamos la Ecuación 11.1 en el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos una expresión para la aceleración lineal del centro de masa. En el lado derecho de la ecuación, *R* es una constante y dado que $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, tenemos

$$a_{\mathrm{CM}} = R\alpha. \qquad 11.2$$

Además, podemos hallar la distancia que recorre la rueda en términos de variables angulares al consultar la Figura 11.4. Cuando la rueda se mueve desde el punto *A* hasta el punto *B*, su superficie exterior se traza en el suelo exactamente por la distancia recorrida, que es d_{CM}. Vemos en la Figura 11.4 que la longitud de la superficie exterior que se traza en el suelo es la longitud del arco $R\theta$. Al igualar las dos distancias, obtenemos

$$d_{\mathrm{CM}} = R\theta. \qquad 11.3$$

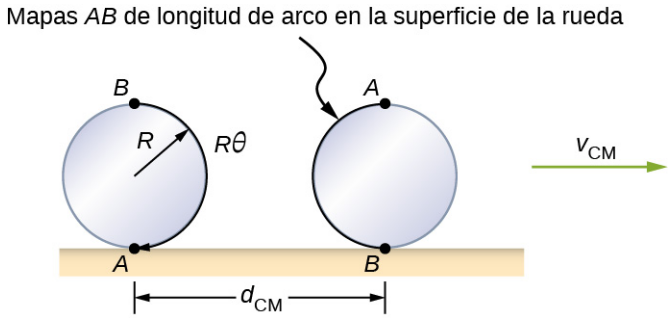


FIGURA 11.4 A medida que la rueda se mueve sobre la superficie, la longitud del arco $R\theta$ de A a B se traza en la superficie, correspondiente a la distancia d_{CM} que el centro de masa se ha movido.

EJEMPLO 11.1

Rodar hacia abajo por un plano inclinado

Un cilindro macizo rueda hacia abajo por un plano inclinado sin deslizarse, partiendo del reposo. Tiene masa m y radio r. (a) ¿Cuál es su aceleración? (b) ¿Qué condición debe cumplir el coeficiente de fricción estática μ_{S} para que el cilindro no se deslice?

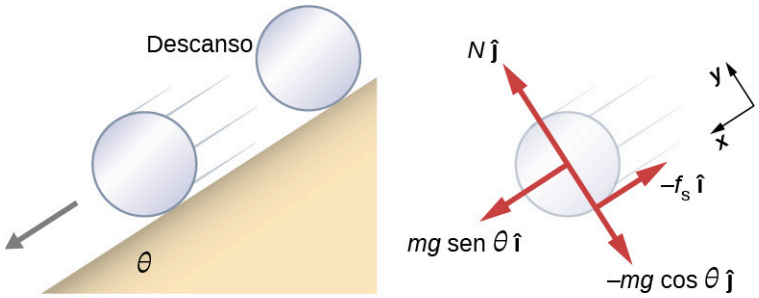
Estrategia

Dibuje un esquema y un diagrama de cuerpo libre, y elija un sistema de coordenadas. Ponemos la x en la dirección hacia abajo del plano y la y hacia arriba perpendicular al plano. Identifique las fuerzas implicadas. Se trata de la fuerza normal, la fuerza de gravedad y la fuerza debida a la fricción. Escriba las leyes de Newton en las direcciones de la x y la y, y la ley de Newton para la rotación, y luego resuelva la aceleración y la fuerza debida a la fricción.

Solución

a. El diagrama de cuerpo libre y el esquema se muestran en la Figura 11.5, incluso la fuerza normal, los componentes del peso y la fuerza de fricción estática. Apenas hay suficiente fricción para que el cilindro siga rodando sin deslizarse. Dado que no hay deslizamiento, la magnitud de la fuerza de fricción es menor o igual a $\mu_s N$. Al escribir las leyes de Newton en las direcciones de la x y la y, tenemos

$$\sum F_x = ma_x; \quad \sum F_y = ma_y.$$



Rodar sin resbalar Diagrama de cuerpo libre

FIGURA 11.5 Un cilindro macizo rueda hacia abajo por un plano inclinado sin deslizarse del reposo. El sistema de coordenadas tiene la x en la dirección hacia abajo del plano inclinado y la y perpendicular al plano. El diagrama de cuerpo libre se muestra con la fuerza normal, la fuerza de fricción estática y los componentes del peso $m\vec{g}$. La fricción hace que el cilindro ruede hacia abajo por el plano en lugar de deslizarse.

Sustituyendo a partir del diagrama de cuerpo libre,

$$\begin{aligned} mg\,\text{sen}\,\theta - f_\text{s} &= m(a_\text{CM})_x, \\ N - mg\cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

podemos entonces resolver la aceleración lineal del centro de masa a partir de estas ecuaciones:

$$a_\text{CM} = g\text{sen}\,\theta - \frac{f_\text{s}}{m}$$

Sin embargo, es útil expresar la aceleración lineal en términos del momento de inercia. Para ello, escribimos la segunda ley de Newton para la rotación,

$$\sum \tau_\text{CM} = I_\text{CM}\alpha.$$

Los torques se calculan en torno al eje que pasa por el centro de masa del cilindro. El único torque que no es cero lo proporciona la fuerza de fricción. Tenemos

$$f_\text{s} r = I_\text{CM}\alpha.$$

Finalmente, la aceleración lineal se relaciona con la aceleración angular mediante

$$(a_\text{CM})_x = r\alpha.$$

Estas ecuaciones pueden utilizarse para resolver $a_\text{CM}, \alpha,$ y f_s en términos del momento de inercia, donde hemos suprimido el subíndice x. Reescribimos a_CM en términos del componente vertical de la gravedad y de la fuerza de fricción, y hacemos las siguientes sustituciones.

$$f_\text{s} = \frac{I_\text{CM}\alpha}{r} = \frac{I_\text{CM}a_\text{CM}}{r^2}$$

De ello obtenemos

$$\begin{aligned} a_\text{CM} &= g\,\text{sen}\,\theta - \frac{I_\text{CM}a_\text{CM}}{mr^2}, \\ &= \frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{m+(I_\text{CM}/r^2)}. \end{aligned}$$

Observe que este resultado es independiente del coeficiente de fricción estática, μ_s.
Dado que tenemos un cilindro macizo, a partir de la Figura 10.20, tenemos $I_\text{CM} = mr^2/2$ y

$$a_\text{CM} = \frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{m + (mr^2/2r^2)} = \frac{2}{3}g\,\text{sen}\,\theta.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\alpha = \frac{a_\text{CM}}{r} = \frac{2}{3r}g\,\text{sen}\,\theta.$$

b. Dado que no se produce el deslizamiento, $f_\text{s} \le \mu_\text{s} N$. Resolviendo la fuerza de fricción,

$$f_\text{s} = I_\text{CM}\frac{\alpha}{r} = I_\text{CM}\frac{(a_\text{CM})}{r^2} = \frac{I_\text{CM}}{r^2}\left(\frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{m + (I_\text{CM}/r^2)}\right) = \frac{mgI_\text{CM}\,\text{sen}\,\theta}{mr^2 + I_\text{CM}}.$$

Sustituyendo esta expresión en la condición de no deslizamiento, y observando que $N = mg\cos\theta$, tenemos

$$\frac{mgI_\text{CM}\,\text{sen}\,\theta}{mr^2 + I_\text{CM}} \le \mu_\text{s} mg\cos\theta$$

o

$$\mu_\text{s} \ge \frac{\tan\theta}{1 + (mr^2/I_\text{CM})}.$$

Para el cilindro macizo, esto se convierte en

$$\mu_s \geq \frac{\tan\theta}{1+(2mr^2/mr^2)} = \frac{1}{3}\tan\theta.$$

Importancia

a. La aceleración lineal es linealmente proporcional a sen θ. Así, cuanto mayor sea el ángulo de la pendiente, mayor será la aceleración lineal, como cabría esperar. La aceleración angular, sin embargo, es linealmente proporcional al sen θ e inversamente proporcional al radio del cilindro. Así, cuanto mayor sea el radio, menor será la aceleración angular.
b. Para que no se produzca ningún deslizamiento, el coeficiente de fricción estática deberá ser mayor o igual a $(1/3)\tan\theta$. Así, cuanto mayor sea el ángulo de inclinación, mayor deberá ser el coeficiente de fricción estática para evitar el deslizamiento del cilindro.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.1

Un cilindro hueco se encuentra en una pendiente con un ángulo de $60°$. El coeficiente de fricción estática en la superficie es $\mu_s = 0{,}6$. (a) ¿Rodará el cilindro sin deslizarse? (b) ¿Rodará un cilindro macizo sin deslizarse?

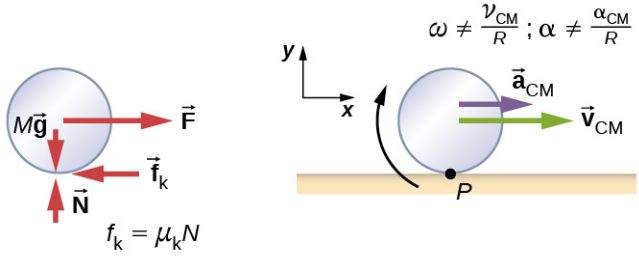
Vale la pena repetir la ecuación derivada en este ejemplo para la aceleración de un objeto que rueda sin deslizar:

$$a_{CM} = \frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{m+(I_{CM}/r^2)}. \qquad 11.4$$

Esta es una ecuación muy útil para resolver problemas de rodadura sin deslizamiento. Observe que la aceleración es menor que la de un objeto que se desliza por un plano sin fricción y sin rotación. La aceleración también será diferente para dos objetos en rotación con distintas inercias rotacionales.

Movimiento rodadura con deslizamiento

En el caso del movimiento rodadura con deslizamiento, debemos utilizar el coeficiente de fricción cinética, que da lugar a la fuerza de fricción cinética dado que no existe fricción estática. La situación se muestra en la Figura 11.6. En caso de deslizamiento, $v_{CM} - R\omega \neq 0$, porque el punto P de la rueda no está en reposo en la superficie, y $v_P \neq 0$. Así, $\omega \neq \frac{v_{CM}}{R}$, $\alpha \neq \frac{a_{CM}}{R}$.



(a) Fuerzas en la rueda (b) La rueda se mueve y se desliza

FIGURA 11.6 (a) La fricción cinética se produce entre la rueda y la superficie porque la rueda desliza. (b) Las relaciones simples entre las variables lineales y angulares ya no son válidas.

EJEMPLO 11.2

Rodar hacia abajo por un plano inclinado con deslizamiento

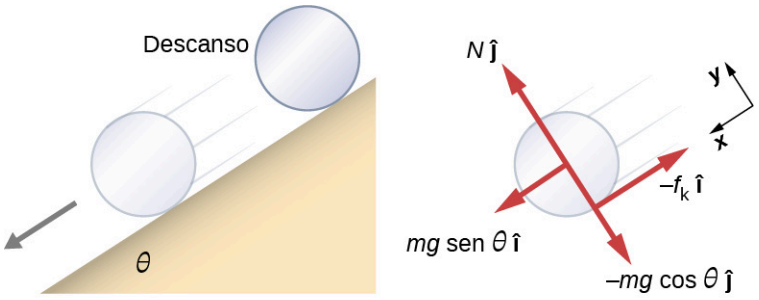
Un cilindro macizo rueda hacia abajo por un plano inclinado desde el reposo y sufre un deslizamiento (Figura

11.7). Tiene una masa m y un radio r. (a) ¿Cuál es su aceleración lineal? (b) ¿Cuál es su aceleración angular en torno a un eje que pasa por el centro de masa?

Estrategia

Dibuje un esquema y un diagrama de cuerpo libre que muestre las fuerzas implicadas. El diagrama de cuerpo libre es similar al caso sin deslizamiento, excepto por la fuerza de fricción, que es cinética en lugar de estática. Utilice la segunda ley de Newton para resolver la aceleración en la dirección de la x. Utilice la segunda ley de Newton para la rotación para resolver la aceleración angular.

Solución



La rueda se mueve y se desliza Diagrama de cuerpo libre

FIGURA 11.7 Un cilindro macizo rueda hacia abajo por un plano inclinado desde el reposo y sufre un deslizamiento. El sistema de coordenadas tiene la x en la dirección hacia abajo del plano inclinado y la y hacia arriba perpendicular al plano. El diagrama de cuerpo libre muestra la fuerza normal, la fuerza de fricción cinética y los componentes del peso $m\vec{g}$.

La suma de las fuerzas en la dirección de la y es cero, por lo que la fuerza de fricción es ahora $f_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{k} N = \mu_\mathrm{k} mg\cos\theta$.

La segunda ley de Newton en la dirección de la x se convierte en

$$\sum F_x = ma_x,$$
$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu_\mathrm{k} mg\cos\theta = m(a_\mathrm{CM})_x,$$

o

$$(a_\mathrm{CM})_x = g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu_\mathrm{k}\cos\theta).$$

La fuerza de fricción proporciona el único torque en torno al eje que pasa por el centro de masa, por lo que la segunda ley de Newton para la rotación se convierte en

$$\sum \tau_\mathrm{CM} = I_\mathrm{CM}\alpha,$$
$$f_\mathrm{k} r = I_\mathrm{CM}\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha.$$

Resolviendo para α, tenemos

$$\alpha = \frac{2f_\mathrm{k}}{mr} = \frac{2\mu_\mathrm{k} g\cos\theta}{r}.$$

Importancia

Escribimos la aceleración lineal y angular en términos del coeficiente de fricción cinética. La aceleración lineal es la misma que la calculada para un objeto que se desliza por un plano inclinado con fricción cinética. La aceleración angular sobre el eje de rotación es linealmente proporcional a la fuerza normal, que depende del coseno del ángulo de inclinación. Dado que $\theta \to 90°$, esta fuerza llega a cero y, por tanto, la aceleración angular llega a cero.

Conservación de la energía mecánica en el movimiento rodadura

En el capítulo anterior, hemos introducido la energía cinética rotacional. Cualquier objeto que ruede lleva consigo energía cinética rotacional, así como energía cinética traslacional y energía potencial si el sistema lo requiere. Incluyendo la energía potencial gravitacional, la energía mecánica total de un objeto que rueda es

$$E_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega^2 + mgh.$$

En ausencia de cualquier fuerza no conservativa que saque energía del sistema en forma de calor, la energía total de un objeto que rueda sin deslizar se conserva y es constante durante todo el movimiento. Ejemplos en los que la energía no se conserva son un objeto que rueda y desliza, la producción de calor como resultado de la fricción cinética y un objeto que rueda y encuentra resistencia del aire.

Se preguntará por qué un objeto que rueda y no se desliza conserva energía, ya que la fuerza de fricción estática no es conservativa. La respuesta se puede encontrar en la Figura 11.3. El punto P en contacto con la superficie está en reposo con respecto a la superficie. Por lo tanto, su desplazamiento infinitesimal $d\vec{\mathbf{r}}$ con respecto a la superficie es cero, y el trabajo incremental que realiza la fuerza de fricción estática es cero. Podemos aplicar la conservación de energía a nuestro estudio del movimiento rodadura para obtener algunos resultados interesantes.

EJEMPLO 11.3

Explorador Curiosity

El explorador *Curiosity*, mostrado en la Figura 11.8, se desplegó en Marte el 6 de agosto de 2012. Las ruedas del explorador tienen un radio de 25 cm. Supongamos que los astronautas llegan a Marte en el año 2050 y encuentran el *Curiosity*, ahora inoperante, en la ladera de una cuenca. Mientras desmontan el explorador, un astronauta pierde accidentalmente el agarre de una de las ruedas, que gira sin deslizarse hasta el fondo de la cuenca, 25 metros más abajo. Si la rueda tiene una masa de 5 kg, ¿cuál es su velocidad en el fondo de la cuenca?



FIGURA 11.8 El explorador *Curiosity* del Laboratorio Científico de Marte de la NASA durante las pruebas realizadas el 3 de junio de 2011. El lugar se encuentra dentro de la Instalación de Ensamblaje de Naves Espaciales en el Laboratorio de Propulsión a Chorro de la NASA en Pasadena, California (créditos: NASA / Laboratorio de Propulsión a Chorro [Jet Propulsion Laboratory, JPL] - Instituto de Tecnología de California [California Institute of Technology, Caltech]).

Estrategia

Utilizamos la conservación de energía mecánica para analizar el problema. En la cima de la colina, la rueda está en reposo y solo tiene energía potencial. En el fondo de la cuenca, la rueda tiene energía cinética rotacional y traslacional, que deberá ser igual a la energía potencial inicial por conservación de energía. Dado que la rueda se mueve sin deslizarse, utilizamos la relación $v_{\text{CM}} = r\omega$ para relacionar las variables traslacionales con las rotacionales en la ecuación de conservación de energía. A continuación, resolvemos la velocidad. En la Figura 11.8, vemos que un cilindro hueco es una buena aproximación para la rueda, por lo que podemos utilizar este momento de inercia para simplificar el cálculo.

Solución

La energía en la parte superior de la cuenca es igual a la energía en la parte inferior:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2.$$

Las cantidades conocidas son $I_{\text{CM}} = mr^2$, $r = 0{,}25\ \text{m}$, y $h = 25{,}0\ \text{m}$.

Reescribimos la ecuación de conservación de energía al eliminar ω al utilizar $\omega = \frac{v_{\text{CM}}}{r}$. Tenemos

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{v_{\text{CM}}^2}{r^2}$$

o

$$gh = \frac{1}{2}v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}v_{\text{CM}}^2 \Rightarrow v_{\text{CM}} = \sqrt{gh}.$$

En Marte, la aceleración de la gravedad es $3{,}71\ \text{m/s}^2$, que da la magnitud de la velocidad en el fondo de la cuenca como

$$v_{\text{CM}} = \sqrt{(3{,}71\ \text{m/s}^2)25{,}0\ \text{m}} = 9{,}63\ \text{m/s}.$$

Importancia

Se trata de un resultado bastante preciso si se tiene en cuenta que Marte tiene muy poca atmósfera, y la pérdida de energía debida a la resistencia del aire sería mínima. El resultado también supone que el terreno es liso, de manera que la rueda no se toparía con rocas y baches en el camino.

Además, en este ejemplo, la energía cinética, o energía del movimiento, se reparte por igual entre el movimiento lineal y rotacional. Si observamos los momentos de inercia en la Figura 10.20, vemos que el cilindro hueco tiene el mayor momento de inercia para un radio y una masa dados. Si las ruedas del explorador fueran sólidas y se tomaran como cilindros sólidos, por ejemplo, habría más energía cinética en el movimiento lineal que en el movimiento rotacional. Esto daría a la rueda una velocidad lineal mayor que si se toma como un cilindro hueco. Así, el cilindro macizo llegaría al fondo de la cuenca más rápido que el cilindro hueco.

11.2 Momento angular

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la naturaleza vectorial del momento angular.
- Encontrar el momento angular total y el torque alrededor de un origen designado de un sistema de partículas.
- Calcular el momento angular de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo.
- Calcular el torque de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo.
- Utilizar la conservación del momento angular en el análisis de objetos que cambian su tasa de rotación.

¿Por qué la Tierra gira? ¿Qué fue lo que hizo que empezara a girar? ¿Por qué la atracción gravitacional de la Tierra no hace que la Luna se estrelle contra la Tierra? ¿Cómo consigue una patinadora de hielo girar cada vez más rápido simplemente poniendo los brazos contra su cuerpo? ¿Por qué no tiene que ejercer un torque para girar más rápido?

Este tipo de preguntas tienen respuestas basadas en el momento angular, el análogo rotacional del momento lineal. En este capítulo, primero definimos y luego exploramos el momento angular desde diversos puntos de vista. Sin embargo, primero investigamos el momento angular de una sola partícula. Esto nos permite desarrollar el momento angular para un sistema de partículas y para un cuerpo rígido con simetría cilíndrica.

Momento angular de una sola partícula

La Figura 11.9 muestra una partícula en una posición $\vec{\mathbf{r}}$ con un momento lineal $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ con respecto al origen. Aunque la partícula no gire en torno al origen, aun así, podemos definir el momento angular en términos del vector de posición y del momento lineal.

Momento angular de una partícula

El **momento angular** $\vec{\mathbf{l}}$ de una partícula se define como el producto cruz de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$, y es perpendicular al plano que contiene a $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}. \qquad 11.5$$

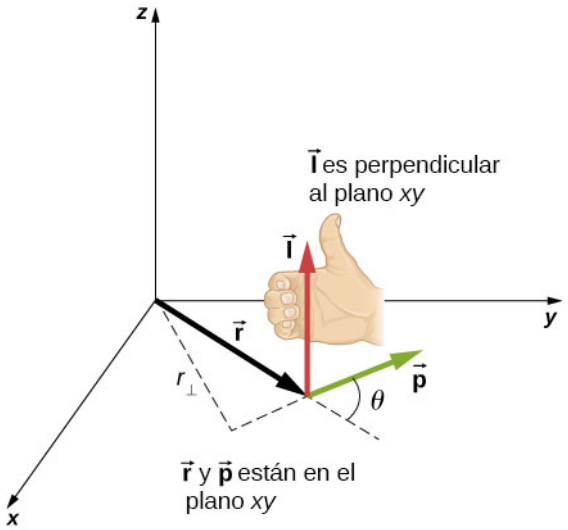


FIGURA 11.9 En el espacio tridimensional, el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ localiza una partícula en el plano *xy* con un momento lineal $\vec{\mathbf{p}}$. El momento angular con respecto al origen es $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, que está en la dirección de la *z*. La dirección de $\vec{\mathbf{l}}$ está dada por la regla de la mano derecha, como se muestra.

La intención de elegir la dirección del momento angular para que sea perpendicular al plano que contiene a $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ es similar a la elección de la dirección del torque para que sea perpendicular al plano de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$, como se ha analizado en Rotación de eje fijo. La magnitud del momento angular se encuentra a partir de la definición del producto cruz,

$$l = rp \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$. Las unidades de momento angular son $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Al igual que con la definición del torque, podemos definir un brazo de palanca $r_\perp$ que es la distancia perpendicular del vector de momento $\vec{\mathbf{p}}$ al origen, $r_\perp = r \operatorname{sen} \theta$. Con esta definición, la magnitud del momento angular se convierte en

$$l = r_\perp p = r_\perp mv.$$

Vemos que, si la dirección de $\vec{\mathbf{p}}$ es tal que pasa por el origen, entonces $\theta = 0$, y el momento angular es cero porque el brazo de palanca es cero. En este sentido, la magnitud del momento angular depende de la elección del origen.

Si tomamos la derivada de tiempo del momento angular, llegamos a una expresión para el torque en la partícula:

$$\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}} \times m\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

Aquí hemos utilizado la definición de $\vec{\mathbf{p}}$ y el hecho de que un vector cruzado en sí mismo es cero. A partir de la segunda ley de Newton, $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \sum \vec{\mathbf{F}}$, la fuerza neta que actúa sobre la partícula, y la definición del torque neto, podemos escribir

$$\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}. \qquad \textbf{11.6}$$

Observe la similitud con el resultado lineal de la segunda ley de Newton, $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \sum \vec{\mathbf{F}}$. La siguiente estrategia de resolución de problemas sirve para calcular el momento angular de una partícula.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Momento angular de una partícula

1. Elija un sistema de coordenadas sobre el que se va a calcular el momento angular.
2. Escriba vector del radio a la partícula puntual en notación vectorial unitaria.
3. Escriba el vector de momento lineal de la partícula en notación vectorial unitaria.
4. Tome el producto cruz $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ y utilice la regla de la mano derecha para establecer la dirección del vector de momento angular.
5. Compruebe si hay dependencia temporal en la expresión del vector de momento angular. Si la hay, entonces existe un torque en torno al origen, y utilice $\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$ para calcular el torque. Si no hay dependencia temporal en la expresión del momento angular, entonces el torque neto es cero.

EJEMPLO 11.4

Momento angular y torque en un meteorito

Un meteorito entra en la atmósfera del planeta (Figura 11.10) y alguien lo observa desde la Tierra antes de que se queme en la atmósfera. El vector $\vec{\mathbf{r}} = 25\ \text{km}\hat{\mathbf{i}} + 25\ \text{km}\hat{\mathbf{j}}$ da la posición del meteorito con respecto al observador. En el momento en que el observador ve el meteorito, este tiene un momento lineal $\vec{\mathbf{p}} = 15{,}0\ \text{kg}(-2{,}0\text{km/s}\hat{\mathbf{j}})$, y se acelera a una constante de $2{,}0\ \text{m/s}^2(-\hat{\mathbf{j}})$ a lo largo de su trayectoria, que para nuestros propósitos puede tomarse como una línea recta: (a) ¿Cuál es el momento angular del meteorito en torno al origen, que se encuentra en la ubicación del observador? (b) ¿Cuál es el torque del meteorito en torno al origen?

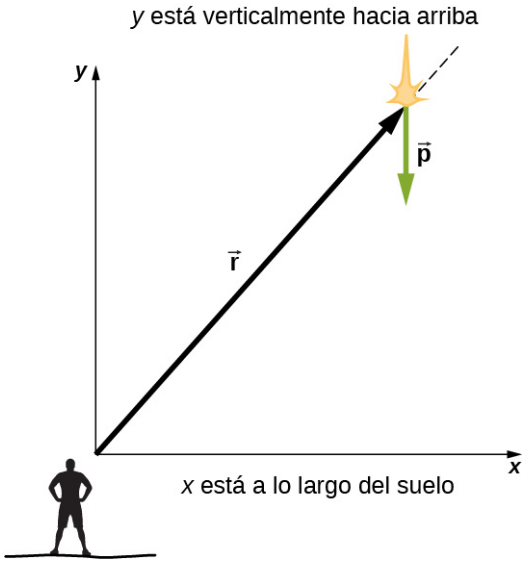


FIGURA 11.10 Un observador en tierra ve un meteorito en la posición $\vec{\mathbf{r}}$ con un momento lineal $\vec{\mathbf{p}}$.

Estrategia

Resolvemos la aceleración en componentes *x* y *y*, y utilizamos las ecuaciones cinemáticas para expresar la velocidad en función de la aceleración y el tiempo. Insertamos estas expresiones en el momento lineal y luego calculamos el momento angular con el producto cruz. Dado que los vectores de posición y momento están en el plano *xy*, esperamos que el vector de momento angular esté a lo largo del eje de la *z*. Para encontrar el torque, tomamos la derivada de tiempo del momento angular.

Solución

El meteorito entra en la atmósfera terrestre en un ángulo de $90{,}0°$ por debajo de la horizontal, por lo que los

componentes de la aceleración en las direcciones de la x y la y son

$$a_x = 0, \quad a_y = -2{,}0\ \text{m/s}^2.$$

Escribimos las velocidades con las ecuaciones cinemáticas.

$$v_x = 0, \quad v_y = -2{,}0 \times 10^3\ \text{m/s} - (2{,}0\ \text{m/s}^2)t.$$

a. El momento angular es

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{l}} &= \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = (25{,}0\ \text{km}\hat{\mathbf{i}} + 25{,}0\ \text{km}\hat{\mathbf{j}}) \times 15{,}0\ \text{kg}(0\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}) \\ &= 15{,}0\ \text{kg}[25{,}0\ \text{km}(v_y)\hat{\mathbf{k}}] \\ &= 15{,}0\ \text{kg}[2{,}50 \times 10^4\ \text{m}(-2{,}0 \times 10^3\ \text{m/s} - (2{,}0\ \text{m/s}^2)t)\hat{\mathbf{k}}].\end{aligned}$$

En $t = 0$, el momento angular del meteorito en torno al origen es

$$\vec{\mathbf{l}}_0 = 15{,}0\ \text{kg}[2{,}50 \times 10^4\ \text{m}(-2{,}0 \times 10^3\ \text{m/s})\hat{\mathbf{k}}] = 7{,}50 \times 10^8\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}(-\hat{\mathbf{k}}).$$

Este es el instante en que el observador ve el meteorito.

b. Para encontrar el torque, tomamos la derivada de tiempo del momento angular. Tomando la derivada de tiempo de $\vec{\mathbf{l}}$ en función del tiempo, que es la segunda ecuación inmediatamente anterior, tenemos

$$\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} = -15{,}0\ \text{kg}(2{,}50 \times 10^4\ \text{m})(2{,}0\ \text{m/s}^2)\hat{\mathbf{k}}.$$

Luego, dado que $\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$, tenemos

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = -7.5 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}\hat{\mathbf{k}}.$$

Las unidades de torque se indican en newton-metros, que no deben confundirse con los julios. A modo de comprobación, observamos que el brazo de palanca es el componente x del vector $\vec{\mathbf{r}}$ en la Figura 11.10, ya que es perpendicular a la fuerza que actúa sobre el meteorito, que está a lo largo de su trayectoria. Por la segunda ley de Newton, esta fuerza es

$$\vec{\mathbf{F}} = ma(-\hat{\mathbf{j}}) = 15{,}0\ \text{kg}(2{,}0\ \text{m/s}^2)(-\hat{\mathbf{j}}) = 30{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2(-\hat{\mathbf{j}}).$$

El brazo de palanca es

$$\vec{\mathbf{r}}_\perp = 2{,}5 \times 10^4\ \text{m}\,\hat{\mathbf{i}}.$$

Así, el torque es

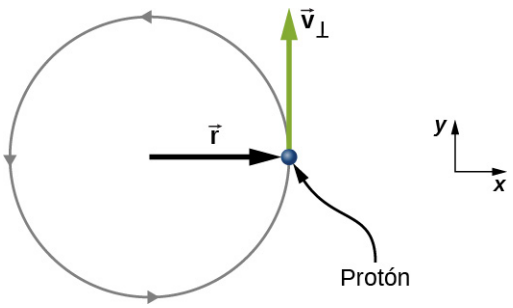
$$\begin{aligned}\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}}_\perp \times \vec{\mathbf{F}} &= (2{,}5 \times 10^4\ \text{m}\,\hat{\mathbf{i}}) \times (-30{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2\hat{\mathbf{j}}), \\ &= 7{,}5 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}(-\hat{\mathbf{k}}).\end{aligned}$$

Importancia

Dado que el meteorito acelera hacia la Tierra, su radio y su vector de velocidad cambian. Por lo tanto, dado que $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, el momento angular cambia como función del tiempo. Sin embargo, el torque del meteorito en torno al origen es constante, porque el brazo de palanca $\vec{\mathbf{r}}_\perp$ y la fuerza sobre el meteorito son constantes. Este ejemplo es importante porque ilustra que el momento angular depende de la elección del origen sobre el que se calcula. Los métodos utilizados en este ejemplo también son importantes para desarrollar el momento angular para un sistema de partículas y para un cuerpo rígido.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.2

Un protón que gira alrededor de un campo magnético ejecuta un movimiento circular en el plano del papel, como se muestra a continuación. La trayectoria circular tiene un radio de 0,4 m y el protón tiene una velocidad $4{,}0 \times 10^6$ m/s. ¿Cuál es el momento angular del protón respecto al origen?



Momento angular de un sistema de partículas

El momento angular de un sistema de partículas es importante en muchas disciplinas científicas, una de ellas la astronomía. Consideremos una galaxia espiral, una isla de estrellas en rotación como nuestra Vía Láctea. Cada una de las estrellas puede tratarse como partículas puntuales, cada una de las cuales tiene su propio momento angular. La suma vectorial de cada uno de los momentos angulares da el total de la galaxia. En esta sección, desarrollamos las herramientas con las que podemos calcular el momento angular total de un sistema de partículas.

En la sección anterior, hemos introducido el momento angular de una sola partícula acerca de un origen designado. La expresión de este momento angular es $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, donde el vector $\vec{\mathbf{r}}$ es desde el origen hasta la partícula, y $\vec{\mathbf{p}}$ es el momento lineal de la partícula. Si tenemos un sistema de N partículas, cada una con un vector de posición desde el origen dado por $\vec{\mathbf{r}}_i$ y cada uno con un momento $\vec{\mathbf{p}}_i$, entonces el momento angular total del sistema de partículas en torno al origen es la suma vectorial de cada uno de los momentos angulares en torno al origen. Esto es,

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{l}}_1 + \vec{\mathbf{l}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{l}}_N. \tag{11.7}$$

Del mismo modo, si la partícula i está sometida a un torque neto $\vec{\tau}_i$ en torno al origen, entonces podemos encontrar el torque neto debido al sistema de partículas al diferenciar la Ecuación 11.7:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{l}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i.$$

La suma de cada uno de los torques produce un torque externo neto en el sistema, que designamos $\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$. Así,

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}. \tag{11.8}$$

La Ecuación 11.8 afirma que *la tasa de cambio del momento angular total de un sistema es igual al torque externo neto que actúa sobre el sistema cuando ambas cantidades se miden con respecto a un origen determinado.* La Ecuación 11.8 se aplica a cualquier sistema que tenga momento angular neto, incluidos los cuerpos rígidos, como se analiza en la siguiente sección.

EJEMPLO 11.5

Momento angular de tres partículas

Refiriéndose a la Figura 11.11(a), determine el momento angular total debido a las tres partículas en torno al origen. (b) ¿Cuál es la tasa de cambio del momento angular?

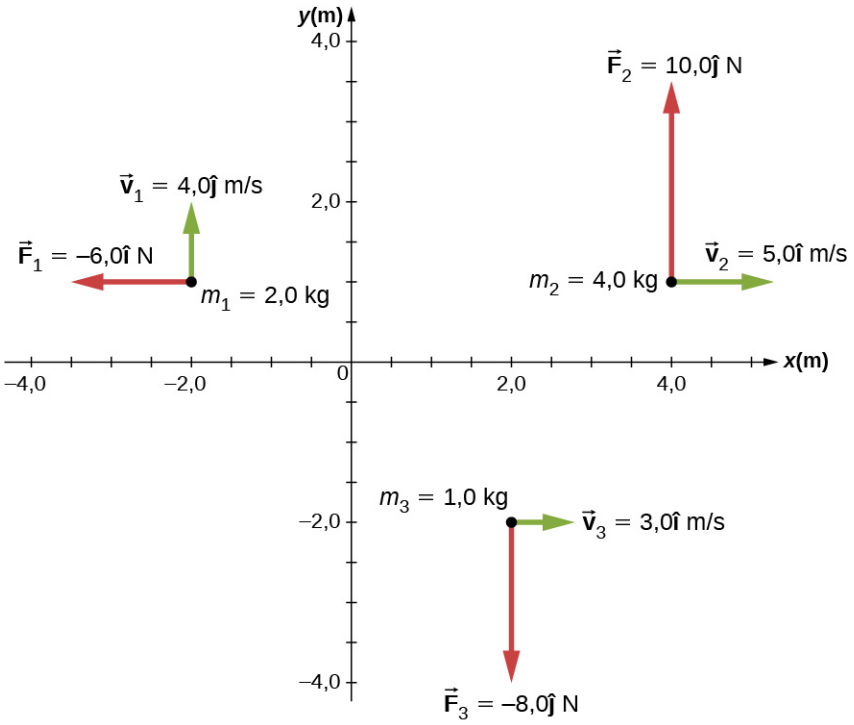


FIGURA 11.11 Tres partículas en el plano *xy* con diferentes vectores de posición y momento.

Estrategia

Escriba los vectores de posición y momento de las tres partículas. Calcule cada uno de los momentos angulares y súmelos como vectores para hallar el momento angular total. Luego haga lo mismo para los torques.

Solución

a. Partícula 1: $\vec{\mathbf{r}}_1 = -2{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 1{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{p}}_1 = 2{,}0\,\text{kg}(4{,}0\,\text{m/s}\hat{\mathbf{j}}) = 8{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m/s}\hat{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{l}}_1 = \vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{p}}_1 = -16{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$.

Partícula 2: $\vec{\mathbf{r}}_2 = 4{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 1{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{p}}_2 = 4{,}0\,\text{kg}(5{,}0\,\text{m/s}\hat{\mathbf{i}}) = 20{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m/s}\hat{\mathbf{i}}$,
$\vec{\mathbf{l}}_2 = \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{p}}_2 = -20{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$.

Partícula 3: $\vec{\mathbf{r}}_3 = 2{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{i}} - 2{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{p}}_3 = 1{,}0\,\text{kg}(3{,}0\,\text{m/s}\hat{\mathbf{i}}) = 3{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m/s}\hat{\mathbf{i}}$,
$\vec{\mathbf{l}}_3 = \vec{\mathbf{r}}_3 \times \vec{\mathbf{p}}_3 = 6{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$.

Sumamos cada uno de los momentos angulares para hallar el total en torno al origen:

$$\vec{\mathbf{l}}_T = \vec{\mathbf{l}}_1 + \vec{\mathbf{l}}_2 + \vec{\mathbf{l}}_3 = -30\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}.$$

b. Las fuerzas individuales y los brazos de palanca son

$$\vec{\mathbf{r}}_{1\perp} = 1{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{j}},\ \vec{\mathbf{F}}_1 = -6{,}0\,\text{N}\hat{\mathbf{i}},\ \vec{\boldsymbol{\tau}}_1 = 6{,}0\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{m}\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}_{2\perp} = 4{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{i}},\ \vec{\mathbf{F}}_2 = 10{,}0\,\text{N}\hat{\mathbf{j}},\ \vec{\tau}_2 = 40{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}_{3\perp} = 2{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{i}},\ \vec{\mathbf{F}}_3 = -8{,}0\,\text{N}\hat{\mathbf{j}},\ \vec{\tau}_3 = -16{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}\hat{\mathbf{k}}.$$

Por lo tanto:

$$\sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i = \vec{\boldsymbol{\tau}}_1 + \vec{\boldsymbol{\tau}}_2 + \vec{\boldsymbol{\tau}}_3 = 30\,\text{N}\cdot\text{m}\hat{\mathbf{k}}.$$

Importancia

Este ejemplo ilustra el principio de superposición para el momento angular y el torque de un sistema de partículas. Hay que tener cuidado al evaluar los vectores de radio $\vec{\mathbf{r}}_i$ de las partículas para calcular los

momentos angulares, y los brazos de palanca, $\vec{\mathbf{r}}_{i\perp}$ para calcular los torques, ya que son cantidades completamente diferentes.

Momento angular de un cuerpo rígido

Hemos investigado el momento angular de una sola partícula, que hemos generalizado a un sistema de partículas. Ahora podemos utilizar los principios analizados en la sección anterior para desarrollar el concepto de momento angular de un cuerpo rígido. Los objetos celestes, como los planetas, tienen momento angular debido a su giro y a sus órbitas alrededor de las estrellas. En ingeniería, todo lo que está en rotación en torno a un eje conlleva un momento angular, como los volantes de inercia, las hélices y las piezas rotativas de los motores. El conocimiento del momento angular de estos objetos es crucial para el diseño del sistema del que forman parte.

Para desarrollar el momento angular de un cuerpo rígido, modelamos un cuerpo rígido como si estuviera formado por pequeños segmentos de masa, Δm_i. En la Figura 11.12, un cuerpo rígido está obligado a rotar alrededor del eje de la z con una velocidad angular ω. Todos los segmentos de masa que componen el cuerpo rígido experimentan un movimiento circular alrededor del eje de la z con la misma velocidad angular. La parte (a) de la figura muestra el segmento de masa Δm_i con vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_i$ desde el origen y radio R_i al eje de la z. La magnitud de su velocidad tangencial es $v_i = R_i\omega$. Ya que los vectores $\vec{\mathbf{v}}_i$ y $\vec{\mathbf{r}}_i$ son perpendiculares entre sí, la magnitud del momento angular de este segmento de masa es

$$l_i = r_i(\Delta m v_i)\text{sen } 90°.$$

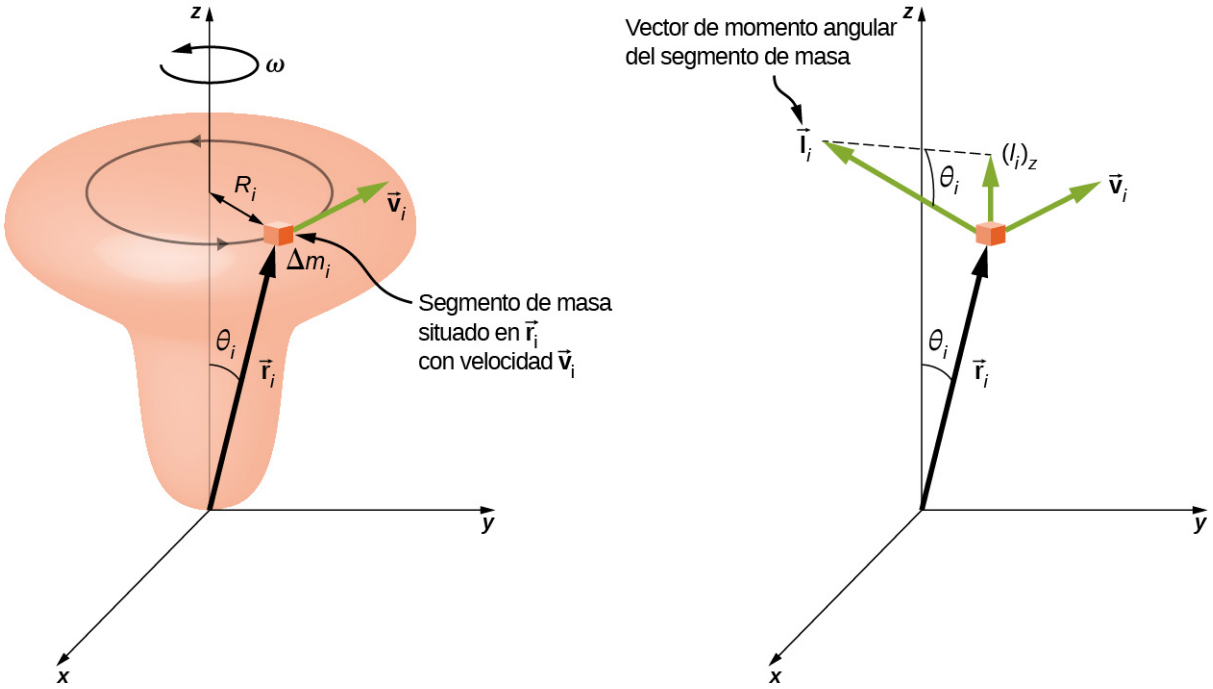


FIGURA 11.12 (a) Un cuerpo rígido está obligado a rotar alrededor del eje de la z. El cuerpo rígido es simétrico respecto al eje de la z. Un segmento de masa Δm_i se encuentra en la posición $\vec{\mathbf{r}}_i$, que forma un ángulo θ_i con respecto al eje de la z. Se muestra el movimiento circular de un segmento de masa infinitesimal. (b) $\vec{\mathbf{l}}_i$ es el momento angular del segmento de masa y tiene un componente a lo largo del eje de la z $(\vec{\mathbf{l}}_i)_z$.

Utilizando la regla de la mano derecha, el vector momento angular apunta en la dirección indicada en la parte (b). La suma de los momentos angulares de todos los segmentos de masa contiene componentes tanto a lo largo como perpendiculares al eje de rotación. Cada segmento de masa tiene un componente perpendicular del momento angular que cancelará el componente perpendicular de un segmento de masa idéntico en el lado opuesto del cuerpo rígido, porque es cilíndricamente simétrico. Así, el componente a lo largo del eje de

rotación es el único componente que da un valor diferente de cero cuando se suma sobre todos los segmentos de masa. De la parte (b), el componente de $\vec{\mathbf{l}}_i$ a lo largo del eje de rotación es

$$\begin{aligned}(l_i)_z &= l_i \operatorname{sen}\theta_i = (r_i \Delta m_i v_i)\operatorname{sen}\theta_i, \\ &= (r_i \operatorname{sen}\theta_i)(\Delta m_i v_i) = R_i \Delta m_i v_i.\end{aligned}$$

El momento angular neto del cuerpo rígido a lo largo del eje de rotación es

$$L = \sum_i (\vec{\mathbf{l}}_i)_z = \sum_i R_i \Delta m_i v_i = \sum_i R_i \Delta m_i (R_i \omega) = \omega \sum_i \Delta m_i (R_i)^2.$$

La sumatoria $\sum_i \Delta m_i (R_i)^2$ es simplemente el momento de inercia I del cuerpo rígido alrededor del eje de rotación. Para un aro delgado que rota alrededor de un eje perpendicular al plano del aro, todos los R_i son iguales a R, por lo que la sumatoria se reduce a $R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2$, que es el momento de inercia para un aro delgado que se encuentra en la Figura 10.20. Así, la magnitud del momento angular a lo largo del eje de rotación de un cuerpo rígido que rota a velocidad angular ω alrededor del eje es

$$L = I\omega. \tag{11.9}$$

Esta ecuación es análoga a la magnitud del momento lineal $p = mv$. La dirección del vector de momento angular se dirige a lo largo del eje de rotación dado por la regla de la mano derecha.

EJEMPLO 11.6

Momento angular de un brazo robótico

El brazo robótico de un explorador de Marte como el *Curiosity*, que se muestra en la Figura 11.8, mide 1,0 m de largo y tiene pinzas en el extremo libre para recoger rocas. La masa del brazo es de 2,0 kg y la de las pinzas es de 1,0 kg. Vea la Figura 11.13. El brazo del robot y las pinzas se mueven desde el reposo a $\omega = 0{,}1\pi$ rad/s en 0,1 s. Rota hacia abajo y recoge una roca de Marte que tiene una masa de 1,5 kg. El eje de rotación es el punto en el que el brazo robótico se conecta al explorador. (a) ¿Cuál es el momento angular del brazo robótico por sí mismo en torno al eje de rotación después de 0,1 s cuando el brazo deja de acelerar? (b) ¿Cuál es el momento angular del brazo robótico cuando tiene la roca de Marte en sus pinzas y rota hacia arriba? (c) Cuando el brazo no tiene ninguna roca en las pinzas, ¿cuál es el torque en torno al punto en el que el brazo se conecta al explorador cuando acelera desde el reposo hasta su velocidad angular final?

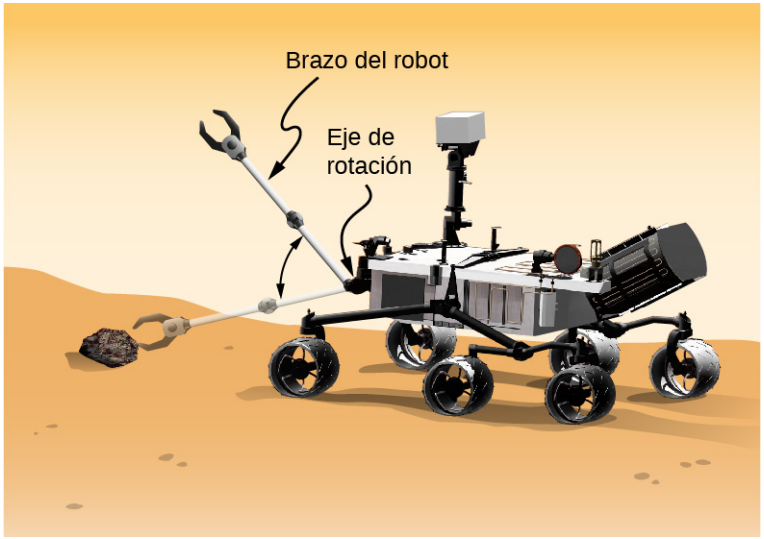


FIGURA 11.13 Un brazo robótico de un explorador de Marte se balancea hacia abajo y recoge una roca de Marte

(créditos: modificación de un trabajo de la NASA / JPL-Caltech).

Estrategia

Utilizamos la Ecuación 11.9 para hallar el momento angular en las distintas configuraciones. Cuando el brazo rota hacia abajo, la regla de la mano derecha da el vector de momento angular dirigido hacia afuera de la página, que llamaremos la dirección de la z positiva. Cuando el brazo rota hacia arriba, la regla de la mano derecha da la dirección del vector de momento angular hacia la página o en la dirección de la z negativa. El momento de inercia es la suma de cada uno de los momentos de inercia. Se puede aproximar el brazo con una varilla sólida, mientras que las pinzas y la roca de Marte pueden tomarse como masas puntuales, situadas a una distancia de 1 m desde el origen. En la parte (c), utilizamos la segunda ley del movimiento de Newton para la rotación con el fin de hallar el torque en el brazo del robot.

Solución

a. Anotando cada uno de los momentos de inercia, tenemos:
Brazo de robot: $I_{\text{R}} = \frac{1}{3}m_{\text{R}}r^2 = \frac{1}{3}(2{,}00\text{ kg})(1{,}00\text{ m})^2 = \frac{2}{3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
Pinzas: $I_{\text{F}} = m_{\text{F}}r^2 = (1{,}0\text{ kg})(1{,}0\text{ m})^2 = 1{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
Roca de Marte: $I_{\text{MR}} = m_{\text{MR}}r^2 = (1{,}5\text{ kg})(1{,}0\text{ m})^2 = 1{,}5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
Por lo tanto, sin la roca de Marte, el momento de inercia total es
$$I_{\text{Total}} = I_{\text{R}} + I_{\text{F}} = 1{,}67\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
y la magnitud del momento angular es
$$L = I\omega = 1{,}67\text{ kg}\cdot\text{m}^2(0{,}1\pi\text{ rad/s}) = 0{,}17\pi\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$
El vector de momento angular se dirige hacia afuera de la página en la dirección $\hat{\mathbf{k}}$, ya que el brazo del robot rota en sentido contrario de las agujas del reloj.

b. Debemos incluir la roca de Marte en el cálculo del momento de inercia, por lo que tenemos
$$I_{\text{Total}} = I_{\text{R}} + I_{\text{F}} + I_{\text{MR}} = 3{,}17\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
y
$$L = I\omega = 3{,}17\text{ kg}\cdot\text{m}^2(0{,}1\pi\text{ rad/s}) = 0{,}32\pi\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$
Ahora el vector de momento angular se dirige hacia la página en la dirección -$\hat{\mathbf{k}}$, por la regla de la mano derecha, ya que el brazo del robot ahora rota en el sentido de las agujas del reloj.

c. Hallamos el torque cuando el brazo no tiene la roca al tomar la derivada del momento angular con la Ecuación 11.8 $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum\vec{\boldsymbol{\tau}}$. Sin embargo, dado que $L = I\omega$, y en el entendido de que la dirección de los vectores de momento angular y de torque son a lo largo del eje de rotación, podemos suprimir la notación vectorial y encontrar
$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha = \sum\tau,$$
que es la segunda ley de Newton para la rotación. Dado que $\alpha = \frac{0{,}1\pi\text{ rad/s}}{0{,}1\text{ s}} = \pi\text{ rad/s}^2$, podemos calcular el torque neto:
$$\sum\tau = I\alpha = 1{,}67\text{ kg}\cdot\text{m}^2(\pi\text{ rad/s}^2) = 1{,}67\pi\text{ N}\cdot\text{m}.$$

Importancia

El momento angular en (a) es menor que el de (b) debido a que el momento de inercia en (b) es mayor que en (a), mientras que la velocidad angular es la misma.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.3

¿Qué tiene mayor momento angular: una esfera sólida de masa m que está en rotación a una frecuencia angular constante ω_0 en torno al eje de la z, o un cilindro sólido de la misma masa y tasa de rotación en torno al eje de la z?

INTERACTIVO

Visite la simulación interactiva del momento angular de la Universidad de Colorado (https://openstax.org/l/21angmomintsim) para aprender más sobre el momento angular.

11.3 Conservación del momento angular

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Aplicar la conservación del momento angular para determinar la velocidad angular de un sistema en rotación en el que cambia el momento de inercia.
- Explicar cómo cambia la energía cinética rotacional cuando un sistema sufre cambios tanto en el momento de inercia como en la velocidad angular.

Hasta ahora, hemos estudiado el momento angular de sistemas formados por partículas puntuales y cuerpos rígidos. También hemos analizado los torques involucrados, mediante la expresión que relaciona el torque neto externo con el cambio de momento angular, Ecuación 11.8. Algunos ejemplos de sistemas que obedecen a esta ecuación son una rueda de bicicleta que gira libremente y desacelera con el tiempo debido al torque derivado de la fricción, o la desaceleración de la rotación de la Tierra a lo largo de millones de años debido a las fuerzas de fricción que se ejercen sobre las deformaciones de las mareas.

Sin embargo, supongamos que no hay ningún torque externo neto en el sistema, $\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = 0$. En este caso, la Ecuación 11.8 se convierte en la **ley de conservación del momento angular**.

Ley de conservación del momento angular

El momento angular de un sistema de partículas alrededor de un punto en un marco de referencia inercial fijo se conserva si no hay ningún torque externo neto alrededor de ese punto:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0 \qquad \textbf{11.10}$$

o

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{l}}_1 + \vec{\mathbf{l}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{l}}_N = \text{constante}. \qquad \textbf{11.11}$$

Obsérvese que el momento angular *total* $\vec{\mathbf{L}}$ se conserva. Cualquiera de los momentos angulares puede cambiar mientras su suma permanezca constante. Esta ley es análoga al momento lineal que se conserva cuando la fuerza externa sobre un sistema es nula.

Como ejemplo de conservación del momento angular, la Figura 11.14 muestra a una patinadora sobre hielo ejecutando un giro. El torque neto sobre ella es muy cercano a cero porque hay relativamente poca fricción entre sus patines y el hielo. Además, la fricción se ejerce muy cerca del punto de apoyo. Tanto $\left|\vec{\mathbf{F}}\right|$ como $\left|\vec{\mathbf{r}}\right|$ son pequeños, por lo que $\left|\vec{\boldsymbol{\tau}}\right|$ es despreciable. En consecuencia, puede girar durante bastante tiempo. También puede aumentar su velocidad de giro al meter los brazos y las piernas. ¿Por qué al meter sus brazos y piernas aumenta su velocidad de giro? La respuesta es que su momento angular es constante, por lo que

$$L' = L$$

o

$$I'\omega' = I\omega,$$

donde las cantidades primas se refieren a las condiciones después de meter los brazos y reducir su momento de inercia. Porque I' es menor, la velocidad angular ω' deberá aumentar para mantener constante el momento angular.

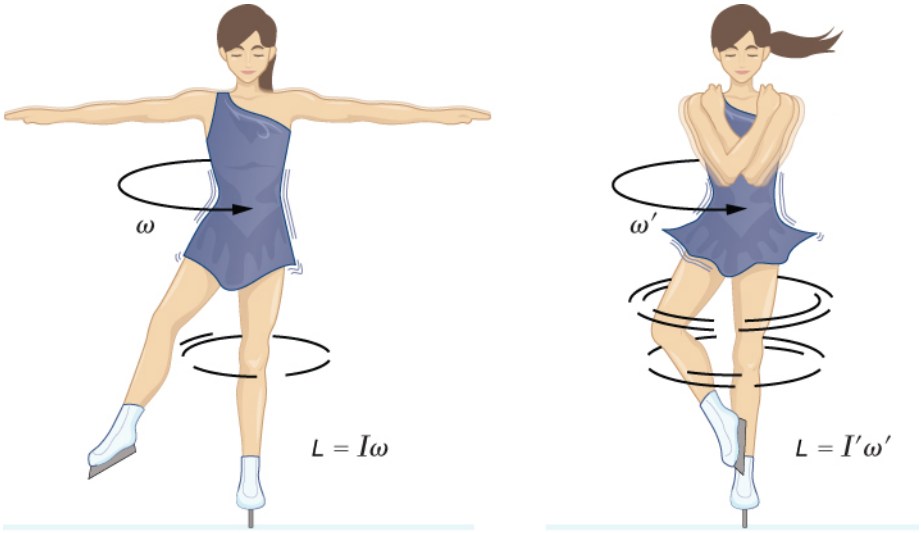


FIGURA 11.14 (a) Una patinadora sobre hielo gira en la punta de su patín con los brazos extendidos. Su momento angular se conserva porque el torque neto sobre ella es despreciable. (b) Su velocidad de giro aumenta significativamente cuando mete los brazos, lo que disminuye su momento de inercia. El trabajo que realiza para meter los brazos se traduce en un aumento de la energía cinética rotacional.

Es interesante ver cómo cambia la energía cinética rotacional de la patinadora cuando mete los brazos. Su energía rotacional inicial es

$$K_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

mientras que su energía rotacional final es

$$K'_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I'(\omega')^2.$$

Dado que $I'\omega' = I\omega$, podemos sustituir por ω' y hallar

$$K'_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I'(\omega')^2 = \frac{1}{2} I' \left(\frac{I}{I'} \omega \right)^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \left(\frac{I}{I'} \right) = K_{\text{Rot}} \left(\frac{I}{I'} \right) \quad .$$

Porque su momento de inercia ha disminuido, $I' < I$, su energía cinética rotacional final ha aumentado. La fuente de esta energía cinética rotacional adicional es el trabajo necesario para meter los brazos. Obsérvese que los brazos de la patinadora no se mueven en un círculo perfecto, sino que se mueven en espiral hacia dentro. Este trabajo provoca un aumento en la energía cinética rotacional, mientras que su momento angular permanece constante. Como está en un ambiente sin fricción, no hay energía que se escape del sistema. Así, si extendiera los brazos a su posición original, giraría a su velocidad angular original y su energía cinética volvería a su valor original.

El sistema solar es otro ejemplo de cómo funciona la conservación del momento angular en nuestro universo. Nuestro sistema solar nació de una enorme nube de gas y polvo que inicialmente tenía energía de rotación. Las fuerzas gravitacionales hicieron que la nube se contrajera y la tasa de rotación aumentó como resultado de la conservación del momento angular (Figura 11.15).

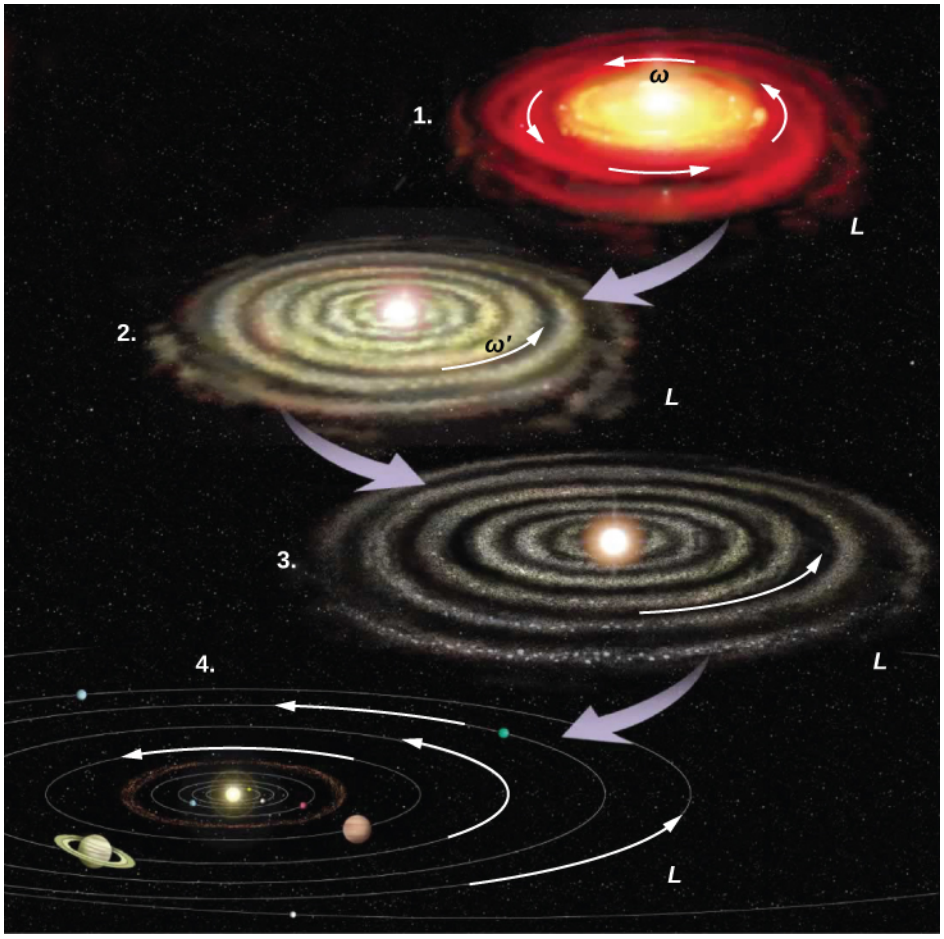


FIGURA 11.15 El sistema solar se unió a partir de una nube de gas y polvo que rotaba originalmente. El movimiento orbital y la rotación de los planetas están en la misma dirección que la rotación original y conservan el momento angular de la nube madre (créditos: modificación de un trabajo de la NASA).

Continuamos nuestro debate con un ejemplo que tiene aplicaciones a la ingeniería.

EJEMPLO 11.7

Volantes de inercia acoplados

Un volante de inercia rota sin fricción a una velocidad angular $\omega_0 = 600$ rev/min en un eje vertical sin fricción de inercia rotacional despreciable. Se deja caer sobre otro volante de inercia, que está en reposo y tiene el triple del momento de inercia del volante en rotación (Figura 11.16). Dado que existe fricción entre las superficies, los volantes de inercia alcanzan muy rápidamente la misma velocidad de rotación, tras lo cual giran juntos. (a) Utilice la ley de conservación del momento angular para determinar la velocidad angular ω de la combinación. (b) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se pierde en el acoplamiento de los volantes de inercia?

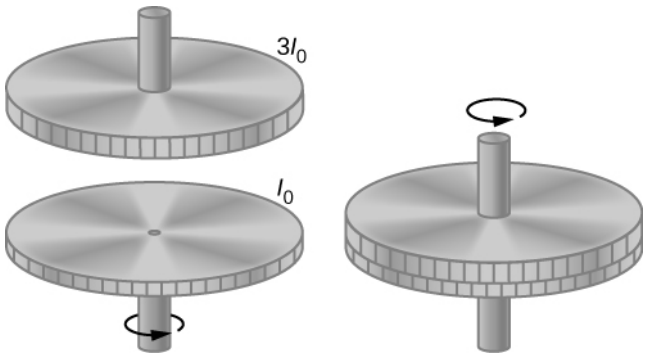


FIGURA 11.16 Dos volantes de inercia están acoplados y giran juntos.

Estrategia

La parte (a) sirve para resolver la velocidad angular del sistema acoplado. Utilizamos el resultado de (a) para comparar las energías cinéticas inicial y final del sistema en la parte (b).

Solución

a. No hay torques externos que actúen sobre el sistema. La fuerza debida a la fricción produce un torque interno, que no afecta al momento angular del sistema. Por lo tanto, la conservación del momento angular da

$$I_0\omega_0 = (I_0 + 3I_0)\omega,$$
$$\omega = \tfrac{1}{4}\omega_0 = 150\,\text{rev/min} = 15{,}7\,\text{rad/s}.$$

b. Antes del contacto, solo rota un volante de inercia. La energía cinética rotacional de este volante de inercia es la energía cinética de rotación inicial del sistema, $\frac{1}{2}I_0\omega_0^2$. La energía cinética final es $\frac{1}{2}(4I_0)\omega^2 = \frac{1}{2}(4I_0)\left(\frac{\omega_0}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}I_0\omega_0^2$.

Por lo tanto, el cociente de energía cinética final y energía cinética inicial es

$$\frac{\frac{1}{8}I_0\omega_0^2}{\frac{1}{2}I_0\omega_0^2} = \frac{1}{4}.$$

Así, 3/4 de la energía cinética inicial se pierde por el acoplamiento de los dos volantes de inercia.

Importancia

Dado que la inercia rotacional del sistema aumentó, la velocidad angular disminuyó, como se prevé de la ley de conservación del momento angular. En este ejemplo, vemos que la energía cinética final del sistema disminuye, ya que se pierde energía por el acoplamiento de los volantes de inercia. Compare esto con el ejemplo de la patinadora en la Figura 11.14 que realiza un trabajo para meter los brazos y añadir energía cinética de rotación.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.4

Un tiovivo en un parque infantil gira a 4,0 rev/min. Tres niños saltan y aumentan el momento de inercia del sistema de rotación tiovivo/niños en 25%. ¿Cuál es la nueva tasa de rotación?

EJEMPLO 11.8

Salida de la barra de equilibrio

Un gimnasta de 80,0 kg realiza la salida de la barra de equilibrio. Comienza la salida en plena extensión, y luego se flexiona para completar un número de revoluciones antes de aterrizar. Su momento de inercia cuando está extendido totalmente puede calcularse aproximadamente como una varilla de 1,8 m de longitud y, cuando

está flexionado, como una varilla de la mitad de esa longitud. Si su velocidad de rotación en plena extensión es de 1,0 rev/s y asume la posición agrupada cuando su centro de masa está a 3,0 m de altura moviéndose horizontalmente hacia el suelo, ¿cuántas revoluciones puede ejecutar si deshace la posición agrupada a 1,8 m de altura? Vea la Figura 11.17.

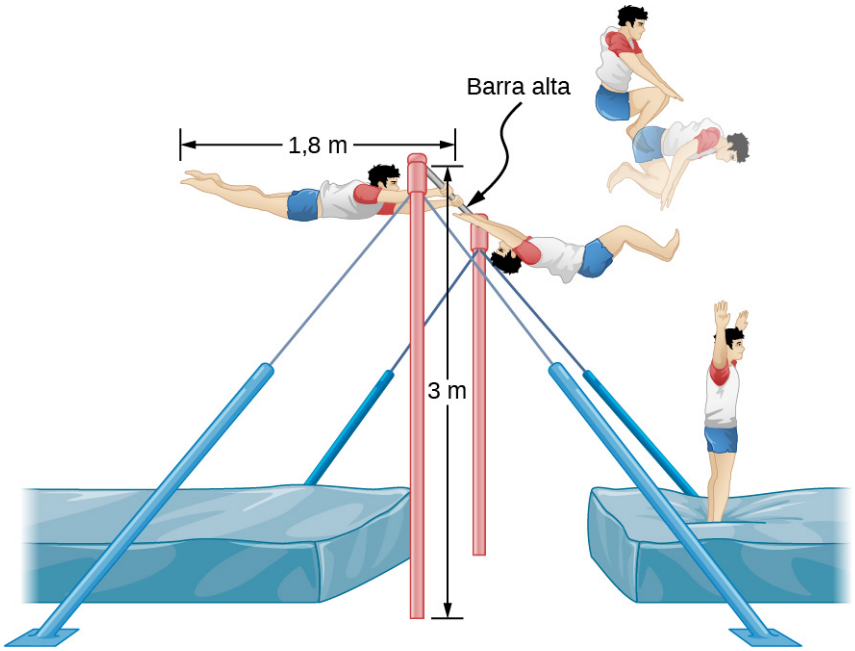


FIGURA 11.17 Un gimnasta realiza la salida de una barra de equilibrio y ejecuta un número de revoluciones en posición agrupada antes de aterrizar en posición vertical.

Estrategia

Utilizando la conservación del momento angular, podemos hallar su velocidad de rotación cuando está flexionado. Utilizando las ecuaciones de la cinemática, podemos hallar el intervalo de tiempo desde una altura de 3,0 m a 1,8 m. Dado que se mueve horizontalmente con respecto al suelo, las ecuaciones de la caída libre se simplifican. Esto permitirá calcular el número de revoluciones que se pueden ejecutar. Dado que utilizamos un cociente, podemos mantener las unidades como rev/s y no necesitamos convertir a radianes/s.

Solución

El momento de inercia en plena extensión es $I_0 = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}80{,}0\ \text{kg}(1.8\ \text{m})^2 = 21{,}6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

El momento de inercia en posición agrupada es $I_\text{f} = \frac{1}{12}mL_\text{f}^2 = \frac{1}{12}80{,}0\ \text{kg}(0.9\ \text{m})^2 = 5{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Conservación del momento angular $I_\text{f}\omega_\text{f} = I_0\omega_0 \Rightarrow \omega_\text{f} = \frac{I_0\omega_0}{I_\text{f}} = \frac{21{,}6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2(1{,}0\ \text{rev/s})}{5{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 4{,}0\ \text{rev/s}$.

Intervalo de tiempo en posición agrupada: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(3{,}0-1{,}8)\text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}}} = 0{,}5\ \text{s}$.

En 0,5 s, podrá ejecutar dos revoluciones a 4,0 rev/s.

Importancia

Tenga en cuenta que el número de revoluciones que puede completar dependerá del tiempo que esté en el aire. En el problema, sale de la barra de equilibrio horizontalmente hacia el suelo. También podría salir en un ángulo con respecto al suelo, lo que le daría más o menos tiempo en el aire, dependiendo del ángulo, positivo o negativo, con respecto al suelo. Los gimnastas deben tener esto en cuenta a la hora de realizar sus salidas.

EJEMPLO 11.9

Conservación del momento angular de una colisión

Una bala de masa $m = 2{,}0$ g se desplaza horizontalmente a una rapidez de 500,0 m/s. La bala golpea y se incrusta en el borde de un disco sólido de masa $M = 3{,}2$ kg y el radio $R = 0{,}5$ m. El cilindro rota libremente alrededor de su eje y está inicialmente en reposo (Figura 11.18). ¿Cuál es la velocidad angular del disco inmediatamente después de que se incruste la bala?

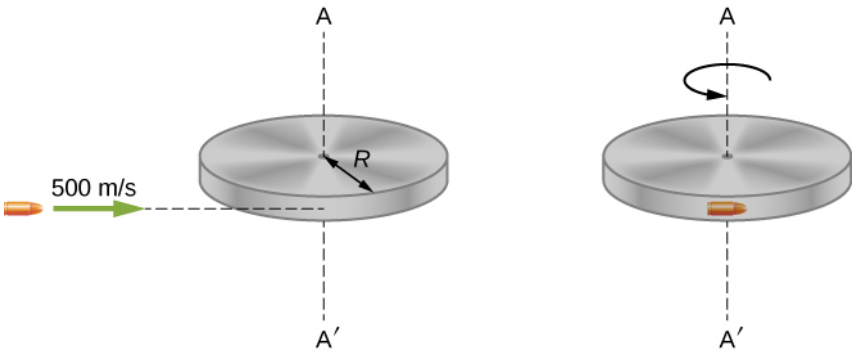


FIGURA 11.18 Una bala se dispara horizontalmente y se incrusta en el borde de un disco que rota libremente en torno a su eje vertical.

Estrategia

Para el sistema de la bala y el cilindro, ningún torque externo actúa a lo largo del eje vertical que pasa por el centro del disco. Así, el momento angular a lo largo de este eje se conserva. El momento angular inicial de la bala es mvR, que se toma sobre el eje de rotación del disco en el momento anterior a la colisión. El momento angular inicial del cilindro es cero. Así, el momento angular neto del sistema es mvR. Dado que el momento angular se conserva, el momento angular inicial del sistema es igual al momento angular de la bala incrustada en el disco inmediatamente después del impacto.

Solución

El momento angular inicial del sistema es

$$L_i = mvR.$$

El momento de inercia del sistema con la bala incrustada en el disco es

$$I = mR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2.$$

El momento angular final del sistema es

$$L_f = I\omega_f.$$

Así, por la conservación del momento angular, $L_i = L_f$ y

$$mvR = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega_f.$$

Resolver para ω_f,

$$\omega_f = \frac{mvR}{(m + M/2)R^2} = \frac{(2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg})(500{,}0\ \text{m/s})}{(2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg} + 1{,}6\ \text{kg})(0{,}50\ \text{m})} = 1{,}2\ \text{rad/s}.$$

Importancia

El sistema está compuesto por una partícula puntual y un cuerpo rígido. Hay que tener cuidado al formular el momento angular antes y después de la colisión. Justo antes del impacto, el momento angular de la bala se

toma alrededor del eje de rotación del disco.

11.4 Precesión de un giroscopio

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir los procesos físicos que subyacen al fenómeno de la precesión.
- Calcular la velocidad angular de precesión de un giroscopio.

En la Figura 11.19 se muestra un giroscopio, definido como un disco giratorio en el que el eje de rotación adopta libremente cualquier orientación. Al girar, la orientación del eje de rotación no resulta afectada por la orientación del cuerpo que lo encierra. La carrocería o el vehículo que encierra el giroscopio puede moverse de un lugar a otro y la orientación del eje de giro seguirá siendo la misma. Esto hace que los giroscopios sean muy útiles en la navegación, especialmente cuando no se pueden utilizar brújulas magnéticas, como en las naves espaciales pilotadas y no pilotadas, los misiles balísticos intercontinentales, los vehículos aéreos no tripulados y los satélites como el telescopio espacial Hubble.

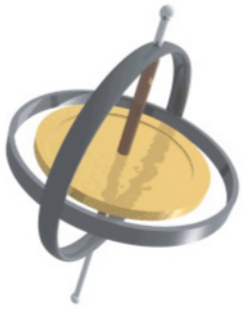


FIGURA 11.19 Un giroscopio consiste en un disco que gira en torno a un eje, el cual adopta libremente cualquier orientación.

En las dos figuras siguientes ilustramos la **precesión** de un giroscopio con un ejemplo de la peonza. Si la peonza se coloca en una superficie plana cerca de la superficie de la Tierra en un ángulo con respecto a la vertical y no gira, se caerá. Esto se debe a que la fuerza de la gravedad produce un torque que actúa sobre su centro de masa. Esto se muestra en la Figura 11.20(a). Sin embargo, si la peonza gira sobre su eje, en lugar de volcarse debido a este torque, precesa en torno a la vertical, como se muestra en la parte (b) de la figura. Esto se debe al torque en el centro de masa, que proporciona el cambio en el momento angular.

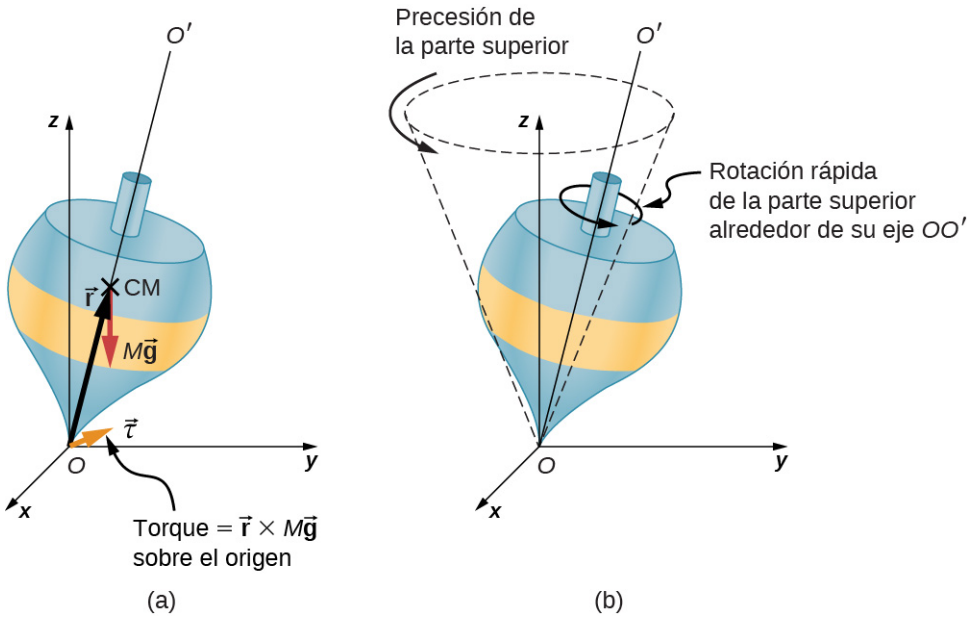


FIGURA 11.20 (a) Si la peonza no gira, hay un torque $\vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}$ en torno al origen, y la peonza se cae. (b) Si la peonza gira en torno a su eje OO', no se cae, sino que precesa en torno al eje z.

La Figura 11.21 muestra las fuerzas que actúan sobre una peonza. El torque producido es perpendicular al vector de momento angular. Esto cambia la dirección del vector de momento angular $\vec{\mathbf{L}}$ según $d\vec{\mathbf{L}} = \vec{\boldsymbol{\tau}}dt$, pero no su magnitud. La peonza *precesa* alrededor de un eje vertical, ya que el torque es siempre horizontal y perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$. Si la peonza *no* gira, adquiere un momento angular en la dirección del torque, y rota alrededor de un eje horizontal, para caer tal y como cabría esperar.

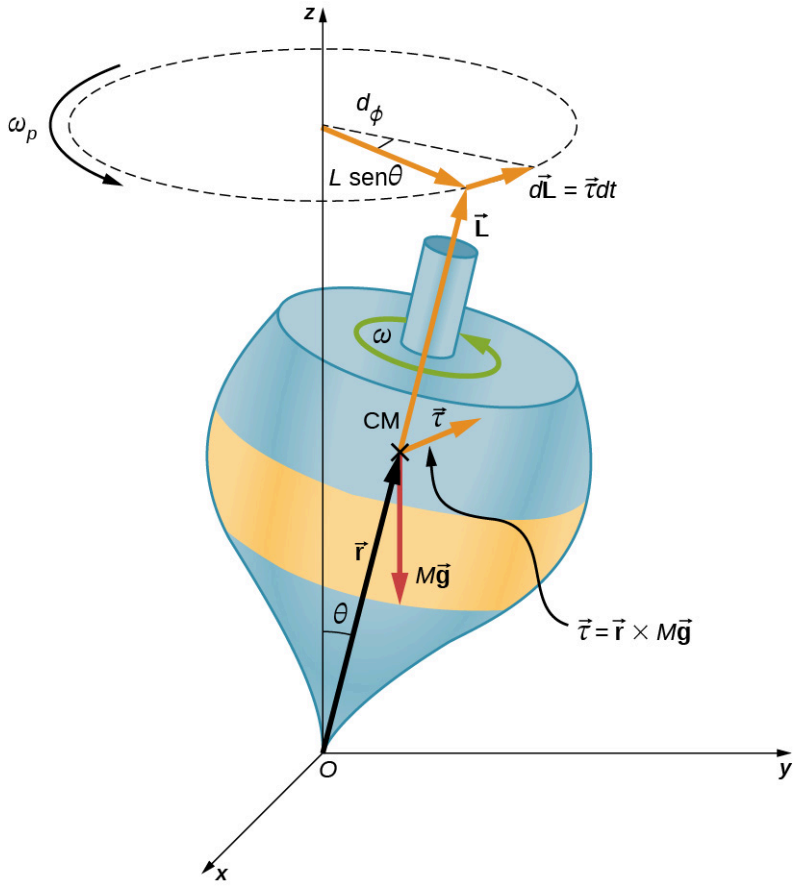


FIGURA 11.21 La fuerza de gravedad que actúa sobre el centro de masa produce un torque $\vec{\tau}$ en dirección perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$. La magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ no cambia, pero sí su dirección, y la peonza precesa en torno al eje *z*.

Podemos experimentar este fenómeno de primera mano cuando sujetamos una rueda de bicicleta y tratamos de hacerla girar alrededor de un eje perpendicular al eje de giro. Como se muestra en la Figura 11.22, la persona aplica fuerzas perpendiculares al eje de giro en un intento por hacer girar la rueda, pero en su lugar, el eje de la rueda comienza a cambiar de dirección hacia la izquierda de la persona debido al torque aplicado.

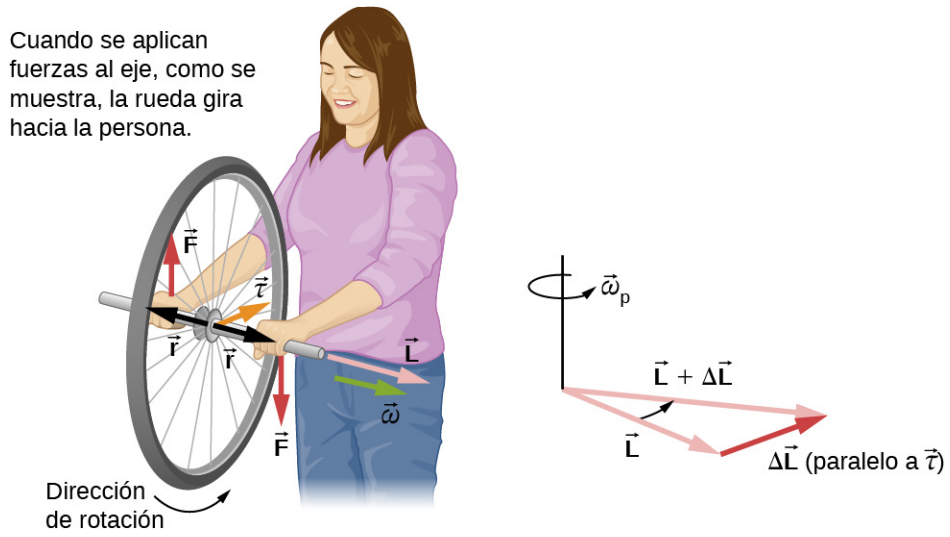


FIGURA 11.22 (a) Una persona que sostiene la rueda de bicicleta la levanta con su mano derecha y empuja hacia abajo con su mano izquierda en un intento por hacerla girar. Esta acción crea un torque directamente hacia la

persona. Este torque provoca un cambio en el momento angular $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ en exactamente la misma dirección. (b) Un diagrama vectorial que representa cómo $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ sumar, lo que produce un nuevo momento angular que apunta más hacia la persona. La rueda se mueve hacia la persona, perpendicular a las fuerzas que ejerce sobre la rueda.

Todos sabemos lo fácil que es que una bicicleta se vuelque cuando se está sentado en ella en reposo. Sin embargo, cuando se conduce la bicicleta a buen ritmo, volcarse implica cambiar el vector de momento angular de las ruedas.

INTERACTIVO

Vea el sobre la precesión del giroscopio (https://openstax.org/l/21gyrovideo) para una demostración completa de la precesión de la rueda de bicicleta.

Además, cuando se pone un disco giratorio en una caja como la de un reproductor de Blu-Ray, se intenta moverlo. Es fácil trasladar la caja en una dirección determinada, pero es difícil hacerla girar en torno a un eje perpendicular al eje del disco giratorio, ya que estamos ejerciendo un torque sobre la caja que provocará la precesión del vector momento angular del disco giratorio.

Podemos calcular la tasa de precesión de la peonza en laFigura 11.21. En la Figura 11.21, vemos que la magnitud del torque es

$$\tau = rMg \operatorname{sen}\theta.$$

Así,

$$dL = rMg \operatorname{sen}\theta\, dt.$$

El ángulo de precesión de la peonza en el tiempo dt es

$$d\phi = \frac{dL}{L \operatorname{sen}\theta} = \frac{rMg \operatorname{sen}\theta}{L \operatorname{sen}\theta} dt = \frac{rMg}{L} dt.$$

La velocidad angular de precesión es $\omega_P = \frac{d\phi}{dt}$ y de esta ecuación vemos que

$$\omega_P = \frac{rMg}{L}. \text{ o, dado que } L = I\omega,$$

$$\omega_P = \frac{rMg}{I\omega}. \qquad 11.12$$

En esta derivación, asumimos que $\omega_P \ll \omega$, es decir, que la velocidad angular de precesión es mucho menor que la velocidad angular del disco del giroscopio. La velocidad angular de precesión añade un pequeña componente al momento angular a lo largo del eje z. Esto se traduce en un ligero balanceo hacia arriba y hacia abajo, a medida que el giroscopio precesa, lo que se denomina nutación.

La propia Tierra actúa como un gigantesco giroscopio. Su momento angular se encuentra a lo largo de su eje y actualmente apunta a Polaris, la Estrella Polar. Sin embargo, la Tierra precesa lentamente (una vez cada 26.000 años aproximadamente) debido al torque del Sol y de la Luna sobre su forma no esférica.

EJEMPLO 11.10

Período de precesión

Un giroscopio gira con su punta en el suelo y con una resistencia a la fricción que es despreciable. El disco del giroscopio tiene una masa de 0,3 kg y gira a 20 rev/s. Su centro de masa está a 5,0 cm del pivote y el radio del disco es de 5,0 cm. ¿Cuál es el periodo de precesión del giroscopio?

Estrategia

Utilizamos la Ecuación 11.12 para calcular la velocidad angular precesional del giroscopio. Esto nos permite

hallar el periodo de precesión.

Solución

El momento de inercia del disco es

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(0{,}30\text{ kg})(0{,}05\text{ m})^2 = 3{,}75 \times 10^{-4}\text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

La velocidad angular del disco es

$$20{,}0\text{ rev/s} = 20{,}0(2\pi)\text{ rad/s} = 125{,}66\text{ rad/s}.$$

Ahora podemos sustituir en la Ecuación 11.12. La velocidad angular de precesión es

$$\omega_P = \frac{rMg}{I\omega} = \frac{(0{,}05\text{ m})(0{,}3\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)}{(3{,}75 \times 10^{-4}\text{ kg} \cdot \text{m}^2)(125{,}66\text{ rad/s})} = 3{,}12\text{ rad/s}.$$

El periodo de precesión del giroscopio es

$$T_P = \frac{2\pi}{3{,}12\text{ rad/s}} = 2{,}0\text{ s}.$$

Importancia

La frecuencia angular de precesión del giroscopio, 3,12 rad/s, o sea, unas 0,5 rev/s, es mucho menor que la velocidad angular 20 rev/s del disco del giroscopio. Por lo tanto, no esperamos que surja un gran componente del momento angular debido a la precesión, y la Ecuación 11.12 es una buena aproximación de la velocidad angular de precesión.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 11.5

Una peonza tiene una frecuencia de precesión de 5,0 rad/s en la Tierra. ¿Cuál es su frecuencia de precesión en la Luna?

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

ley de conservación del momento angular el momento angular se conserva, es decir, el momento angular inicial es igual al momento angular final cuando no se aplica ningún torque externo al sistema

momento angular análogo rotacional del momento lineal, que se calcula al tomar el producto del momento de inercia y la velocidad angular

movimiento rodadura combinación de movimiento rotacional y traslacional con o sin deslizamiento

precesión movimiento circular del polo del eje de un objeto que gira alrededor de otro eje debido a un torque

Ecuaciones Clave

Velocidad del centro de masa del objeto rodante	$v_{\text{CM}} = R\omega$
Aceleración del centro de masa del objeto rodante	$a_{\text{CM}} = R\alpha$
Desplazamiento del centro de masa del objeto rodante	$d_{\text{CM}} = R\theta$
Aceleración de un objeto que rueda sin resbalar	$a_{\text{CM}} = \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{m+(I_{\text{CM}}/r^2)}$
Momento angular	$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$
La derivada del momento angular es igual al torque	$\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$
Momento angular de un sistema de partículas	$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{l}}_1 + \vec{\mathbf{l}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{l}}_N$
Para un sistema de partículas, la derivada del momento angular es igual al torque	$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$
Momento angular de un cuerpo rígido en rotación	$L = I\omega$
Conservación del momento angular	$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0$
Conservación del momento angular	$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{l}}_1 + \vec{\mathbf{l}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{l}}_N = \text{constante}$
Velocidad angular precesional	$\omega_P = \frac{rMg}{I\omega}$

Resumen

11.1 Movimiento rodadura

- En el movimiento rodadura sin deslizamiento, existe una fuerza de fricción estática entre el objeto que rueda y la superficie. Las relaciones $v_{\text{CM}} = R\omega, a_{\text{CM}} = R\alpha,$ y $d_{\text{CM}} = R\theta$ se aplican todas, de manera que la velocidad lineal, la aceleración y la distancia del centro de masa son las variables angulares, multiplicadas por el radio del objeto.
- En el movimiento rodadura con deslizamiento, surge una fuerza de fricción cinética entre el objeto que rueda y la superficie. En este caso, $v_{\text{CM}} \neq R\omega, a_{\text{CM}} \neq R\alpha,$ y $d_{\text{CM}} \neq R\theta$.
- La conservación de energía puede utilizarse para analizar el movimiento rodadura. La

energía se conserva en el movimiento rodadura sin deslizamiento. La energía no se conserva en el movimiento rodadura con deslizamiento debido al calor generado por la fricción cinética.

11.2 Momento angular

- El momento angular $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ de una sola partícula alrededor de un origen designado es el producto vectorial del vector de posición en el sistema de coordenadas dado y el momento lineal de la partícula.
- El momento angular $\vec{\mathbf{l}} = \sum_i \vec{\mathbf{l}}_i$ de un sistema de partículas alrededor de un origen designado es la suma vectorial de cada uno de los momentos de las partículas que componen el sistema.
- El torque neto de un sistema en torno a un origen determinado es la derivada de tiempo del momento angular en torno a ese origen: $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$.
- Un cuerpo rígido en rotación tiene un momento angular $L = I\omega$ dirigido a lo largo del eje de rotación. La derivada de tiempo del momento angular $\frac{dL}{dt} = \sum \tau$ da el torque neto sobre un cuerpo rígido y está dirigida a lo largo del eje de rotación.

11.3 Conservación del momento angular

- En ausencia de torques externos, el momento angular total de un sistema se conserva. Es la contrapartida rotacional del momento lineal que se conserva cuando la fuerza externa sobre un sistema es nula.
- Para un cuerpo rígido que cambia su momento angular en ausencia de un torque externo neto, la conservación del momento angular da $I_f\omega_f = I_i\omega_i$. Esta ecuación establece que la velocidad angular es inversamente proporcional al momento de inercia. Así, si el momento de inercia disminuye, la velocidad angular deberá aumentar para conservar el momento angular.
- Los sistemas que contienen tanto partículas puntuales como cuerpos rígidos pueden analizarse mediante la conservación del momento angular. El momento angular de todos los cuerpos del sistema deberá tomarse en torno a un eje común.

11.4 Precesión de un giroscopio

- Cuando un giroscopio se coloca en un pivote cerca de la superficie de la Tierra, precesa alrededor de un eje vertical, ya que el torque es siempre horizontal y perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$. Si el giroscopio no está girando, adquiere momento angular en la dirección del torque, y gira en torno a un eje horizontal, para caer tal y como esperaríamos.
- La velocidad angular de precesión viene dada por $\omega_P = \frac{rMg}{I\omega}$, donde r es la distancia del pivote al centro de masa del giroscopio, I es el momento de inercia del disco giratorio del giroscopio, M es su masa y ω es la frecuencia angular del disco del giroscopio.

Preguntas Conceptuales

11.1 Movimiento rodadura

1. ¿Puede un objeto redondo liberado del reposo en la cima de una pendiente sin fricción sufrir un movimiento rodadura?

2. Una lata cilíndrica de radio R rueda por una superficie horizontal sin deslizarse. (a) Después de una revolución completa de la lata, ¿cuál es la distancia que ha recorrido su centro de masa? (b) ¿Sería esta distancia mayor o menor si se produjera un deslizamiento?

3. Una rueda se suelta desde arriba por una pendiente. ¿Es más probable que la rueda deslice si la pendiente es pronunciada o si tiene una inclinación suave?

4. ¿Qué rueda más rápido por un plano inclinado, un cilindro hueco o una esfera sólida? Ambos tienen la misma masa y radio.

5. Una esfera hueca y un cilindro hueco del mismo radio y masa ruedan hacia arriba por una pendiente sin deslizarse y tienen la misma velocidad inicial del centro de masa. ¿Qué objeto alcanza una mayor altura antes de detenerse?

11.2 Momento angular

6. ¿Se puede asignar un momento angular a una partícula sin definir primero un punto de referencia?

7. En una partícula que se desplaza en línea recta, ¿hay algún punto en torno al cual el momento angular sea cero? Supongamos que la línea interseca el origen.

8. ¿En qué condiciones un cuerpo rígido tiene momento angular, pero no momento lineal?

9. Si una partícula se mueve con respecto a un

determinado origen, tiene un momento lineal. ¿Qué condiciones deben darse para que el momento angular de esta partícula sea cero respecto al origen seleccionado?

10. Si se conoce la velocidad de una partícula, ¿puede decirse algo sobre su momento angular?

11.3 Conservación del momento angular

11. ¿Para qué sirve la hélice pequeña de la parte trasera de un helicóptero que gira en el plano perpendicular a la hélice grande?

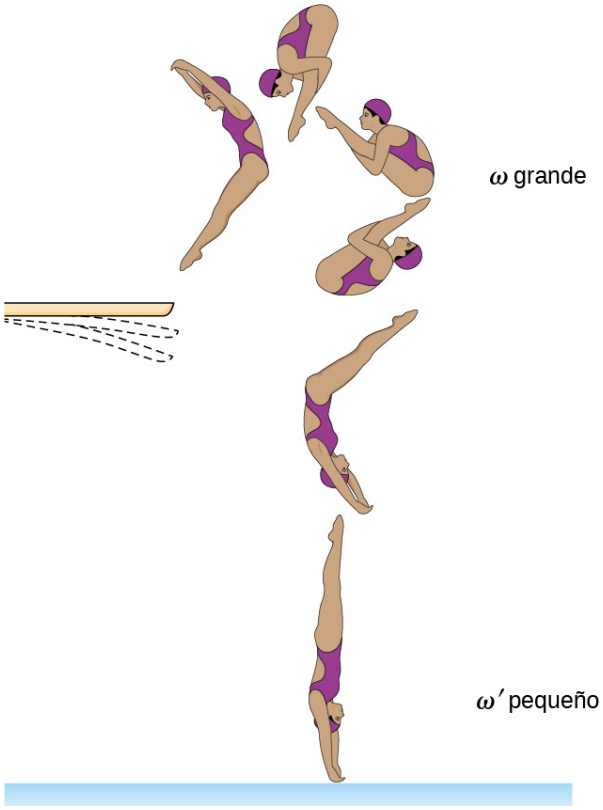
12. Supongamos que un niño camina desde el borde exterior de un tiovivo giratorio hacia el interior. ¿La velocidad angular del tiovivo aumenta, disminuye o permanece igual? Razone su respuesta. Supongamos que el tiovivo gira sin fricción.

13. Cuando la cuerda de una pelota atada se enrolla alrededor de un poste, ¿qué ocurre con la velocidad angular de la pelota?

14. Supongamos que las capas de hielo polar se liberan y flotan hacia el ecuador de la Tierra sin fundirse. ¿Qué pasaría con la velocidad angular de la Tierra?

15. Explique por qué las estrellas giran más rápido cuando colapsan.

16. Los clavadistas de competición recogen las extremidades y se acurrucan cuando hacen volteretas. Justo antes de entrar al agua, extienden completamente sus extremidades para entrar directamente hacia abajo (ver abajo). Explique el efecto de ambas acciones sobre sus velocidades angulares. Explique también el efecto sobre su momento angular



11.4 Precesión de un giroscopio

17. Los giroscopios utilizados en los sistemas de orientación para indicar direcciones en el espacio deben tener un momento angular que no cambie de dirección. Cuando se colocan en el vehículo, se ponen en un compartimento separado del fuselaje principal, de manera que los cambios en la orientación del fuselaje no afecten la orientación del giroscopio. Si el vehículo espacial está sometido a grandes fuerzas y aceleraciones, ¿cómo es posible que la dirección del momento angular de los giroscopios sea constante en todo momento?

18. La Tierra precesa en torno a su eje vertical en un periodo de 26.000 años. Analice si la Ecuación 11.12 puede utilizarse para calcular la velocidad angular precesional de la Tierra.

Problemas

11.1 Movimiento rodadura

19. ¿Cuál es la velocidad angular de un neumático de 75,0 cm de diámetro en un automóvil que viaja a 90,0 km/h?

20. Un niño recorre 2,00 km en bicicleta. Las ruedas tienen un radio de 30,0 cm. ¿Cuál es el ángulo total que rotan los neumáticos durante su viaje?

21. Si el niño de la bicicleta del problema anterior acelera desde el reposo hasta una rapidez de 10,0 m/s en 10,0 s, ¿cuál es la aceleración angular de los neumáticos?

22. Los autos de carreras de Fórmula 1 tienen neumáticos de 66 cm de diámetro. Si un Fórmula 1 alcanza una rapidez media de 300

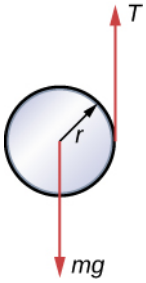
km/h durante una carrera, ¿cuál es el desplazamiento angular en revoluciones de las ruedas si el auto de carreras mantiene esta velocidad durante 1,5 horas?

23. Una canica rueda hacia abajo por una pendiente de 30° desde el reposo. (a) ¿Cuál es su aceleración? (b) ¿Qué distancia recorre en 3,0 s?

24. Repita el problema anterior al sustituir la canica por un cilindro macizo. Explique el nuevo resultado.

25. Un cuerpo rígido de sección transversal cilíndrica se suelta desde la parte superior de una pendiente de 30°. Rueda 10,0 m hasta la parte inferior en 2,60 s. Halle el momento de inercia del cuerpo en función de su masa m y su radio r.

26. Un yoyo puede considerarse un cilindro sólido de masa m y radio r que tiene una cuerda ligera enrollada alrededor de su circunferencia (vea más abajo). Un extremo de la cuerda se mantiene fijo en el espacio. Si el cilindro cae mientras la cuerda se desenrolla sin deslizarse, ¿cuál es la aceleración del cilindro?



27. Un cilindro macizo de radio 10,0 cm rueda hacia abajo por una pendiente con deslizamiento. El ángulo de inclinación es 30°. El coeficiente de fricción cinética en la superficie es de 0,400. ¿Cuál es la aceleración angular del cilindro macizo? ¿Cuál es la aceleración lineal?

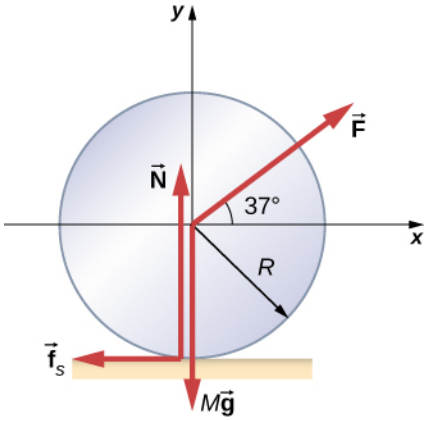
28. Una bola de boliche rueda hacia arriba por una rampa de 0,5 m de altura, sin deslizarse hasta el depósito. Tiene una velocidad inicial de su centro de masa de 3,0 m/s. (a) ¿Cuál es su velocidad en la parte superior de la rampa? (b) Si la rampa tiene 1 m de altura, ¿llega a la parte superior?

29. Un cilindro macizo de 40,0 kg rueda por una superficie horizontal a una velocidad de 6,0 m/s. ¿Cuánto trabajo se requiere para detenerlo?

30. Una esfera sólida de 40,0 kg rueda por una superficie horizontal a una rapidez de 6,0 m/s. ¿Cuánto trabajo se requiere para detenerlo? Compare los resultados con el problema anterior.

31. Un cilindro macizo rueda hacia arriba por una pendiente, en un ángulo de 20°. Si comienza en la parte inferior a una rapidez de 10 m/s, ¿cuál es la distancia que recorre en la pendiente?

32. Una rueda cilíndrica maciza de masa M y radio R es halada por una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada al centro de la rueda a 37° de la horizontal (vea la siguiente figura). Si la rueda debe rodar sin deslizarse, ¿cuál es el valor máximo de $|\vec{\mathbf{F}}|$? Los coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_S = 0{,}40$ y $\mu_k = 0{,}30$.



33. Un cilindro (Cylinder, Cyl) hueco que rueda sin deslizarse recibe una velocidad de 5,0 m/s y rueda hacia arriba por una pendiente hasta una altura vertical de 1,0 m. Si a una esfera (Sphere, Sph) hueca de la misma masa y radio se le da la misma velocidad inicial, ¿a qué altura vertical rueda hacia arriba de la pendiente?

11.2 Momento angular

34. Una partícula de 0,2 kg se desplaza por la línea $y = 2{,}0$ m a una velocidad 5,0 m/s. ¿Cuál es el momento angular de la partícula respecto al origen?

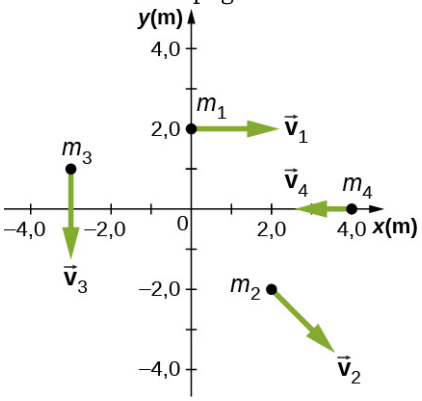
35. Un pájaro vuela por encima de su posición a una altura de 300,0 m y a una rapidez horizontal al suelo de 20,0 m/s. El pájaro tiene una masa de 2,0 kg. El vector de radio hacia el pájaro forma un ángulo θ con respecto al suelo. El vector de radio al pájaro y su vector de momento se encuentran en el plano xy. ¿Cuál es el momento angular del pájaro con respecto al punto en el que usted se encuentra?

36. Un auto de carreras de Fórmula 1 con una masa de 750,0 kg circula a gran velocidad por un circuito de Mónaco y entra en una curva circular a 220,0 km/h en sentido contrario de las agujas del reloj en torno al origen del círculo. En otra parte del recorrido, el auto entra en un

segundo giro circular a 180 km/h también en sentido contrario de las agujas del reloj. Si el radio de curvatura de la primera curva es de 130,0 m y el de la segunda es de 100,0 m, compare los momentos angulares del auto de carreras en cada curva tomados en torno al origen del giro circular.

37. Una partícula de masa 5,0 kg tiene un vector de posición $\vec{\mathbf{r}} = (2{,}0\hat{\mathbf{i}} - 3{,}0\hat{\mathbf{j}})$m en un instante determinado cuando su velocidad es $\vec{\mathbf{v}} = (3{,}0\hat{\mathbf{i}})$m/s con respecto al origen. (a) ¿Cuál es el momento angular de la partícula? (b) Si una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = 5{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N actúa sobre la partícula en este instante, ¿cuál es el torque en torno al origen?

38. Utilice la regla de la mano derecha para determinar las direcciones de los momentos angulares en torno al origen de las partículas como se muestra a continuación. El eje de la *z* está afuera de la página.



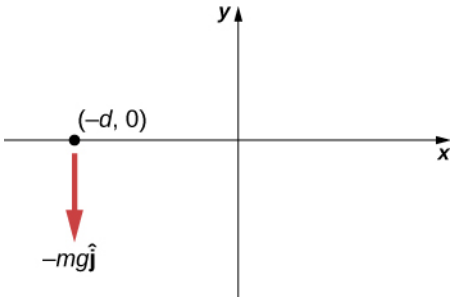
39. Supongamos que las partículas del problema anterior tienen masas $m_1 = 0{,}10\,\text{kg},\ m_2 = 0{,}20\,\text{kg},\ m_3 = 0{,}30\,\text{kg},$ $m_4 = 0{,}40\,\text{kg}$. Las velocidades de las partículas son $v_1 = 2{,}0\hat{\mathbf{i}}$m/s, $v_2 = (3{,}0\hat{\mathbf{i}} - 3{,}0\hat{\mathbf{j}})$m/s, $v_3 = -1{,}5\hat{\mathbf{j}}$ m/s, $v_4 = -4{,}0\hat{\mathbf{i}}$m/s. (a) Calcule el momento angular de cada partícula en torno al origen. (b) ¿Cuál es el momento angular total del sistema de cuatro partículas en torno al origen?

40. Dos partículas de igual masa viajan con la misma rapidez en direcciones opuestas a lo largo de líneas paralelas separadas por una distancia *d*. Demuestre que el momento angular de este sistema de dos partículas es el mismo, independientemente del punto que se utilice como referencia para calcular el momento angular.

41. Un avión de masa $4{,}0 \times 10^4$ kg vuela horizontalmente a una altitud de 10 km, con una rapidez constante de 250 m/s con respecto a la Tierra. (a) ¿Cuál es la magnitud del momento angular del avión con respecto a un observador en tierra situado directamente debajo del avión? (b) ¿Cambia el momento angular cuando el avión vuela a una altitud constante?

42. En un instante determinado, la posición de una partícula de 1,0 kg es $\vec{\mathbf{r}} = (2{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + 6{,}0\hat{\mathbf{k}})$m, su velocidad es $\vec{\mathbf{v}} = (-1{,}0\hat{\mathbf{i}} + 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + 1{,}0\hat{\mathbf{k}})$m/s, y la fuerza sobre ella es $\vec{\mathbf{F}} = (10{,}0\hat{\mathbf{i}} + 15{,}0\hat{\mathbf{j}})$N. (a) ¿Cuál es el momento angular de la partícula en torno al origen? (b) ¿Cuál es el torque de la partícula en torno al origen? (c) ¿Cuál es la tasa de tiempo del cambio del momento angular de la partícula en este instante?

43. Una partícula de masa *m* se deja caer en el punto $(-d, 0)$ y cae verticalmente en el campo gravitacional de la Tierra $-g\hat{\mathbf{j}}$. (a) ¿Cuál es la expresión para el momento angular de la partícula alrededor del eje de la *z*, que apunta directamente hacia afuera de la página como se muestra a continuación? (b) Calcule el torque de la partícula alrededor del eje de la *z*. (c) ¿Es el torque igual a la tasa de tiempo del cambio del momento angular?



44. (a) Calcule el momento angular de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. (b) Compare este momento angular con el momento angular de la Tierra alrededor de su eje.

45. Una roca de 20 kg de masa y 20 cm de radio rueda hacia abajo por una colina de 15 m de altura desde el reposo. ¿Cuál es su momento angular cuando está en la mitad de la colina? (b) ¿En la parte inferior?

46. Un satélite gira a 6,0 rev/s. El satélite consta de un cuerpo principal en forma de esfera de 2,0 m de radio y 10.000 kg de masa, y dos antenas que sobresalen del centro de masa del cuerpo principal y que pueden aproximarse con varillas de 3,0 m de longitud cada una y 10 kg de masa. Las antenas se encuentran en el plano de rotación. ¿Cuál es el momento angular del satélite?

47. Una hélice consta de dos aspas de 3,0 m de

longitud cada una y una masa de 120 kg cada una. La hélice puede aproximarse por una sola varilla que rota alrededor de su centro de masa. La hélice parte del reposo y gira hasta 1.200 rpm en 30 segundos a una tasa constante. (a) ¿Cuál es el momento angular de la hélice a $t = 10$ s; $t = 20$ s? (b) ¿Cuál es el torque de la hélice?

48. Un pulsar es una estrella de neutrones que rota rápidamente. El pulsar de la nebulosa del Cangrejo, en la constelación de Tauro, tiene un periodo de $33{,}5 \times 10^{-3}$ s, radio de 10,0 km y masa $2{,}8 \times 10^{30}$ kg. El periodo de rotación del pulsar aumentará con el tiempo debido a la liberación de radiación electromagnética, que no cambia su radio, pero reduce su energía de rotación. (a) ¿Cuál es el momento angular del pulsar? (b) Supongamos que la velocidad angular disminuye a una tasa de 10^{-14} rad/s^2. ¿Cuál es el torque del pulsar?

49. Las aspas de una turbina de viento tienen 30 m de longitud y rotan a una tasa máxima de 20 rev/min. (a) Si las aspas pesan 6.000 kg cada una y el conjunto del rotor tiene tres aspas, calcule el momento angular de la turbina a esta tasa de rotación. (b) ¿Cuál es el torque necesario para hacer girar las aspas hasta la tasa máxima de rotación en 5 minutos?

50. Una montaña rusa tiene una masa de 3.000,0 kg y debe atravesar con seguridad un giro circular vertical de 50,0 m de radio. ¿Cuál es el momento angular mínimo de la montaña rusa en la parte inferior del giro circular para pasar con seguridad? Ignore la fricción en la pista. Tome la montaña rusa como una partícula puntual.

51. Un ciclista de montaña da un salto en una carrera y se va por los aires. La bicicleta de montaña se desplaza a 10,0 m/s antes de ir por los aires. Si la masa de la rueda delantera de la bicicleta es de 750 g y tiene un radio de 35 cm, ¿cuál es el momento angular de la rueda que gira en el aire en el momento en que la bicicleta abandona el suelo?

11.3 Conservación del momento angular

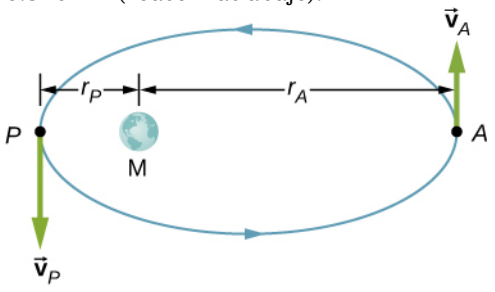
52. Un disco de masa 2,0 kg y radio 60 cm con una pequeña masa de 0,05 kg fijada en el borde rota a 2,0 rev/s. La pequeña masa, mientras está unida al disco, se desliza gradualmente hacia el centro del disco. ¿Cuál es la velocidad de rotación final del disco?

53. La masa del Sol es $2{,}0 \times 10^{30}$kg, su radio es $7{,}0 \times 10^5$ km, y tiene un periodo de rotación de aproximadamente 28 días. Si el Sol colapsara en una enana blanca de radio $3{,}5 \times 10^3$ km, ¿cuál sería su periodo si no se eyectara masa y una esfera de densidad uniforme pudiera modelar el Sol tanto antes como después?

54. Un cilindro con inercia de rotación $I_1 = 2{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ rota en el sentido de las agujas del reloj alrededor de un eje vertical que pasa por su centro a rapidez angular $\omega_1 = 5{,}0$ rad/s. Otro cilindro con inercia de rotación $I_2 = 1{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ rota en sentido contrario a las agujas del reloj en torno al mismo eje a rapidez angular $\omega_2 = 8{,}0$ rad/s. Si los cilindros se acoplan de forma que tengan el mismo eje de rotación, ¿cuál es la rapidez angular de la combinación? ¿Qué porcentaje de la energía cinética original se pierde con la fricción?

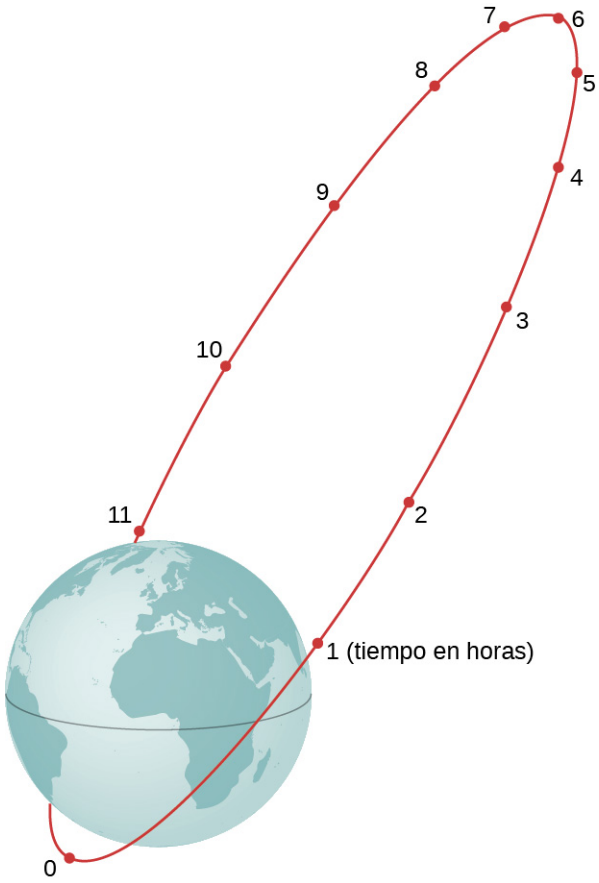
55. Un clavadista que sale del trampolín realiza una rotación inicial con el cuerpo totalmente extendido antes de asumir la posición agrupada y ejecutar tres saltos mortales hacia atrás antes de caer al agua. Si su momento de inercia antes de flexionarse es $16{,}9\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ y después de la posición agrupada durante los saltos mortales es $4{,}2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, ¿qué velocidad de rotación deberá impartir a su cuerpo directamente fuera de la tabla y antes de la posición agrupada si tarda 1,4 s en ejecutar los saltos mortales antes de caer al agua?

56. Un satélite terrestre tiene su apogeo a 2.500 km sobre la superficie de la Tierra y su perigeo a 500 km sobre la superficie de la Tierra. En el apogeo su rapidez es de 6.260 m/s. ¿Cuál es su rapidez en el perigeo? El radio de la Tierra es de 6.370 km (véase más abajo).

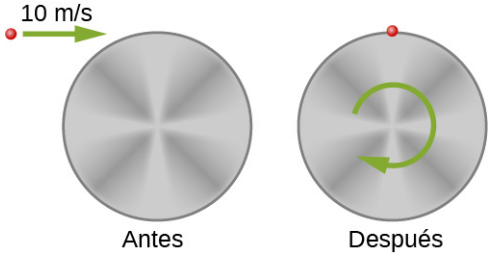


57. La órbita de Mólniya es una órbita muy excéntrica de un satélite de comunicaciones para proporcionar una cobertura de comunicaciones continua a los países escandinavos y la Rusia adyacente. La órbita se sitúa de manera que estos países tengan el satélite a la vista durante largos periodos (véase más abajo). Si un satélite en dicha órbita tiene un apogeo a 40.000,0 km, medido desde el centro de la

Tierra, y una velocidad de 3,0 km/s, ¿cuál sería su velocidad en el perigeo, medida a 200,0 km de altura?



58. A continuación se muestra una pequeña partícula de masa 20 g que se desplaza a una rapidez de 10,0 m/s cuando choca y se pega al borde de un cilindro sólido uniforme. El cilindro rota libremente en torno a su eje a través de su centro y es perpendicular a la página. El cilindro tiene una masa de 0,5 kg y un radio de 10 cm, y está inicialmente en reposo. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del sistema después de la colisión? (b) ¿Cuánta energía cinética se pierde en la colisión?



59. Un insecto de masa 0,020 kg está en reposo, en el borde de un disco cilíndrico macizo ($M = 0{,}10$ kg, $R = 0{,}10$ m) rotando en un plano horizontal alrededor del eje vertical que pasa por su centro. El disco rota a 10,0 rad/s. El insecto se arrastra hacia el centro del disco. (a) ¿Cuál es la nueva velocidad angular del disco? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del sistema? (c) Si el insecto vuelve a arrastrarse hasta el borde exterior del disco, ¿cuál es entonces la velocidad angular del disco? (d) ¿Cuál es la nueva energía cinética del sistema? (e) ¿Cuál es la causa del aumento y la disminución de la energía cinética?

60. Una varilla uniforme de masa 200 g y longitud 100 cm rota libremente en un plano horizontal alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su centro, perpendicular a su longitud. Dos pequeñas cuentas, cada una de ellas de 20 g de masa, están montadas en ranuras a lo largo de la varilla. Inicialmente, las dos cuentas están sujetas por medio de enganches en lados opuestos del centro de la varilla, a 10 cm del eje de rotación. Con las cuentas en esta posición, la varilla rota a una velocidad angular de 10,0 rad/s. Cuando se sueltan los cierres, las cuentas se deslizan hacia fuera a lo largo de la varilla. (a) ¿Cuál es la velocidad angular de la varilla cuando las cuentas llegan a los extremos de la misma? (b) ¿Cuál es la velocidad angular de la varilla si las cuentas salen volando de la misma?

61. Un tiovivo tiene un radio de 2,0 m y un momento de inercia $300\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Un niño con una masa de 50 kg corre tangente a la llanta a una rapidez de 4,0 m/s y salta sobre ella. Si el tiovivo está inicialmente en reposo, ¿cuál es la velocidad angular después de que el niño se suba?

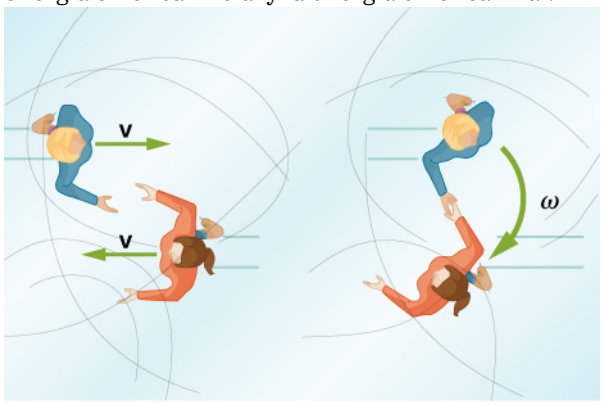
62. Un tiovivo de parque infantil tiene una masa de 120 kg y un radio de 1,80 m y rota a una velocidad angular de 0,500 rev/s. ¿Cuál es su velocidad angular después de que un niño de 22,0 kg se suba a él agarrando su borde exterior? El niño está inicialmente en reposo.

63. Tres niños están montados en el borde de un tiovivo que pesa 100 kg, tiene un radio de 1,60 m y gira a 20,0 rpm. Los niños tienen masas de 22,0, 28,0 y 33,0 kg. Si el niño que tiene una masa de 28,0 kg se desplaza al centro del tiovivo, ¿cuál es la nueva velocidad angular en rpm?

64. (a) Calcule el momento angular de un patinador sobre hielo que gira a 6,00 rev/s dado que su momento de inercia es $0{,}400\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. (b) Reduce su tasa de giro (su velocidad angular) al extender sus brazos y aumentar su momento de inercia. Halle el valor de su momento de inercia si su velocidad angular disminuye a 1,25 rev/s.

(c) Suponga que, en cambio, mantiene los brazos metidos y deja que la fricción del hielo le frene a 3,00 rev/s. ¿Qué torque medio se ha ejercido si se tarda 15,0 s?

65. Unos patinadores en pareja se acercan el uno al otro, como se muestra a continuación y se entrelazan las manos. (a) Calcule su velocidad angular final, dado que cada uno tenía una rapidez inicial de 2,50 m/s respecto al hielo. Cada uno tiene una masa de 70,0 kg, y cada uno tiene un centro de masa situado a 0,800 m de sus manos entrelazadas. Puede aproximar sus momentos de inercia a los de las masas puntuales en este radio. (b) Compare la energía cinética inicial y la energía cinética final.



(a) (b)

66. Un receptor de béisbol extiende su brazo hacia arriba para atrapar una bola rápida a una rapidez de 40 m/s. La pelota pesa 0,145 kg, la longitud del brazo del receptor es de 0,5 m y la masa de 4,0 kg. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del brazo inmediatamente después de atrapar la pelota, medida desde la cuenca del brazo? (b) ¿Cuál es el torque aplicado si el receptor detiene la rotación de su brazo 0,3 s después de atrapar la pelota?

67. En 2015, en Varsovia (Polonia), Olivia Oliver, de Nueva Escocia, batió el récord mundial de ser la más rápida en patinaje sobre hielo. Alcanzó el récord de 342 revoluciones por minuto, tras superar el récord mundial Guinness existente por 34 rotaciones. Si una patinadora sobre hielo extiende sus brazos a esa velocidad de rotación, ¿cuál sería su nueva velocidad de rotación? Supongamos que puede aproximarse por una varilla de 45 kg que tiene 1,7 m de altura y un radio de 15 cm en el giro récord. Con los brazos estirados toma la aproximación de una vara de longitud 130 cm con 10% de su masa corporal alineada perpendicularmente al eje de giro. No tener en cuenta las fuerzas de fricción.

68. Un satélite en órbita circular geosincrónica está a 42.164,0 km del centro de la Tierra. Un pequeño asteroide colisiona con el satélite y lo envía a una órbita elíptica de 45.000,0 km de apogeo. ¿Cuál es la rapidez del satélite en el apogeo? Supongamos que su momento angular se conserva.

69. Una gimnasta da volteretas por el suelo, luego se lanza al aire y ejecuta varias volteretas en posición agrupada mientras está en el aire. Si su momento de inercia al ejecutar las volteretas es $13{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ y su velocidad de giro es de 0,5 rev/s, ¿cuántas revoluciones hace en el aire si su momento de inercia en posición agrupada es $3{,}4\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ y tiene 2,0 s para hacer las volteretas en el aire?

70. La centrífuga del Centro de Investigación Ames de la NASA tiene un radio de 8,8 m y puede generar fuerzas sobre su carga útil de 20 *g*s o 20 veces la fuerza de la gravedad en la Tierra. (a) ¿Cuál es el momento angular de una carga útil de 20 kg que experimenta 10 *g*s en la centrífuga? (b) Si se apaga el motor impulsor en (a) y la carga útil pierde 10 kg, ¿cuál sería su nueva velocidad de giro, teniendo en cuenta que no hay fuerzas de fricción presentes?

71. Una atracción de feria tiene cuatro radios a los que se unen vainas con capacidad para dos personas. Los radios tienen 15 m de longitud cada uno y están unidos a un eje central. Cada radio tiene una masa de 200,0 kg, y las vainas tienen una masa de 100,0 kg cada una. Si la atracción gira a 0,2 rev/s con cada cápsula que contiene dos niños de 50,0 kg, ¿cuál es la nueva velocidad de giro si todos los niños saltan de la atracción?

72. Un patinador sobre hielo se prepara para dar un salto con giros con los brazos extendidos. Su momento de inercia es $1{,}8\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ mientras sus brazos están extendidos, y gira a 0,5 rev/s. Si se lanza al aire a 9,0 m/s a un ángulo de $45°$ con respecto al hielo, ¿cuántas revoluciones puede ejecutar si su momento de inercia en el aire es $0{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$?

73. Una estación espacial consiste en un gigantesco cilindro hueco giratorio de masa 10^6 kg que incluye a las personas en la estación y en un radio de 100,00 m. Rota en el espacio a 3,30 revoluciones por minuto para así producir gravedad artificial. Si 100 personas con una masa media de 65,00 kg realizan una caminata espacial hasta una nave que les espera, ¿cuál es la nueva tasa de rotación cuando todas las personas están fuera de la estación?

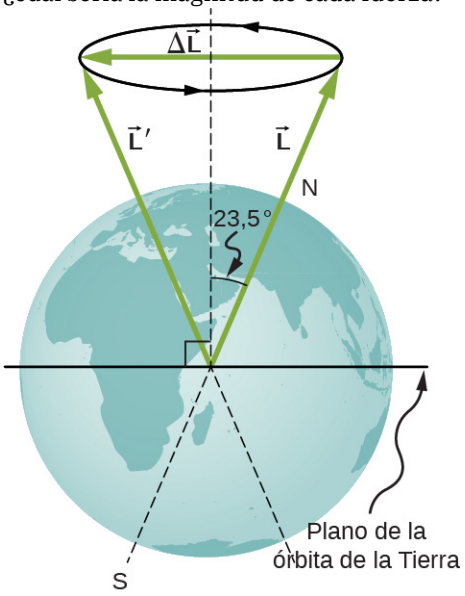
74. Neptuno tiene una masa de $1{,}0 \times 10^{26}$ kg y es $4{,}5 \times 10^{9}$ km del Sol con un periodo orbital de 165 años. Los planetesimales del sistema solar primigenio hace 4.500 millones de años se fusionaron con Neptuno a lo largo de cientos de millones de años. Si el disco primordial que evolucionó hasta nuestro actual sistema solar tenía un radio de 10^{11} km y si la materia que formaba estos planetesimales, que luego se convirtieron en Neptuno, estaba repartida uniformemente en los bordes del mismo, ¿cuál era el periodo orbital de los bordes exteriores del disco primordial?

11.4 Precesión de un giroscopio

75. Un giroscopio tiene un disco de 0,5 kg que gira a 40 rev/s. El centro de masa del disco está a 10 cm de un pivote que es también el radio del disco. ¿Cuál es la velocidad angular de precesión?

76. La velocidad angular de precesión de un giroscopio es de 1,0 rad/s. Si la masa del disco en rotación es de 0,4 kg y su radio es de 30 cm, así como la distancia desde el centro de masa hasta el pivote, ¿cuál es la velocidad de rotación en rev/s del disco?

77. El eje de la Tierra hace un ángulo de 23,5°, en dirección perpendicular al plano de la órbita terrestre. Como se muestra a continuación, este eje precesa, para hacer una rotación completa en 25.780 y.
(a) Calcula el cambio en el momento angular en la mitad de este tiempo.
(b) ¿Cuál es el torque promedio que produce este cambio en el momento angular?
(c) Si este torque lo creara un par de fuerzas que actúan en el punto más efectivo del ecuador, ¿cuál sería la magnitud de cada fuerza?



Problemas Adicionales

78. Una canica rueda por el suelo a una rapidez de 7,0 m/s cuando arranca en un plano inclinado a 30° a la horizontal. (a) ¿Qué distancia recorre la canica en el plano antes de detenerse? (b) ¿Cuánto tiempo transcurre mientras la canica se desplaza por el plano?

79. Repita el problema anterior; esta vez, sustituya la canica por una esfera hueca. Explique los nuevos resultados.

80. La masa de un aro de radio 1,0 m es de 6,0 kg. Rueda por una superficie horizontal a una rapidez de 10,0 m/s. (a) ¿Cuánto trabajo se requiere para detener el aro? (b) Si el aro arranca en una superficie a 30° a la horizontal, a una rapidez de 10,0 m/s, ¿qué distancia recorrerá por la pendiente antes de detenerse y volver a rodar hacia abajo?

81. Repita el problema anterior con una esfera hueca de igual radio y masa y velocidad inicial. Explique las diferencias en los resultados.

82. Una partícula tiene una masa de 0,5 kg y se desplaza por la línea $x = 5{,}0$ m a 2,0 m/s en la dirección *y*positiva. ¿Cuál es el momento angular de la partícula respecto al origen?

83. Una partícula de 4,0 kg se desplaza en un círculo de radio 2,0 m. El momento angular de la partícula varía en el tiempo según $l = 5{,}0t^2$. (a) ¿Cuál es el torque de la partícula en torno al centro del círculo en $t = 3{,}4$ s? (b) ¿Cuál es la velocidad angular de la partícula en $t = 3{,}4$ s?

84. Un protón se acelera en un ciclotrón para $5{,}0 \times 10^{6}$ m/s en 0,01 s. El protón sigue una trayectoria circular. Si el radio del ciclotrón es de 0,5 km, (a) ¿Cuál es el momento angular del protón en torno al centro a su máxima velocidad? (b) ¿Cuál es el torque del protón en torno al centro mientras acelera a su máxima velocidad?

85. (a) ¿Cuál es el momento angular de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra? (b) ¿Cómo se compara este momento angular con el de la Luna en su eje? Recuerde que la Luna mantiene la misma cara hacia la Tierra en todo momento.

86. Un DVD rota a 500 rpm. ¿Cuál es el momento

angular del DVD si tiene un radio de 6,0 cm y una masa de 20,0 g?

87. Un disco de alfarero gira desde el reposo hasta 10 rev/s en 15 s. El disco tiene una masa de 3,0 kg y un radio de 30,0 cm. ¿Cuál es el momento angular del disco en $t = 5$ s, $t = 10$ s?

88. Supongamos que arranca un automóvil antiguo al ejercer una fuerza de 300 N en su manivela durante 0,250 s. ¿Cuál es el momento angular dado al motor si la manivela está a 0,300 m del pivote y la fuerza se ejerce para crear el máximo torque todo el tiempo?

89. Un cilindro macizo de masa 2,0 kg y radio 20 cm rota en sentido contrario a las agujas del reloj, en torno a un eje vertical que pasa por su centro a 600 rev/min. Otro cilindro macizo de la misma masa y radio rota en el sentido de las agujas del reloj alrededor del mismo eje vertical a 900 rev/min. Si los cilindros se acoplan de forma que roten en torno al mismo eje vertical, ¿cuál es la velocidad angular de la combinación?

90. Un niño se sitúa en el centro de una plataforma que rota sin fricción a 1,0 rev/s. El niño sostiene las pesas lo más lejos posible de su cuerpo. En esta posición, el momento de inercia total del niño, de la plataforma y de las pesas es $5{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. El niño acerca las pesas a su cuerpo, lo que disminuye el momento de inercia total a $1{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. (a) ¿Cuál es la velocidad angular final de la plataforma? (b) ¿En cuánto aumenta la energía cinética rotacional?

91. Ocho niños, con una masa de 40 kg cada uno, se suben a un pequeño tiovivo. Se posicionan uniformemente en el borde exterior y juntan las manos. El tiovivo tiene un radio de 4,0 m y un momento de inercia $1.000{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Después de dar al tiovivo una velocidad angular de 6,0 rev/min, los niños caminan hacia adentro y se detienen cuando están a 0,75 m del eje de rotación. ¿Cuál es la nueva velocidad angular del tiovivo? Supongamos que hay un torque de fricción despreciable en la estructura.

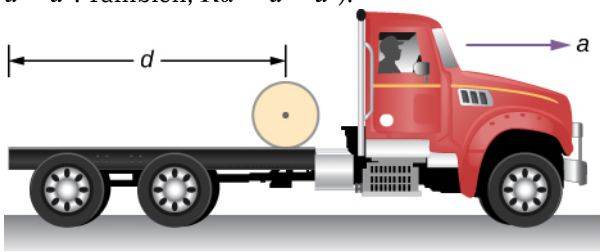
92. Un palo delgado de 150 g de masa rota alrededor de un eje perpendicular al eje largo del palo, a una velocidad angular de 240 rev/min. ¿Cuál es el momento angular del palo si el eje de rotación (a) pasa por el centro del palo? (b) pasa por un extremo del palo?

93. Un satélite esferoide de 20.000 kg de masa y 5,0 m de radio gira en torno a un eje que pasa por su centro de masa. Tiene una tasa de rotación de 8,0 rev/s. Dos antenas se despliegan en el plano de rotación, que se extiende desde el centro de masa del satélite. Cada antena puede calcularse aproximadamente como una varilla que tiene una masa de 200,0 kg y una longitud de 7,0 m. ¿Cuál es la nueva tasa de rotación del satélite?

94. Una peonza tiene momento de inercia $3{,}2 \times 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ y un radio de 4,0 cm desde el centro de masa hasta el punto de apoyo. Si gira a 20,0 rev/s y está en precesión, ¿cuántas revoluciones da en 10,0 s?

Problemas De Desafío

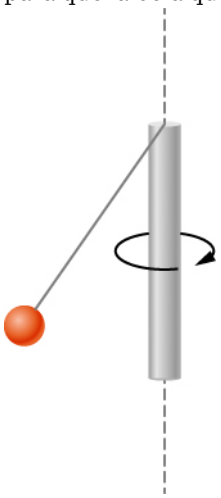
95. El camión que se muestra a continuación está inicialmente en reposo con un cilindro de papel sólido cilíndrico en el remolque. Si el camión avanza a una aceleración uniforme a, ¿qué distancia s recorre antes de que el papel ruede por el extremo trasero del remolque? (*Pista*: Si el rollo de papel se acelera hacia adelante con a', entonces se acelera hacia atrás respecto al camión con una aceleración $a - a'$. También, $R\alpha = a - a'$).



96. Una bola de boliche de 8,5 cm de radio se lanza a la pista a una velocidad de 9,0 m/s. La dirección del lanzamiento es hacia la izquierda, vista por el observador, por lo que la bola de boliche comienza a rotar en sentido contrario a las agujas del reloj cuando entra en contacto con el suelo. El coeficiente de fricción cinética en la pista es de 0,3. (a) ¿Cuál es el tiempo necesario para que la bola llegue al punto en que no resbale? ¿Cuál es la distancia d hasta el punto en que la bola rueda sin resbalar?

97. Una pequeña bola de masa 0,50 kg está unida por una cuerda sin masa a una varilla vertical que gira como se muestra a continuación. Cuando la varilla tiene una velocidad angular de 6,0 rad/s, la cuerda forma un ángulo de 30° con respecto a la vertical. (a) Si se aumenta la velocidad angular a 10,0 rad/s, ¿cuál es el nuevo ángulo de la cuerda? (b) Calcule los momentos angulares inicial y final de la bola. (c) ¿Puede la varilla girar lo suficientemente rápido como

para que la bola quede horizontal?



98. Un insecto que vuela horizontalmente a 1,0 m/s choca y se pega al extremo de un palo uniforme que cuelga verticalmente. Tras el impacto, el palo gira hacia afuera, hasta un ángulo máximo de 5,0° desde la vertical antes de rotar hacia atrás. Si la masa del palo es 10 veces la del insecto, calcule la longitud del palo.

CAPÍTULO 12
Equilibrio estático y elasticidad



Figura 12.1 Dos zancudos en posición de pie. Todas las fuerzas que actúan sobre cada zancudo se equilibran; ninguna cambia su movimiento de traslación. Además, todos los torques que actúan sobre cada persona se equilibran, por lo que ninguno de ellos cambia su movimiento de rotación. El resultado es el equilibrio estático (créditos: modificación del trabajo de Stuart Redler).

ESQUEMA DEL CAPITULO

12.1 Condiciones para el equilibrio estático
12.2 Ejemplos de equilibrio estático
12.3 Estrés, tensión y módulo elástico
12.4 Elasticidad y plasticidad

INTRODUCCIÓN En capítulos anteriores, aprendió acerca de las fuerzas y las leyes de Newton en lo que respecta al movimiento de traslación. Luego estudió los torques y el movimiento de rotación de un cuerpo en torno a un eje de rotación fijo. También aprendió que el equilibrio estático significa que no hay movimiento y que el equilibrio dinámico significa movimiento sin aceleración.

En este capítulo, combinamos las condiciones de equilibrio estático traslacional y de equilibrio estático rotacional para describir situaciones típicas de cualquier tipo de construcción. ¿Qué tipo de cable soporta un puente colgante? ¿Qué tipo de cimentación soporta un edificio de oficinas? ¿Funcionará correctamente esta prótesis de brazo? Estos son ejemplos de preguntas que los ingenieros contemporáneos deberán estar en capacidad de responder.

Las propiedades elásticas de los materiales son especialmente importantes en las aplicaciones de ingeniería, incluida la bioingeniería. Por ejemplo, los materiales que pueden estirarse o comprimirse y luego volver a su forma o posición original son buenos amortiguadores. En este capítulo, conocerá algunas aplicaciones que combinan el equilibrio con la elasticidad para construir estructuras reales que perduren.

12.1 Condiciones para el equilibrio estático

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Identificar las condiciones físicas del equilibrio estático.
- Dibujar un diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido sobre el que actúan fuerzas.
- Explicar cómo las condiciones de equilibrio nos permiten resolver problemas de estática.

Decimos que un cuerpo rígido está en **equilibrio** cuando tanto su aceleración lineal como angular son cero respecto a un marco de referencia inercial. Esto significa que un cuerpo en equilibrio puede estar en movimiento, pero si es así, sus velocidades lineal y angular deberán ser constantes. Decimos que un cuerpo rígido está en **equilibrio estático** cuando está en reposo *en nuestro marco de referencia seleccionado*. Obsérvese que la distinción entre el estado de reposo y el estado de movimiento uniforme es artificial, es decir, un objeto puede estar en reposo en nuestro marco de referencia seleccionado. Sin embargo, para un observador que se mueva a velocidad constante respecto a nuestro marco, el mismo objeto parece estar en movimiento uniforme a velocidad constante. Dado que el movimiento es *relativo*, lo que está en equilibrio estático para nosotros está en equilibrio dinámico para el observador en movimiento y viceversa. Dado que las leyes de la física son idénticas para todos los marcos de referencia inerciales, en un marco de referencia inercial no hay distinción entre equilibrio estático y equilibrio.

Según la segunda ley del movimiento de Newton, la aceleración lineal de un cuerpo rígido es causada por una fuerza neta que actúa sobre este, o

$$\sum_k \vec{\mathbf{F}}_k = m\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}. \tag{12.1}$$

Aquí, la suma es de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, donde m es su masa y $\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}$ es la aceleración lineal de su centro de masa (un concepto del que hablamos en Momento lineal y colisiones sobre el momento lineal y las colisiones). En equilibrio, la aceleración lineal es cero. Si ponemos la aceleración a cero en la Ecuación 12.1, obtenemos la siguiente ecuación:

Primera condición de equilibrio

La primera condición de equilibrio para el equilibrio estático de un cuerpo rígido expresa el equilibrio *traslacional*:

$$\sum_k \vec{\mathbf{F}}_k = \vec{\mathbf{0}}. \tag{12.2}$$

La primera condición de equilibrio, Ecuación 12.2, es la condición de equilibrio para las fuerzas, que encontramos al estudiar las aplicaciones de las leyes de Newton.

Esta ecuación vectorial es equivalente a las siguientes tres ecuaciones escalares para los componentes de la fuerza neta:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = 0, \quad \sum_k F_{kz} = 0. \tag{12.3}$$

De forma análoga a la Ecuación 12.1, podemos afirmar que la aceleración rotacional $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ de un cuerpo rígido alrededor de un eje de rotación fijo es causada por el torque neto que actúa sobre el cuerpo, o

$$\sum_k \vec{\boldsymbol{\tau}}_k = I\vec{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{12.4}$$

Aquí I es la inercia rotacional del cuerpo en rotación alrededor de este eje y la suma es sobre *todos los* torques $\vec{\boldsymbol{\tau}}_k$ de fuerzas externas en la Ecuación 12.2. En equilibrio, la aceleración rotacional es cero. Al poner a cero el lado derecho de la Ecuación 12.4, obtenemos la segunda condición de equilibrio:

Segunda condición de equilibrio

La segunda condición de equilibrio para el equilibrio estático de un cuerpo rígido expresa el equilibrio *rotacional*:

$$\sum_k \vec{\boldsymbol{\tau}}_k = \vec{\mathbf{0}}. \qquad 12.5$$

La segunda condición de equilibrio, Ecuación 12.5, es la condición de equilibrio para los torques que encontramos cuando estudiamos la dinámica rotacional. Cabe destacar que esta ecuación de equilibrio es generalmente válida para el equilibrio rotacional en torno a cualquier eje de rotación (fijo o no). De nuevo, esta ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones escalares para los componentes vectoriales del torque neto:

$$\sum_k \tau_{kx} = 0, \quad \sum_k \tau_{ky} = 0, \quad \sum_k \tau_{kz} = 0. \qquad 12.6$$

La segunda condición de equilibrio significa que, en equilibrio, no hay ningún torque externo neto que provoque la rotación alrededor de ningún eje.

La primera y la segunda condición de equilibrio se establecen en un marco de referencia particular. La primera condición solo implica fuerzas y, por ende, es independiente del origen del marco de referencia. Sin embargo, la segunda condición implica el torque, que se define como un producto cruz, $\vec{\boldsymbol{\tau}}_k = \vec{\mathbf{r}}_k \times \vec{\mathbf{F}}_k$, donde el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_k$ con respecto al eje de rotación del punto donde se aplica la fuerza entra en la ecuación. Por lo tanto, el torque depende de la ubicación del eje en el marco de referencia. Sin embargo, cuando las condiciones de equilibrio rotacional y traslacional se mantienen simultáneamente en un marco de referencia, entonces también se mantienen en cualquier otro marco de referencia inercial, de modo que el torque neto sobre cualquier eje de rotación sigue siendo cero. La explicación de esto es bastante sencilla.

Supongamos que el vector $\vec{\mathbf{R}}$ es la posición del origen de un nuevo marco de referencia inercial S' en el antiguo sistema de referencia inercial S. Por nuestro estudio del movimiento relativo, sabemos que en el nuevo sistema de referencia S' el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}'_k$ del punto donde la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_k$ se aplica está relacionado con $\vec{\mathbf{r}}_k$ mediante la ecuación

$$\vec{\mathbf{r}}'_k = \vec{\mathbf{r}}_k - \vec{\mathbf{R}}.$$

Ahora, podemos sumar todos los torques $\vec{\boldsymbol{\tau}}'_k = \vec{\mathbf{r}}'_k \times \vec{\mathbf{F}}_k$ de todas las fuerzas externas en un nuevo marco de referencia, S' :

$$\sum_k \vec{\boldsymbol{\tau}}'_k = \sum_k \vec{\mathbf{r}}'_k \times \vec{\mathbf{F}}_k = \sum_k (\vec{\mathbf{r}}_k - \vec{\mathbf{R}}) \times \vec{\mathbf{F}}_k = \sum_k \vec{\mathbf{r}}_k \times \vec{\mathbf{F}}_k - \sum_k \vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{F}}_k = \sum_k \vec{\boldsymbol{\tau}}_k - \vec{\mathbf{R}} \times \sum_k \vec{\mathbf{F}}_k = \vec{\mathbf{0}}.$$

En el último paso de esta cadena de razonamiento, utilizamos el hecho de que en el equilibrio en el antiguo marco de referencia, S, el primer término desaparece debido a la Ecuación 12.5 y el segundo término desaparece debido a la Ecuación 12.2. De allí que vemos que el torque neto en cualquier marco de referencia inercial S' es cero, siempre que ambas condiciones de equilibrio se cumplan en un marco de referencia inercial S.

La implicación práctica de esto es que, al aplicar las condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido, somos libres de elegir cualquier punto como origen del marco de referencia. Nuestra elección del marco de referencia viene dictada por las características físicas del problema que estamos resolviendo. En un marco de referencia, la forma matemática de las condiciones de equilibrio puede ser bastante complicada, mientras que en otro marco, las mismas condiciones pueden tener una forma matemática más sencilla y fácil de resolver. El origen de un determinado marco de referencia recibe el nombre de punto de apoyo.

En el caso más general, las condiciones de equilibrio se expresan mediante las seis ecuaciones escalares (Ecuación 12.3 y Ecuación 12.6). Para los problemas de equilibrio plano con rotación alrededor de un eje fijo,

que consideramos en este capítulo, podemos reducir el número de ecuaciones a tres. El procedimiento estándar consiste en adoptar un marco de referencia en el que el eje z es el eje de rotación. Con esta elección de eje, el torque neto solo tiene un componente z, todas las fuerzas que tienen pares no nulos se encuentran en el plano xy, y por lo tanto las contribuciones al torque neto provienen solamente de los componentes x y y de las fuerzas externas. Así, para los problemas planos con el eje de rotación perpendicular al plano xy, tenemos las siguientes tres condiciones de equilibrio para las fuerzas y los torques:

$$F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{Nx} = 0 \quad \textbf{12.7}$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{Ny} = 0 \quad \textbf{12.8}$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N = 0 \quad \textbf{12.9}$$

donde la suma es sobre todas las N fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y sobre sus torques. En la Ecuación 12.9, hemos simplificado la notación eliminando el subíndice z, pero aquí entendemos que la suma es sobre todas las contribuciones a lo largo del eje z, que es el eje de rotación. En la Ecuación 12.9, el componente z del torque $\vec{\tau}_k$ de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_k$ es

$$\tau_k = r_k F_k \operatorname{sen} \theta \quad \textbf{12.10}$$

donde r_k es la longitud del brazo de palanca de la fuerza y F_k es la magnitud de la fuerza (como vimos en Rotación de eje fijo). El ángulo θ es el ángulo entre vectores $\vec{\mathbf{r}}_k$ y $\vec{\mathbf{F}}_k$, midiendo *desde el vector* $\vec{\mathbf{r}}_k$ *al vector* $\vec{\mathbf{F}}_k$ en el sentido *contrario a las agujas del reloj* (Figura 12.2). Al utilizar la Ecuación 12.10, solemos calcular la magnitud del torque y asignar su sentido como positivo (+) o negativo (−), en función del sentido de rotación provocado únicamente por este torque. En la Ecuación 12.9, el torque neto es la suma de términos, con cada término calculado a partir de la Ecuación 12.10, y cada término debe tener el *sentido* correcto. Del mismo modo, en la Ecuación 12.7, asignamos el signo + para forzar los componentes en la dirección $x+$, y el signo − a los componentes en la dirección $x-$. La misma regla debe seguirse sistemáticamente en la Ecuación 12.8, cuando se calculan los componentes de la fuerza a lo largo del eje y.

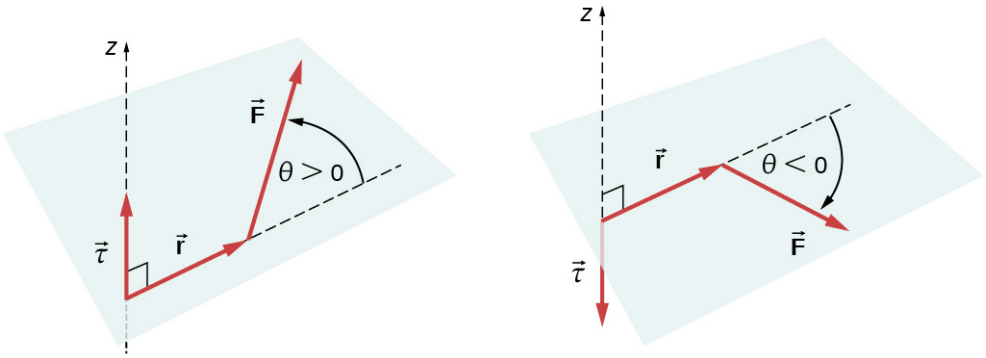


FIGURA 12.2 Torque de una fuerza: (a) Cuando el torque de una fuerza provoca una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje de rotación, decimos que su *sentido* es positivo, lo que significa que el vector par es paralelo al eje de rotación. (b) Cuando el par de una fuerza provoca una rotación en sentido de las agujas del reloj alrededor del eje, decimos que su sentido es negativo, lo que significa que el vector par es antiparalelo al eje de rotación.

INTERACTIVO

Vea esta demostración (https://openstax.org/l/21rigsquare) para ver cómo actúan dos fuerzas sobre un cuadrado rígido en dos dimensiones. En todo momento se cumplen las condiciones de equilibrio estático dadas por la Ecuación 12.7 hasta la Ecuación 12.9. Puede variar las magnitudes de las fuerzas y sus brazos de

palanca y observar el efecto que estos cambios tienen sobre el cuadrado.

En muchas situaciones de equilibrio, una de las fuerzas que actúa sobre el cuerpo es su peso. En los diagramas de cuerpo libre, el vector peso está unido al **centro de gravedad** del cuerpo. A efectos prácticos, el centro de gravedad es idéntico al centro de masa, como se vio en Momento Lineal y Colisiones sobre el momento lineal y las colisiones. Solo en situaciones en las que un cuerpo tiene una gran extensión espacial, de modo que el campo gravitacional no es uniforme en todo su volumen, el centro de gravedad y el centro de masa están situados en puntos diferentes. Sin embargo, en situaciones prácticas, incluso objetos tan grandes como edificios o cruceros se encuentran en un campo gravitacional uniforme en la superficie de la Tierra, donde la aceleración debida a la gravedad tiene una magnitud constante de $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. En estas situaciones, el centro de gravedad es idéntico al centro de masa. Por lo tanto, a lo largo de este capítulo, utilizamos el centro de masa (CM) como el punto donde se fija el vector peso. Recordemos que el CM tiene un significado físico especial: cuando se aplica una fuerza externa a un cuerpo exactamente en su CM, el cuerpo en su conjunto experimenta un movimiento de traslación y dicha fuerza no provoca la rotación.

Cuando el CM está situado fuera del eje de rotación, se produce un **torque gravitacional** neto sobre un objeto. El torque gravitacional es el par causado por el peso. Este torque gravitacional puede rotar el objeto si no hay ningún soporte que lo equilibre. La magnitud del torque gravitacional depende de la distancia a la que se encuentre el CM del pivote. Por ejemplo, en el caso de un camión basculante (Figura 12.3), el pivote se encuentra en la línea donde los neumáticos hacen contacto con la superficie de la carretera. Si el CM está situado a gran altura sobre la superficie de la carretera, el torque gravitacional puede ser lo suficientemente grande como para volcar el camión. Los autos de pasajeros con un CM bajo, cerca del pavimento, son más resistentes al vuelco que los camiones.

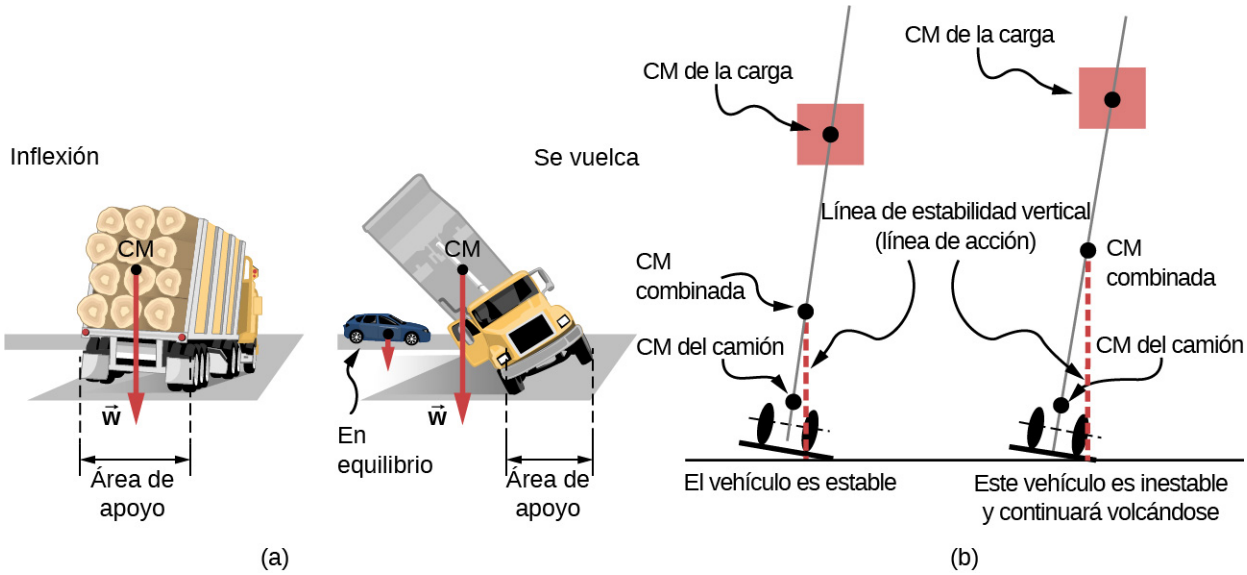


FIGURA 12.3 La distribución de la masa afecta a la posición del centro de masa (CM), donde el vector peso $\vec{w}$. Si el centro de gravedad está dentro de la zona de apoyo, la carretilla vuelve a su posición inicial después de volcarse [véase el panel izquierdo en (b)]. No obstante, si el centro de gravedad se encuentra fuera de la zona de apoyo, el camión se vuelca [véase el panel derecho en (b)]. Ambos vehículos en (b) están fuera de equilibrio. Observe que el auto de (a) está en equilibrio: la baja ubicación de su centro de gravedad dificulta que se vuelque.

INTERACTIVO

Si inclina una caja de manera que un borde permanezca en contacto con la mesa que tiene debajo, entonces un borde de la base de apoyo se convierte en un pivote. Mientras el centro de gravedad de la caja permanezca sobre la base de apoyo, el torque gravitacional rota la caja hacia su posición original de equilibrio estable. Cuando el centro de gravedad se desplaza fuera de la base de apoyo, el torque gravitacional rota la caja en

sentido contrario, y la caja se vuelca. Vea esta demostración (https://openstax.org/l/21unstable) para experimentar con las posiciones estables e inestables de una caja.

EJEMPLO 12.1

Centro de gravedad de un auto

Un auto de pasajeros con una distancia entre ejes de 2,5 m tiene el 52 % de su peso sobre las ruedas delanteras en terreno llano, como se ilustra en la Figura 12.4. ¿Dónde se encuentra el CM de este auto con respecto al eje trasero?

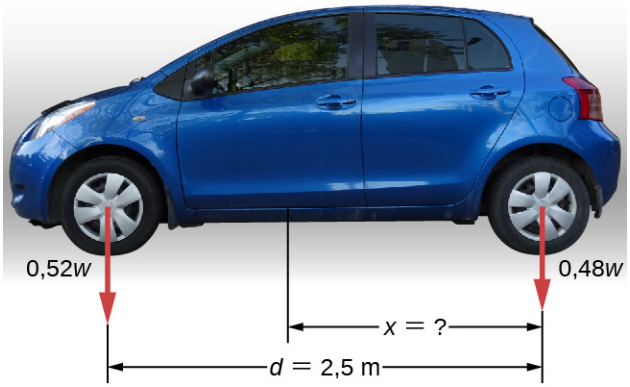


FIGURA 12.4 La distribución del peso entre los ejes del auto. ¿Dónde se encuentra el centro de gravedad? (créditos: "auto", modificación del trabajo de Jane Whitney).

Estrategia

No conocemos cuál es el peso w del auto. Todo lo que sabemos es que, cuando el auto descansa sobre una superficie plana, $0{,}52w$ empujan hacia abajo en la superficie en los puntos de contacto de las ruedas delanteras y $0{,}48w$ empujan hacia abajo en la superficie en los puntos de contacto de las ruedas traseras. Además, los puntos de contacto están separados entre sí por la distancia $d = 2{,}5$ m. En estos puntos de contacto, el auto experimenta fuerzas de reacción normal con magnitudes $F_{\mathrm{F}} = 0{,}52w$ y $F_{\mathrm{R}} = 0{,}48w$ en los ejes delantero y trasero, respectivamente. También sabemos que el auto es un ejemplo de cuerpo rígido en equilibrio, cuyo peso entero w actúa en su CM. El CM se encuentra en algún lugar entre los puntos donde actúan las fuerzas normales de reacción, en algún lugar a una distancia x del punto donde F_R actúa. Nuestra tarea es hallar x. Así, identificamos tres fuerzas que actúan sobre el cuerpo (el auto), y podemos dibujar un diagrama de cuerpo libre para el cuerpo rígido extendido, como se muestra en la Figura 12.5.

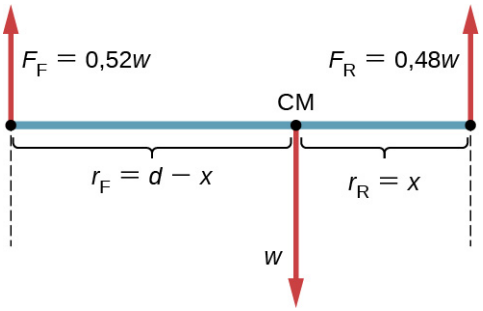


FIGURA 12.5 El diagrama de cuerpo libre del auto indica claramente los vectores de fuerza que actúan sobre el auto y las distancias al centro de masa (CM). Cuando se selecciona CM como punto de apoyo, estas distancias son brazos de palanca de las fuerzas de reacción normales. Obsérvese que no hace falta dibujar a escala las magnitudes vectoriales y los brazos de palanca, pero deben etiquetarse claramente todas las cantidades pertinentes.

Estamos casi listos para escribir las condiciones de equilibrio de la Ecuación 12.7 a la Ecuación 12.9 para el

auto, pero primero debemos decidir el marco de referencia. Supongamos que elegimos el eje x a lo largo del auto, el eje y vertical y el eje z perpendicular a este plano xy. Con esta elección solo tenemos que escribir la Ecuación 12.7 y la Ecuación 12.9 porque todos los componentes de y son idénticos a cero. Ahora tenemos que decidir la ubicación del punto de apoyo. Podemos elegir cualquier punto como ubicación del eje de rotación (eje z). Supongamos que colocamos el eje de rotación en CM, como se indica en el diagrama de cuerpo libre del auto. Llegados a este punto, estamos preparados para escribir las condiciones de equilibrio del auto.

Solución

Cada condición de equilibrio contiene solo tres términos porque hay $N = 3$ fuerzas que actúan sobre el auto. La primera condición de equilibrio, Ecuación 12.7, establece

$$+F_{\mathrm{F}} - w + F_{\mathrm{R}} = 0. \tag{12.11}$$

Esta condición se satisface trivialmente porque, al sustituir los datos, la Ecuación 12.11 se convierte en $+0{,}52w - w + 0{,}48w = 0$. La segunda condición de equilibrio, Ecuación 12.9, establece

$$\tau_{\mathrm{F}} + \tau_w + \tau_{\mathrm{R}} = 0 \tag{12.12}$$

donde τ_{F} es el torque de fuerza F_{F}, τ_w es el torque gravitacional de la fuerza w y τ_{R} es el torque de fuerza F_{R}. Cuando el pivote está situado en CM, el torque gravitacional es idéntico a cero porque el brazo de palanca del peso con respecto a un eje que pasa por CM es cero. Las líneas de acción de ambas fuerzas normales de reacción son perpendiculares a sus brazos de palanca, por lo que en la Ecuación 12.10, tenemos $|\operatorname{sen}\theta| = 1$ para ambas fuerzas. En el diagrama de cuerpo libre se lee que el torque τ_{F} provoca una rotación en el sentido de las agujas del reloj alrededor del pivote en CM, por lo que su sentido es negativo; y el torque τ_{R} provoca una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj en torno al pivote en CM, por lo que su sentido es positivo. Con esta información, escribimos la segunda condición de equilibrio como

$$-r_{\mathrm{F}} F_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{R}} F_{\mathrm{R}} = 0. \tag{12.13}$$

Con la ayuda del diagrama de cuerpo libre, identificamos las magnitudes de fuerza $F_{\mathrm{R}} = 0{,}48w$ y $F_{\mathrm{F}} = 0{,}52w$, y sus correspondientes brazos de palanca $r_{\mathrm{R}} = x$ y $r_{\mathrm{F}} = d - x$. Ahora podemos escribir la segunda condición de equilibrio, la Ecuación 12.13, explícitamente en términos de la distancia desconocida x:

$$-0{,}52(d - x)w + 0{,}48xw = 0. \tag{12.14}$$

Aquí el peso w se cancela y podemos resolver la ecuación para la posición desconocida x del CM. La respuesta es $x = 0{,}52d = 0{,}52(2{,}5\ \mathrm{m}) = 1{,}3\ \mathrm{m}$.

Solución

Elegir el pivote en la posición del eje delantero no cambia el resultado. El diagrama de cuerpo libre para esta ubicación del pivote se presenta en la Figura 12.6. Para esta elección de punto de apoyo, la segunda condición de equilibrio es

$$-r_w w + r_{\mathrm{R}} F_{\mathrm{R}} = 0. \tag{12.15}$$

Al sustituir las cantidades indicadas en el diagrama, obtenemos

$$-(d - x)w + 0{,}48dw = 0. \tag{12.16}$$

La respuesta obtenida al resolver la Ecuación 12.13 es, de nuevo, $x = 0{,}52d = 1{,}3\ \mathrm{m}$.

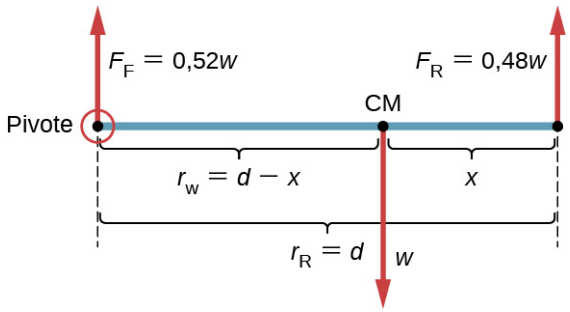


FIGURA 12.6 El diagrama de cuerpo libre equivalente para el auto; el pivote está indicado claramente.

Importancia

Este ejemplo muestra que, cuando se resuelven problemas de equilibrio estático, somos libres de elegir la ubicación del pivote. Para diferentes elecciones del punto de apoyo tenemos diferentes conjuntos de condiciones de equilibrio que resolver. Sin embargo, todas las opciones conducen a la misma solución del problema.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.1

Resuelva el Ejemplo 12.1 al elegir el pivote en la ubicación del eje trasero.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.2

Explique cuál de las siguientes situaciones satisface ambas condiciones de equilibrio: (a) una pelota de tenis que no gira mientras se desplaza en el aire; (b) un pelícano que se desliza en el aire a una velocidad constante a una altitud; o (c) un cigüeñal en el motor de un auto estacionado.

Un caso especial de equilibrio estático se produce cuando todas las fuerzas externas sobre un objeto actúan en o a lo largo del eje de rotación o cuando la extensión espacial del objeto puede ser despreciada. En este caso, el objeto puede tratarse efectivamente como una masa puntual. En este caso especial, no hay que preocuparse por la segunda condición de equilibrio, Ecuación 12.9, porque todos los torques son idénticos a cero y la primera condición de equilibrio (para las fuerzas) es la única que debe cumplirse. El diagrama de cuerpo libre y la estrategia de resolución de problemas para este caso especial se han esbozado en Leyes de movimiento de Newton y Aplicaciones de las leyes de Newton. En el siguiente ejemplo verá una situación de equilibrio típica, que implica solo la primera condición de equilibrio.

INTERACTIVO

Vea esta demostración (https://openstax.org/l/21pulleyknot) para observar tres pesas que están conectadas por cuerdas sobre poleas y atadas con un nudo. Puede experimentar con los pesos para ver cómo afectan a la posición de equilibrio del nudo y, al mismo tiempo, ver la representación del diagrama vectorial de la primera condición de equilibrio en funcionamiento.

EJEMPLO 12.2

Tensión de ruptura

Una pequeña bandeja con una masa de 42,0 g está sostenida por dos cuerdas, como se muestra en la Figura 12.7. La tensión máxima que puede soportar la cuerda es de 2,80 N. La masa se añade gradualmente a la bandeja hasta que una de las cuerdas se rompe. ¿Qué cuerda es? ¿Cuánta masa hay que añadir para que esto ocurra?

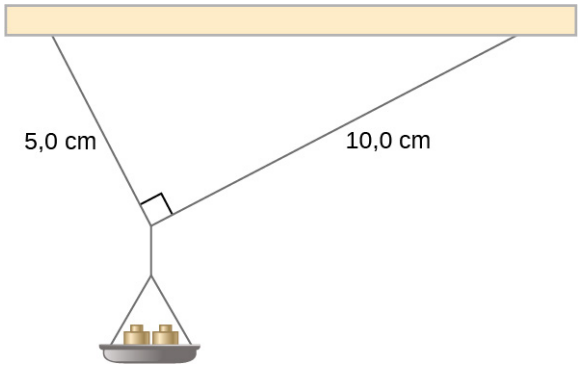


FIGURA 12.7 La masa se añade gradualmente a la bandeja hasta que una de las cuerdas se rompe.

Estrategia

Este sistema mecánico formado por cuerdas, masas y la bandeja está en equilibrio estático. En concreto, el nudo que ata las cuerdas a la bandeja está en equilibrio estático. El nudo puede ser tratado como un punto; por lo tanto, todo lo que necesitamos es la primera condición de equilibrio. Las tres fuerzas que tiran del nudo son la tensión $\vec{\mathbf{T}}_1$ en la cuerda de 5,0 cm, la tensión $\vec{\mathbf{T}}_2$ en la cuerda de 10,0 cm y el peso $\vec{\mathbf{w}}$ de la bandeja que contiene las masas. Adoptamos un sistema de coordenadas rectangulares con el eje *y* apuntando en sentido contrario a la dirección de la gravedad y dibujamos el diagrama de cuerpo libre para el nudo (vea la Figura 12.8). Para hallar los componentes de la tensión, debemos identificar los ángulos de dirección α_1 y α_2 que las cuerdas hacen con la dirección horizontal que es el eje *x*. Como puede observar en la Figura 12.7, las cuerdas forman dos lados de un triángulo rectángulo. Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para resolver este triángulo, mostrado en la Figura 12.8, y encontrar el seno y el coseno de los ángulos α_1 y α_2. Entonces podemos resolver las tensiones en sus componentes rectangulares, sustituir en la primera condición de equilibrio (Ecuación 12.7 y Ecuación 12.8) y resolver las tensiones en las cuerdas. La cuerda con mayor tensión se romperá primero.

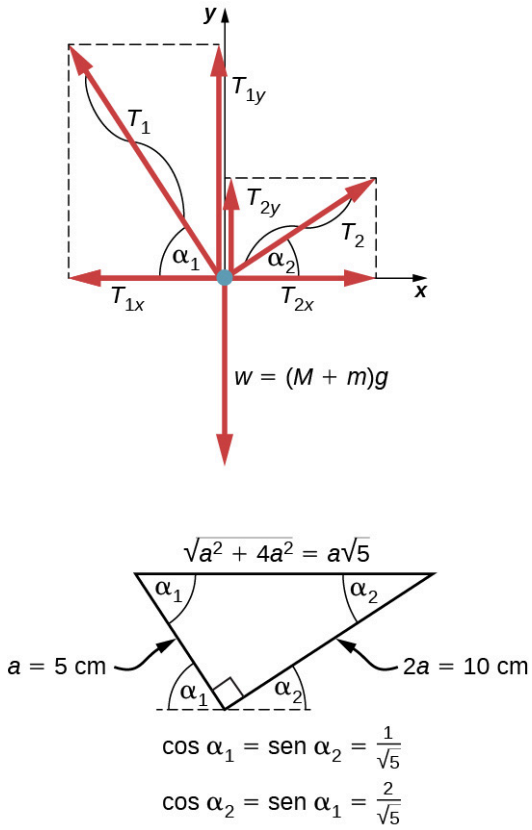


FIGURA 12.8 Diagrama de cuerpo libre para el nudo en el Ejemplo 12.2.

Solución

El peso w que tira del nudo se debe a la masa M de la bandeja y a la masa m añadida al plato, o $w = (M + m)g$. Con la ayuda del diagrama de cuerpo libre en la Figura 12.8, podemos establecer las condiciones de equilibrio para el nudo:

$$\begin{aligned} \text{en la dirección } x, \quad & -T_{1x} + T_{2x} = 0 \\ \text{en la dirección } y, \quad & +T_{1y} + T_{2y} - w = 0. \end{aligned}$$

A partir del diagrama de cuerpo libre, las magnitudes de los componentes en estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} T_{1x} &= T_1 \cos\alpha_1 = T_1/\sqrt{5}, \qquad T_{1y} = T_1\,\text{sen}\,\alpha_1 = 2T_1/\sqrt{5} \\ T_{2x} &= T_2 \cos\alpha_2 = 2T_2/\sqrt{5}, \qquad T_{2y} = T_2\,\text{sen}\,\alpha_2 = T_2/\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Sustituimos estos componentes en las condiciones de equilibrio y simplificamos. Obtenemos entonces dos ecuaciones de equilibrio para las tensiones:

$$\begin{aligned} \text{en la dirección } x, \quad & T_1 = 2T_2 \\ \text{en la dirección } y, \quad & \frac{2T_1}{\sqrt{5}} + \frac{T_2}{\sqrt{5}} = (M + m)g. \end{aligned}$$

La ecuación de equilibrio para la dirección x nos indica que la tensión T_1 en la cuerda de 5,0 cm es el doble de la tensión T_2 en la cadena de 10,0 cm. Por lo tanto, la cuerda más corta se romperá. Si utilizamos la primera ecuación para eliminar T_2 de la segunda ecuación, obtenemos la relación entre la masa m en la bandeja y la tensión T_1 en la cadena más corta:

$$2{,}5T_1/\sqrt{5} = (M + m)g.$$

La cuerda se rompe cuando la tensión alcanza el valor crítico de $T_1 = 2{,}80$ N. La ecuación anterior puede resolverse para la masa crítica m que rompe la cuerda:

$$m = \frac{2,5}{\sqrt{5}}\frac{T_1}{g} - M = \frac{2,5}{\sqrt{5}}\frac{2,80\ \text{N}}{9,8\ \text{m/s}^2} - 0,042\ \text{kg} = 0,277\ \text{kg} = 277,0\ \text{g}.$$

Importancia

Supongamos que el sistema mecánico considerado en este ejemplo está fijado a un techo dentro de un ascensor que sube. Siempre que el ascensor ascienda a una velocidad constante, el resultado sigue siendo el mismo porque el peso w no cambia. Si el ascensor asciende con la aceleración, la masa crítica es menor porque el peso de $M + m$ se agranda por un peso aparente debido a la aceleración del ascensor. Aun así, en todos los casos la cuerda más corta se rompe primero.

12.2 Ejemplos de equilibrio estático

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Identificar y analizar las situaciones de equilibrio estático.
- Establecer un diagrama de cuerpo libre para un objeto extendido en equilibrio estático.
- Establecer y resolver condiciones de equilibrio estático para objetos en equilibrio en diversas situaciones físicas.

Todos los ejemplos de este capítulo son problemas planos. En consecuencia, utilizamos las condiciones de equilibrio en la forma de componentes de la Ecuación 12.7 a la Ecuación 12.9. Hemos introducido una estrategia de resolución de problemas en el Ejemplo 12.1 para ilustrar el significado físico de las condiciones de equilibrio. Ahora generalizamos esta estrategia en una lista de pasos a seguir al momento de resolver problemas de equilibrio estático en relación con cuerpos rígidos extendidos. Procedemos en cinco pasos prácticos.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Equilibrio estático

1. Identificar el objeto sujeto a análisis. Para algunos sistemas en equilibrio, habría que considerar más de un objeto. Identifique todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. Identifique las preguntas que debe responder. Identifique la información dada en el problema. En los problemas realistas, parte de la información clave puede estar implícita en la situación, en lugar de proporcionarse explícitamente.
2. Establezca un diagrama de cuerpo libre para el objeto. (a) Elija el marco de referencia xy para el problema. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el objeto; incluya solo las fuerzas que actúan sobre este. Cuando sea conveniente, represente las fuerzas en términos de sus componentes en el marco de referencia elegido. Al hacer esto para cada fuerza, tache la fuerza original para no incluir erróneamente la misma fuerza dos veces en las ecuaciones. Etiquete todas las fuerzas: lo necesitará para calcular correctamente las fuerzas netas en las direcciones x y y. En el caso de una fuerza desconocida, la dirección debe asignarse de forma arbitraria; piense en esta como "dirección de trabajo" o "dirección posible". La dirección correcta se determina por el signo que se obtiene en la solución final. El signo más (+) significa que la dirección de trabajo es la dirección real. El signo menos (−) significa que la dirección real es opuesta a la supuesta dirección de trabajo. (b) Elija la ubicación del eje de rotación; en otras palabras, elija el punto de apoyo con respecto al cual calculará el torque de las fuerzas que actúan. En el diagrama de cuerpo libre, indique la ubicación del pivote y los brazos de palanca de las fuerzas que actúan; lo necesitará para calcular el torque correctamente. En la selección del pivote, tenga en cuenta que este puede colocarse en cualquier lugar que desee, pero el principio rector es que la mejor elección simplificará en la medida de lo posible el cálculo del torque neto a lo largo del eje de rotación.
3. Establezca las ecuaciones de equilibrio para el objeto. (a) Utilice el diagrama de cuerpo libre para escribir una condición de equilibrio correcta Ecuación 12.7 para los componentes de la fuerza en la dirección x. (b) Utilice el diagrama de cuerpo libre para escribir una condición de equilibrio correcta Ecuación 12.11, para los componentes de la fuerza en la dirección y (c) Utilice el diagrama de cuerpo libre para escribir una

condición de equilibrio correcta, Ecuación 12.9, para el torque a lo largo del eje de rotación. Utilice la Ecuación 12.10, para evaluar las magnitudes y los sentidos del torque.

4. Simplificar y resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio para obtener las incógnitas. En este punto, su trabajo implica solo el álgebra. Tenga en cuenta que el número de ecuaciones deberá ser igual al número de incógnitas. Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones, el problema no puede resolverse.
5. Evalúe las expresiones de las incógnitas que ha obtenido en su solución. Sus respuestas finales deben tener valores numéricos correctos y unidades físicas correctas. Si no es así, entonces siga los pasos anteriores para rastrear un error hasta su origen y corregirlo. Además, puede comprobar independientemente sus respuestas numéricas al desplazar el pivote a un lugar diferente y resolver el problema de nuevo, que es lo que hicimos en la Ejemplo 12.1.

Tenga en cuenta que establecer un diagrama de cuerpo libre para un problema de equilibrio de cuerpo rígido es el componente más importante en el proceso de solución. Sin la configuración y el diagrama correctos, no podrá escribir las condiciones correctas para el equilibrio. Tenga en cuenta también que el diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido extendido que puede experimentar movimiento de rotación es distinto al de un cuerpo que experimenta únicamente movimiento de traslación (como se pudo ver en los capítulos sobre las Leyes del movimiento de Newton). En la dinámica traslacional, un cuerpo se representa como su CM, donde todas las fuerzas sobre el cuerpo están unidas y no aparecen torques. Este no es el caso en la dinámica rotacional, donde un cuerpo rígido extendido no puede representarse con un solo punto. La razón es que, al analizar la rotación, debemos identificar el torque que actúa sobre el cuerpo, el cual depende tanto de la fuerza que actúa como de su brazo de palanca. Aquí, el diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido extendido nos permite identificar los torques externos.

EJEMPLO 12.3

El equilibrio del torque

Tres masas están unidas a un metro plegable uniforme, como se muestra en la Figura 12.9. La masa de la vara de medir es de 150,0 g y las masas a la izquierda del punto de apoyo son $m_1 = 50{,}0$ g y $m_2 = 75{,}0$ g. Encuentre la masa m_3 que equilibra el sistema cuando se fija en el extremo derecho de la vara, y la fuerza de reacción normal en el punto de apoyo cuando el sistema está equilibrado.

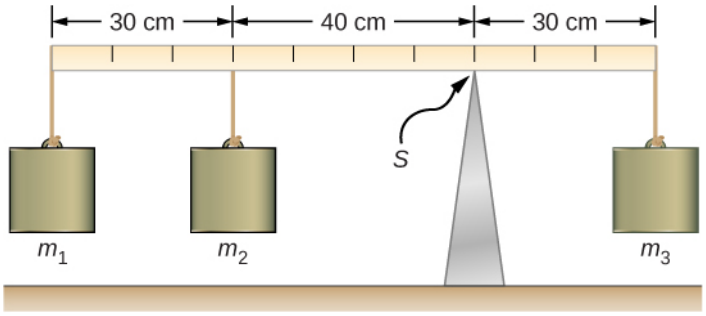


FIGURA 12.9 En una balanza de torque, una viga horizontal se apoya en un punto de apoyo (indicado por *S*) y las masas se fijan a ambos lados del punto de apoyo. El sistema está en equilibrio estático cuando la viga no gira. Está equilibrado cuando la viga se mantiene nivelada.

Estrategia

Para la disposición mostrada en la figura, identificamos las siguientes cinco fuerzas que actúan sobre la vara de medir:

$w_1 = m_1 g$ es el peso de la masa m_1; $w_2 = m_2 g$ es el peso de la masa m_2;

$w = mg$ es el peso de toda la vara de medir $w_3 = m_3 g$ es el peso de la masa desconocida m_3;

F_S es la fuerza de reacción normal en el punto de apoyo S.

Elegimos un marco de referencia en el que la dirección del eje y es la dirección de la gravedad, la dirección del eje x es a lo largo de la vara de medir, y el eje de rotación (el eje z) es perpendicular al eje xy pasa por el punto de apoyo S. En otras palabras, elegimos el pivote en el punto donde la vara de medir toca el apoyo. Esta es una elección natural para el pivote porque este punto no se mueve cuando la vara gira. Ahora estamos listos para configurar el diagrama de cuerpo libre para la vara de medir. Indicamos el pivote y adjuntamos cinco vectores que representan las cinco fuerzas a lo largo de la línea que representa la vara de medir, y ubican las fuerzas con respecto al pivote (Figura 12.10). En esta fase, podemos identificar los brazos de palanca de las cinco fuerzas, dada la información proporcionada en el problema. Para las tres masas colgantes, el problema es explícito en cuanto a sus ubicaciones a lo largo de la vara, pero la información sobre la ubicación del peso w se da implícitamente. La palabra clave aquí es "uniforme". Sabemos por nuestros estudios anteriores que el CM de una vara uniforme se encuentra en su punto medio. En tal sentido, es aquí donde fijamos el peso w, en la marca de 50 cm.

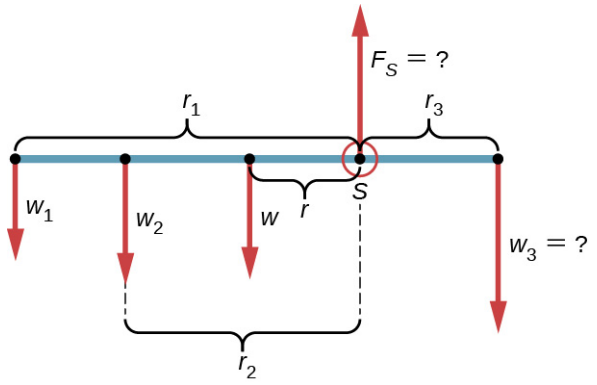


FIGURA 12.10 Diagrama de cuerpo libre para la vara de medir. El pivote se elige en el punto de apoyo S.

Solución

Con la Figura 12.9 y la Figura 12.10 como referencia, empezamos por encontrar los brazos de palanca de las cinco fuerzas que actúan sobre la vara:

$$\begin{aligned} r_1 &= 30{,}0\text{ cm} + 40{,}0\text{ cm} = 70{,}0\text{ cm} \\ r_2 &= 40{,}0\text{ cm} \\ r &= 50{,}0\text{ cm} - 30{,}0\text{ cm} = 20{,}0\text{ cm} \\ r_S &= 0{,}0\text{ cm (porque } F_S \text{ se fija en el pivote)} \\ r_3 &= 30{,}0\text{ cm.} \end{aligned}$$

Ahora podemos encontrar los cinco torques con respecto al pivote elegido:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= +r_1 w_1 \operatorname{sen} 90^\circ = +r_1 m_1 g && \text{(rotación en sentido contrario a las agujas del reloj, sentido positivo)} \\ \tau_2 &= +r_2 w_2 \operatorname{sen} 90^\circ = +r_2 m_2 g && \text{(rotación en sentido contrario a las agujas del reloj, sentido positivo)} \\ \tau &= +rw \operatorname{sen} 90^\circ = +rmg && \text{(torque gravitacional)} \\ \tau_S &= r_S F_S \operatorname{sen} \theta_S = 0 && \text{(porque } r_S = 0\text{ cm)} \\ \tau_3 &= -r_3 w_3 \operatorname{sen} 90^\circ = -r_3 m_3 g && \text{(rotación en el sentido de las agujas del reloj, sentido negativo)} \end{aligned}$$

La segunda condición de equilibrio (ecuación de los torques) para la vara de medir es

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau + \tau_S + \tau_3 = 0.$$

Al sustituir los valores de torque en esta ecuación, podemos omitir los torques que dan contribuciones nulas. De este modo, la segunda condición de equilibrio es

$$+r_1 m_1 g + r_2 m_2 g + rmg - r_3 m_3 g = 0. \qquad \textbf{12.17}$$

Seleccionar la dirección $y+$ que debe ser paralela a $\vec{F}_S$, la primera condición de equilibrio para la vara es

$$-w_1 - w_2 - w + F_S - w_3 = 0.$$

Sustituyendo las fuerzas, la primera condición de equilibrio se convierte en

$$-m_1 g - m_2 g - mg + F_S - m_3 g = 0. \tag{12.18}$$

Resolvemos estas ecuaciones simultáneamente para las incógnitas m_3 y F_S. En la Ecuación 12.17, cancelamos el factor g y reordenamos los términos para obtener

$$r_3 m_3 = r_1 m_1 + r_2 m_2 + rm.$$

Para obtener m_3 dividimos ambos lados entre r_3, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} m_3 &= \frac{r_1}{r_3} m_1 + \frac{r_2}{r_3} m_2 + \frac{r}{r_3} m \\ &= \frac{70}{30}(50{,}0\text{ g}) + \frac{40}{30}(75{,}0\text{ g}) + \frac{20}{30}(150{,}0\text{ g}) = 316{,}0\frac{2}{3}\text{ g} \simeq 317\text{ g}. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Para hallar la fuerza de reacción normal, reordenamos los términos en la Ecuación 12.18 y convertimos los gramos en kilogramos:

$$\begin{aligned} F_S &= (m_1 + m_2 + m + m_3)g \\ &= (50{,}0 + 75{,}0 + 150{,}0 + 316{,}7) \times 10^{-3}\text{kg} \times 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5{,}8\text{ N}. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Importancia

Obsérvese que la Ecuación 12.17 es independiente del valor de g. Por lo tanto, la balanza de torque puede utilizarse para medir la masa, ya que las variaciones de los valores g en la superficie de la Tierra no afectan estas mediciones. Este no es el caso de una balanza de muelle, ya que mide la fuerza.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.3

Repita el Ejemplo 12.3 con el extremo izquierdo de la vara de medir para calcular los torques; es decir, coloque el pivote en el extremo izquierdo de la vara de medir.

En el siguiente ejemplo, mostramos cómo utilizar la primera condición de equilibrio (ecuación de fuerzas) en la forma vectorial dada por la Ecuación 12.7 y la Ecuación 12.8. Presentamos esta solución para ilustrar la importancia de elegir adecuadamente el marco de referencia. Aunque todos los marcos de referencia inercial son equivalentes y las soluciones numéricas obtenidas en un marco son las mismas que en cualquier otro, la elección inadecuada del marco de referencia puede hacer que la solución sea bastante larga y enrevesada, mientras que la elección acertada simplifica la solución. Lo mostramos en la solución equivalente al mismo problema. Este ejemplo concreto ilustra una aplicación del equilibrio estático a la biomecánica.

EJEMPLO 12.4

Fuerzas en el antebrazo

Un levantador de pesas sostiene una pesa de 50,0 libras (equivalente a 222,4 N) con su antebrazo, como se muestra en la Figura 12.11. Su antebrazo está colocado en $\beta = 60°$ con respecto a su brazo. El antebrazo se apoya en una contracción del músculo bíceps, que provoca un torque alrededor del codo. Suponiendo que la tensión en el bíceps actúe a lo largo de la dirección vertical dada por la gravedad, ¿qué tensión deberá ejercer el músculo para mantener el antebrazo en la posición mostrada? ¿Cuál es la fuerza sobre la articulación del codo? Supongamos que el peso del antebrazo es despreciable. Dé sus respuestas finales en unidades del SI.

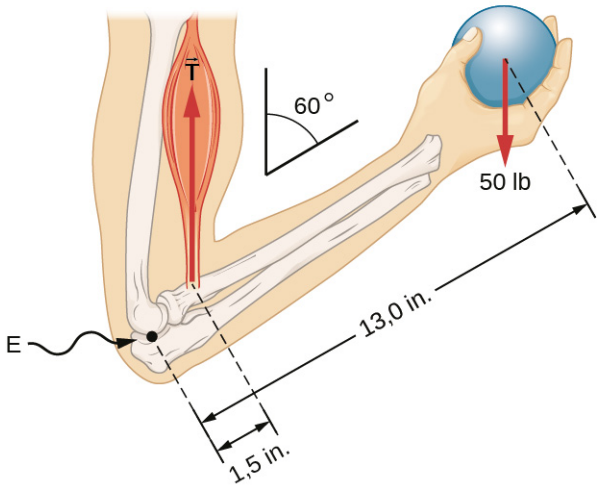


FIGURA 12.11 El antebrazo gira alrededor del codo (*E*) por una contracción del músculo bíceps, que provoca una tensión $\vec{\mathbf{T}}_{\mathrm{M}}$.

Estrategia

Identificamos tres fuerzas que actúan sobre el antebrazo: la fuerza desconocida $\vec{\mathbf{F}}$ en el codo; la tensión desconocida $\vec{\mathbf{T}}_{\mathrm{M}}$ en el músculo; y el peso $\vec{\mathbf{w}}$ con magnitud $w = 50$ lb. Adoptamos el marco de referencia con el eje x a lo largo del antebrazo y el pivote en el codo. La dirección vertical es la dirección del peso, que es la misma que la dirección del brazo. El eje x forma un ángulo $\beta = 60°$ con la vertical. El eje y es perpendicular al eje x. Ahora configuramos el diagrama de cuerpo libre para el antebrazo. En primer lugar, dibujamos los ejes, el pivote y los tres vectores que representan las tres fuerzas identificadas. Entonces localizamos el ángulo β y representamos cada fuerza por sus componentes x y y, recordando tachar el vector de fuerza original para evitar la doble contabilidad. Por último, etiquetamos las fuerzas y sus brazos de palanca. El diagrama de cuerpo libre del antebrazo se muestra en la Figura 12.12. Llegados a este punto, estamos preparados para establecer las condiciones de equilibrio del antebrazo. Cada fuerza tiene componentes x y y; por lo tanto, tenemos dos ecuaciones para la primera condición de equilibrio, una ecuación para cada componente de la fuerza neta que actúa sobre el antebrazo.

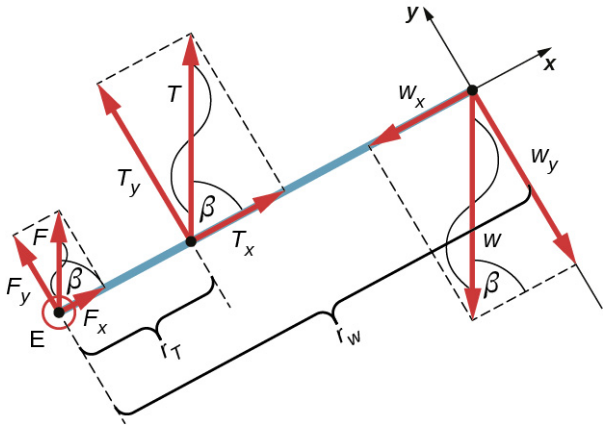


FIGURA 12.12 Diagrama de cuerpo libre del antebrazo: el pivote se encuentra en el punto *E* (codo).

Obsérvese que, en nuestro marco de referencia, las contribuciones a la segunda condición de equilibrio (para los torques) provienen únicamente de las componentes y de las fuerzas, ya que las componentes x de las fuerzas son todos paralelos a sus brazos de palanca, por lo que para cualquiera de ellas tenemos $\operatorname{sen}\theta = 0$ en la Ecuación 12.10. Para los componentes y tenemos $\theta = \pm 90°$ en la Ecuación 12.10. Obsérvese también que el torque de la fuerza en el codo es cero porque esta fuerza está fijada en el pivote. Por lo tanto, la contribución al

torque neto proviene únicamente de los torques de T_y y de w_y.

Solución

Vemos en el diagrama de cuerpo libre que el componente x de la fuerza neta satisface la ecuación

$$+F_x + T_x - w_x = 0 \tag{12.21}$$

y el componente y de la fuerza neta satisface

$$+F_y + T_y - w_y = 0. \tag{12.22}$$

La Ecuación 12.21 y la Ecuación 12.22 son dos ecuaciones de la primera condición de equilibrio (para las fuerzas). A continuación, leemos en el diagrama de cuerpo libre que el torque neto a lo largo del eje de rotación es

$$+r_T T_y - r_w w_y = 0. \tag{12.23}$$

La Ecuación 12.23 es la segunda condición de equilibrio (para los torques) del antebrazo. El diagrama de cuerpo libre muestra que los brazos de palanca son $r_T = 1{,}5$ en. y $r_w = 13{,}0$ en. En este punto, no necesitamos convertir las pulgadas en unidades del SI, porque mientras estas unidades sean congruentes en la Ecuación 12.23, se anulan. Utilizando de nuevo el diagrama de cuerpo libre, hallamos las magnitudes de las fuerzas componentes:

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos\beta = F\cos 60^\circ = F/2 \\ T_x &= T\cos\beta = T\cos 60^\circ = T/2 \\ w_x &= w\cos\beta = w\cos 60^\circ = w/2 \\ F_y &= F\,\text{sen}\,\beta = F\,\text{sen}\,60^\circ = F\sqrt{3}/2 \\ T_y &= T\,\text{sen}\,\beta = T\,\text{sen}\,60^\circ = T\sqrt{3}/2 \\ w_y &= w\,\text{sen}\,\beta = w\,\text{sen}\,60^\circ = w\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

Sustituimos estas magnitudes en la Ecuación 12.21, la Ecuación 12.22, la Ecuación 12.23 para obtener, respectivamente,

$$F/2 + T/2 - w/2 = 0$$

$$F\sqrt{3}/2 + T\sqrt{3}/2 - w\sqrt{3}/2 = 0$$

$$r_T T\sqrt{3}/2 - r_w w\sqrt{3}/2 = 0.$$

Cuando simplificamos estas ecuaciones, vemos que solo nos quedan dos ecuaciones independientes para las dos magnitudes de fuerza desconocidas, F y T, porque la Ecuación 12.21 para el componente x es equivalente a la Ecuación 12.22 para el componente y. De este modo, obtenemos la primera condición de equilibrio para las fuerzas

$$F + T - w = 0 \tag{12.24}$$

y la segunda condición de equilibrio para los torques

$$r_T T - r_w w = 0. \tag{12.25}$$

La magnitud de la tensión en el músculo se obtiene al resolver la Ecuación 12.25:

$$T = \frac{r_w}{r_T} w = \frac{13{,}0}{1{,}5}(50\text{ lb}) = 433\frac{1}{3}\text{lb} \simeq 433{,}3\text{ lb}.$$

La fuerza en el codo se obtiene al resolver la Ecuación 12.24:

$$F = w - T = 50{,}0\text{ lb} - 433{,}3\text{ lb} = -383{,}3\text{ lb}.$$

El signo negativo en la ecuación nos indica que la fuerza real en el codo es antiparalela a la dirección de

trabajo adoptada para dibujar el diagrama de cuerpo libre. En la respuesta final, convertimos las fuerzas en unidades de fuerza del SI. La respuesta es

$$F = 383{,}3 \text{ lb} = 383{,}3(4{,}448 \text{ N}) = 1.705 \text{ N descendente}$$
$$T = 433{,}3 \text{ lb} = 433{,}3(4{,}448 \text{ N}) = 1.927 \text{ N ascendente.}$$

Importancia

Cabe destacar dos aspectos importantes. El primero se refiere a la conversión a unidades del SI, que puede hacerse al final de la solución, siempre que mantengamos la coherencia en las unidades. El segundo aspecto importante se refiere a las articulaciones de bisagra, como el codo. En el análisis inicial de un problema, siempre se debe suponer que las articulaciones de bisagra ejercen una fuerza en una *dirección arbitraria*, y luego hay que resolver todos los componentes de una fuerza de bisagra independientemente. En este ejemplo, la fuerza del codo resulta ser vertical porque el problema supone que la tensión del bíceps también es vertical. Esta simplificación, sin embargo, no es una regla general.

Solución

Supongamos que adoptamos un marco de referencia con la dirección del eje *y* a lo largo del peso de 50 libras y el pivote colocado en el codo. En este marco, las tres fuerzas solo tienen *componentes y*, por lo tanto, solo tenemos una ecuación para la primera condición de equilibrio (para las fuerzas). Dibujamos el diagrama de cuerpo libre para el antebrazo, como se muestra en la Figura 12.13, e indicamos el pivote, las fuerzas que actúan y sus brazos de palanca con respecto al pivote, así como los ángulos θ_T y θ_w que las fuerzas $\vec{\mathbf{T}}_\mathrm{M}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ (respectivamente) hacen con sus brazos de palanca. En la definición de torque dada por la Ecuación 12.10, el ángulo θ_T es el ángulo direccional del vector $\vec{T}_\mathrm{M}$, contados *en sentido contrario a las agujas del reloj* desde la dirección radial del brazo de palanca que siempre apunta lejos del pivote. Por la misma convención, el ángulo θ_w se mide *en sentido contrario a las agujas del reloj* desde la dirección radial del brazo de palanca hasta el vector $\vec{\mathbf{w}}$. Hecho esto, los torques no nulos se calculan más fácilmente al sustituir directamente en la Ecuación 12.10 de la siguiente forma:

$$\tau_T = r_T T \operatorname{sen}\theta_T = r_T T \operatorname{sen}\beta = r_T T \operatorname{sen} 60^\circ = +r_T T\sqrt{3}/2$$
$$\tau_w = r_w w \operatorname{sen}\theta_w = r_w w \operatorname{sen}(\beta + 180^\circ) = -r_w w \operatorname{sen}\beta = -r_w w\sqrt{3}/2.$$

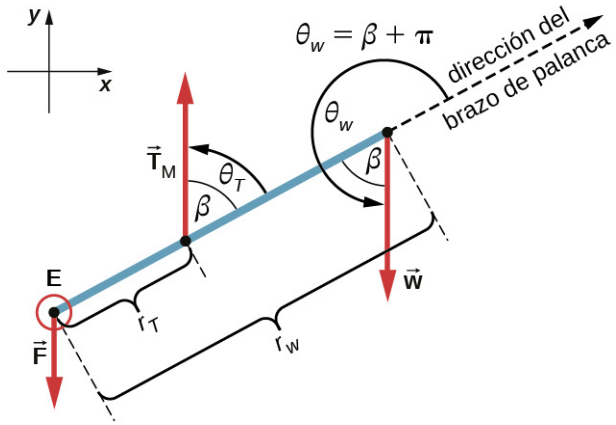


FIGURA 12.13 Diagrama de cuerpo libre del antebrazo para la solución equivalente. El pivote se encuentra en el punto E (codo).

La segunda condición de equilibrio, $\tau_T + \tau_w = 0$, puede escribirse ahora como

$$r_T T\sqrt{3}/2 - r_w w\sqrt{3}/2 = 0. \qquad \textbf{12.26}$$

A partir del diagrama de cuerpo libre, la primera condición de equilibrio (para las fuerzas) es

$$-F + T - w = 0. \qquad 12.27$$

La Ecuación 12.26 es idéntica a la Ecuación 12.25 y da el resultado $T = 433{,}3$ lb. La Ecuación 12.27 da

$$F = T - w = 433{,}3 \text{ lb} - 50{,}0 \text{ lb} = 383{,}3 \text{ lb}.$$

Vemos que estas respuestas son idénticas a las anteriores. Sin embargo, la segunda opción para el marco de referencia conduce a una solución equivalente, que es más sencilla y rápida, ya que no requiere que las fuerzas se resuelvan en sus componentes rectangulares.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.4

Repita el Ejemplo 12.4 suponiendo que el antebrazo es un objeto de densidad uniforme que pesa 8,896 N.

EJEMPLO 12.5

Una escalera apoyada en la pared

Una escalera uniforme tiene $L = 5{,}0$ m de largo y pesa 400,0 N. La escalera se apoya en una pared vertical resbaladiza, como se muestra en la Figura 12.14. El ángulo de inclinación entre la escalera y el suelo rugoso es $\beta = 53°$. Calcule las fuerzas de reacción que actúan sobre la escalera desde el suelo y desde la pared, así como el coeficiente de fricción estática μ_S en la interfaz de la escalera con el suelo, que impide que la escalera resbale.

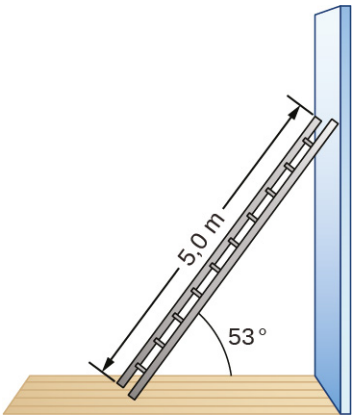


FIGURA 12.14 Una escalera de 5,0 m de longitud se apoya en una pared sin fricción.

Estrategia

Podemos identificar cuatro fuerzas que actúan sobre la escalera. La primera es la fuerza de reacción normal N del suelo en la dirección vertical ascendente. La segunda es la fuerza de fricción estática $f = \mu_S N$ dirigida horizontalmente a lo largo del suelo hacia la pared: esta fuerza evita que la escalera resbale. Estas dos fuerzas actúan sobre la escalera en su punto de contacto con el suelo. La tercera fuerza es el peso w de la escalera, fijado en su CM situado a medio camino entre sus extremos. La cuarta es la fuerza de reacción normal F de la pared en la dirección horizontal lejos de la pared, fijada en el punto de contacto con la pared. No hay otras fuerzas porque la pared es resbaladiza, lo que significa que no hay fricción entre la pared y la escalera. Con base en este análisis, adoptamos el marco de referencia con el eje y en la dirección vertical (paralelo a la pared) y el eje x en la dirección horizontal (paralelo al suelo). En este marco, cada fuerza tiene una componente horizontal o una componente vertical, pero no ambas, lo que simplifica la solución. Seleccionamos el pivote en el punto de contacto con el suelo. En el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la escalera, indicamos el pivote, las cuatro fuerzas y sus brazos de palanca, así como los ángulos entre los brazos de palanca y las fuerzas, como se muestra en la Figura 12.15. Con nuestra elección de la ubicación del pivote, no hay torque de la fuerza de reacción normal N ni de la fricción estática f porque ambas actúan en el pivote.

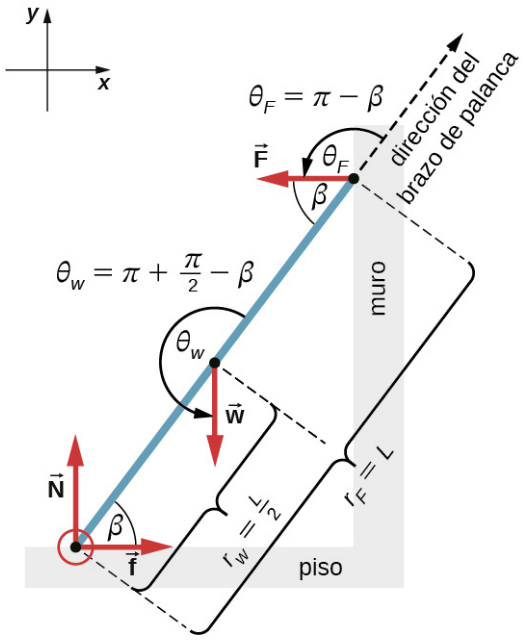


FIGURA 12.15 Diagrama de cuerpo libre de una escalera apoyada en una pared sin fricción.

Solución

A partir del diagrama de cuerpo libre, la fuerza neta en la dirección x es

$$+f - F = 0 \tag{12.28}$$

la fuerza neta en la dirección y es

$$+N - w = 0 \tag{12.29}$$

y el torque neto a lo largo del eje de rotación en el punto de apoyo es

$$\tau_w + \tau_F = 0. \tag{12.30}$$

donde τ_w es el torque del peso w y τ_F es el par del torque F. A partir del diagrama de cuerpo libre, identificamos que el brazo de palanca de la reacción en la pared es $r_F = L = 5{,}0$ m y el brazo de palanca del peso es $r_w = L/2 = 2{,}5$ m. Con la ayuda del diagrama de cuerpo libre, identificamos los ángulos a utilizar en la Ecuación 12.10 para los torques: $\theta_F = 180° - \beta$ para el torque de la fuerza de reacción con la pared, y $\theta_w = 180° + (90° - \beta)$ para el torque debido al peso. Ahora estamos preparados para utilizar la Ecuación 12.10 con el fin de calcular los torques:

$$\tau_w = r_w w \operatorname{sen}\theta_w = r_w w \operatorname{sen}(180° + 90° - \beta) = -\tfrac{L}{2} w \operatorname{sen}(90° - \beta) = -\tfrac{L}{2} w \cos\beta$$
$$\tau_F = r_F F \operatorname{sen}\theta_F = r_F F \operatorname{sen}(180° - \beta) = LF \operatorname{sen}\beta.$$

Sustituimos los torques en la Ecuación 12.30 y resolvemos para F :

$$\begin{aligned} -\tfrac{L}{2} w \cos\beta + LF \operatorname{sen}\beta &= 0 \\ F = \tfrac{w}{2} \cot\beta = \frac{400{,}0\ \text{N}}{2} \cot 53° &= 150{,}7\ \text{N} \end{aligned} \tag{12.31}$$

Obtenemos la fuerza de reacción normal con el suelo al resolver la Ecuación 12.29: $N = w = 400{,}0$ N. La magnitud de la fricción se obtiene al resolver la Ecuación 12.28: $f = F = 150{,}7$ N. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = f/N = 150{,}7/400{,}0 = 0{,}377$.

La fuerza neta que actúa sobre la escalera en el punto de contacto con el suelo es la suma vectorial de la

reacción normal del suelo y las fuerzas de fricción estática:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{suelo}} = \vec{\mathbf{f}} + \vec{\mathbf{N}} = (150{,}7\text{ N})(-\hat{\mathbf{i}}) + (400{,}0\text{ N})(+\hat{\mathbf{j}}) = (-150{,}7\hat{\mathbf{i}} + 400{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{ N}.$$

Su magnitud es

$$F_{\text{suelo}} = \sqrt{f^2 + N^2} = \sqrt{150{,}7^2 + 400{,}0^2}\text{ N} = 427{,}4\text{ N}$$

y su dirección es

$$\varphi = \tan^{-1}(N/f) = \tan^{-1}(400{,}0/150{,}7) = 69{,}3^\circ \text{ por encima del suelo.}$$

Cabe destacar aquí dos observaciones generales de utilidad práctica. En primer lugar, hay que tener en cuenta que, cuando elegimos un punto de apoyo, no se espera que el sistema gire realmente en torno al punto elegido. La escalera de este ejemplo no gira en absoluto, sino que se apoya firmemente en el suelo. No obstante, su punto de contacto con el suelo es una buena elección para el pivote. En segundo lugar, obsérvese que, cuando utilizamos la Ecuación 12.10 para calcular cada torque, no necesitamos resolver las fuerzas en sus componentes normal y paralelo con respecto a la dirección del brazo de palanca, y no necesitamos considerar ningún sentido del torque. Siempre que el ángulo en la Ecuación 12.10 se identifique correctamente (con la ayuda de un diagrama de cuerpo libre) como el ángulo medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde la dirección del brazo de palanca hasta la dirección del vector fuerza, la Ecuación 12.10 da tanto la magnitud como el sentido del torque. Esto se debe a que el torque es el producto vectorial del vector palanca-brazo cruzado con el vector fuerza, y la Ecuación 12.10 expresa la componente rectangular de este producto vectorial a lo largo del eje de rotación.

Importancia

Este resultado es independiente de la longitud de la escalera porque L se anula en la segunda condición de equilibrio, en la Ecuación 12.31. No importa lo larga o corta que sea la escalera, siempre que su peso sea de 400 N y el ángulo con el suelo sea 53°, nuestros resultados se mantienen. Pero la escalera resbalará si el torque neto se vuelve negativo en la Ecuación 12.31. Esto ocurre en algunos ángulos cuando el coeficiente de fricción estática no es lo suficientemente grande como para evitar que la escalera resbale.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.5

Para la situación descrita en el Ejemplo 12.5, determine los valores del coeficiente μ_s de fricción estática para la que la escalera resbala, dado que β es el ángulo que forma la escalera con el suelo.

EJEMPLO 12.6

Fuerzas en las bisagras de las puertas

Una puerta batiente que pesa $w = 400{,}0$ N se apoya en las bisagras A y B para que la puerta gire alrededor de un eje vertical que pasa por las bisagras (Figura 12.16). La puerta tiene una anchura de $b = 1{,}00$ m, y la losa de la puerta tiene una densidad de masa uniforme. Las bisagras se colocan de forma simétrica en el borde de la puerta, de manera que el peso de la puerta se distribuye uniformemente entre ellas. Las bisagras están separadas por la distancia $a = 2{,}00$ m. Calcule las fuerzas en las bisagras cuando la puerta descansa medio abierta.

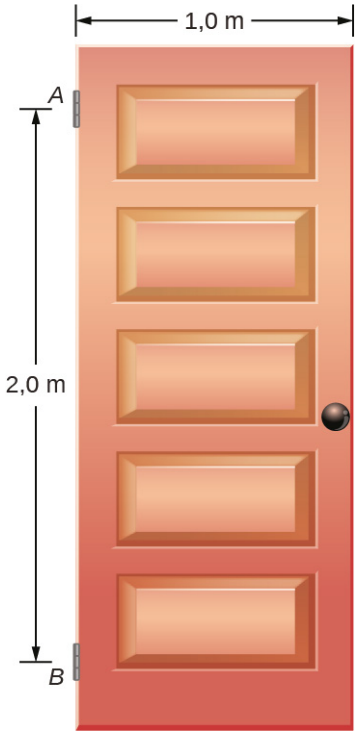


FIGURA 12.16 Una puerta vertical batiente de 400 N se apoya en dos bisagras fijadas en los puntos *A* y *B*.

Estrategia

Las fuerzas que la puerta ejerce sobre sus bisagras se pueden encontrar simplemente al invertir las direcciones de las fuerzas que las bisagras ejercen sobre la puerta. Por lo tanto, nuestra tarea es encontrar las fuerzas de las bisagras de la puerta. Tres fuerzas actúan sobre el forjado de la puerta: una fuerza desconocida $\vec{\mathbf{A}}$ de la bisagra A, una fuerza desconocida $\vec{\mathbf{B}}$ de la bisagra B, y el peso conocido $\vec{\mathbf{w}}$ fijada en el centro de masa del forjado de la puerta. El CM se encuentra en el centro geométrico de la puerta porque la losa tiene una densidad de masa uniforme. Adoptamos un marco de referencia rectangular con el eje *y* a lo largo de la dirección de la gravedad y el eje *x* en el plano de la losa, como se muestra en el panel (a) de la Figura 12.17, y resolvemos todas las fuerzas en sus componentes rectangulares. De este modo, tenemos cuatro fuerzas componentes desconocidas: dos componentes de fuerza $\vec{\mathbf{A}}$ $(A_x$ y $A_y)$, y dos componentes de fuerza $\vec{\mathbf{B}}$ $(B_x$ y $B_y)$. En el diagrama de cuerpo libre, representamos las dos fuerzas en las bisagras por sus componentes vectoriales, cuyas supuestas orientaciones son arbitrarias. Porque hay cuatro incógnitas $(A_x, B_x, A_y,$ y $B_y)$, debemos establecer cuatro ecuaciones independientes. Una ecuación es la condición de equilibrio para las fuerzas en la dirección de la *x*. La segunda ecuación es la condición de equilibrio para las fuerzas en la dirección de la *y*. La tercera ecuación es la condición de equilibrio para los torques en rotación alrededor de una bisagra. Dado que el peso se distribuye uniformemente entre las bisagras, tenemos la cuarta ecuación, $A_y = B_y$. Para establecer las condiciones de equilibrio, dibujamos un diagrama de cuerpo libre y elegimos el punto de apoyo en la bisagra superior, como se muestra en el panel (b) de la Figura 12.17. Finalmente, resolvemos las ecuaciones para las incógnitas en los componentes de fuerza y calculamos las fuerzas.

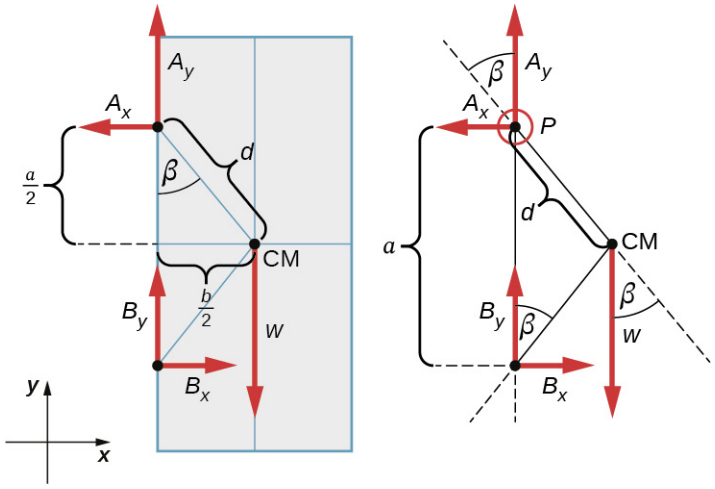


FIGURA 12.17 (a) Geometría y (b) diagrama de cuerpo libre correspondiente a la puerta.

Solución

A partir del diagrama de cuerpo libre de la puerta tenemos la primera condición de equilibrio de fuerzas:

$$\text{en la dirección } x: \quad -A_x + B_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = B_x$$
$$\text{en la dirección } y: \quad +A_y + B_y - w = 0 \;\Rightarrow\; A_y = B_y = \frac{w}{2} = \frac{400{,}0\ \text{N}}{2} = 200{,}0\ \text{N}.$$

Seleccionamos el pivote en el punto P (bisagra superior, según el diagrama de cuerpo libre) y escribimos la segunda condición de equilibrio para los torques en rotación alrededor del punto P:

$$\text{pivote en } P\text{: } \tau_w + \tau_{Bx} + \tau_{By} = 0. \qquad 12.32$$

Utilizamos el diagrama de cuerpo libre para hallar todos los términos de esta ecuación:

$$\begin{aligned} \tau_w &= dw\,\text{sen}(-\beta) = -dw\,\text{sen}\,\beta = -dw\frac{b/2}{d} = -w\frac{b}{2} \\ \tau_{Bx} &= aB_x\,\text{sen}\,90^\circ = +aB_x \\ \tau_{By} &= aB_y\,\text{sen}\,180^\circ = 0. \end{aligned}$$

Al evaluar sen β, utilizamos la geometría del triángulo mostrado en la parte (a) de la figura. Ahora sustituimos estos torques en la Ecuación 12.32 y calculamos B_x :

$$\text{pivote en } P\text{: } -w\frac{b}{2} + aB_x = 0 \;\Rightarrow\; B_x = w\frac{b}{2a} = (400{,}0\ \text{N})\frac{1}{2\cdot 2} = 100{,}0\ \text{N}.$$

Por lo tanto, las magnitudes de las fuerzas de la componente horizontal son $A_x = B_x = 100{,}0$ N. Las fuerzas en la puerta son

$$\text{en la bisagra superior: } \vec{\mathbf{F}}_{A\text{ en la puerta}} = -100{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{i}} + 200{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{j}}$$
$$\text{en la bisagra inferior: } \vec{\mathbf{F}}_{B\text{ en la puerta}} = +100{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{i}} + 200{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{j}}.$$

Las fuerzas sobre las bisagras se obtienen a partir de la tercera ley de Newton como

$$\text{en la bisagra superior: } \vec{\mathbf{F}}_{\text{puerta en }A} = 100{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{i}} - 200{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{j}}$$
$$\text{en la bisagra inferior: } \vec{\mathbf{F}}_{\text{puerta en }B} = -100{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{i}} - 200{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{j}}.$$

Importancia

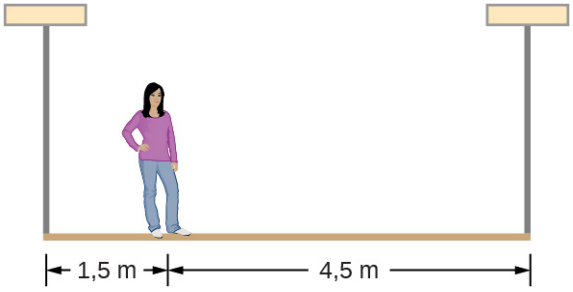
Obsérvese que, si el problema se formulara sin la suposición de que el peso se distribuye por igual entre las dos bisagras, no podríamos resolverlo porque el número de las incógnitas sería mayor que el de las ecuaciones que expresan las condiciones de equilibrio.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.6

Resuelva el problema del Ejemplo 12.6 al tomar la posición del pivote en el centro de masa.

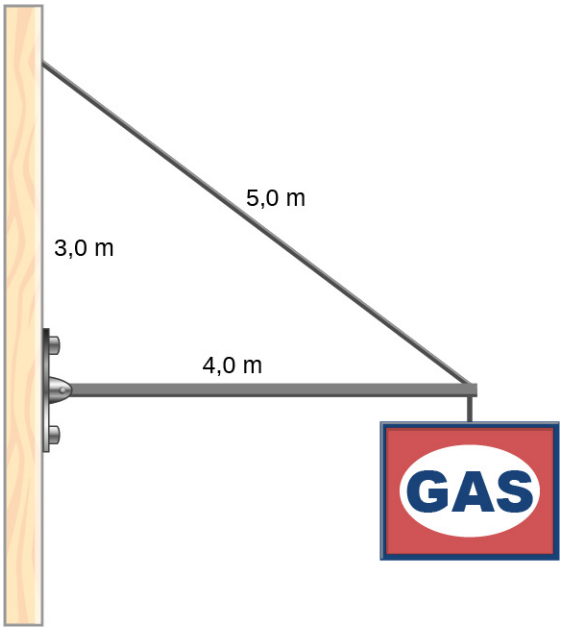
COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.7

Una persona de 50 kg se sitúa a 1,5 m desde un extremo de un andamio uniforme de 6,0 m de longitud y 70,0 kg de masa. Encuentre las tensiones en las dos cuerdas verticales que sostienen el andamio.



COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.8

Un cartel de 400,0 N cuelga del extremo de un puntal uniforme. El puntal tiene 4,0 m de longitud y pesa 600,0 N. El puntal se apoya en una bisagra en la pared y en un cable cuyo otro extremo está atado a la pared en un punto situado 3,0 m por encima del extremo izquierdo del puntal. Calcule la tensión en el cable de soporte y la fuerza de la bisagra en el puntal.



12.3 Estrés, tensión y módulo elástico

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar los conceptos de estrés y tensión en la descripción de la deformación elástica de los materiales.
- Describir los tipos de deformación elástica de objetos y materiales.

Un modelo de cuerpo rígido es un ejemplo idealizado de un objeto que no se deforma bajo la acción de fuerzas externas. Es muy útil cuando se analizan sistemas mecánicos. De hecho, muchos objetos físicos son rígidos en gran medida. El punto hasta el cual un objeto se *percibe* como rígido depende de las propiedades físicas del material del que está hecho. Por ejemplo, una pelota de *ping-pong* de plástico es frágil, y una pelota de tenis de caucho es elástica cuando se le aplican fuerzas de aplastamiento. Sin embargo, en otras circunstancias, tanto la pelota de *ping-pong* como la de tenis pueden rebotar bien como cuerpos rígidos. Del mismo modo, quien diseña prótesis puede aproximarse a la mecánica de las extremidades humanas al modelarlas como cuerpos rígidos. Sin embargo, la combinación real de huesos y tejidos es un medio elástico.

En el resto de este capítulo, pasamos de considerar las fuerzas que inciden en el movimiento de un objeto a las que influyen en la forma de un objeto. El cambio de forma debido a la aplicación de una fuerza se conoce como deformación. Se sabe que hasta las fuerzas más pequeñas provocan cierta deformación. La deformación es la que experimentan los objetos o los medios físicos bajo la acción de fuerzas externas; por ejemplo, puede tratarse de aplastar, apretar, rasgar, retorcer, cizallar o tirar de los objetos. En el lenguaje de la física, hay dos términos que describen las fuerzas que se ejercen sobre los objetos que experimentan deformación: *estrés* y *tensión*.

El estrés es una cantidad que describe la magnitud de las fuerzas que causan la deformación. El estrés se define generalmente como la *fuerza por unidad de superficie*. Cuando las fuerzas tiran de un objeto y provocan su elongación, como el estiramiento de una banda elástica, ese estrés lo denominamos **tensión de tracción**. Cuando las fuerzas provocan la compresión de un objeto, lo llamamos **tensión de compresión**. Cuando se presiona a un objeto desde todos los lados, como un submarino en las profundidades de un océano, este tipo de estrés lo denominamos **tensión de compresibilidad** (o **tensión de volumen**). En otras situaciones, las fuerzas que actúan pueden no ser ni de tracción ni de compresión, y aun así producir una deformación notable. Por ejemplo, suponga que sujeta un libro con fuerza entre las palmas de las manos, y que con una mano presiona y tira de la cubierta delantera en dirección contraria a usted, mientras que con la otra mano presiona y tira de la cubierta trasera hacia usted. En este caso, cuando las fuerzas deformantes actúan tangencialmente a la superficie del objeto, las llamamos fuerzas "de corte" y el estrés que provocan recibe el nombre de **tensión de corte**.

En el SI la unidad del estrés es el pascal (Pa). Cuando un newton de fuerza presiona sobre una superficie unitaria de un metro cuadrado, el estrés resultante es de un pascal:

$$\text{un pascal} = 1{,}0\ \text{Pa} = \frac{1{,}0\ \text{N}}{1{,}0\ \text{m}^2}.$$

En el sistema británico de unidades, la unidad de estrés es "psi", que significa "libra por pulgada cuadrada" $\left(\text{lb/in}^2\right)$. Otra unidad que se suele utilizar para la tensión de compresibilidad es la atm (atmósfera). Los factores de conversión son

$$1\ \text{psi} = 6.895\ \text{Pa} \quad \text{y} \quad 1\ \text{Pa} = 1{,}450 \times 10^{-4}\ \text{psi}$$
$$1\ \text{atm} = 1{,}013 \times 10^{5}\ \text{Pa} = 14{,}7\ \text{psi}.$$

Un objeto o medio sometido a estrés se deforma. La cantidad que describe esta deformación recibe el nombre de **tensión**. La tensión se da como un cambio fraccional en la longitud (bajo tensión de tracción) o el volumen (bajo tensión de compresibilidad) o la geometría (bajo tensión de corte). Por lo tanto, la tensión es un número adimensional. El esfuerzo bajo una tensión de tracción se denomina **esfuerzo de tracción**, el esfuerzo bajo una tensión de compresibilidad se denomina **esfuerzo de compresibilidad** (o **esfuerzo de volumen**), y el causado por una tensión de corte se denomina **esfuerzo cortante**.

Cuanto mayor sea el estrés, mayor será la tensión. Sin embargo, la relación entre la tensión y el estrés no tiene por qué ser lineal. Solo cuando el estrés es suficientemente bajo, la deformación que provoca es directamente proporcional a su valor. La constante de proporcionalidad en esta relación se denomina **módulo elástico**. En el límite lineal de valores bajos de estrés, la relación general entre estrés y tensión es

$$\text{estrés} = (\text{módulo elástico}) \times \text{tensión}. \tag{12.33}$$

Como podemos ver en el análisis dimensional de esta relación, el módulo elástico tiene la misma unidad física que el estrés porque la tensión es adimensional.

Asimismo, podemos observar a partir de la Ecuación 12.33 que, cuando un objeto se caracteriza por un gran valor del módulo elástico, el efecto del estrés es pequeño. Por otro lado, un módulo elástico pequeño significa que el estrés produce una gran tensión y una notable deformación. Por ejemplo, el estrés en una banda de goma produce una tensión (deformación) mayor que el mismo estrés en una banda de acero de iguales dimensiones, porque el módulo elástico del caucho es dos órdenes de magnitud menor que el del acero.

El módulo elástico para la tensión de tracción se denomina **módulo de Young**; el de la tensión de compresibilidad, **módulo de compresibilidad**, y el de la tensión de corte, **módulo de corte**. Obsérvese que la relación entre el estrés y la tensión es una relación *observada*, medida en el laboratorio. Los módulos elásticos de varios materiales se miden en diversas condiciones físicas, como la variación de la temperatura, y se recogen en tablas de datos de ingeniería para su consulta (Tabla 12.1). Estas tablas son una valiosa referencia para la industria y para cualquier persona relacionada con la ingeniería o la construcción. En la siguiente sección, analizamos las relaciones estrés-tensión más allá del límite lineal representado por la Ecuación 12.33, en toda la gama de valores de tensión hasta un punto de fractura. En el resto de esta sección, estudiamos el límite lineal expresado por la Ecuación 12.33.

Material	Módulo de Young $\times 10^{10}$Pa	Módulo de compresibilidad $\times 10^{10}$Pa	Módulo de corte $\times 10^{10}$Pa
Aluminio	7,0	7,5	2,5
Hueso (tensión)	1,6	0,8	8,0
Hueso (compresión)	0,9		
Latón	9,0	6,0	3,5
Ladrillo	1,5		
Hormigón	2,0		
Cobre	11,0	14,0	4,4
Vidrio Crown	6,0	5,0	2,5
Granito	4,5	4,5	2,0
Cabello (humano)	1,0		
Madera dura	1,5		1,0
Hierro	21,0	16,0	7,7

Material	Módulo de Young $\times 10^{10}$Pa	Módulo de compresibilidad $\times 10^{10}$Pa	Módulo de corte $\times 10^{10}$Pa
Plomo	1,6	4,1	0,6
Mármol	6,0	7,0	2,0
Níquel	21,0	17,0	7,8
Poliestireno	3,0		
Seda	6,0		
Telaraña	3,0		
Acero	20,0	16,0	7,5
Acetona		0,07	
Etanol		0,09	
Glicerina		0,45	
Mercurio		2,5	
Agua		0,22	

TABLA 12.1 Módulos elásticos aproximados de algunos materiales

Tensión de tracción o de compresión, tensión y módulo de Young

La tensión o la compresión se producen cuando dos fuerzas antiparalelas de igual magnitud actúan sobre un objeto a lo largo de una sola de sus dimensiones, de manera que el objeto no se mueve. Una forma de imaginar esta situación se ilustra en la Figura 12.18. Un segmento de varilla es estirado o comprimido por un par de fuerzas que actúan a lo largo de su longitud y perpendicularmente a su sección transversal. El efecto neto de estas fuerzas es que la varilla cambia su longitud desde la longitud original L_0 que tenía antes de la aparición de las fuerzas, a una nueva longitud L que tiene bajo la acción de las fuerzas. Este cambio de longitud $\Delta L = L - L_0$ puede ser un alargamiento (cuando L es mayor que la longitud original L_0) o contracción (cuando L es menor que la longitud original L_0). La tensión y el esfuerzo de tracción se producen cuando las fuerzas estiran un objeto y provocan su elongación, con el cambio de longitud ΔL es positivo. La tensión y el esfuerzo de compresión se producen cuando las fuerzas contraen un objeto y provocan su acortamiento, con el cambio de longitud ΔL es negativo.

En cualquiera de estas situaciones, definimos el estrés como la relación entre la fuerza deformante $F_\perp$ al área de la sección transversal A del objeto que se deforma. El símbolo $F_\perp$ que reservamos para la fuerza deformante significa que esta fuerza actúa perpendicularmente a la sección transversal del objeto. Las fuerzas que actúan en paralelo a la sección transversal no modifican la longitud de un objeto. La definición de la tensión de tracción es

$$\text{tensión de tracción} = \frac{F_\perp}{A}. \qquad 12.34$$

El esfuerzo de tracción es la medida de la deformación de un objeto sometido a una tensión de tracción y se define como el cambio fraccional de la longitud del objeto cuando este experimenta una tensión de tracción

$$\text{esfuerzo de tracción} = \frac{\Delta L}{L_0}. \tag{12.35}$$

La tensión y el esfuerzo de compresión se definen con las mismas fórmulas, Ecuación 12.34 y Ecuación 12.35, respectivamente. La única diferencia con respecto a la situación de tracción es que, para la tensión y el esfuerzo de compresión, tomamos los valores absolutos al lado derecho en la Ecuación 12.34 y la Ecuación 12.35.

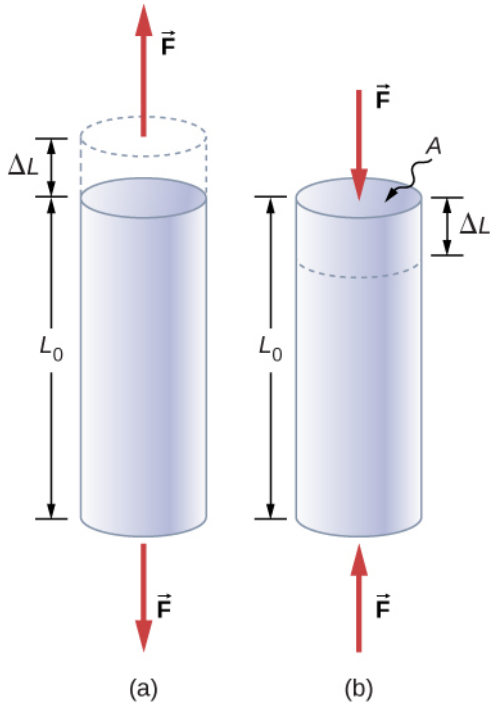


FIGURA 12.18 Cuando un objeto está en tensión o compresión, la fuerza neta que se ejerce sobre este es cero, pero el objeto se deforma al cambiar su longitud original L_0. (a) Tensión: La varilla es elongada por ΔL. (b) Compresión: La varilla se contrae por ΔL. En ambos casos, la fuerza deformante actúa a lo largo de la varilla y perpendicularmente a su sección transversal. En el rango lineal de estrés bajo, el área de la sección transversal de la varilla no cambia.

El módulo de Young Y es el módulo elástico cuando la deformación es causada bien sea por tensión de tracción o de compresión, y se define por la Ecuación 12.33. Al dividir esta ecuación entre el esfuerzo de tracción, obtenemos la expresión del módulo de Young:

$$Y = \frac{\text{tensión de tracción}}{\text{esfuerzo de tracción}} = \frac{F_\perp / A}{\Delta L / L_0} = \frac{F_\perp}{A}\,\frac{L_0}{\Delta L}. \tag{12.36}$$

EJEMPLO 12.7

Tensión de compresión en un pilar

Una escultura que pesa 10.000 N descansa sobre una superficie horizontal en la parte superior de un pilar vertical de 6,0 m de altura (Figura 12.19). El área de la sección transversal del pilar es $0.20\ \text{m}^2$ y es de granito con una densidad de masa de $2.700\ \text{kg/m}^3$. Encuentre la tensión de compresión en la sección transversal situada 3,0 m por debajo de la parte superior del pilar y el valor del esfuerzo de compresión del segmento superior de 3,0 m del pilar.



FIGURA 12.19 Columna de Nelson en Trafalgar Square, Londres, Inglaterra (créditos: modificación de la obra de Cristian Bortes).

Estrategia

Primero calculamos el peso de la sección superior del pilar, de 3,0 m de longitud. La fuerza normal que actúa sobre la sección transversal situada a 3,0 m de la parte superior es la suma del peso del pilar y del peso de la escultura. Una vez que tenemos la fuerza normal, utilizamos la Ecuación 12.34 para calcular el estrés. Para hallar el esfuerzo de compresión, calculamos el valor del módulo de Young para el granito en la Tabla 12.1 e invertimos la Ecuación 12.36.

Solución

El volumen del segmento del pilar con la altura $h = 3{,}0\ \text{m}$ y el área de la sección transversal $A = 0{,}20\ \text{m}^2$ es

$$V = Ah = (0{,}20\ \text{m}^2)(3{,}0\ \text{m}) = 0{,}60\ \text{m}^3.$$

Con la densidad del granito $\rho = 2{,}7 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$, la masa del segmento del pilar es

$$m = \rho V = (2{,}7 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(0{,}60\ \text{m}^3) = 1{,}60 \times 10^3\ \text{kg}.$$

El peso del segmento del pilar es

$$w_p = mg = (1{,}60 \times 10^3\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 1{,}568 \times 10^4\ \text{N}.$$

El peso de la escultura es $w_s = 1{,}0 \times 10^4\ \text{N}$, por lo que la fuerza normal en la superficie de la sección transversal situada a 3,0 m por debajo de la escultura es

$$F_\perp = w_p + w_s = (1{,}568 + 1{,}0) \times 10^4\ \text{N} = 2{,}568 \times 10^4\ \text{N}.$$

Por lo tanto, el estrés es

$$\text{estrés} = \frac{F_\perp}{A} = \frac{2{,}568 \times 10^4\ \text{N}}{0{,}20\ \text{m}^2} = 1{,}284 \times 10^5\ \text{Pa} = 128{,}4\ \text{kPa}.$$

El módulo de Young para el granito es $Y = 4{,}5 \times 10^{10}\ \text{Pa} = 4{,}5 \times 10^7\ \text{kPa}$. Por lo tanto, el esfuerzo de compresión en esta posición es

$$\text{tensión} = \frac{\text{estrés}}{Y} = \frac{128{,}4\ \text{kPa}}{4{,}5 \times 10^7\ \text{kPa}} = 2{,}85 \times 10^{-6}.$$

Significación

Observe que la fuerza normal que actúa sobre la sección transversal del pilar no es constante a lo largo de su longitud, sino que varía desde su valor más pequeño en la parte superior hasta su valor más grande en la parte inferior del pilar. Así, si el pilar tiene una sección transversal uniforme a lo largo de su longitud, el estrés es mayor en su base.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.9

Encuentre la tensión y estrés de compresión en la base de la columna de Nelson.

EJEMPLO 12.8

Estirar una varilla

Una varilla de acero de 2,0 m de longitud tiene una sección transversal de $0{,}30\ \text{cm}^2$. La varilla forma parte de un soporte vertical que sostiene una pesada plataforma de 550 kg, que cuelga unida al extremo inferior de la varilla. Ignorando el peso de la varilla, ¿cuál es la tensión de tracción en la varilla y la elongación de la varilla bajo el estrés?

Estrategia

Primero calculamos la tensión de tracción en la varilla bajo el peso de la plataforma de acuerdo con la Ecuación 12.34. Luego invertimos la Ecuación 12.36 para hallar la elongación de la varilla, con $L_0 = 2{,}0\ \text{m}$. De la Tabla 12.1, el módulo de Young para el acero es $Y = 2{,}0 \times 10^{11}\ \text{Pa}$.

Solución

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones obtenemos

$$\frac{F_\perp}{A} = \frac{(550\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{3{,}0 \times 10^{-5}\ \text{m}^2} = 1{,}8 \times 10^8\ \text{Pa}$$

$$\Delta L = \frac{F_\perp}{A}\frac{L_0}{Y} = (1{,}8 \times 10^8\ \text{Pa})\frac{2{,}0\ \text{m}}{2{,}0 \times 10^{11}\ \text{Pa}} = 1{,}8 \times 10^{-3}\ \text{m} = 1{,}8\ \text{mm}.$$

Significación

Al igual que en el ejemplo de la columna, la tensión de tracción en este ejemplo no es uniforme a lo largo de la varilla. Sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, si se tiene en cuenta el peso de la varilla, el estrés en la varilla es mayor en la parte superior y menor en la parte inferior de la varilla, donde se fija el equipo.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.10

Un cable de 2,0 m de longitud se estira 1,0 mm cuando se somete a una carga. ¿Cuál es el esfuerzo de tracción en el cable?

A menudo los objetos pueden experimentar simultáneamente tensión de compresión y tensión de tracción (Figura 12.20). Un ejemplo es una estantería larga cargada de libros pesados que se hunde entre los soportes de los extremos por el peso de los libros. La superficie superior de la plataforma está en tensión de compresión y la superficie inferior de la plataforma está en tensión de tracción. Del mismo modo, las vigas largas y pesadas se hunden por su propio peso. En la construcción de edificios modernos, estos esfuerzos de flexión pueden eliminarse prácticamente con el uso de vigas en I (Figura 12.21).

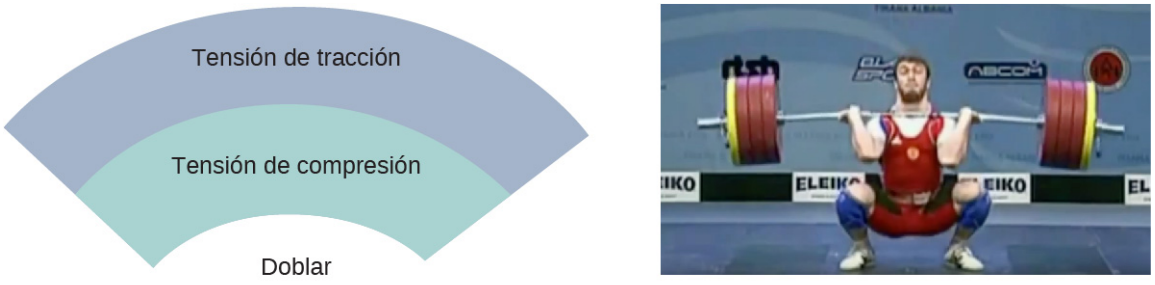


FIGURA 12.20 (a) Un objeto que se dobla hacia abajo experimenta una tensión de tracción (estiramiento) en la sección superior y una tensión de compresión (compresión) en la sección inferior. (b) Los levantadores de pesas de élite suelen doblar las barras de hierro temporalmente durante el levantamiento, como en la competición de los Juegos Olímpicos de 2012 (créditos: b. modificación del trabajo de Oleksandr Kocherzhenko).



FIGURA 12.21 Las vigas en I de acero se utilizan en la construcción para reducir las tensiones de flexión (créditos: modificación de la obra por "US Army Corps of Engineers Europe District"/Flickr).

INTERACTIVO

Una pesada caja descansa sobre una mesa apoyada en tres columnas. Vea esta demostración (https://openstax.org/l/21movebox) para mover la caja y ver cómo la compresión (o tensión) en las columnas se ve afectada cuando la caja cambia de posición.

Tensión de compresibilidad, tensión y módulos

Cuando usted se sumerge en el agua, siente una fuerza que presiona cada parte del cuerpo desde todas las direcciones. Lo que usted experimenta entonces es una tensión de compresibilidad, o lo que es lo mismo, una **presión**. La tensión de compresibilidad siempre tiende a disminuir el volumen encerrado por la superficie de un objeto sumergido. Las fuerzas de este "apretón" son siempre perpendiculares a la superficie sumergida (Figura 12.22). El efecto de estas fuerzas es la disminución del volumen del objeto sumergido en una cantidad ΔV en comparación con el volumen V_0 del objeto en ausencia de tensión de compresibilidad. Este tipo de deformación se denomina esfuerzo de compresibilidad y se describe mediante un cambio de volumen en relación con el volumen original:

$$\text{esfuerzo de compresibilidad} = \frac{\Delta V}{V_0}. \qquad 12.37$$

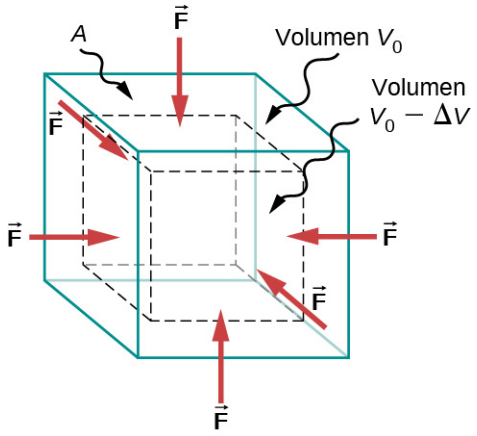


FIGURA 12.22 Un objeto sometido a una tensión de compresibilidad en aumento constante experimenta una disminución de su volumen. Fuerzas iguales perpendiculares a la superficie actúan desde todas las direcciones. El efecto de estas fuerzas consiste en disminuir el volumen en la cantidad ΔV en comparación con el volumen original, V_0.

El esfuerzo de compresibilidad es el resultado de la tensión de compresibilidad, que es una fuerza $F_\perp$ normal a una superficie que presiona sobre la superficie unitaria A de un objeto sumergido. Este tipo de cantidad física, o presión p, se define como

$$\text{presión} = p \equiv \frac{F_\perp}{A}. \tag{12.38}$$

Estudiaremos la presión en los fluidos con más detalle en Mecánica de Fluidos. Una característica importante de la presión es que es una cantidad escalar y no tiene ninguna dirección particular; es decir, la presión actúa por igual en todas las direcciones posibles. Cuando se sumerge la mano en el agua, se percibe la misma cantidad de presión que actúa sobre la superficie superior de la mano que sobre la superficie inferior, o sobre la superficie lateral, o sobre la superficie de la piel entre los dedos. Lo que se percibe en este caso es un aumento de la presión Δp sobre lo que se está acostumbrado a sentir cuando su mano no está sumergida en el agua. Lo que se siente cuando la mano no está sumergida en el agua es la **presión normal** p_0 de una atmósfera, que sirve de punto de referencia. La tensión de compresibilidad es este aumento de la presión, o Δp, sobre el nivel normal, p_0.

Cuando la tensión de compresibilidad aumenta, el esfuerzo de compresibilidad también aumenta, de acuerdo con la Ecuación 12.33. La constante de proporcionalidad en esta relación se denomina módulo de compresibilidad, B, o

$$B = \frac{\text{tensión de compresibilidad}}{\text{esfuerzo de compresibilidad}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} = -\Delta p \frac{V_0}{\Delta V}. \tag{12.39}$$

El signo menos que aparece en la Ecuación 12.39 es por coherencia, para asegurar que B sea una cantidad positiva. Tenga en cuenta que el signo menos (–) es necesario porque un aumento Δp en la presión (una cantidad positiva) siempre provoca una disminución ΔV en volumen, y la disminución del volumen es una cantidad negativa. El recíproco del módulo de compresibilidad se denomina **compresibilidad** k, o

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{\Delta V / V_0}{\Delta p}. \tag{12.40}$$

El término "compresibilidad" se utiliza en relación con los fluidos (gases y líquidos). La compresibilidad describe el cambio de volumen de un fluido por unidad de aumento de presión. Los fluidos caracterizados por una gran compresibilidad son relativamente fáciles de comprimir. Por ejemplo, la compresibilidad del agua es $4{,}64 \times 10^{-5}$/atm y la compresibilidad de la acetona es $1{,}45 \times 10^{-4}$/atm. Esto significa que, bajo un aumento de presión de 1,0 atm, la disminución relativa del volumen es aproximadamente el triple con la acetona que con el agua.

EJEMPLO 12.9

Prensa hidráulica

En una prensa hidráulica, Figura 12.23, un volumen de 250 litros de aceite se somete a un aumento de presión de 2.300 psi. Si la compresibilidad del petróleo es $2{,}0 \times 10^{-5}$ / atm, halle el esfuerzo de compresibilidad y la disminución absoluta del volumen de aceite cuando la prensa está en funcionamiento.

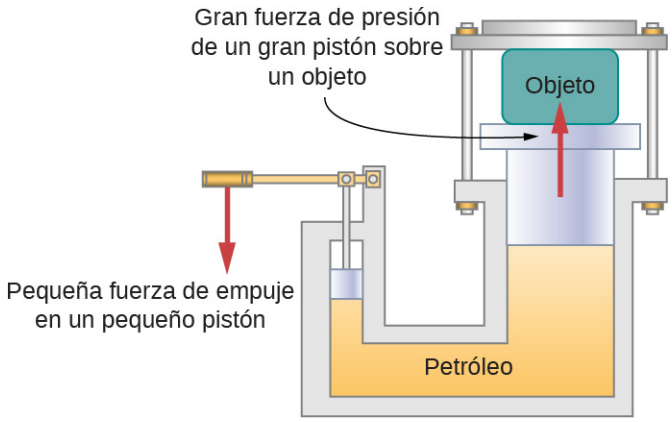


FIGURA 12.23 En una prensa hidráulica, cuando un pistón pequeño se desplaza hacia abajo, la presión del aceite se transmite por todo el aceite al pistón grande, lo que hace que se desplace hacia arriba. Una pequeña fuerza aplicada a un pistón pequeño provoca una gran fuerza de presión, que el pistón grande ejerce sobre un objeto que se levanta o se aprieta. El dispositivo actúa como una palanca mecánica.

Estrategia

Debemos invertir la Ecuación 12.40 para hallar el esfuerzo de compresibilidad. Primero, convertimos el aumento de presión de psi a atm, $\Delta p = 2.300 \text{ psi} = 2.300/14{,}7 \text{ atm} \approx 160 \text{ atm}$, e identificar $V_0 = 250 \text{ L}$.

Solución

Sustituyendo los valores en la ecuación, tenemos

$$\text{esfuerzo de compresibilidad} = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta p}{B} = k\Delta p = (2{,}0 \times 10^{-5}/\text{atm})(160 \text{ atm}) = 0{,}0032$$

$$\text{respuesta: } \Delta V = 0{,}0032\, V_0 = 0{,}0032(250 \text{ L}) = 0{,}78 \text{ L}.$$

Significación

Obsérvese que, dado que la compresibilidad del agua es 2,32 veces mayor que la del aceite, si la sustancia de trabajo en la prensa hidráulica de este problema se cambiara por agua, el esfuerzo de compresibilidad, así como el cambio de volumen, serían 2,32 veces mayores.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.11

Si la fuerza normal que actúa sobre cada cara de un cubo 1.0-m^3 pieza de acero se cambia por $1{,}0 \times 10^7 \text{ N}$, calcule el cambio resultante en el volumen de la pieza de acero.

Tensión de corte, tensión y módulo

Los conceptos de tensión de corte y tensión solo se refieren a objetos o materiales sólidos. Los edificios y las placas tectónicas son ejemplos de objetos que pueden estar sometidos a tensión de corte. En general, estos conceptos no se aplican a los fluidos.

La deformación por corte se produce cuando dos fuerzas antiparalelas de igual magnitud se aplican tangencialmente a superficies opuestas de un objeto sólido, sin causar ninguna deformación en la dirección transversal a la línea de fuerza, como en el ejemplo típico de tensión de corte ilustrado en la Figura 12.24. La deformación por corte se caracteriza por un cambio gradual Δx de capas en la dirección tangente a las fuerzas actuantes. Esta gradación en Δx se produce en la dirección transversal a lo largo de cierta distancia L_0. El esfuerzo cortante se define por la relación entre el mayor desplazamiento Δx a la distancia transversal L_0

$$\text{esfuerzo cortante} = \frac{\Delta x}{L_0}. \tag{12.41}$$

El esfuerzo cortante es causado por la tensión de corte. La tensión de corte se debe a las fuerzas que actúan *en paralelo* a la superficie. Utilizamos el símbolo $F_{\|}$ para tales fuerzas. La magnitud $F_{\|}$ por área de superficie A donde se aplica la fuerza de corte es la medida de la tensión de corte

$$\text{tensión de corte} = \frac{F_{\|}}{A}. \tag{12.42}$$

El módulo de corte es la constante de proporcionalidad en la Ecuación 12.33 y se define por el cociente de estrés y tensión. El módulo de corte se denota comúnmente por S:

$$S = \frac{\text{tensión de corte}}{\text{esfuerzo cortante}} = \frac{F_{\|}/A}{\Delta x/L_0} = \frac{F_{\|}}{A}\,\frac{L_0}{\Delta x}. \tag{12.43}$$

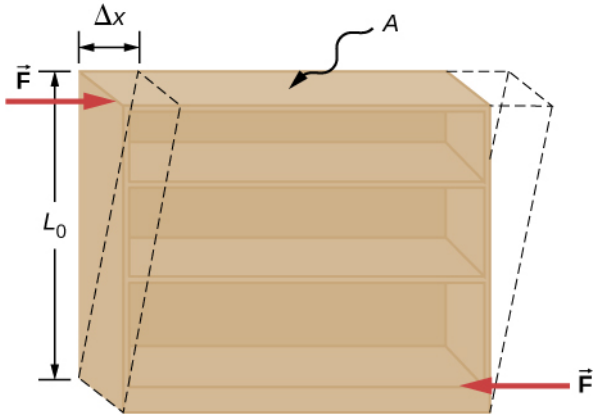


FIGURA 12.24 Objeto sometido a tensión de corte: Dos fuerzas antiparalelas de igual magnitud se aplican tangencialmente a superficies paralelas opuestas del objeto. El contorno de la línea discontinua representa la deformación resultante. No hay cambio en la dirección transversal a las fuerzas actuantes y la longitud transversal L_0 no se ve afectado. La deformación por corte se caracteriza por un cambio gradual Δx de capas en la dirección tangente a las fuerzas.

EJEMPLO 12.10

Una vieja estantería

Una persona de la limpieza intenta mover una pesada y vieja estantería en un suelo enmoquetado al empujar tangencialmente la superficie del estante superior. Sin embargo, el único efecto perceptible de este esfuerzo es similar al que se observa en la Figura 12.24, y desaparece cuando la persona deja de empujar. La librería tiene 180,0 cm de alto y 90,0 cm de ancho, con cuatro estantes de 30,0 cm de profundidad, todos ellos parcialmente cargados de libros. El peso total de la librería y de los libros es de 600,0 N. Si la persona da un empujón de 50,0 N a la estantería superior que la desplaza horizontalmente 15,0 cm respecto a la estantería inferior inmóvil, halle el módulo de corte de la librería.

Estrategia

Los únicos datos pertinentes son las dimensiones físicas de la librería, el valor de la fuerza tangencial y el

desplazamiento que provoca esta fuerza. Identificamos $F_{\|} = 50{,}0\,\text{N}$, $\Delta x = 15{,}0\,\text{cm}$, $L_0 = 180{,}0\,\text{cm}$, y $A = (30{,}0\,\text{cm})(90{,}0\,\text{cm}) = 2.700{,}0\,\text{cm}^2$, y utilizamos la Ecuación 12.43 para calcular el módulo de corte.

Solución

Sustituyendo los números en las ecuaciones, obtenemos para el módulo de corte

$$S = \frac{F_{\|}}{A}\frac{L_0}{\Delta x} = \frac{50{,}0\,\text{N}}{2.700{,}0\,\text{cm}^2}\frac{180{,}0\,\text{cm}}{15{,}0\,\text{cm}} = \frac{2}{9}\frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = \frac{2}{9} \times 10^4\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{20}{9} \times 10^3\,\text{Pa} = 2{,}222\,\text{kPa}.$$

También podemos encontrar la tensión de corte y la tensión, respectivamente:

$$\frac{F_{\|}}{A} = \frac{50{,}0\,\text{N}}{2.700{,}0\,\text{cm}^2} = \frac{5}{27}\,\text{kPa} = 185{,}2\,\text{Pa}$$
$$\frac{\Delta x}{L_0} = \frac{15{,}0\,\text{cm}}{180{,}0\,\text{cm}} = \frac{1}{12} = 0{,}083.$$

Significación

Si la persona de este ejemplo diera un buen empujón a la estantería, podría ocurrir que el corte inducido la derrumbara hasta convertirla en un montón de basura. El mismo mecanismo de corte causa las fallas en las represas y diques rellenos de tierra y, en general, de los deslizamientos de tierra.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 12.12

Explique por qué los conceptos de módulo de Young y módulo de corte no se aplican a los fluidos.

12.4 Elasticidad y plasticidad

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explique el límite en el que la deformación del material es elástica.
- Describa el rango en el que los materiales muestran un comportamiento plástico.
- Analice la elasticidad y la plasticidad en un diagrama estrés-tensión.

Denominamos módulo elástico a la constante de proporcionalidad entre el estrés y la tensión. Pero, ¿por qué lo llamamos así? ¿Qué significa que un objeto sea elástico y cómo describimos su comportamiento?

La elasticidad es la tendencia de los objetos sólidos y los materiales a volver a su forma original después de que se eliminen las fuerzas externas (carga) que causan una deformación. Un objeto es **elástico** cuando vuelve a su tamaño y forma originales cuando la carga deja de estar presente. Las razones físicas del comportamiento elástico varían entre los materiales y dependen de la estructura microscópica del material. Por ejemplo, la elasticidad de los polímeros y cauchos se debe al estiramiento de las cadenas de polímeros bajo una fuerza aplicada. En cambio, la elasticidad de los metales se debe al redimensionamiento y remodelación de las celdas cristalinas de las redes (que son las estructuras materiales de los metales) bajo la acción de fuerzas aplicadas externamente.

Los dos parámetros que determinan la elasticidad de un material son su *módulo elástico* y su *límite elástico*. Un módulo elástico elevado es típico de los materiales difíciles de deformar; es decir, de los materiales que requieren una carga elevada para conseguir una tensión significativa. Un ejemplo es una banda de acero. Un módulo elástico bajo es típico de los materiales que se deforman fácilmente bajo una carga; por ejemplo, una banda de goma. Si el estrés bajo una carga es demasiado alto, cuando se retira la carga, el material ya no vuelve a su forma y tamaño originales, sino que se relaja hasta alcanzar una forma y tamaño diferentes: El material se deforma permanentemente. El **límite elástico** es el valor del estrés a partir del cual el material deja de comportarse elásticamente y se deforma permanentemente.

Nuestra percepción de un material elástico depende tanto de su límite elástico como de su módulo elástico. Por ejemplo, todos los cauchos se caracterizan por tener un módulo elástico bajo y un límite elástico alto; por lo tanto, es fácil estirarlos y el estiramiento es notablemente grande. Entre los materiales con límites elásticos

idénticos, el más elástico es el que tiene el módulo elástico más bajo.

Cuando la carga aumenta a partir de cero, el estrés resultante es directamente proporcional a la deformación en la forma dada por la Ecuación 12.33, pero únicamente cuando la tensión no supera algún valor límite. Para valores de estrés dentro de este límite lineal, podemos describir el comportamiento elástico por analogía con la ley de Hooke para un muelle. Según la ley de Hooke, el valor de estiramiento de un muelle bajo una fuerza aplicada es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza. A la inversa, la fuerza de respuesta del muelle a un estiramiento aplicado es directamente proporcional al estiramiento. Del mismo modo, la deformación de un material sometido a una carga es directamente proporcional a la carga y, a la inversa, el estrés resultante es directamente proporcional a la tensión. El límite de linealidad (o **límite de proporcionalidad**) es el mayor valor de estrés a partir del cual el estrés deja de ser proporcional a la tensión. Más allá del límite de linealidad, la relación entre el estrés y la tensión ya no es lineal. Cuando el estrés se hace mayor que el límite de linealidad, aunque todavía dentro del límite de elasticidad, el comportamiento sigue siendo elástico, pero la relación entre el estrés y la tensión se hace no lineal.

En el caso del estrés más allá del límite elástico, un material presenta un **comportamiento plástico**. Esto significa que el material se deforma de forma irreversible y no vuelve a su forma y tamaño originales, ni siquiera después de retirar la carga. Cuando el estrés se incrementa gradualmente más allá del límite elástico, el material sufre una deformación plástica. Los materiales similares al caucho muestran un aumento en el estrés con el incremento de la tensión, lo que significa que son más difíciles de estirar y, finalmente, alcanzan un punto de fractura en el que se rompen. Los materiales dúctiles, como los metales, muestran una disminución gradual del estrés con el aumento de la tensión, lo que significa que son más fáciles de deformar a medida que los valores de estrés-tensión se acercan al punto de rotura. Los mecanismos microscópicos responsables por la plasticidad de los materiales son diferentes para los distintos materiales.

Podemos representar gráficamente la relación entre el estrés y la tensión en un **diagrama estrés-tensión**. Cada material tiene su propia curva característica de estrés-tensión. Un diagrama típico de estrés-tensión para un metal dúctil sometido a una carga se muestra en la Figura 12.25. En esta figura, la tensión es una elongación fraccionada (no dibujada a escala). Cuando la carga se incrementa gradualmente, el comportamiento lineal (línea roja) que comienza en el punto sin carga (el origen) termina en el límite de linealidad en el punto *H*. Para más incrementos de carga más allá del punto *H*, la relación estrés-tensión es no lineal, aunque sigue siendo elástica. En la figura, esta región no lineal se observa entre los puntos *H* y *E*. Cargas cada vez mayores llevan el estrés al límite de elasticidad *E*, donde termina el comportamiento elástico y comienza la deformación plástica. Más allá del límite de elasticidad, cuando se elimina la carga, por ejemplo en *P*, el material se relaja hasta alcanzar una nueva forma y tamaño a lo largo de la línea verde. Es decir, el material se deforma permanentemente y no vuelve a su forma y tamaño iniciales cuando el estrés se hace nulo.

El material sufre una deformación plástica para cargas lo suficientemente grandes como para que el estrés supere el límite de elasticidad en *E*. El material continúa deformándose plásticamente hasta que el estrés alcanza el punto de fractura (punto de rotura). Más allá del punto de fractura, ya no tenemos una muestra de material, por lo que el diagrama termina en el punto de fractura. Para completar esta descripción cualitativa, hay que decir que los límites lineales, elásticos y de plasticidad denotan una gama de valores y no un punto definido.

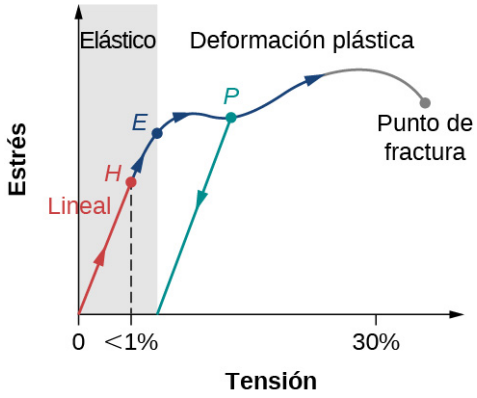


FIGURA 12.25 Gráfico típico de estrés-tensión de un metal sometido a una carga: El gráfico termina en el punto de fractura. Las flechas muestran la dirección de los cambios bajo una carga cada vez mayor. Los puntos *H* y *E* son los límites de linealidad y elasticidad, respectivamente. Entre los puntos *H* y *E*, el comportamiento es no lineal. La línea verde que se origina en *P* ilustra la respuesta del metal cuando se retira la carga. La deformación permanente tiene un valor de tensión en el punto donde la línea verde intercepta el eje horizontal.

El valor del estrés en el punto de fractura se denomina estrés de rotura (o **tensión de rotura**). Materiales con propiedades elásticas similares, como dos metales, pueden tener un estrés de rotura muy diferente. Por ejemplo, la tensión de rotura del aluminio es $2{,}2 \times 10^8\,\text{Pa}$ y en el caso del acero puede llegar a ser $20{,}0 \times 10^8\,\text{Pa}$, dependiendo del tipo de acero. Podemos hacer una estimación rápida, basada en la Ecuación 12.34, de que, en las varillas con un área transversal de $1\,\text{in}^2$, la carga de rotura para una varilla de aluminio es $3{,}2 \times 10^4$ lb, y la carga de rotura de una varilla de acero es unas nueve veces mayor.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

centro de gravedad punto donde se une el vector de peso

comportamiento plástico el material se deforma irreversiblemente, no vuelve a su forma y tamaño original cuando se retira la carga y desaparece el estrés

compresibilidad recíproco del módulo de compresibilidad

diagrama estrés-tensión gráfico que muestra la relación entre el estrés y la tensión, característica de un material

ecuación de onda lineal (límite de proporcionalidad) valor máximo de estrés a partir del cual el estrés deja de ser proporcional a la tensión

elástico objeto que vuelve a su tamaño y forma original cuando la carga ya no está presente

equilibrio un cuerpo está en equilibrio cuando sus aceleraciones lineal y angular son ambas nulas respecto a un marco de referencia inercial

equilibrio estático el cuerpo está en equilibrio estático cuando está en reposo en nuestro marco seleccionado de referencia inercial

esfuerzo cortante deformación causada por la tensión de corte

esfuerzo de compresibilidad (o **esfuerzo de volumen**) tensión bajo la tensión de compresibilidad, dada como cambio fraccional de volumen

esfuerzo de compresión tensión que se produce cuando las fuerzas contraen un objeto, lo que provoca su acortamiento

esfuerzo de tracción el esfuerzo bajo tensión de tracción, dado como cambio fraccional de longitud, que se produce cuando las fuerzas estiran un objeto, lo cual provoca su elongación

estrés cantidad que contiene información sobre la magnitud de la fuerza que causa la deformación, definida como fuerza por unidad de superficie

estrés de rotura (tensión de rotura) valor del estrés en el punto de fractura

límite elástico valor del estrés a partir del cual el material deja de comportarse elásticamente y se deforma permanentemente

módulo de compresibilidad módulo elástico para la tensión de compresibilidad

módulo de corte módulo elástico para la tensión de corte

módulo de Young módulo elástico para tensión de tracción o de compresión

módulo elástico constante de proporcionalidad en relación lineal entre el estrés y la tensión, en pascales del SI

pascal (Pa) Unidad SI de estrés, unidad SI de presión

presión fuerza que presiona en dirección normal sobre una superficie según el área de la superficie; la tensión de compresibilidad en los fluidos

presión normal presión de una atmósfera; sirve como nivel de referencia para la presión

primera condición de equilibrio expresa el equilibrio traslacional; todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo se equilibran y su suma vectorial es cero

segunda condición de equilibrio expresa el equilibrio rotacional; todos los torques debidos a las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo se equilibran y su suma vectorial es cero

tensión cantidad adimensional que da la cantidad de deformación de un objeto o medio bajo estrés

tensión de compresibilidad (o **tensión de volumen**) estrés causado por las fuerzas de compresión, en todas las direcciones

tensión de compresión estrés causado por fuerzas de compresión, solo en una dirección

tensión de corte estrés causado por las fuerzas de corte

tensión de tracción estrés provocado por fuerzas de tracción, solo en una dirección, que se produce cuando las fuerzas estiran un objeto, lo cual provoca su elongación

torque gravitacional el torque en el cuerpo causado por su peso; se produce cuando el centro de gravedad del cuerpo no está situado en el eje de rotación

Ecuaciones Clave

Primera condición de equilibrio $$\sum_k \vec{\mathbf{F}}_k = \vec{\mathbf{0}}$$

Segunda condición de equilibrio	$\sum_k \vec{\tau}_k = \vec{0}$
Relación lineal entre estrés y tensión	estrés = (módulo elástico) × tensión
Módulo de Young	$Y = \frac{\text{tensión de tracción}}{\text{esfuerzo de tracción}} = \frac{F_\perp}{A}\frac{L_0}{\Delta L}$
Módulo de compresibilidad	$B = \frac{\text{tensión de compresibilidad}}{\text{esfuerzo de compresibilidad}} = -\Delta p \frac{V_0}{\Delta V}$
Módulo de corte	$S = \frac{\text{tensión de corte}}{\text{esfuerzo cortante}} = \frac{F_\parallel}{A}\frac{L_0}{\Delta x}$

Resumen

12.1 Condiciones para el equilibrio estático

- Un cuerpo está en equilibrio cuando permanece en movimiento uniforme (tanto de traslación como de rotación) o en reposo. Cuando un cuerpo en un determinado marco de referencia inercial no rota ni realiza ningún movimiento de traslación, decimos está en equilibrio estático en este marco de referencia.
- Las condiciones de equilibrio exigen que la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo sea cero (primera condición de equilibrio), y que la suma de todos los torques de fuerzas externas sea cero (segunda condición de equilibrio). Estas dos condiciones deben cumplirse simultáneamente en el equilibrio. Si una de estas no se satisface, el organismo no está en equilibrio.
- El diagrama de cuerpo libre para un cuerpo es una herramienta útil que nos permite contar correctamente todas las contribuciones de todas las fuerzas y torques externos que actúan sobre el cuerpo. Los diagramas de cuerpo libre para el equilibrio de un cuerpo rígido extendido deben indicar un punto de apoyo y los brazos de palanca de las fuerzas que actúan con respecto al pivote.

12.2 Ejemplos de equilibrio estático

- Una variedad de problemas de ingeniería puede resolverse al aplicar las condiciones de equilibrio de los cuerpos rígidos.
- En las aplicaciones, identifique todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido y anote sus brazos de palanca que giran en torno a un determinado eje de rotación. Trace un diagrama de cuerpo libre para el cuerpo. Las fuerzas y los torques externos netos se identifican claramente a partir de un diagrama de cuerpo libre, construido correctamente. De esta manera, se puede establecer la primera condición de equilibrio para las fuerzas y la segunda condición de equilibrio para los torques.
- Al establecer las condiciones de equilibrio, somos libres de adoptar cualquier marco de referencia inercial y cualquier posición del punto de apoyo. Todas las opciones conducen a una respuesta. Sin embargo, algunas opciones pueden complicar excesivamente el proceso de búsqueda de la solución. Llegamos a la misma respuesta, sin importar las elecciones que hagamos. La única manera de dominar esta habilidad es practicar.

12.3 Estrés, tensión y módulo elástico

- Las fuerzas externas sobre un objeto (o medio) provocan su deformación, que es un cambio de tamaño y forma. La intensidad de las fuerzas que causan la deformación se expresa mediante el estrés, que en unidades del SI se mide en la unidad de presión (pascal). El alcance de la deformación bajo estrés se expresa mediante la tensión, que es adimensional.
- Para un estrés pequeño, la relación entre el estrés y la tensión es lineal. El módulo elástico es la constante de proporcionalidad en esta relación lineal.
- El esfuerzo de tracción (o de compresión) es la respuesta de un objeto o medio a la tensión de tracción (o de compresión). En este caso, el módulo elástico se denomina módulo de Young. La tensión de tracción (o de compresión) causa

la elongación (o el acortamiento) del objeto o del medio y se debe a una fuerza externa que actúa en una sola dirección perpendicular a la sección transversal.
- El esfuerzo de compresibilidad es la respuesta de un objeto o medio a la tensión de compresibilidad. En este caso, el módulo elástico se denomina módulo de compresibilidad. La tensión de compresibilidad provoca un cambio en el volumen del objeto o medio y la causan las fuerzas que actúan sobre el cuerpo desde todas las direcciones, perpendiculares a su superficie. La compresibilidad de un objeto o medio es el recíproco de su módulo de compresibilidad.
- El esfuerzo cortante es la deformación de un objeto o un medio sometido a tensión de corte. El módulo de corte es el módulo elástico en este caso. La tensión de corte la causan las fuerzas que actúan a lo largo de las dos superficies paralelas del objeto.

12.4 Elasticidad y plasticidad

- Un objeto o material es elástico si vuelve a su forma y tamaño originales cuando el estrés desaparece. En las deformaciones elásticas con valores de estrés inferiores al límite de proporcionalidad, el estrés es proporcional a la tensión. Cuando el estrés supera el límite de proporcionalidad, la deformación sigue siendo elástica, aunque no lineal hasta el límite de elasticidad.
- Un objeto o material tiene un comportamiento plástico cuando el estrés es mayor que el límite elástico. En la región plástica, el objeto o material no vuelve a su tamaño o forma original cuando desaparece el estrés, sino que se deforma permanentemente. El comportamiento plástico termina en el punto de rotura.

Preguntas Conceptuales

12.1 Condiciones para el equilibrio estático

1. ¿Qué se puede decir de la velocidad de un cuerpo en movimiento que está en equilibrio dinámico?
2. ¿En qué condiciones puede estar en equilibrio un cuerpo que rota? Dé un ejemplo.
3. ¿Cuáles son los tres factores que inciden en el torque creado por una fuerza en relación con un punto de apoyo específico?
4. Los mecánicos a veces ponen un trozo de tubo sobre el mango de una llave cuando intentan quitar un tornillo muy apretado. ¿Cómo ayuda esto?

En los cuatro problemas siguientes, califique el enunciado de verdadero o falso y explique su respuesta.

5. Si solo hay una fuerza externa (o torque) que actúa sobre un objeto, este no puede estar en equilibrio.
6. Si un objeto está en equilibrio debe haber un número par de fuerzas actuando sobre él.
7. Si sobre un objeto actúa un número impar de fuerzas, el objeto no puede estar en equilibrio.
8. Un cuerpo que se mueve en un círculo a una velocidad constante está en equilibrio rotacional.
9. ¿Para qué sirve una pértiga larga y flexible que llevan los funambulistas?

12.2 Ejemplos de equilibrio estático

10. ¿Es posible apoyar una escalera contra una pared rugosa cuando el suelo no tiene fricción?
11. Muestre cómo se puede utilizar un dinamómetro y un punto de apoyo simple para pesar un objeto cuyo peso es mayor que la lectura máxima del dinamómetro.
12. Un pintor se sube a una escalera. ¿Es más probable que la escalera resbale cuando el pintor está cerca de la parte inferior o de la superior?

12.3 Estrés, tensión y módulo elástico

Nota: A menos que se indique lo contrario, se asume que los pesos de los cables, varillas y otros elementos son despreciables. Los módulos elásticos de los materiales seleccionados figuran en la Tabla 12.1.

13. ¿Por qué una ardilla puede saltar desde la rama de un árbol hasta el suelo y salir corriendo sin sufrir daños, mientras que un humano podría fracturarse en una caída así?
14. Cuando una botella de vidrio llena de vinagre se calienta, tanto el vinagre como el vidrio se expanden, pero el vinagre se expande mucho más con la temperatura que el vidrio. La botella se rompe si se llena hasta el tope. Explique por qué y cómo una bolsa de aire sobre el vinagre evita que la botella se rompa.
15. Se utiliza un alambre fino ensartado entre dos clavos en la pared para sostener un cuadro grande. ¿Es probable que el cable se rompa si se

tensa mucho o si se tensa de forma que se combe considerablemente?

16. Repase la relación entre el estrés y la tensión. ¿Puede hallar alguna similitud entre las dos cantidades?

17. ¿Qué tipo de estrés se aplica al presionar los extremos de una varilla de madera cuando tira de sus extremos?

18. ¿Se puede aplicar tensión de compresión a una goma elástica?

19. ¿Puede el módulo de Young tener un valor negativo? ¿Y el módulo de compresibilidad?

20. Si un material hipotético tiene un módulo de compresibilidad negativo, ¿qué ocurre cuando se aprieta un trozo de este?

21. Explique de qué manera podría medir el módulo de compresibilidad de un líquido.

Problemas

12.1 Condiciones para el equilibrio estático

24. Al apretar un perno, se empuja perpendicularmente una llave con una fuerza de 165 N a una distancia de 0,140 m del centro del perno. ¿Cuánto torque está ejerciendo en relación con el centro del perno?

25. Al abrir una puerta, se la empuja perpendicularmente con una fuerza de 55,0 N a una distancia de 0,850 m de las bisagras. ¿Qué torque está ejerciendo en relación con las bisagras?

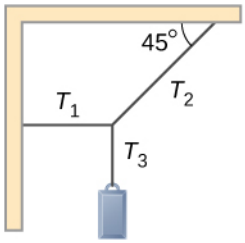
26. Calcule la magnitud de la tensión en cada uno de los cables de soporte que se muestran a continuación. En cada caso, el peso del cuerpo suspendido es de 100,0 N y las masas de los cables son despreciables.

12.4 Elasticidad y plasticidad

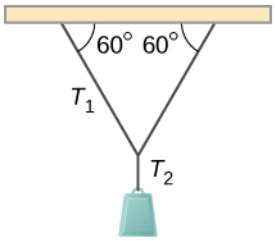
Nota: A menos que se indique lo contrario, se supone que los pesos de los cables, varillas y otros elementos son despreciables. Los módulos elásticos de los materiales seleccionados figuran en la Tabla 12.1.

22. ¿Qué se quiere decir cuando un sedal se designa como "una prueba de 10 libras"?

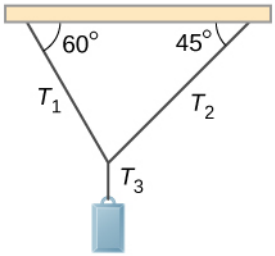
23. Las varillas de acero suelen colocarse en el hormigón antes de que fragüe. ¿Para qué sirven estas varillas?



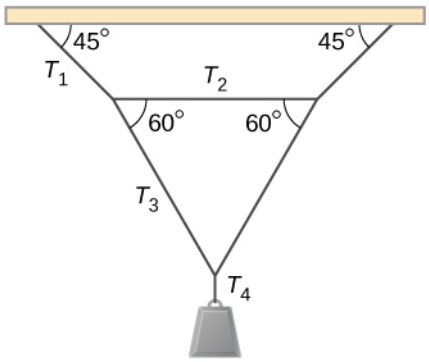
(a)



(b)

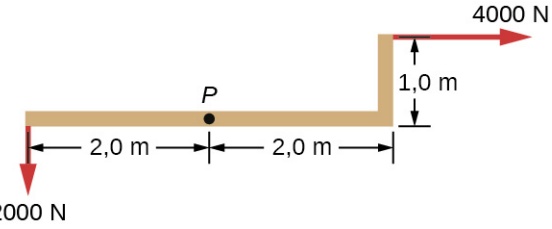


(c)

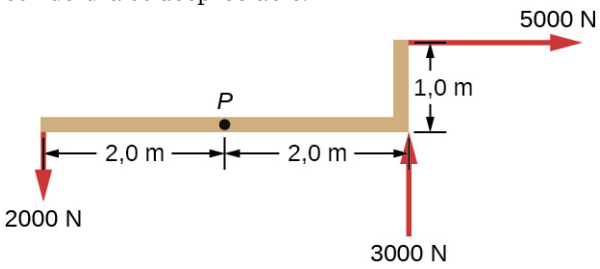


(d)

27. ¿Qué fuerza debe aplicarse en el punto *P* para mantener en equilibrio la estructura mostrada? El peso de la estructura es despreciable.



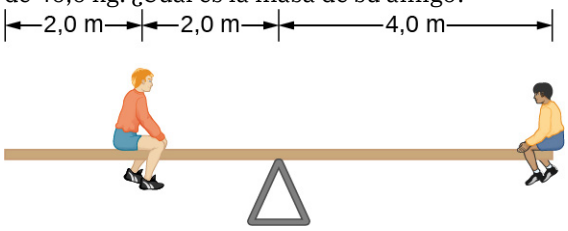
28. ¿Es posible aplicar una fuerza en *P* para mantener en equilibrio la estructura mostrada? El peso de la estructura es despreciable.



29. Dos niños empujan en lados opuestos de una puerta durante el juego. Ambos empujan horizontal y perpendicularmente a la puerta. Un niño empuja con una fuerza de 17,5 N a una distancia de 0,600 m de las bisagras, y el segundo niño empuja a una distancia de 0,450 m. ¿Qué fuerza debe ejercer el segundo niño para evitar que la puerta se mueva? Supongamos que la fricción es despreciable.

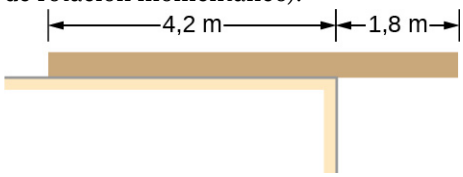
30. Un pequeño todoterreno de 1.000 kg tiene una distancia entre ejes de 3,0 m. Si el 60 % de su peso descansa sobre las ruedas delanteras, ¿a qué distancia detrás de las ruedas delanteras está el centro de masa del vagón?

31. El balancín uniforme está equilibrado en su centro de masa, como se ve a continuación. El niño más pequeño de la derecha tiene una masa de 40,0 kg. ¿Cuál es la masa de su amigo?



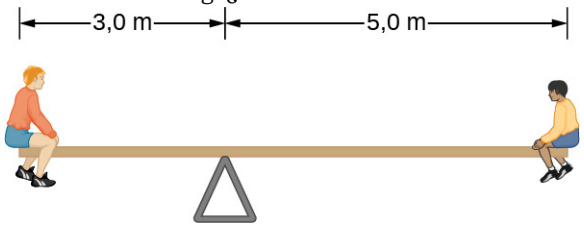
12.2 Ejemplos de equilibrio estático

32. Un tablón uniforme descansa sobre una superficie nivelada como se muestra a continuación. El tablón tiene una masa de 30 kg y una longitud de 6,0 m. ¿Cuánta masa puede colocarse en su extremo derecho antes de que se incline? *(Pista:* Cuando la tabla está a punto de volcarse, hace contacto con la superficie solo a lo largo del borde que se convierte en un eje de rotación momentáneo).

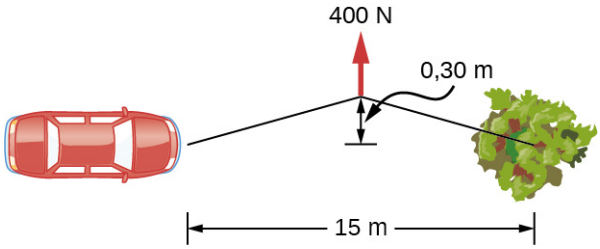


33. El balancín uniforme que se muestra a continuación está equilibrado sobre un punto de

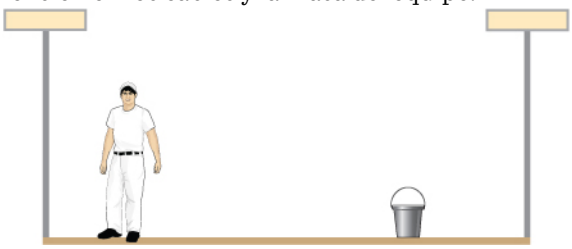
apoyo situado a 3,0 m del extremo izquierdo. El niño más pequeño de la derecha tiene una masa de 40 kg y el niño más grande de la izquierda tiene una masa de 80 kg. ¿Cuál es la masa del tablero?



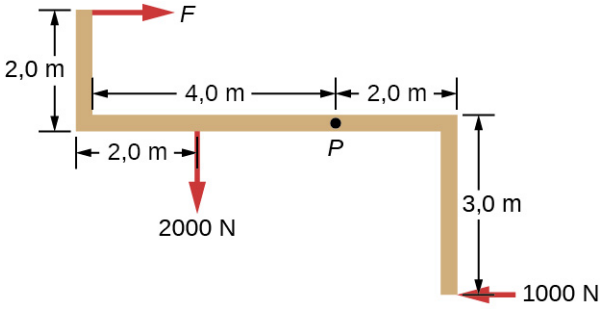
34. Para sacar su auto del barro, un hombre ata un extremo de una cuerda al parachoques delantero y el otro a un árbol situado a 15 m de distancia, como se muestra a continuación. A continuación, tira del centro de la cuerda con una fuerza de 400 N, lo que hace que su centro se desplace 0,30 m, como se muestra. ¿Cuál es la fuerza de la cuerda sobre el auto?



35. Un andamio uniforme de 40,0 kg de longitud de 6,0 m está soportado por dos cables ligeros, como se muestra a continuación. Un pintor de 80,0 kg se sitúa a 1,0 m del extremo izquierdo del andamio, y su equipo de pintura está a 1,5 m del extremo derecho. Si la tensión del cable izquierdo es el doble que la del cable derecho, calcule la tensión en los cables y la masa del equipo.

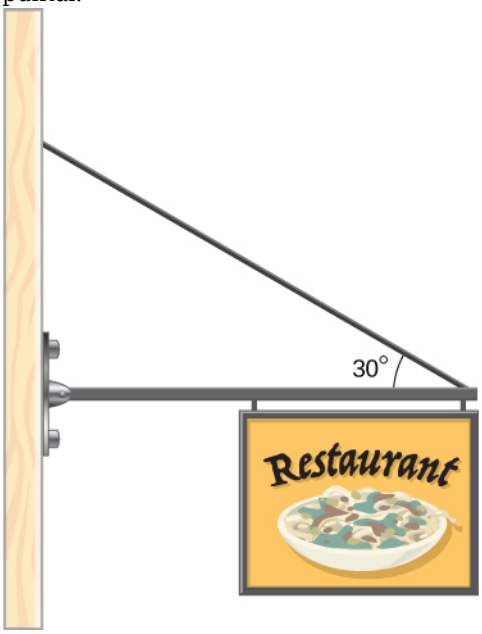


36. Cuando la estructura que se muestra a continuación está apoyada en el punto *P*, está en equilibrio. Calcule la magnitud de la fuerza *F* y la fuerza aplicada en *P*. El peso de la estructura es despreciable.



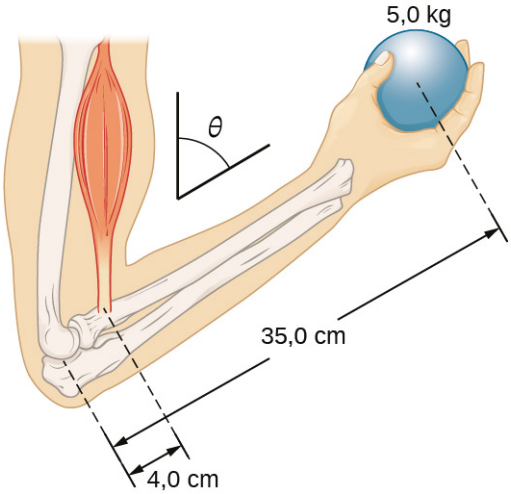
37. Para subir al tejado, una persona (con una masa de 70,0 kg) coloca una escalera de aluminio de 6,00 m (con una masa de 10,0 kg) contra la casa, sobre una plataforma de hormigón con la base de la escalera a 2,00 m de la casa. La escalera se apoya en un canalón de plástico para la lluvia, que podemos suponer sin fricción. El centro de masa de la escalera está a 2,00 m de la parte inferior. La persona está de pie a 3,00 m del fondo. Encuentre las fuerzas de reacción normal y de fricción sobre la escalera en su base.

38. Un puntal horizontal uniforme pesa 400,0 N. Un extremo del puntal está unido a un soporte con bisagras en la pared, y el otro extremo del puntal está unido a una señal que pesa 200,0 N. El puntal también está soportado por un cable unido entre el extremo del puntal y la pared. Suponiendo que todo el peso del cartel esté fijado en el extremo del puntal, calcule la tensión en el cable y la fuerza en la bisagra del puntal.

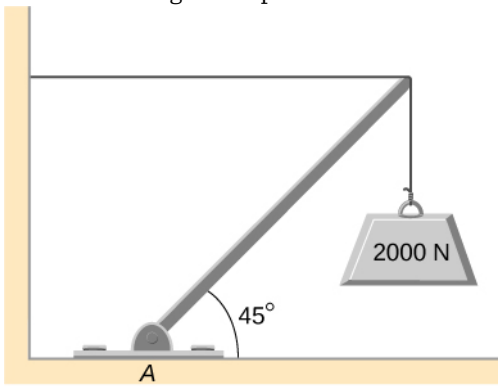


39. El antebrazo que se muestra a continuación está colocado en ángulo θ con respecto a la parte superior del brazo, y se sostiene una masa

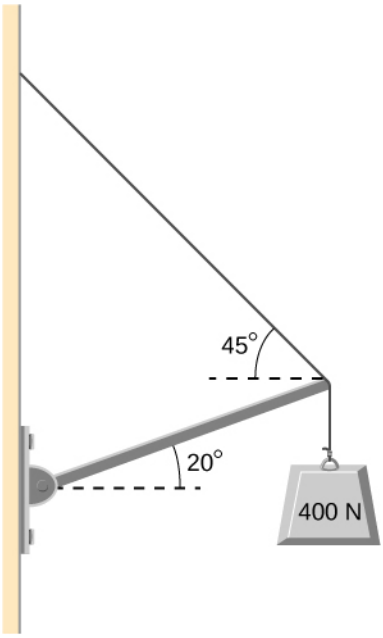
de 5,0 kg en la mano. La masa total del antebrazo y de la mano es de 3,0 kg, y su centro de masa está a 15,0 cm del codo. (a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que el músculo bíceps ejerce sobre el antebrazo para $\theta = 60°$? (b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza sobre la articulación del codo para el mismo ángulo? (c) ¿Cómo dependen estas fuerzas del ángulo θ?



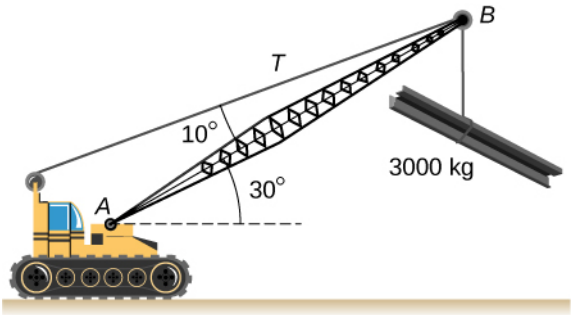
40. La pluma uniforme que se muestra a continuación pesa 3.000 N. Se apoya en el cable horizontal y en el soporte de bisagra en el punto *A*. ¿Cuáles son las fuerzas sobre la pluma debidas al cable y al soporte en *A*? ¿La fuerza en *A* actúa a lo largo de la pluma?



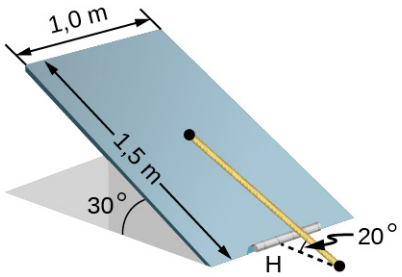
41. La pluma uniforme que se muestra a continuación pesa 700 N, mientras que el objeto que cuelga de su extremo derecho pesa 400 N. La pluma se sostiene por un cable ligero y una bisagra en la pared. Calcule la tensión en el cable y la fuerza en la bisagra de la pluma. ¿La fuerza sobre la bisagra actúa a lo largo del brazo?



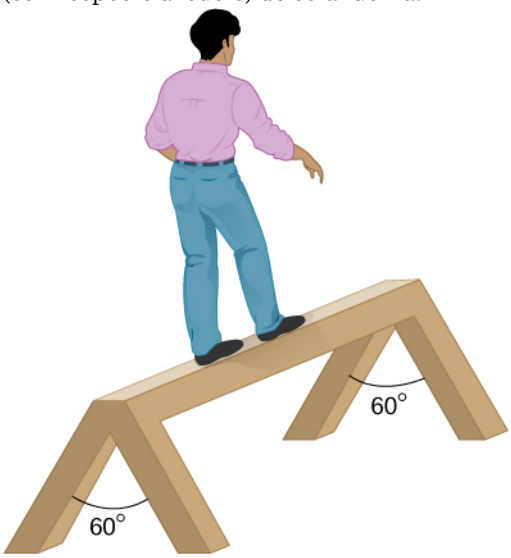
42. A continuación, se muestra la pluma de 12,0 m, *AB*, de una grúa que levanta una carga de 3.000 kg. El centro de masa de la pluma está en su centro geométrico, mientras que la masa de la pluma es de 1.000 kg. Para la posición indicada, calcule la tensión *T* en el cable y la fuerza en el eje *A*.



43. La trampilla uniforme que se muestra a continuación mide 1,0 m por 1,5 m y pesa 300 N. Se apoya en una sola bisagra (H), y en una cuerda ligera, atada entre el centro de la puerta y el suelo. La puerta se mantiene en la posición indicada, donde su losa hace un 30° ángulo con el suelo horizontal y la cuerda hace un 20° ángulo con el suelo. Calcule la tensión en la cuerda y la fuerza en la bisagra.



44. Un hombre de 90 kg camina sobre un caballete, como se muestra a continuación. El caballete mide 2,0 m de largo y 1,0 m de alto, y su masa es de 25,0 kg. Calcule la fuerza de reacción normal en cada pata en el punto de contacto con el suelo cuando el hombre está a 0,5 m del extremo más alejado del caballete. *(Pista:* En cada extremo, halle primero la fuerza de reacción total. Esta fuerza de reacción es la suma vectorial de dos fuerzas de reacción, cada una de las cuales actúa a lo largo de un tramo. La fuerza de reacción normal en el punto de contacto con el suelo es el componente normal (con respecto al suelo) de esta fuerza.



12.3 Estrés, tensión y módulo elástico

45. La "mina" de los lápices es una composición de grafito con un módulo de Young de aproximadamente $1{,}0 \times 10^9 \text{N/m}^2$. Calcule el cambio de longitud de la mina de un lápiz automático si se golpea directamente en el lápiz con una fuerza de 4,0 N. La mina tiene 0,50 mm de diámetro y 60 mm de longitud.

46. Las antenas de televisión son las estructuras artificiales más altas de la Tierra. En 1987, un físico de 72,0 kg se colocó a sí mismo y colocó además 400 kg de equipo en la parte superior de una antena de 610 m de altura para realizar experimentos sobre la gravedad. ¿En cuánto se comprimió la antena, si la consideramos equivalente a un cilindro de acero de 0,150 m de radio?

47. ¿Cuánto estira una alpinista de 65,0 kg su cuerda de nailon de 0,800 cm de diámetro cuando se cuelga a 35,0 m por debajo de un afloramiento rocoso? (Para el nailon, $Y = 1{,}35 \times 10^9 \text{Pa}$.)

48. Cuando el agua se congela, su volumen aumenta en 9,05 %. ¿Qué fuerza por unidad de superficie es capaz de ejercer el agua sobre un recipiente cuando se congela?

49. Un agricultor que hace zumo de uva llena una botella de cristal hasta el borde y la tapa bien. El zumo se expande más que el vaso cuando se calienta, de forma que el volumen aumenta en 0,2 %. Calcule la fuerza ejercida por el jugo por centímetro cuadrado si su módulo de compresibilidad es $1{,}8 \times 10^9 \text{N/m}^2$, suponiendo que la botella no se rompa.

50. Un disco de la columna vertebral está sometido a una fuerza de corte de 600,0 N. Calcule su deformación con el módulo de corte de $1{,}0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. El disco equivale a un cilindro macizo de 0,700 cm de altura y 4,00 cm de diámetro.

51. Una vértebra está sometida a una fuerza de corte de 500,0 N. Calcule la deformación, considerando la vértebra como un cilindro de 3,00 cm de altura y 4,00 cm de diámetro. ¿Cómo se compara su resultado con el obtenido en el problema anterior? ¿Son los problemas de la columna vertebral más comunes en los discos que en las vértebras?

52. Calcule la fuerza que aplica un afinador de pianos para estirar una cuerda de acero en 8,00 mm, si la cuerda tiene originalmente 1,35 m de longitud y su diámetro es de 0,850 mm.

53. Un asta hueca de aluminio de 20,0 m de altura es equivalente en resistencia a un cilindro macizo de 4,00 cm de diámetro. Un viento fuerte dobla el poste tanto como lo haría una fuerza horizontal de 900,0 N en la parte superior. ¿Hasta dónde se flexiona la parte superior del poste?

54. Un cable de cobre de 1,0 cm de diámetro se estira un 1,0 % cuando se utiliza para levantar una carga ascendente con una aceleración de $2{,}0 \text{ m/s}^2$. ¿Cuál es el peso de la carga?

55. A medida que se perfora un pozo de petróleo, cada nueva sección de la tubería de perforación

soporta su propio peso y el de la tubería y la broca que hay debajo. Calcule el estiramiento en una nueva tubería de acero de 6,00 m de longitud que soporta una broca de 100 kg y una longitud de tubería de 3,00 km con una densidad lineal de masa de 20,0 kg/m. Trate al tubo como un cilindro sólido de 5,00 cm de diámetro.

56. Una gran barra de acero cilíndrica y uniforme de densidad $\rho = 7{,}8\ \text{g/cm}^3$ tiene una longitud de 2,0 m y un diámetro de 5,0 cm. La varilla se sujeta a un suelo de hormigón con su eje largo en posición vertical. ¿Cuál es el estrés normal en la varilla en la sección transversal situada a (a) 1,0 m de su extremo inferior? (b) 1,5 m del extremo inferior?

57. Un alpinista de 90 kg se cuelga de una cuerda de nailon y la estira 25,0 cm. Si la cuerda tiene originalmente 30,0 m de longitud y su diámetro es de 1,0 cm, ¿cuál es el módulo de Young del nailon?

58. Una barra de suspensión de un puente colgante tiene una longitud de 25,0 m. Si la varilla es de acero, ¿cuál debe ser su diámetro para que no se estire más de 1,0 cm cuando un $2{,}5 \times 10^4$-kg ¿pasa un camión por allí? Supongamos que la barra soporta todo el peso del camión.

59. Un cable de cobre tiene una longitud de 1,0 m y un diámetro de 1,0 mm. Si el cable cuelga verticalmente, ¿cuánto peso hay que añadir a su extremo libre para poder estirarlo 3,0 mm?

60. Una pesa de 100 N se sujeta al extremo libre de un cable metálico que cuelga del techo. Cuando se añade un segundo peso de 100 N al cable, este se estira 3,0 mm. El diámetro y la longitud del cable son de 1,0 mm y 2,0 m, respectivamente. ¿Cuál es el módulo de Young del metal que se utiliza para fabricar el alambre?

61. El módulo de compresibilidad de un material es $1{,}0 \times 10^{11}\ \text{N/m}^2$. ¿Qué cambio fraccional de volumen experimenta un trozo de este material cuando se somete a un aumento de la tensión de compresibilidad de $10^7\ \text{N/m}^2$? Supongamos que la fuerza se aplica uniformemente sobre la superficie.

62. Fuerzas normales de magnitud $1{,}0 \times 10^6\text{N}$ se aplican uniformemente a una superficie esférica que encierra el volumen de un líquido. Esto hace que el radio de la superficie disminuya de 50,000 cm a 49,995 cm. ¿Cuál es el módulo de compresibilidad del líquido?

63. Durante un paseo por la cuerda, un equilibrista crea una tensión de $3{,}94 \times 10^3\ N$ en un cable que se estira entre dos postes de soporte que están a 15,0 m de distancia. El alambre tiene un diámetro de 0,50 cm cuando no está estirado. Cuando el equilibrista está en el cable en el medio entre los postes el cable hace un ángulo de $5{,}0°$ por debajo de la horizontal. ¿Cuánto estira esta tensión el cable de acero cuando el equilibrista está en esta posición?

64. Al utilizar un borrador de lápiz, se ejerce una fuerza vertical de 6,00 N a una distancia de 2,00 cm de la unión entre la madera y el borrador. El lápiz tiene un diámetro de 6,00 mm y se mantiene en un ángulo de $20{,}0°$ a la horizontal. (a) ¿Cuánto se flexiona la madera perpendicularmente a su longitud? (b) ¿Cuánto se comprime longitudinalmente?

65. Las fuerzas normales se aplican uniformemente sobre la superficie de un volumen esférico de agua cuyo radio es de 20,0 cm. Si la presión sobre la superficie aumenta en 200 MPa, ¿en cuánto disminuye el radio de la esfera?

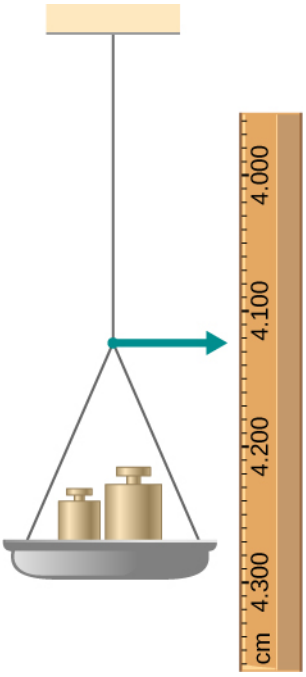
12.4 Elasticidad y plasticidad

66. Una cuerda uniforme de sección transversal $0{,}50\ \text{cm}^2$ se rompe cuando la tensión de tracción en este alcanza $6{,}00 \times 10^6\text{N/m}^2$. (a) ¿Cuál es la carga máxima que puede levantarse lentamente a rapidez constante por la cuerda? (b) ¿Cuál es la carga máxima que puede levantar la cuerda a una aceleración de $4{,}00\ \text{m/s}^2$?

67. El extremo de un cable metálico vertical de 2,0 m de longitud y 1,0 mm de diámetro está fijado a un techo, y el otro extremo está fijado a un platillo de peso de 5,0 N, como se muestra a continuación. La posición del puntero antes de la sartén es de 4.000 cm. A continuación, se añaden diferentes pesos a la zona del plato y se registra la posición del puntero en la tabla que se muestra. Grafique el estrés frente a la tensión de este alambre y utilice la curva resultante para determinar el módulo de Young y el límite de proporcionalidad del metal. ¿Qué metal es más probable que sea?

Carga añadida (incluido el plato) (N)	Lectura de la escala (cm)
0	4,000

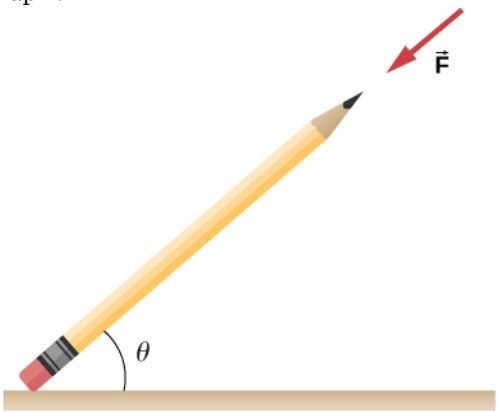
Carga añadida (incluido el plato) (N)	Lectura de la escala (cm)
15	4,036
25	4,073
35	4,109
45	4,146
55	4,181
65	4,221
75	4,266
85	4,316



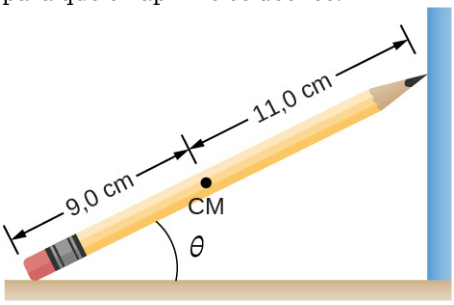
68. Un aluminio $\left(\rho = 2{,}7\ \text{g/cm}^3\right)$ el cable está suspendido del techo y cuelga verticalmente. ¿Qué longitud deberá tener el cable para que el estrés en su extremo superior alcance el límite de proporcionalidad, que es $8{,}0 \times 10^7\ \text{N/m}^2$?

Problemas Adicionales

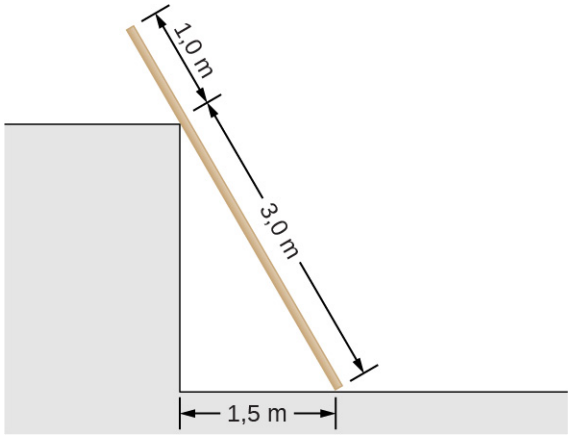
69. El coeficiente de fricción estática entre la goma del lápiz y el tablero de la mesa es $\mu_s = 0{,}80$. Si la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a lo largo del eje del lápiz, como se muestra a continuación, ¿cuál es el ángulo mínimo en el que el lápiz puede permanecer sin resbalar? Ignore el peso del lápiz.



70. Un lápiz se apoya en una esquina, como se muestra a continuación. El extremo afilado del lápiz toca una superficie vertical lisa y el extremo de la goma toca un suelo horizontal rugoso. El coeficiente de fricción estática entre la goma de borrar y el suelo es $\mu_s = 0{,}80$. El centro de masa del lápiz está situado a 9,0 cm de la punta de la goma y a 11,0 cm de la punta de la mina del lápiz. Halle el ángulo mínimo θ para que el lápiz no se deslice.



71. Un tablón uniforme de 4,0 m que pesa 200,0 N se apoya en la esquina de una pared, como se muestra a continuación. No hay fricción en el punto en el que el tablón se encuentra con la esquina. (a) Halle las fuerzas que la esquina y el suelo ejercen sobre el tablón. (b) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática entre el suelo y el tablón para que el tablón no resbale?



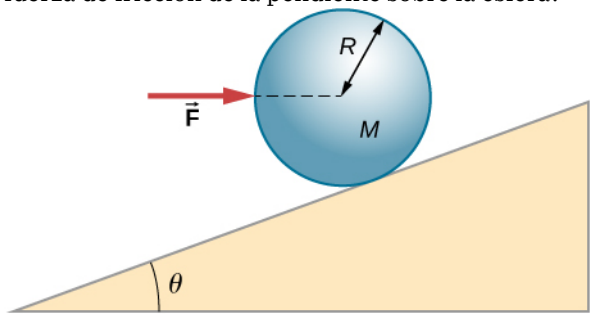
72. Un niño de 40 kg salta desde una altura de 3,0 m, aterriza sobre un pie y se detiene en 0,10 s después de tocar el suelo. Supongamos que llega al reposo a desaceleración constante. Si el área total de la sección transversal de los huesos de las piernas justo por encima de los tobillos es $3{,}0\ \text{cm}^2$, ¿cuál es el estrés de compresión en estos huesos? Los huesos de las piernas pueden fracturarse cuando se someten a un estrés superior a $1{,}7 \times 10^8$ Pa. ¿El niño corre peligro de fracturarse la pierna?

73. Dos varillas finas, una de acero y otra de aluminio, se unen de extremo a extremo. Cada varilla tiene una longitud de 2,0 m y una sección transversal $9{,}1\ \text{mm}^2$. Si se aplica una fuerza de tracción de 10.000 N en cada extremo de la combinación, calcule: (a) el estrés en cada varilla; (b) la tensión en cada varilla y (c) la elongación de cada varilla.

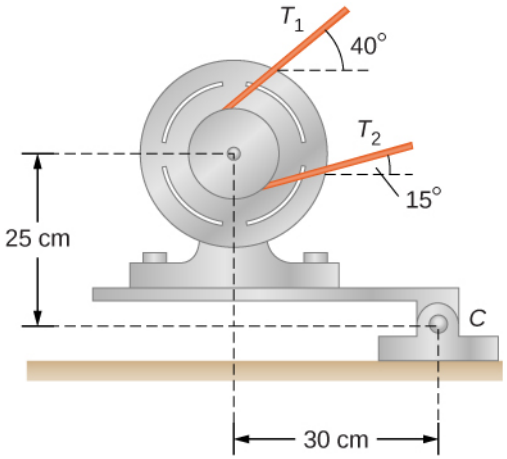
74. Dos varillas, una de cobre y otra de acero, tienen las mismas dimensiones. Si la varilla de cobre se estira 0,15 mm bajo cierto estrés, ¿cuánto se estira la varilla de acero bajo el mismo estrés?

Problemas De Desafío

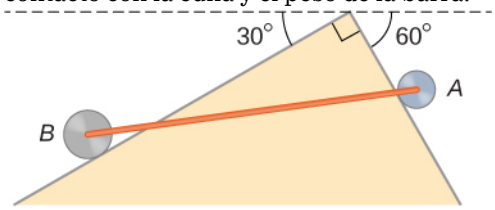
75. Una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a una esfera uniforme en dirección exacta hacia el centro de la esfera, como se muestra a continuación. Halle la magnitud de esta fuerza para que la esfera permanezca en equilibrio estático. ¿Cuál es la fuerza de fricción de la pendiente sobre la esfera?



76. Cuando un motor se coloca en el soporte de una plataforma articulada, como se ve a continuación, su peso puede utilizarse para mantener la tensión en la correa de transmisión. Cuando el motor no está en marcha las tensiones T_1 y T_2 son iguales. La masa total de la plataforma y del motor es de 100,0 kg, mientras que el diámetro de la polea de la correa de transmisión es 16,0 cm cuando el motor está apagado, calcule: (a) la tensión en la correa y (b) la fuerza en el soporte de la plataforma articulada en el punto *C*. Suponga que el centro de masa del motor más la plataforma está en el centro del motor.

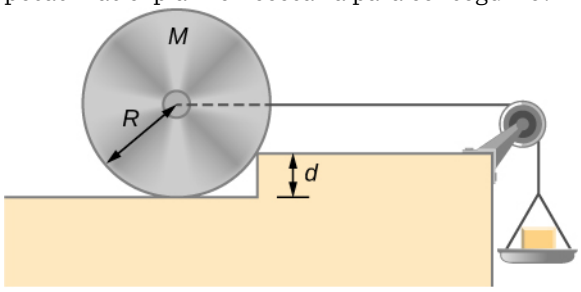


77. Dos ruedas *A* y *B* con pesos *w* y 2*w*, respectivamente, están unidas por una varilla uniforme con peso *w*/2, como se muestra a continuación. Las ruedas giran libremente por las superficies inclinadas. Determine el ángulo que forma la varilla con la horizontal cuando el sistema está en equilibrio. *Pista:* Hay cinco fuerzas que actúan sobre la barra, que son dos pesos de las ruedas, dos fuerzas de reacción normales en los puntos donde las ruedas hacen contacto con la cuña y el peso de la barra.

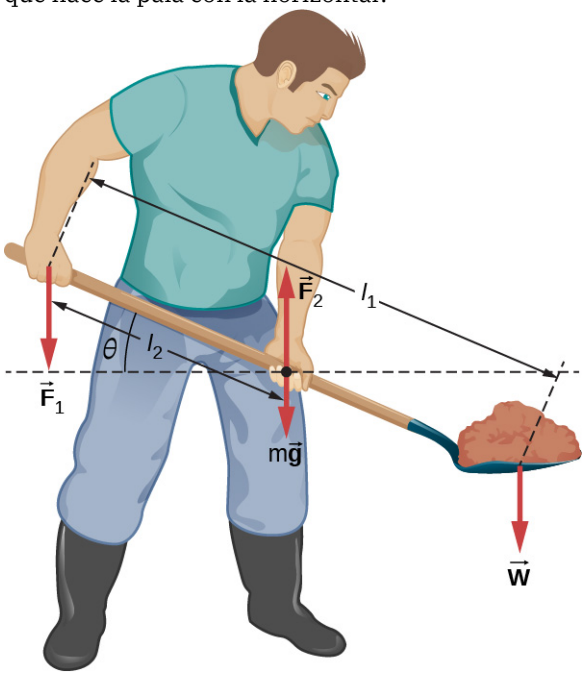


78. Se van añadiendo pesos a un platillo hasta que una rueda de masa *M* y radio *R* es arrastrada por un

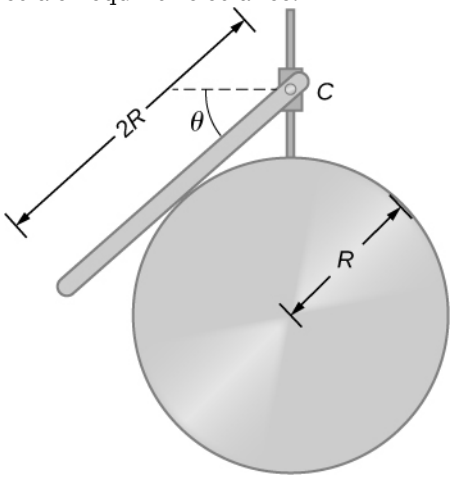
obstáculo de altura d, como se muestra a continuación. ¿Cuál es la masa mínima de las pesas más el platillo necesaria para conseguirlo?



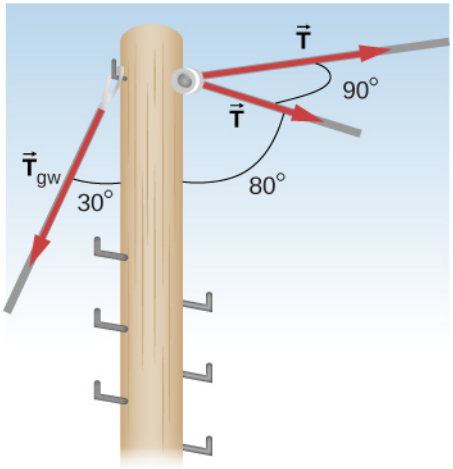
79. Para levantar una pala de tierra, el jardinero empuja hacia abajo el extremo de la pala y tira hacia arriba a distancia l_2 desde el final, como se muestra a continuación. El peso de la pala es $m\vec{g}$ y actúa en el punto de aplicación de $\vec{F}_2$. Calcule las magnitudes de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ como funciones de l_1, l_2, mg, y el peso W de la carga. ¿Por qué sus respuestas no dependen del ángulo θ que hace la pala con la horizontal?



80. Una varilla uniforme de longitud $2R$ y masa M está unida a un pequeño collarín C y descansa sobre una superficie cilíndrica de radio R, como se muestra a continuación. Si el collarín puede deslizarse sin fricción a lo largo de la guía vertical, calcule el ángulo θ para el que la varilla está en equilibrio estático.



81. El poste que se muestra a continuación está en un $90{,}0°$ inclinado en una línea eléctrica y, por tanto, está sometido a más fuerza de corte que los postes en las partes rectas de la línea. La tensión en cada línea es 4.00×10^4 N, en los ángulos indicados. El poste tiene 15,0 m de altura, un diámetro de 18,0 cm y se puede considerar que tiene la mitad de la resistencia de la madera dura. (a) Calcule la compresión del poste. (b) Halle cuánto se dobla y en qué dirección. (c) Halle la tensión en un cable de sujeción utilizado para mantener el poste recto si está unido a la parte superior del poste en un ángulo de $30{,}0°$ con la vertical. El cable de sujeción está en la dirección opuesta a la curva.



CAPÍTULO 13
Gravitación

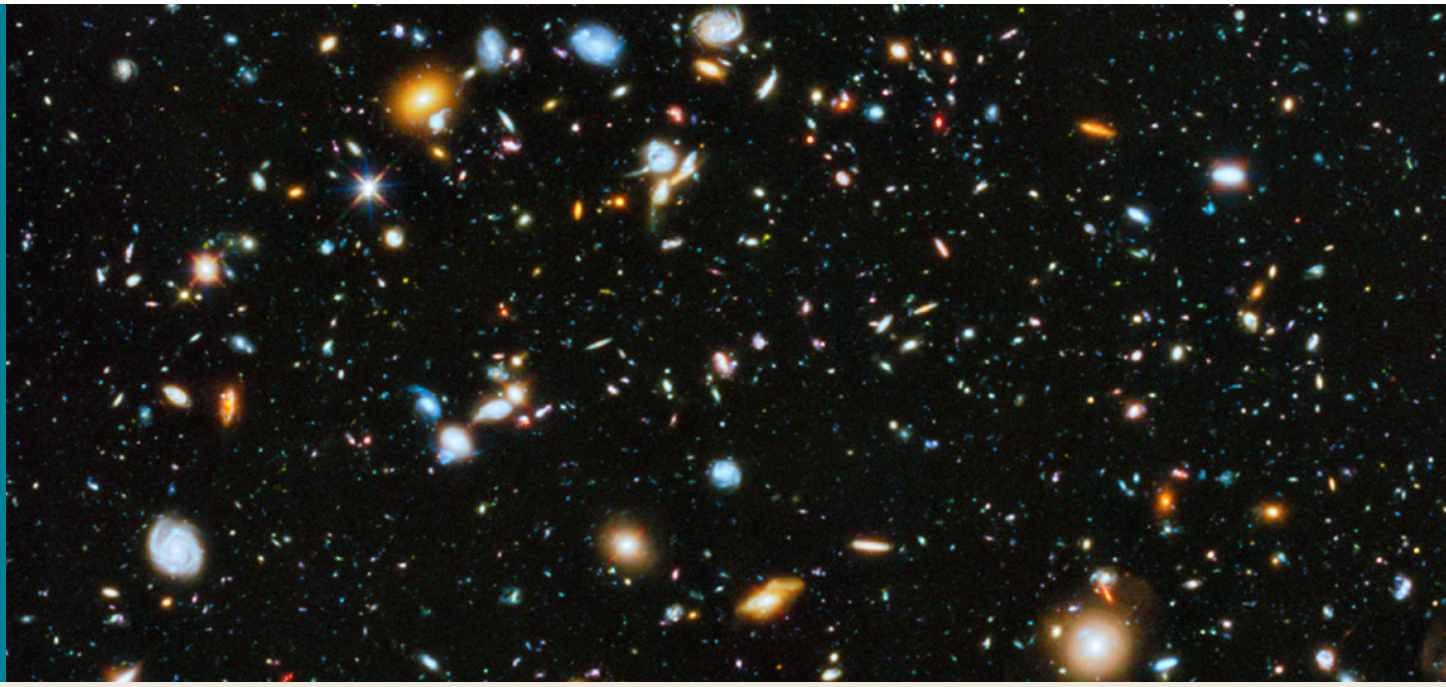


Figura 13.1 Nuestro universo visible contiene miles de millones de galaxias, cuya existencia se debe a la fuerza de la gravedad. La gravedad es, en última instancia, la encargada de la producción de energía de todas las estrellas: al iniciar las reacciones termonucleares en las estrellas, permite que el Sol caliente la Tierra y hace que las galaxias sean visibles desde distancias insondables. La mayoría de los puntos que se ven en esta imagen no son estrellas, sino galaxias (créditos: modificación de un trabajo de la NASA/ESA).

ESQUEMA DEL CAPITULO

13.1 Ley de la gravitación universal de Newton
13.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre
13.3 Energía potencial gravitacional y energía total
13.4 Órbita satelital y energía
13.5 Leyes del movimiento planetario de Kepler
13.6 Fuerzas de marea
13.7 La teoría de la gravedad de Einstein

INTRODUCCIÓN En este capítulo estudiamos la naturaleza de la fuerza gravitatoria en objetos tan pequeños como nosotros y en sistemas tan masivos como galaxias enteras. Mostramos cómo la fuerza gravitatoria incide en los objetos de la Tierra y en el movimiento del propio universo. La gravedad es la primera fuerza que se postula como una fuerza de acción a distancia, es decir, los objetos ejercen una fuerza gravitatoria entre sí sin contacto físico y esa fuerza cae a cero solo a una distancia infinita. La Tierra ejerce una fuerza gravitatoria sobre su cuerpo, pero también lo hacen nuestro Sol, la Vía Láctea y los miles de millones de galaxias, como las que se muestran arriba, tan distantes que no podemos verlas a simple vista.

13.1 Ley de la gravitación universal de Newton

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Enumerar los hitos significativos en la historia de la gravitación.
- Calcular la fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales.
- Estimar la fuerza gravitatoria entre conjuntos de masas.

En primer lugar, repasamos la historia del estudio de la gravitación, con énfasis en aquellos fenómenos que durante miles de años han inspirado a filósofos y científicos a buscar una explicación. A continuación, examinamos la forma más sencilla de la ley de la gravitación universal de Newton y cómo aplicarla.

La historia de la gravitación

Los primeros filósofos se preguntaban por qué los objetos tienden naturalmente a caer hacia el suelo. Aristóteles (384-322 a.C.) creía que la naturaleza de las rocas era buscar la Tierra y la del fuego buscar el Cielo. Brahmagupta (598~665 d.C.) postuló que la Tierra era una esfera y que los objetos poseían una afinidad natural con ella, ya que caían hacia el centro desde cualquier lugar en el que se encontraran.

Los movimientos del Sol, la Luna y los planetas también se han estudiado durante miles de años. Estos movimientos fueron descritos con asombrosa exactitud por Ptolomeo (90-168 de la era cristiana), cuyo método de los epiciclos describía las trayectorias de los planetas como círculos dentro de círculos. Sin embargo, hay pocas pruebas de que alguien relacionara el movimiento de los cuerpos astronómicos con el de los objetos que caen a la Tierra, hasta el siglo XVII.

A Nicolás Copérnico (1473-1543) se le atribuye el mérito de ser el primero en desafiar el sistema geocéntrico (centrado en la Tierra) de Ptolomeo y proponer un sistema heliocéntrico, en el que el Sol está en el centro del sistema solar. Esta idea se vio respaldada por las mediciones increíblemente precisas de los movimientos planetarios realizadas a simple vista por Tycho Brahe y su análisis por Johannes Kepler y Galileo Galilei. Kepler demostró que el movimiento de cada planeta es una elipse (la primera de sus tres leyes, tratada en Las leyes del movimiento planetario de Kepler), y Robert Hooke (el mismo que formuló la ley de Hooke para los resortes) sugirió intuitivamente que estos movimientos se deben a que los planetas son atraídos por el Sol. Sin embargo, fue Isaac Newton quien relacionó la aceleración de los objetos cercanos a la superficie terrestre con la aceleración centrípeta de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra.

Por último, en La Teoría de la Gravedad de Einstein, analizamos la teoría de la relatividad general propuesta por Albert Einstein en 1916. Su teoría parte de una perspectiva muy diferente, en la que la gravedad es una manifestación de la masa que deforma el espacio y el tiempo. Las consecuencias de su teoría dieron lugar a muchas predicciones notables, que se han confirmado esencialmente en las muchas décadas posteriores a la publicación de la teoría (incluida la medición en 2015 de las ondas gravitacionales procedentes de la fusión de dos agujeros negros).

Ley de la gravitación universal de Newton

Newton observó que los objetos en la superficie de la Tierra (por tanto, a una distancia de R_E del centro de la Tierra) tienen una aceleración de g, pero la Luna, a una distancia de aproximadamente $60\ R_\text{E}$, tiene una aceleración centrípeta sobre $(60)^2$ veces menor que g. Podría explicar esto al postular que existe una fuerza entre dos objetos cualesquiera, cuya magnitud viene dada por el producto de las dos masas, dividido entre el cuadrado de la distancia entre estas. Ahora sabemos que esta ley del cuadrado inverso es omnipresente en la naturaleza, una función de la geometría para las fuentes puntuales. La fuerza de cualquier fuente a una distancia r se extiende sobre la superficie de una esfera centrada en la masa. La superficie de esa esfera es proporcional a r^2. En capítulos posteriores, veremos esta misma forma en la fuerza electromagnética.

Ley de la gravitación de Newton

La ley de la gravitación de Newton se expresa como

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad \textbf{13.1}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ es la fuerza que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1 y $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ es un vector unitario que apunta desde el objeto 1 hacia el objeto 2.

Tal como se muestra en la Figura 13.2, el $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ vector apunta desde el objeto 1 hacia el objeto 2; de allí que represente una fuerza de atracción entre los objetos. La fuerza igual, pero opuesta $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ es la fuerza que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2.

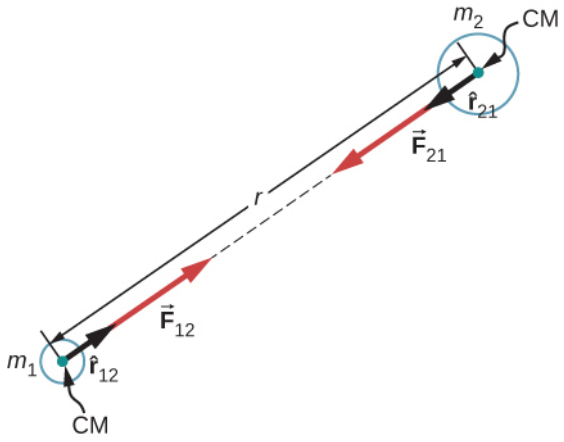


FIGURA 13.2 La fuerza gravitatoria actúa a lo largo de una línea que une los centros de masa de dos objetos.

Estas fuerzas iguales, pero opuestas, reflejan la tercera ley de Newton, de la que ya hemos hablado. Obsérvese que, en sentido estricto, la Ecuación 13.1 se aplica a las masas puntuales: toda la masa está situada en un punto. No obstante, se aplica igualmente a cualquier objeto esféricamente simétrico, donde r es la distancia entre los centros de masa de esos objetos. En muchos casos, funciona razonablemente bien para objetos no simétricos, si su separación es grande en comparación con su tamaño, y tomamos r como la distancia entre el centro de masa de cada cuerpo.

El experimento Cavendish

Un siglo después de que Newton publicara su ley de la gravitación universal, Henry Cavendish determinó la constante de proporcionalidad G a través de un minucioso experimento. Construyó un dispositivo semejante al que se muestra en la Figura 13.3, en el que se suspenden pequeñas masas de un cable. Una vez en equilibrio, dos masas fijas de mayor tamaño se colocan simétricamente cerca de las más pequeñas. La atracción gravitatoria crea una torsión (torsión) en el cable de soporte que se puede medir.

La constante G se denomina **constante de la gravitación universal** y Cavendish la determinó como $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. La palabra "universal" indica que los científicos piensan que esta constante se aplica a las masas de cualquier composición y que es la misma en todo el universo. El valor de G es un número increíblemente pequeño, lo que demuestra que la fuerza de la gravedad es muy débil. La atracción entre masas tan pequeñas como nuestros cuerpos, o incluso objetos del tamaño de un rascacielos, es increíblemente pequeña. Por ejemplo, dos masas de 1,0 kg situadas a 1,0 metro de distancia ejercen una fuerza de $6{,}7 \times 10^{-11}\ \text{N}$ entre sí. Este es el peso de un grano de polen típico.

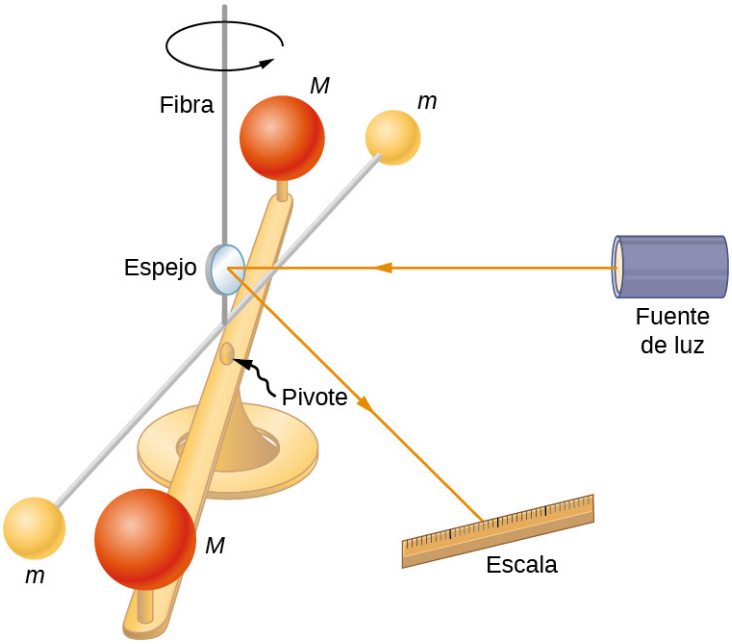


FIGURA 13.3 Cavendish utilizó un aparato semejante para medir la atracción gravitatoria entre dos esferas *(m)* suspendidas de un cable y dos esferas fijas *(M)*. Este es un experimento común que se realiza en los laboratorios de licenciatura, pero es bastante desafiante. El paso de camiones fuera del laboratorio puede crear vibraciones que superen las fuerzas gravitatorias.

Aunque la gravedad es la más débil de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, su naturaleza atractiva es la que nos mantiene en la Tierra, hace que los planetas orbiten alrededor del Sol y que el Sol orbite alrededor de nuestra galaxia, y une a las galaxias en cúmulos, que van desde unos pocos hasta millones. La gravedad es la fuerza que forma el universo.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ley de la gravitación de Newton

Para determinar el movimiento que causa la fuerza gravitatoria, siga estos pasos:

1. Identifique las dos masas, una o las dos, para las que quiera encontrar la fuerza gravitatoria.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre; esboce la fuerza que actúa sobre cada masa e indique la distancia entre sus centros de masa.
3. Aplique la segunda ley del movimiento de Newton a cada masa para determinar cómo se moverá.

EJEMPLO 13.1

Una colisión en órbita

Consideremos dos vehículos de carga útil *Soyuz* casi esféricos, en órbita alrededor de la Tierra, cada uno con una masa de 9000 kg y un diámetro de 4,0 m. Inicialmente están en reposo uno respecto del otro, a 10,0 m de centro a centro. (Como veremos en Las leyes del movimiento planetario de Kepler, ambos orbitan la Tierra a la misma rapidez e interactúan casi igual que si estuvieran aislados en el espacio profundo). Determine la fuerza gravitatoria entre ellos y su aceleración inicial. Calcule el tiempo que tardan en juntarse y con cuánta rapidez se mueven en el momento del impacto.

Estrategia

Usamos la ley de la gravitación de Newton para determinar la fuerza entre estos y luego usamos la segunda ley de Newton para determinar la aceleración de cada uno. Para la *estimación*, suponemos que esta aceleración es

constante, y utilizamos las ecuaciones de aceleración constante de Movimiento a lo largo de una línea recta para hallar el tiempo y la rapidez de la colisión.

Solución

La magnitud de la fuerza es

$$\left|\vec{\mathbf{F}}_{12}\right| = F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2\,\frac{(9.000\ \text{kg})(9.000\ \text{kg})}{(10\ \text{m})^2} = 5{,}4 \times 10^{-5}\text{N}.$$

La aceleración inicial de cada carga útil es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5{,}4 \times 10^{-5}\ \text{N}}{9.000\ \text{kg}} = 6{,}0 \times 10^{-9}\text{m/s}^2.$$

Los vehículos tienen un diámetro de 4,0 m, por lo que se desplazan de 10,0 m a 4,0 m de distancia, es decir, una distancia de 3,0 m cada uno. Un cálculo similar al anterior, para cuando los vehículos están a 4,0 m de distancia, arroja una aceleración de $3{,}8 \times 10^{-8}$ m/s^2, y la media de estos dos valores es $2{,}2 \times 10^{-8}$ m/s^2. Si suponemos una aceleración constante de este valor y parten del reposo, entonces los vehículos colisionan a una rapidez dada por

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),\ \text{donde}\ v_0 = 0,$$

así que

$$v = \sqrt{2(2{,}2 \times 10^{-9}\ \text{N})(3{,}0\ \text{m})} = 3{,}6 \times 10^{-4}\ \text{m/s}.$$

Utilizamos $v = v_0 + at$ para calcular $t = v/a = 1{,}7 \times 10^4$ s o unas 4,6 horas.

Importancia

Estos cálculos (incluida la fuerza inicial) son solo estimaciones, ya que los vehículos probablemente no son esféricamente simétricos. No obstante, puede observar que la fuerza es increíblemente pequeña. Los astronautas deben atarse cuando realizan trabajos fuera, incluso de la enorme Estación Espacial Internacional (ISS). como en la Figura 13.4, porque la atracción gravitatoria no puede salvarlos ni siquiera del más mínimo empujón fuera de la estación.



FIGURA 13.4 Esta foto muestra a Ed White atado al transbordador espacial durante una caminata espacial (créditos: NASA).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.1

¿Qué ocurre con la fuerza y la aceleración cuando los vehículos caen juntos? ¿Cuál será nuestra estimación de la velocidad en una colisión mayor o menor que la velocidad real? Por último, ¿qué pasaría si las masas no fueran idénticas? ¿La fuerza en cada uno de ellos sería la misma o diferente? ¿Qué hay de sus aceleraciones?

El efecto de la gravedad entre dos objetos con masas del orden de estos vehículos espaciales es efectivamente pequeño. Sin embargo, el efecto de la gravedad sobre su cuerpo desde la Tierra es lo suficientemente importante como para que una caída de solo unos metros en la Tierra sea peligrosa. En la siguiente sección examinaremos la fuerza de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra.

EJEMPLO 13.2

Atracción entre galaxias

Calcule la aceleración de nuestra galaxia, la Vía Láctea, debida a la galaxia más cercana de tamaño comparable, la galaxia de Andrómeda (Figura 13.5). La masa aproximada de cada galaxia es de 800.000 millones de masas solares (una masa solar es la de nuestro Sol), y están separadas por 2,5 millones de años luz. (Hay que tener en cuenta que la masa de Andrómeda no se conoce tan bien, aunque se cree que es ligeramente mayor que nuestra galaxia). Cada galaxia tiene un diámetro de aproximadamente 100.000 años luz (1 año luz $= 9{,}5 \times 10^{15}$ m).



FIGURA 13.5 Las galaxias interactúan gravitacionalmente a través de inmensas distancias. La galaxia de Andrómeda es la galaxia espiral más cercana a la Vía Láctea, y acabarán colisionando (créditos: Boris Štromar).

Estrategia

Como en el ejemplo anterior, utilizamos la ley de la gravitación de Newton para determinar la fuerza entre estos y, a continuación, utilizamos la segunda ley de Newton para determinar la aceleración de la Vía Láctea. Podemos considerar que las galaxias son masas puntuales, ya que su tamaño es unas 25 veces menor que su separación. La masa del Sol (véase el Anexo D) es $2{,}0 \times 10^{30}$ kg y un año luz es la distancia que recorre la luz en un año, $9{,}5 \times 10^{15}$ m.

Solución

La magnitud de la fuerza es

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = (6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)\frac{[(800 \times 10^9)(2{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg})]^2}{[(2{,}5 \times 10^6)(9{,}5 \times 10^{15}\ \text{m})]^2} = 3{,}0 \times 10^{29}\ \text{N}.$$

La aceleración de la Vía Láctea es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3{,}0 \times 10^{29}\ \text{N}}{(800 \times 10^9)(2{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg})} = 1{,}9 \times 10^{-13}\text{m/s}^2.$$

Importancia

¿Le parece que este valor de aceleración es asombrosamente pequeño? Si parten del reposo, entonces acelerarían directamente el uno hacia el otro, para "colisionar" en su centro de masa. Calculemos el tiempo para que esto ocurra. La aceleración inicial es ~10^{-13} m/s^2, así que si utilizamos $v = at$, vemos que se necesitaría ~10^{13} s para que cada galaxia alcance una velocidad de 1,0 m/s, y solo serían ~$0{,}5 \times 10^{13}$ m más cerca. Es decir, nueve órdenes de magnitud menos que la distancia inicial entre estos. En realidad, estos movimientos rara vez son sencillos. Estas dos galaxias, junto con otras 50 galaxias más pequeñas, tienen límite gravitacional en nuestro cúmulo local. Nuestro cúmulo local tiene límite gravitacional a otros cúmulos en lo que se denomina un supercúmulo. Todo esto forma parte de la gran danza cósmica que resulta de la gravitación, como se muestra en la Figura 13.6.



FIGURA 13.6 Según los resultados de este ejemplo, más lo que los astrónomos han observado en otros lugares del universo, nuestra galaxia colisionará con la galaxia de Andrómeda dentro de unos 4.000 millones de años (créditos: modificación del trabajo de la NASA; ESA; A. Feild y R. van der Marel, STScI).

13.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explique la relación entre las constantes G y g
- Determine la masa de un cuerpo astronómico a partir de la aceleración en caída libre en su superficie.
- Describa cómo el valor de g varía según la ubicación y la rotación de la Tierra

En esta sección, observamos cómo se aplica la ley de la gravitación de Newton en la superficie de un planeta y cómo se vincula con lo que aprendimos antes sobre la caída libre. También examinamos los efectos gravitatorios dentro de los cuerpos esféricos.

Peso

Recordemos que la aceleración de un objeto en caída libre cerca de la superficie de la Tierra es aproximadamente $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$. La fuerza que causa esta aceleración se denomina peso del objeto, y a partir de la segunda ley de Newton, tiene el valor mg. Este peso está presente, independientemente de que el objeto esté en caída libre. Ahora sabemos que esta fuerza es la fuerza gravitatoria entre el objeto y la Tierra. Si sustituimos mg por la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ en la ley de gravitación universal de Newton, m *para* m_1, y M_E para m_2, obtenemos la ecuación escalar

$$mg = G\frac{mM_\text{E}}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los centros de masa del objeto y de la Tierra. El radio medio de la Tierra es de unos 6370 km. De allí que, en lo que respecta a los objetos situados a pocos kilómetros de la superficie de la Tierra, podemos tomar $r = R_\text{E}$ (Figura 13.7). La masa m del objeto se anula, lo que da

$$g = G\frac{M_\text{E}}{r^2}. \qquad 13.2$$

Esto explica por qué todas las masas caen libremente con la misma aceleración. Hemos ignorado el hecho de que la Tierra también acelera hacia el objeto que cae, pero eso es aceptable siempre que la masa de la Tierra sea mucho mayor que la del objeto.

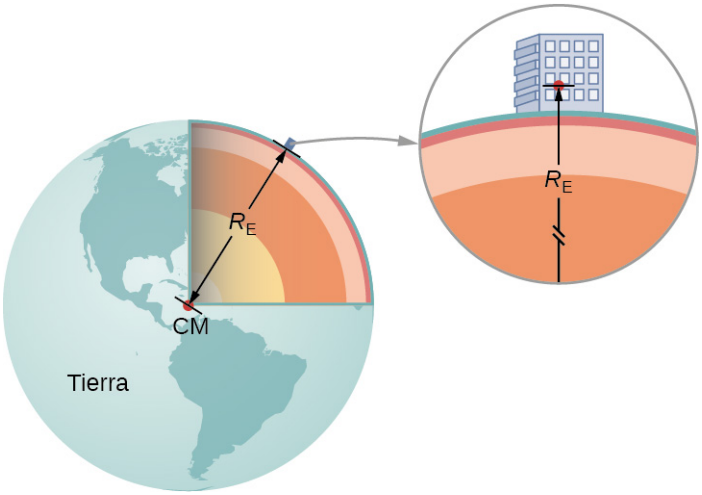


FIGURA 13.7 Podemos tomar la distancia entre los centros de masa de la Tierra y un objeto en su superficie como el radio de la Tierra, siempre que su tamaño sea mucho menor que el radio de la Tierra.

EJEMPLO 13.3

Masas de la Tierra y la Luna

¿Se ha preguntado alguna vez cómo conocemos la masa de la Tierra? Desde luego, no podemos situarlo en una escala. Los valores de g y el radio de la Tierra se midieron con razonable exactitud hace siglos.

a. Utilice los valores estándar de g, R_E y la Ecuación 13.2 para hallar la masa de la Tierra.
b. Calcule el valor de g en la Luna. Utilice el hecho de que la Luna tiene un radio de unos 1700 km (un valor de esta exactitud se determinó hace muchos siglos) y suponga que tiene la misma densidad media que la Tierra, $5.500\ \text{kg/m}^3$.

Estrategia

Con los valores conocidos de g y R_E, podemos utilizar la Ecuación 13.2 para hallar M_E. En el caso de la Luna, esgrimimos la hipótesis de una densidad media igual para determinar la masa a partir de una relación de los volúmenes de la Tierra y de la Luna.

Solución

a. Reordenando la Ecuación 13.2, tenemos

$$M_E = \frac{gR_E^2}{G} = \frac{9{,}80\ \text{m/s}^2(6{,}37 \times 10^6\ \text{m})^2}{6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5{,}95 \times 10^{24}\ \text{kg}.$$

b. El volumen de una esfera es proporcional al radio al cubo, por lo que un simple cociente nos da

$$\frac{M_M}{M_E} = \frac{R_M^3}{R_E^3} \rightarrow M_M = \left(\frac{(1{,}7 \times 10^6\ \text{m})^3}{(6{,}37 \times 10^6\ \text{m})^3}\right)(5{,}95 \times 10^{24}\ \text{kg}) = 1{,}1 \times 10^{23}\ \text{kg}.$$

Ahora utilizamos la Ecuación 13.2.

$$g_M = G\frac{M_M}{r_M^2} = (6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)\frac{(1{,}1 \times 10^{23}\ \text{kg})}{(1{,}7 \times 10^6\ \text{m})^2} = 2{,}5\text{m/s}^2$$

Importancia

Tan pronto como Cavendish determinó el valor de G en 1798, se pudo calcular la masa de la Tierra. (De hecho, ese era el objetivo en última instancia del experimento de Cavendish). El valor que hemos calculado para g de la Luna es incorrecto. La densidad media de la Luna es en realidad solo $3.340\ \text{kg/m}^3$ y $g = 1{,}6\ \text{m/s}^2$ en la superficie. Newton intentó medir la masa de la Luna al comparar el efecto del Sol en las mareas oceánicas de la Tierra con el de la Luna. Su valor era un factor de dos demasiado pequeño. Los valores más exactos de g y de la masa de la Luna proceden del seguimiento del movimiento de las naves espaciales que han orbitado la Luna. No obstante, la masa de la Luna se puede determinar con exactitud sin necesidad de ir a la Luna. La Tierra y la Luna orbitan alrededor de un centro de masa común, y las mediciones astronómicas en detalle pueden determinar esa ubicación. La relación entre la masa de la Luna y la de la Tierra es la relación entre [la distancia del centro de masa común al centro de la Luna] y [la distancia del centro de masa común al centro de la Tierra].

Más adelante, en este capítulo, veremos que la masa de otros cuerpos astronómicos también puede determinarse por el periodo de los pequeños satélites que los orbitan. No obstante, hasta que Cavendish determinó el valor de G, las masas de todos estos cuerpos eran desconocidas.

EJEMPLO 13.4

Gravedad sobre la superficie de la Tierra

¿Cuál es el valor de g a 400 km por encima de la superficie de la Tierra, donde está en órbita la Estación Espacial Internacional?

Estrategia

Utilizando el valor de M_E y al observar que el radio es $r = R_E + 400\ \text{km}$, utilizamos la Ecuación 13.2 para hallar g.

En laEcuación 13.2 tenemos

$$g = G\frac{M_E}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2\ \frac{5{,}96 \times 10^{24}\ \text{kg}}{(6{,}37 \times 10^6 + 400 \times 10^3\ \text{m})^2} = 8{,}67\ \text{m/s}^2.$$

Importancia

A menudo vemos videos de astronautas en estaciones espaciales, aparentemente ingrávidos. Obviamente, la

fuerza de la gravedad actúa sobre ellos. Comparando el valor de g que acabamos de calcular con el de la Tierra ($9{,}80\ \text{m/s}^2$), vemos que los astronautas de la Estación Espacial Internacional siguen teniendo el 88% de su peso. Solo parecen ingrávidos porque están en caída libre. Volveremos a hablar de ello en Órbita satelital y energía.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.2

¿Cómo se compara su peso en la cima de un edificio alto con el del primer piso? ¿Cree que los ingenieros deben tener en cuenta el cambio del valor de g cuando diseñan el soporte estructural de un edificio muy alto?

El campo gravitacional

La Ecuación 13.2 es una ecuación escalar, que da la magnitud de la aceleración gravitatoria en función de la distancia al centro de la masa que provoca la aceleración. No obstante, podríamos haber mantenido la forma vectorial de la fuerza de gravedad en la Ecuación 13.1, y escribir la aceleración en forma vectorial como

$$\vec{\mathbf{g}} = G\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Identificamos el campo vectorial representado por $\vec{\mathbf{g}}$ como el **campo gravitacional** causado por la masa M. Podemos imaginar el campo como se muestra la Figura 13.8. Las líneas se dirigen radialmente hacia el interior y se distribuyen simétricamente alrededor de la masa.

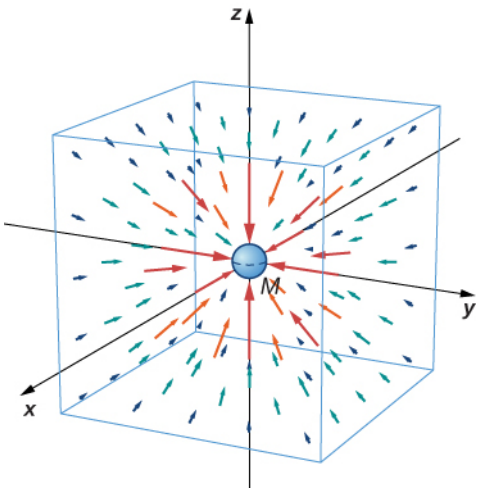


FIGURA 13.8 Representación tridimensional del campo gravitacional creado por la masa M. Obsérvese que las líneas están distribuidas uniformemente en todas las direcciones. (El recuadro se ha añadido únicamente como ayuda en la visualización).

Como ocurre con cualquier campo vectorial, la dirección de $\vec{\mathbf{g}}$ es paralelo a las líneas de campo en cualquier punto. La fuerza de $\vec{\mathbf{g}}$ en cualquier punto es inversamente proporcional a la distancia entre líneas. Otra forma de decirlo es que la magnitud del campo en cualquier región es proporcional al número de líneas que atraviesan una unidad de superficie, lo que supone una densidad de líneas. Dado que las líneas están igualmente espaciadas en todas las direcciones, el número de líneas por unidad de superficie a una distancia r de la masa es el número total de líneas, dividido entre la superficie de una esfera de radio r, que es proporcional a r^2. De allí que esta imagen represente perfectamente la ley del cuadrado inverso, además de indicar la dirección del campo. En la imagen de campo, decimos que una masa m interactúa con el campo gravitacional de la masa M. Utilizaremos el concepto de campo con gran provecho en los capítulos posteriores sobre electromagnetismo.

Peso aparente: contabilización de la rotación de la Tierra

Como vimos en Aplicaciones de las leyes de Newton, los objetos que se desplazan a rapidez constante en un

círculo tienen una aceleración centrípeta dirigida hacia el centro del círculo, lo que significa que deberá haber una fuerza neta dirigida hacia el centro de ese círculo. Dado que todos los objetos en la superficie de la Tierra se mueven a través de un círculo cada 24 horas, deberá haber una fuerza centrípeta neta en cada objeto, dirigida hacia el centro de ese círculo.

Consideremos primero un objeto de masa m situado en el ecuador, suspendido de una balanza (Figura 13.9). La balanza ejerce una fuerza ascendente $\vec{\mathbf{F}}_S$ lejos del centro de la Tierra. Esta es la lectura en la balanza; de allí que sea el **peso aparente** del objeto. El peso (mg) apunta hacia el centro de la Tierra. Si la Tierra no girara, la aceleración sería nula y, en consecuencia, la fuerza neta sería nula, lo que da $F_S = mg$. Esta sería la verdadera lectura del peso.

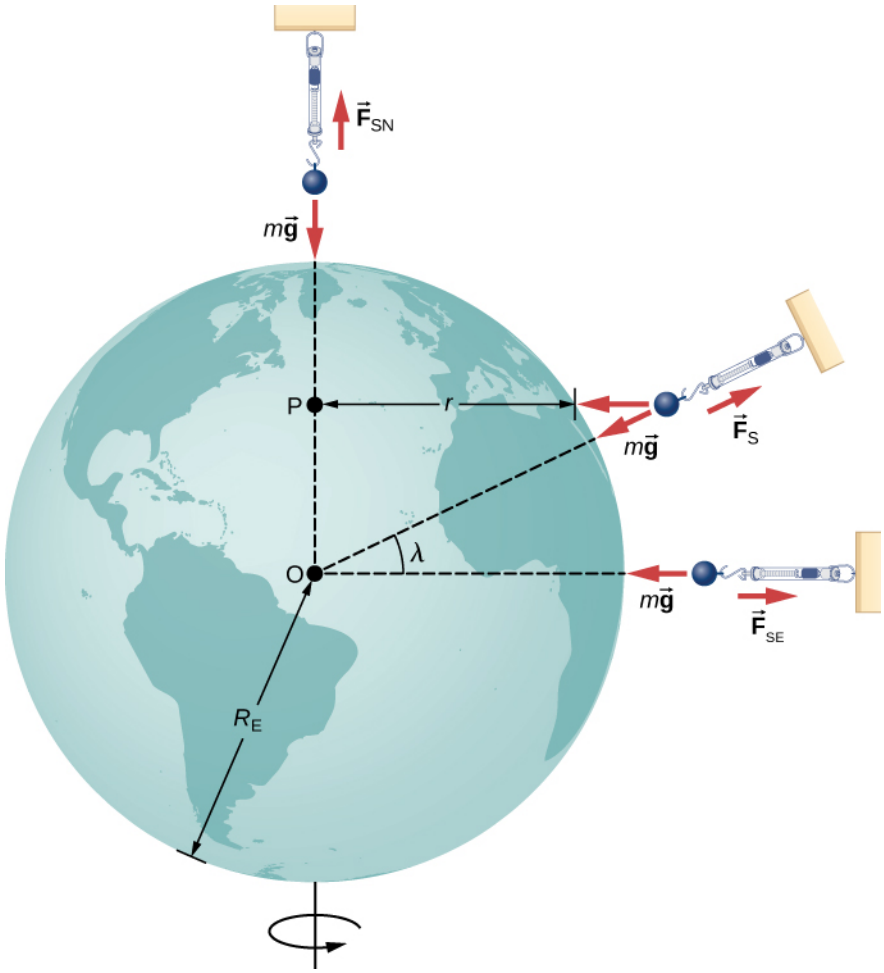


FIGURA 13.9 Para una persona situada en el ecuador, la aceleración centrípeta (a_c) está en la misma dirección que la fuerza de gravedad. En latitud λ, el ángulo entre a_c y la fuerza de la gravedad es λ y la magnitud de a_c disminuye con $\cos\lambda$.

Con la rotación, la suma de estas fuerzas deberá proporcionar la aceleración centrípeta, a_c. Utilizando la segunda ley de Newton, tenemos

$$\sum F = F_S - mg = ma_c \quad \text{donde} \quad a_c = -\frac{v^2}{r}. \tag{13.3}$$

Tenga en cuenta que a_c apunta en la misma dirección que el peso; de allí que sea negativo. La rapidez tangencial v es la rapidez en el ecuador y r es R_E. Podemos calcular la rapidez simplemente al observar que los objetos en el ecuador recorren la circunferencia de la Tierra en 24 horas. En su lugar, utilicemos la expresión alternativa para a_c que vimos en Movimiento en dos y tres dimensiones. Recordemos que la rapidez

tangencial está relacionada con la rapidez angular (ω) por $v = r\omega$. De allí que tengamos $a_c = -r\omega^2$. Reorganizando la Ecuación 13.3 y sustituyendo $r = R_E$, el peso aparente en el ecuador es

$$F_s = m\left(g - R_E\omega^2\right).$$

La rapidez angular de la Tierra en todas partes es

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ hr} \times 3.600 \text{ s/h}} = 7{,}27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

Sustituyendo los valores o R_E y ω, tenemos $R_E\omega^2 = 0{,}0337 \text{ m/s}^2$. Esto es solo el 0,34% del valor de la gravedad, por lo que es claramente una pequeña corrección.

EJEMPLO 13.5

Peso aparente cero

¿A qué velocidad tendría que girar la Tierra para que los que están en el ecuador tuvieran un peso aparente nulo? ¿Cuál sería la duración del día?

Estrategia

Utilizando la Ecuación 13.3, podemos establecer el peso aparente (F_s) a cero y determinar la aceleración centrípeta necesaria. A partir de ahí, podemos determinar la velocidad en el ecuador. La duración del día es el tiempo necesario para una rotación completa.

Solución

A partir de la Ecuación 13.2, tenemos $\sum F = F_s - mg = ma_c$, por lo que al configurar $F_s = 0$, obtenemos $g = a_c$. Utilizando la expresión para a_c, sustituyendo el radio de la Tierra y el valor estándar de la gravedad, obtenemos

$$a_c = \frac{v^2}{r} = g$$
$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{(9{,}80 \text{ m/s}^2)(6{,}37 \times 10^6 \text{ m})} = 7{,}91 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

El periodo T es el tiempo de una rotación completa. Por lo tanto, la velocidad tangencial es la circunferencia dividida entre T, por lo que tenemos

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6{,}37 \times 10^6 \text{ m})}{7{,}91 \times 10^3 \text{ m/s}} = 5{,}06 \times 10^3 \text{ s}.$$

Son unos 84 minutos.

Importancia

Más adelante en este capítulo veremos que esta rapidez y duración del día serían también la rapidez orbital y el periodo de un satélite en órbita en la superficie de la Tierra. Si bien una órbita de este tipo no sería posible cerca de la superficie de la Tierra debido a la resistencia del aire, ciertamente es posible a solo unos cientos de millas por encima de la Tierra.

Resultados lejos del ecuador

En los polos, $a_c \to 0$ y $F_s = mg$, al igual que ocurre sin rotación. En cualquier otra latitud λ, la situación es más complicada. La aceleración centrípeta se dirige hacia el punto P de la figura, y el radio se convierte en $r = R_E\cos\lambda$. La suma *vectorial* del peso y $\vec{\mathbf{F}}_s$ deberá apuntar hacia el punto P; de allí que $\vec{\mathbf{F}}_s$ ya no apunta lejos

del centro de la Tierra. (La diferencia es pequeña y exagerada en la figura). Una plomada siempre apuntará en esta dirección desviada. Todos los edificios se construyen alineados a lo largo de esta dirección desviada, no a lo largo de un radio que pasa por el centro de la Tierra. En el caso de los edificios más altos, esto representa una desviación de unos cuantos pies en la parte superior.

También cabe destacar que la Tierra no es una esfera perfecta. El interior es parcialmente líquido, lo que aumenta el abultamiento de la Tierra en el ecuador debido a su rotación. El radio de la Tierra es unos 30 km mayor en el ecuador que en los polos. Se deja como ejercicio comparar la fuerza de la gravedad en los polos con la del ecuador, al utilizar la Ecuación 13.2. La diferencia es comparable a la diferencia debida a la rotación y está en la misma dirección. Al parecer, realmente se puede perder "peso" trasladándose al trópico.

La gravedad lejos de la superficie

Anteriormente hemos afirmado sin pruebas que la ley de la gravitación se aplica a los objetos esféricamente simétricos, donde la masa de cada cuerpo actúa como si estuviera en el centro del cuerpo. Ya que la Ecuación 13.2 se deriva de la Ecuación 13.1, también es válida para distribuciones de masa simétricas, aunque ambas ecuaciones son válidas solo para valores de $r \geq R_{\mathrm{E}}$. Como vimos en la Ejemplo 13.4, a 400 km sobre la superficie de la Tierra, donde orbita la Estación Espacial Internacional, el valor de g es $8{,}67\ \mathrm{m/s^2}$. (Veremos más adelante que esta es también la aceleración centrípeta de la ISS).

Para $r < R_{\mathrm{E}}$, la Ecuación 13.1 y la Ecuación 13.2 no son válidas. Sin embargo, podemos determinar g para estos casos mediante un principio que proviene de la ley de Gauss. Esta poderosa herramienta matemática la estudiamos en mayor detalle, más adelante en el curso. Una consecuencia de la ley de Gauss, aplicada a la gravitación, es que solo la masa *dentro de r* contribuye a la fuerza gravitatoria. Además, esa masa, al igual que antes, puede considerarse situada en el centro. El efecto gravitacional de la masa *fuera de r* tiene un efecto neto nulo.

Se dan dos casos especiales muy interesantes. Para un planeta esférico con densidad constante, la masa dentro de r es la densidad por el volumen dentro de r. Esta masa puede considerarse situada en el centro. Al sustituir M_{E} con solo la masa dentro de r, $M = \rho \times$ (volumen de una esfera), y R_{E} con r, la Ecuación 13.2 se convierte en

$$g = G\frac{M_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}^2} = G\frac{\rho\left(4/3\pi r^3\right)}{r^2} = \frac{4}{3}G\rho\pi r.$$

El valor de g; de allí que su peso disminuya linealmente a medida que descienda por un agujero hasta el centro del planeta esférico. En el centro, no se tiene peso, ya que la masa del planeta tira por igual en todas las direcciones. En realidad, la densidad de la Tierra es inconstante, como tampoco la Tierra es sólida en todo momento. La Figura 13.10 muestra el perfil de g si la Tierra tuviera una densidad constante y el perfil más probable basado en las estimaciones de densidad derivadas de los datos sísmicos.

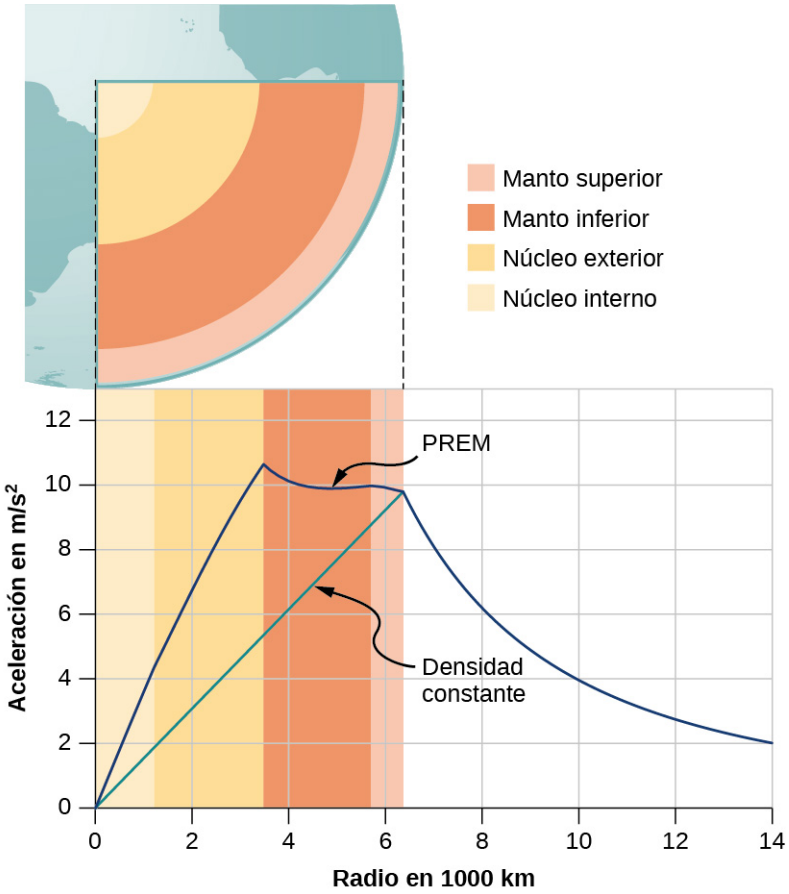


FIGURA 13.10 Para $r < R_E$, el valor de g para el caso de densidad constante es la línea recta verde. La línea azul del Modelo Terrestre de Referencia Preliminar (Preliminary Reference Earth Model, PREM) es probablemente la más cercana al perfil real de g.

El segundo caso interesante se refiere a la vida en un planeta de cáscara esférica. Este escenario ha sido propuesto en muchas historias de ciencia ficción. Ignorando importantes cuestiones de ingeniería, la cáscara podría construirse con un radio y una masa total deseados, de manera que el g en la superficie sea el mismo que el de la Tierra. ¿Podría adivinar lo que ocurre una vez que desciende en un elevador hasta el interior de la cáscara, donde no hay masa entre su cuerpo y el centro? ¿Qué ventajas tendría esto para viajar grandes distancias de un punto a otro de la esfera? Por último, ¿qué efecto tendría si el planeta estuviera girando?

13.3 Energía potencial gravitacional y energía total

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Determinar los cambios en la energía potencial gravitacional a grandes distancias.
- Aplicar la conservación de la energía para determinar la velocidad de escape.
- Determinar si los cuerpos astronómicos tienen límite gravitacional.

Estudiamos la energía potencial gravitacional en Energía potencial y conservación de la energía, donde el valor de g se mantuvo constante. Ahora desarrollamos una expresión que funciona para distancias tales que g no es constante. Esto es necesario para calcular correctamente la energía necesaria para poner satélites en órbita o enviarlos en misiones al espacio.

Energía potencial gravitacional más allá de la Tierra

Definimos el trabajo y la energía potencial en Trabajo y energía cinética y Energía potencial y conservación de la energía. La utilidad de estas definiciones es la facilidad con la que podemos resolver muchos problemas mediante la conservación de la energía. La energía potencial es particularmente útil para las fuerzas que

cambian con la posición, como lo hace la fuerza gravitacional a grandes distancias. En Energía potencial y conservación de la energía, demostramos que el cambio en la energía potencial gravitacional cerca de la superficie de la Tierra es $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$. Esto funciona muy bien si g no cambia significativamente entre y_1 y y_2. Volvemos a la definición de trabajo y energía potencial para derivar una expresión que sea correcta en distancias mayores.

Recordemos que el trabajo *(W)* es la integral del producto punto entre la fuerza y la distancia. Esencialmente, es el producto de la componente de una fuerza a lo largo de un desplazamiento por ese desplazamiento. Definimos ΔU dado que el *negativo* del trabajo realizado por la fuerza que asociamos a la energía potencial. Para mayor claridad, derivamos una expresión para el movimiento de una masa m desde la distancia r_1 del centro de la Tierra a la distancia r_2. Sin embargo, el resultado puede generalizarse fácilmente a dos objetos cualesquiera que cambien su separación de un valor a otro.

Consideremos la Figura 13.11, en la que tomamos m de una distancia r_1 desde el centro de la Tierra a una distancia r_2 desde el centro. La gravedad es una fuerza conservativa (su magnitud y dirección son funciones solo de la ubicación), por lo que podemos tomar cualquier camino que deseemos, y el resultado para el cálculo del trabajo es el mismo. Tomamos el camino indicado, ya que simplifica mucho la integración. Primero nos movemos *radialmente* hacia afuera desde la distancia r_1 a distancia r_2, y luego nos desplazamos por el arco de un círculo hasta llegar a la posición final. Durante la parte radial, $\vec{\mathbf{F}}$ es opuesta a la dirección en la que viajamos $d\vec{\mathbf{r}}$, así que $E = K_1 + U_1 = K_2 + U_2$. A lo largo del arco, $\vec{\mathbf{F}}$ es perpendicular a $d\vec{\mathbf{r}}$, así que $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$. No se hace ningún trabajo mientras nos movemos a lo largo del arco. Si utilizamos la expresión de la fuerza gravitatoria y observamos los valores de $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ a lo largo de los dos segmentos de nuestro camino, tenemos

$$\Delta U = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = GM_{\mathrm{E}}m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GM_{\mathrm{E}}m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Dado que $\Delta U = U_2 - U_1$, podemos adoptar una expresión sencilla para U:

$$U = -\frac{GM_{\mathrm{E}}m}{r}. \qquad 13.4$$

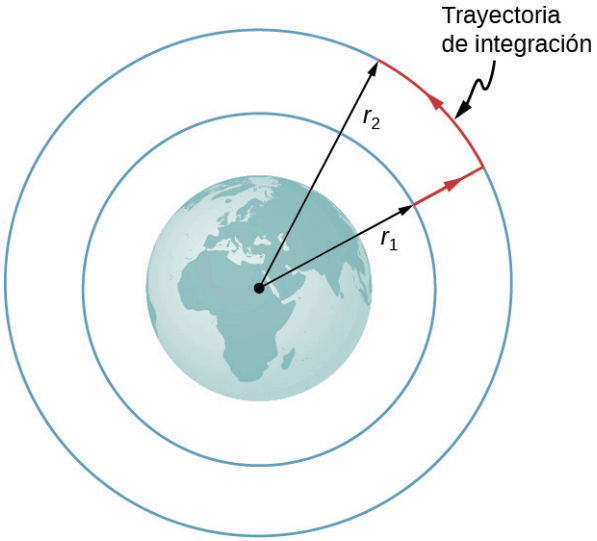


FIGURA 13.11 La integral de trabajo, que determina el cambio de energía potencial, puede evaluarse a lo largo de la trayectoria indicada en rojo.

Hay que tener en cuenta dos aspectos importantes de esta definición. Primero, $U \to 0$ como $r \to \infty$. La energía potencial es cero cuando las dos masas están infinitamente alejadas. Solo la diferencia de U es importante, por lo que la elección de $U = 0$ para $r = \infty$ es meramente uno de conveniencia. (Recordemos que en los anteriores problemas de gravedad, usted era libre de tomar $U = 0$ en la parte superior o inferior de un edificio, o en

cualquier lugar) En segundo lugar, obsérvese que U se vuelve cada vez más negativo a medida que las masas se acercan. Esto es coherente con lo que se ha aprendido sobre la energía potencial en Energía potencial y conservación de la energía. A medida que las dos masas se separan, se debe realizar un trabajo positivo contra la fuerza de la gravedad y, por lo tanto, U aumenta (se vuelve menos negativo). Todas las masas caen naturalmente bajo la influencia de la gravedad, al pasar de una energía potencial más alta a una más baja.

EJEMPLO 13.6

Elevación de una carga útil

¿Cuánta energía se necesita para elevar el vehículo *Soyuz* de 9000 kg desde la superficie de la Tierra hasta la altura de la ISS, a 400 km por encima de la superficie?

Estrategia

Utilice la Ecuación 13.2 para calcular el cambio de energía potencial de la carga útil. Esa cantidad de trabajo o energía debe suministrarse para elevar la carga útil.

Solución

Si prestamos atención al hecho de que empezamos en la superficie de la Tierra y terminamos a 400 km por encima de la superficie, el cambio en U es

$$\Delta U = U_{\text{órbita}} - U_{\text{Tierra}} = -\frac{GM_{\text{E}}m}{R_{\text{E}} + 400\,\text{km}} - \left(-\frac{GM_{\text{E}}m}{R_{\text{E}}}\right).$$

Insertamos los valores

$$m = 9.000\,\text{kg}, \quad M_{\text{E}} = 5{,}96 \times 10^{24}\text{kg}, \quad R_{\text{E}} = 6{,}37 \times 10^{6}\,\text{m}$$

y convertir 400 km en $4{,}00 \times 10^{5}$ m. Hallamos $\Delta U = 3{,}32 \times 10^{10}$ J. Es positivo, lo que indica un aumento de la energía potencial, como cabría esperar.

Importancia

Para tener una perspectiva, considere que el consumo medio de energía de los hogares estadounidenses en 2013 fue de 909 kWh al mes. Eso es energía de

$$909\,\text{kWh} \times 1.000\,\text{W/kW} \times 3.600\,\text{s/h} = 3{,}27 \times 10^{9}\,\text{J al mes.}$$

Así que nuestro resultado es un gasto energético equivalente a 10 meses. Sin embargo, esto es solo la energía necesaria para elevar la carga útil 400 km. Si queremos que la *Soyuz* esté en órbita para que pueda reunirse con la ISS y no caiga de nuevo a la Tierra, necesita mucha energía cinética. Como veremos en la siguiente sección, esa energía cinética es aproximadamente cinco veces la de ΔU. Además, se gasta mucha más energía al levantar el propio sistema de propulsión. Los viajes espaciales no son baratos.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.3

¿Por qué no utilizar la expresión más sencilla $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$? ¿Qué importancia tendría el error? (Recordemos el resultado anterior, en el Ejemplo 13.4, de que el valor g a 400 km sobre la Tierra es $8{,}67\,\text{m/s}^2$.)

Conservación de la energía

En Energía potencial y conservación de la energía, describimos cómo aplicar la conservación de la energía para sistemas con fuerzas conservativas. Hemos podido resolver muchos problemas, sobre todo los relacionados con la gravedad, de forma más sencilla mediante la conservación de la energía. Estos principios y estrategias de resolución de problemas se aplican igualmente a este caso. El único cambio es colocar la nueva expresión de la energía potencial en la ecuación de conservación de la energía, $E = K_1 + U_1 = K_2 + U_2$.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} \quad 13.5$$

Nótese que utilizamos M, en lugar de M_E, como recordatorio de que no nos limitamos a los problemas relacionados con la Tierra. Sin embargo, seguimos asumiendo que $m << M$. (Para los problemas en los que esto no es cierto, tenemos que incluir la energía cinética de ambas masas y utilizar la conservación del momento para relacionar las velocidades entre sí. Sin embargo, el principio sigue siendo el mismo).

Velocidad de escape

La **velocidad de escape** se define como la velocidad inicial *mínima* de un objeto que se necesita para escapar de la superficie de un planeta (o de cualquier cuerpo grande como una luna) y no volver nunca más. Como es habitual, suponemos que no se pierde energía en la atmósfera, en caso de que la haya.

Consideremos el caso en el que se lanza un objeto desde la superficie de un planeta a una velocidad inicial dirigida hacia fuera del planeta. A la velocidad *mínima* necesaria para escapar, el objeto *acabaría* descansando a una distancia infinita, es decir, el objeto cede la última parte de su energía cinética justo al llegar al infinito, donde la fuerza de la gravedad se hace nula. Dado que $U \to 0$ como $r \to \infty$, esto significa que la energía total es cero. Así, hallamos la velocidad de escape de la superficie de un cuerpo astronómico de masa M y radio R al fijar la energía total igual a cero. En la superficie del cuerpo, el objeto se encuentra en $r_1 = R$ y tiene velocidad de escape $v_1 = v_{esc}$. Llega a $r_2 = \infty$ a velocidad $v_2 = 0$. Sustituyendo en la Ecuación 13.5, tenemos

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m0^2 - \frac{GMm}{\infty} = 0.$$

Resolviendo la velocidad de escape,

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad 13.6$$

Observe que m se ha cancelado de la ecuación. La velocidad de escape es la misma para todos los objetos, independientemente de su masa. Además, no estamos limitados a la superficie del planeta; R puede ser cualquier punto de partida más allá de la superficie del planeta.

EJEMPLO 13.7

Escapar de la Tierra

¿Cuál es la velocidad de escape de la superficie de la Tierra? Supongamos que no hay pérdida de energía por la resistencia del aire. Compárese con la velocidad de escape del Sol, partiendo de la órbita de la Tierra.

Estrategia

Utilizamos la Ecuación 13.6, al definir claramente los valores de R y M. Para escapar de la Tierra, necesitamos la masa y el radio de la Tierra. Para escapar del Sol, necesitamos la masa del Sol y la distancia orbital entre la Tierra y el Sol.

Solución

Sustituyendo los valores de la masa y el radio de la Tierra directamente en Ecuación 13.6, obtenemos

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}96 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6{,}37 \times 10^{6}\ \text{m}}} = 1{,}12 \times 10^4\ \text{m/s}.$$

Esto supone unos 11 km/s o 25.000 mph. Para escapar del Sol, partiendo de la órbita de la Tierra, utilizamos $R = R_{ES} = 1{,}50 \times 10^{11}$ m y $M_{Sol} = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg. El resultado es $v_{esc} = 4{,}21 \times 10^4$ m/s o unos 42 km/s.

Importancia

La rapidez necesaria para escapar del Sol (abandonar el sistema solar) es casi cuatro veces la velocidad de escape de la superficie de la Tierra. Sin embargo, hay ayuda en ambos casos. La Tierra gira a una velocidad de casi 1,7 km/s en el ecuador, la que podemos utilizar para escapar o para alcanzar la órbita. Por esta razón, muchas empresas espaciales comerciales mantienen instalaciones de lanzamiento cerca del ecuador. Para escapar del Sol, hay aún más ayuda. La Tierra gira alrededor del Sol a una velocidad de aproximadamente 30 km/s. Con un lanzamiento en la dirección en que se mueve la Tierra, solo necesitamos 12 km/s adicionales. Con la asistencia gravitacional de otros planetas, esencialmente una técnica de honda gravitacional, las sondas espaciales pueden alcanzar una rapidez aún mayor. En esta técnica de honda, el vehículo se acerca al planeta y acelera por la atracción gravitatoria del planeta. Tiene su mayor rapidez en el punto de mayor aproximación, aunque desacelera en igual medida cuando se aleja. No obstante, en relación con el planeta, la rapidez del vehículo mucho antes de la aproximación, y mucho después, es la misma. Si las direcciones se eligen correctamente, eso puede dar lugar a un aumento significativo (o a una disminución, si es necesario) de la rapidez del vehículo en relación con el resto del sistema solar.

INTERACTIVO

Visite esta página web (https://openstax.org/l/21escapevelocit) para saber más sobre la velocidad de escape.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.4

Si enviamos una sonda fuera del sistema solar desde la superficie de la Tierra, ¿solo tenemos que escapar del Sol?

Energía y objetos con límite gravitacional

Tal como se ha señalado anteriormente, la velocidad de escape se define como la velocidad inicial de un objeto que puede escapar de la superficie de una luna o de un planeta. Más generalmente, es la rapidez en *cualquier* posición tal que la energía *total* es cero. Si la energía total es cero o mayor, el objeto escapa. Si la energía total es negativa, el objeto no puede escapar. Veamos por qué.

Tal como se ha señalado anteriormente, vemos que $U \to 0$ como $r \to \infty$. Si la energía total es cero, entonces cuando m alcanza un valor de r que se aproxima al infinito, U se hace cero y también la energía cinética. De allí que m llegue al reposo infinitamente lejos de M. Ha "escapado" de M. Si la energía total es positiva, entonces la energía cinética permanece en $r = \infty$ y ciertamente m no vuelve. Cuando la energía total es cero o mayor, entonces decimos que m no tiene límite gravitacional a M.

Por otro lado, si la energía total es negativa, entonces la energía cinética deberá llegar a cero en algún valor finito de r, donde U es negativo e igual a la energía total. El objeto nunca puede sobrepasar esta distancia finita de M, ya que para hacerlo sería necesario que la energía cinética se volviera negativa, lo que no es posible. Decimos que m tiene un **límite gravitacional** a M.

Hemos simplificado este debate al asumir que el objeto se dirigía directamente lejos del planeta. Lo notable es que el resultado se aplica a cualquier velocidad. La energía es una cantidad escalar y, por tanto, Ecuación 13.5 es una ecuación escalar: la dirección de la velocidad no desempeña ningún papel en la conservación de la energía. Es posible tener un sistema de límite gravitacional en el que las masas no "caen juntas", sino que mantienen un movimiento orbital entre sí.

Tenemos una importante observación final. Antes hemos señalado que, si la energía total es cero o mayor, el objeto escapa. Estrictamente hablando, la Ecuación 13.5 y la Ecuación 13.6 se aplican a los objetos puntuales. Se aplican también a los objetos de tamaño finito y con simetría esférica, siempre que el valor de r en la Ecuación 13.5 sea siempre mayor que la suma de los radios de los dos objetos. Si r es menor que esta suma, entonces los objetos colisionan. (Incluso para valores mayores de r, pero cercanos a la suma de los radios, las fuerzas de marea gravitatoria podrían crear efectos significativos si ambos objetos tienen el tamaño de un

planeta. Examinamos los efectos de las mareas en Fuerzas de marea). Ni la energía total positiva ni la negativa impiden que las masas de tamaño finito colisionen. En el caso de los objetos reales, la dirección es importante.

EJEMPLO 13.8

¿Hasta dónde puede escapar un objeto?

Consideremos de nuevo el ejemplo anterior, en el que hemos calculado la velocidad de escape de la Tierra y el Sol, partiendo de la órbita terrestre. Observamos que la Tierra ya tiene una rapidez orbital de 30 km/s. Como veremos en la siguiente sección, esa es la rapidez tangencial necesaria para mantenerse en órbita circular. Si un objeto tuviera esta rapidez a la distancia de la órbita de la Tierra, pero se dirigiera directamente hacia el Sol, ¿qué distancia recorrería antes de llegar al reposo? Ignore los efectos gravitacionales de cualquier otro cuerpo.

Estrategia

El objeto tiene energías cinéticas y potenciales iniciales que podemos calcular. Cuando su rapidez llega a cero, se encuentra a su máxima distancia del Sol. Utilizamos la Ecuación 13.5, la conservación de la energía, para hallar la distancia a la que la energía cinética es cero.

Solución

La posición inicial del objeto es el radio de la órbita de la Tierra y la rapidez inicial se da como 30 km/s. La velocidad final es cero, por lo que podemos resolver la distancia en ese punto a partir de la ecuación de conservación de la energía. Utilizando $R_{\text{ES}} = 1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m}$ y $M_{\text{Sol}} = 1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg}$, tenemos

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}(3{,}0 \times 10^3\ \text{m/s})^2 - \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N·m/kg}^2)(1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg})\cancel{m}}{1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m}}$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{m}0^2 - \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N·m/kg}^2)(1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg})\cancel{m}}{r_2}$$

donde la masa m se cancela. Resolver para r_2 obtenemos $r_2 = 3{,}0 \times 10^{11}\ \text{m}$. Hay que tener en cuenta que esto es el doble de la distancia inicial al Sol y nos lleva más allá de la órbita de Marte, pero no del todo al cinturón de asteroides.

Importancia

En este caso, el objeto alcanzó una distancia *exactamente* igual al doble de la distancia orbital inicial. Veremos la razón de esto en la próxima sección, cuando calculemos la rapidez para las órbitas circulares.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.5

Suponga que está en una nave espacial en órbita alrededor del Sol en la órbita de la Tierra, pero lejos de la Tierra (para que pueda ignorarse). ¿Cómo podría redirigir su velocidad tangencial a la dirección radial de forma que pudiera pasar por la órbita de Marte? ¿Qué habría que hacer para cambiar solo la dirección de la velocidad?

13.4 Órbita satelital y energía

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el mecanismo de las órbitas circulares.
- Calcular los periodos orbitales y la rapidez de los satélites.
- Determinar si los objetos tienen límite gravitacional.

La Luna orbita alrededor de la Tierra. A su vez, la Tierra y los demás planetas orbitan alrededor del Sol. El espacio directamente sobre nuestra atmósfera está lleno de satélites artificiales en órbita. Examinamos la más sencilla de estas órbitas, la órbita circular, para comprender la relación entre la rapidez y el periodo de los planetas y satélites en relación con sus posiciones y los cuerpos que orbitan.

Órbita circular

Como se indicó al principio de este capítulo, Nicolás Copérnico fue el primero en sugerir que la Tierra y todos los demás planetas realizan una órbita circular alrededor del Sol. Además, observó que el periodo orbital aumenta con la distancia al Sol. Posteriormente, Kepler demostró que estas órbitas son en realidad elipses, pero las de la mayoría de los planetas del sistema solar son casi circulares. La distancia orbital de la Tierra al Sol varía apenas un 2 %. La excepción es la órbita excéntrica de Mercurio, cuya distancia orbital varía casi un 40 %.

La determinación de la **rapidez orbital** y el **periodo orbital** de un satélite es mucho más fácil para las órbitas circulares, por lo que hacemos esa suposición en la derivación que sigue. Como hemos descrito en el apartado anterior, un objeto con energía total negativa tiene límite gravitacional y, por tanto, está en órbita. Nuestro cálculo para el caso especial de la órbita circular lo confirmará. Nos centramos en los objetos que orbitan la Tierra, pero nuestros resultados pueden generalizarse para otros casos.

Considere un satélite de masa m en una órbita circular alrededor de la Tierra a una distancia r del centro de la Tierra (Figura 13.12). Tiene una aceleración centrípeta dirigida hacia el centro de la Tierra. La gravedad de la Tierra es la única fuerza que actúa, por lo que la segunda ley de Newton da

$$\frac{GmM_{\text{E}}}{r^2} = ma_{\text{c}} = \frac{mv_{\text{órbita}}^2}{r}.$$

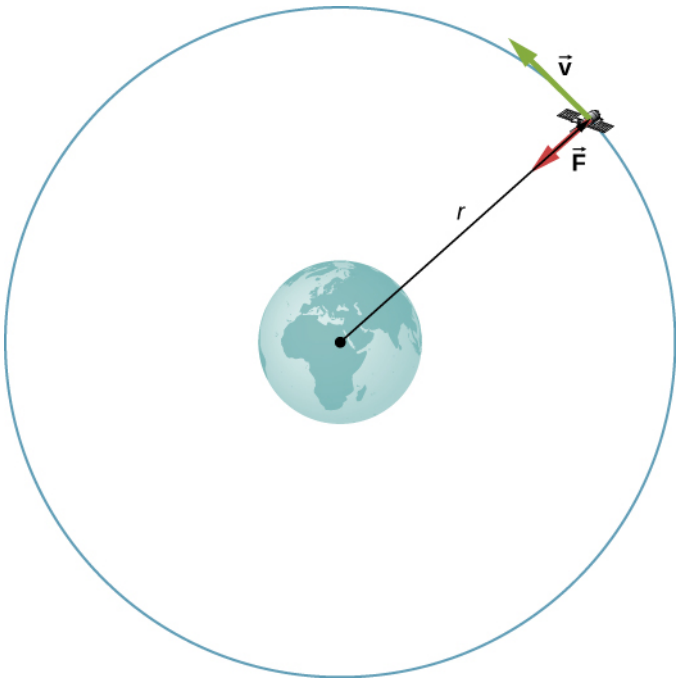


FIGURA 13.12 Un satélite de masa m que orbita a un radio r del centro de la Tierra. La fuerza gravitatoria

proporciona la aceleración centrípeta.

Resolvemos la velocidad de la órbita, al observar que m se cancela, para obtener la rapidez orbital

$$v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{E}}}{r}}. \qquad 13.7$$

En consonancia con lo que vimos en la Ecuación 13.2 y la Ecuación 13.6, m no aparece en la Ecuación 13.7. El valor de g, la velocidad de escape y la velocidad orbital dependen solo de la distancia al centro del planeta, y *no* de la masa del objeto sobre el que se actúa. Obsérvese la similitud de las ecuaciones para $v_{\text{órbita}}$ y v_{esc}. La velocidad de escape es exactamente $\sqrt{2}$ veces mayor, aproximadamente un 40 %, que la velocidad orbital. Esta comparación se observó en el Ejemplo 13.7, y es válida para un satélite de cualquier radio.

Para hallar el periodo de una órbita circular, observamos que el satélite recorre la circunferencia de la órbita $2\pi r$ en un periodo T. Utilizando la definición de rapidez, tenemos $v_{\text{órbita}} = 2\pi r/T$. Sustituimos esto en la Ecuación 13.7 y reordenamos para obtener

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{\text{E}}}}. \qquad 13.8$$

Veremos en la siguiente sección que esto representa la tercera ley de Kepler para el caso de las órbitas circulares. También confirma la observación de Copérnico de que el periodo de un planeta aumenta con el incremento de la distancia al Sol. Solo tenemos que sustituir M_{E} con M_{Sol} en la Ecuación 13.8.

Concluimos esta sección al volver a nuestro debate anterior sobre los astronautas en órbita que parecen no tener peso, como si estuvieran en caída libre hacia la Tierra. De hecho, están en caída libre. Considere las trayectorias que se muestran en la Figura 13.13. (Esta figura está basada en un dibujo de Newton en sus *Principia* y también apareció anteriormente en El movimiento en dos y tres dimensiones). Todas las trayectorias mostradas que chocan con la superficie de la Tierra tienen una velocidad inferior a la orbital. Los astronautas acelerarían hacia la Tierra por las trayectorias no circulares mostradas y se sentirían ingrávidos. (Los astronautas se entrenan para la vida en órbita montando en aviones en caída libre durante 30 segundos cada vez). Sin embargo, con la velocidad orbital correcta, la superficie de la Tierra se aleja de ellos exactamente a la misma velocidad que caen hacia la Tierra. Por supuesto, permanecer a la misma distancia de la superficie es el punto de una órbita circular.

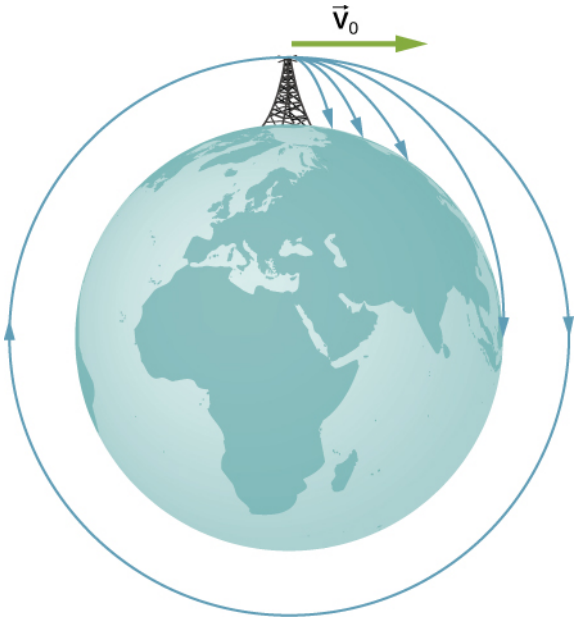


FIGURA 13.13 Una órbita circular es el resultado de elegir una velocidad tangencial tal que la superficie de la

Tierra se aleja a la misma velocidad que el objeto cae hacia la Tierra.

Podemos resumir nuestro debate sobre los satélites en órbita en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Órbitas y conservación de la energía

1. Determine si las ecuaciones de rapidez, energía o periodo son válidas para el problema en cuestión. Si no es así, empiece con los primeros principios que usamos para derivar esas ecuaciones.
2. A partir de los primeros principios, dibuje un diagrama de cuerpo-libre y aplique la ley de la gravitación de Newton y la segunda ley de Newton.
3. Junto con las definiciones de velocidad y energía, aplique la segunda ley del movimiento de Newton a los cuerpos de interés.

EJEMPLO 13.9

La Estación Espacial Internacional

Determine la rapidez y el periodo orbital de la Estación Espacial Internacional (International Space Station, ISS).

Estrategia

Dado que la ISS orbita $4{,}00 \times 10^2\,\text{km}$ sobre la superficie de la Tierra, el radio al que orbita es $R_\text{E} + 4{,}00 \times 10^2\,\text{km}$. Utilizamos la Ecuación 13.7 y la Ecuación 13.8 para calcular la rapidez orbital y el periodo, respectivamente.

Solución

Utilizando la Ecuación 13.7, la velocidad orbital es

$$v_\text{órbita} = \sqrt{\frac{GM_\text{E}}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 (5{,}96 \times 10^{24}\ \text{kg})}{(6{,}36 \times 10^6 + 4{,}00 \times 10^5\ \text{m})}} = 7{,}67 \times 10^3\ \text{m/s}$$

lo que supone unas 17.000 mph. Utilizando la Ecuación 13.8, el periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_\text{E}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}37 \times 10^6 + 4{,}00 \times 10^5\ \text{m})^3}{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}96 \times 10^{24}\ \text{kg})}} = 5{,}55 \times 10^3\ \text{s}$$

que dura poco más de 90 minutos.

Importancia

Se considera que la ISS está en órbita terrestre baja (Low Earth Orbit, LEO). Casi todos los satélites están en LEO, incluso la mayoría de los satélites meteorológicos. Los satélites GPS, a unos 20.000 km, se consideran de órbita terrestre media. Cuanto más alta sea la órbita, más energía se requiere para posicionarla allí y más energía se necesita para llegar a ella para repararla. Son especialmente interesantes los satélites en órbita geosincrónica. Todas las antenas parabólicas fijas en el suelo que apuntan al cielo, como las antenas de recepción de televisión, apuntan a los satélites geosíncronos. Estos satélites están colocados a la distancia exacta, y justo por encima del ecuador, de manera que su periodo de órbita es de 1 día. Permanecen en una posición fija con respecto a la superficie de la Tierra.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.6

¿En qué factor deberá cambiar el radio para reducir la velocidad orbital de un satélite a la mitad? ¿En qué

medida cambiaría el periodo?

EJEMPLO 13.10

Determinación de la masa de la Tierra

Determine la masa de la Tierra a partir de la órbita de la Luna.

Estrategia

Utilizamos la Ecuación 13.8, resolvemos para M_E, y se sustituye el periodo y el radio de la órbita. El radio y el periodo de la órbita de la Luna se midieron con precisión razonable hace miles de años. Según los datos astronómicos del Apéndice D, el periodo lunar es de 27,3 días $= 2{,}36 \times 10^6$ s, y la distancia *media* entre los centros de la Tierra y la Luna es de 384.000 km.

Solución

Resolver para M_E,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_E}}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(3{,}84 \times 10^8 \text{ m})^3}{(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N·m}^2/\text{kg}^2)(2{,}36 \times 10^6 \text{ s})^2} = 6{,}01 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

Importancia

Compárelo con el valor de $5{,}96 \times 10^{24}$ kg que obtuvimos en el Ejemplo 13.5, al utilizar el valor de g en la superficie de la Tierra. Aunque estos valores son muy próximos (~0,8 %), ambos cálculos utilizan valores medios. El valor de g varía desde el ecuador hasta los polos en aproximadamente 0,5 %. No obstante, la Luna tiene una órbita elíptica en la que el valor de r varía algo más del 10 %. (El tamaño aparente de la Luna llena varía en realidad en esta cantidad, pero es difícil de notar a través de la observación casual, ya que el tiempo que pasa de un extremo al otro es de muchos meses).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.7

Hay otra consideración a este último cálculo de M_E. Derivamos la Ecuación 13.8 suponiendo que el satélite orbita alrededor del centro del cuerpo astronómico con el mismo radio utilizado en la expresión de la fuerza gravitatoria entre ellos. ¿Qué suposición se hace para justificar esto? La Tierra tiene aproximadamente 81 veces más masa que la Luna. ¿Orbita la Luna alrededor del centro exacto de la Tierra?

EJEMPLO 13.11

Rapidez y periodo galácticos

Repasemos el Ejemplo 13.2. Supongamos que la Vía Láctea y la galaxia de Andrómeda están en una órbita circular una alrededor de la otra. ¿Cuál sería la velocidad de cada una y cuál sería su periodo orbital? Supongamos que la masa de cada una es de 800.000 millones de masas solares y que sus centros están separados por 2,5 millones de años luz.

Estrategia

No podemos utilizar directamente la Ecuación 13.7 y la Ecuación 13.8 porque se derivaron asumiendo que el objeto de masa m orbitaba alrededor del centro de un planeta mucho mayor de masa M. Determinamos la fuerza gravitatoria en el Ejemplo 13.2 por medio de la ley de gravitación universal de Newton. Podemos utilizar la segunda ley de Newton, aplicada a la aceleración centrípeta de cualquiera de las galaxias, para determinar su velocidad tangencial. A partir de este resultado podemos determinar el periodo de la órbita.

Solución

En el Ejemplo 13.2, hallamos que la fuerza entre las galaxias es

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = (6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)\frac{[(800 \times 10^9)(2{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg})]^2}{[(2{,}5 \times 10^6)(9{,}5 \times 10^{15}\ \text{m})]^2} = 3{,}0 \times 10^{29}\ \text{N}$$

y que la aceleración de cada galaxia es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3{,}0 \times 10^{29}\ \text{N}}{(800 \times 10^9)(2{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg})} = 1{,}9 \times 10^{-13}\text{m/s}^2.$$

Ya que las galaxias están en una órbita circular, tienen una aceleración centrípeta. Si ignoramos el efecto de otras galaxias, entonces, como aprendimos en Momento lineal y colisiones y Rotación en eje fijo, los centros de masa de las dos galaxias permanecen fijos. De allí que las galaxias deben orbitar alrededor de este centro de masa común. En el caso de las masas iguales, el centro de masa está exactamente a mitad de camino entre ellas. Así que el radio de la órbita, $r_{\text{órbita}}$, no es la misma que la distancia entre las galaxias, sino la mitad de ese valor, es decir, 1,25 millones de años luz. Estos dos valores diferentes se muestran en la Figura 13.14.

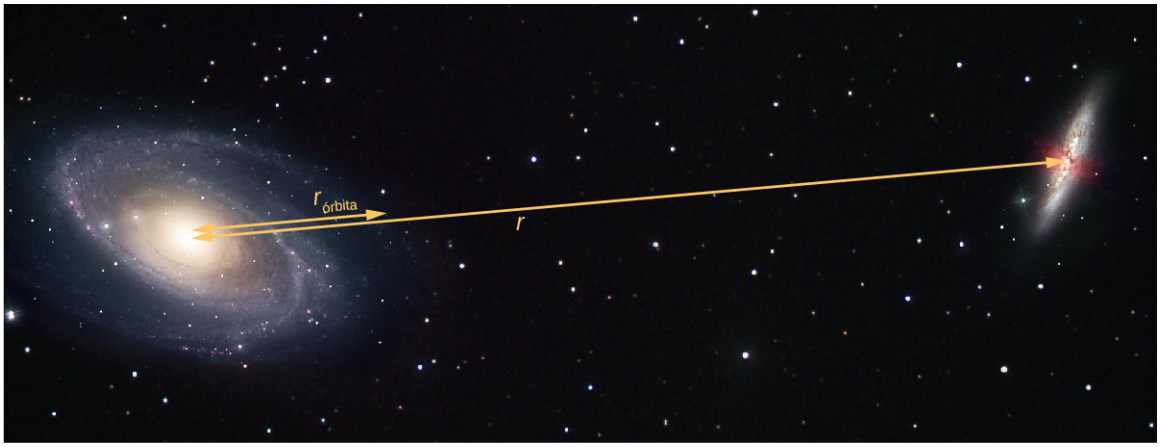


FIGURA 13.14 La distancia entre dos galaxias, que determina la fuerza gravitatoria entre ellas, es r, y es diferente de $r_{\text{órbita}}$, que es el radio de la órbita de cada uno. Para masas iguales, $r_{\text{órbita}} = 1/2r$ (créditos: modificación del trabajo de Marc Van Norden).

Utilizando la expresión de la aceleración centrípeta, tenemos

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2_{\text{órbita}}}{r_{\text{órbita}}} \\ 1{,}9 \times 10^{-13}\text{m/s}^2 &= \frac{v^2_{\text{órbita}}}{(1{,}25 \times 10^6)(9{,}5 \times 10^{15}\ \text{m})}. \end{aligned}$$

Resolviendo la velocidad de la órbita, tenemos $v_{\text{órbita}} = 47$ km/s. Por último, podemos determinar el periodo de la órbita directamente a partir de $T = 2\pi r/v_{\text{órbita}}$, para hallar que el periodo es $T = 1{,}6 \times 10^{18}$ s, unos 50.000 millones de años.

Importancia

La rapidez orbital de 47 km/s puede parecer alta a primera vista. Sin embargo, esta velocidad es comparable a la velocidad de escape del Sol, que hemos calculado en un ejemplo anterior. Para dar aún más perspectiva, este periodo es casi cuatro veces más largo que el tiempo que ha existido el universo.

De hecho, el movimiento relativo actual de estas dos galaxias es tal que se espera que colisionen en unos 4.000 millones de años. Aunque la densidad de estrellas en cada galaxia hace improbable la colisión directa de dos estrellas, dicha colisión tendría un efecto dramático en la forma de las galaxias. Los ejemplos de estas colisiones son bien conocidos en astronomía.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.8

Las galaxias no son objetos individuales. ¿Cómo se compara la fuerza gravitatoria que ejerce una galaxia sobre las estrellas "más cercanas" de la otra galaxia con las más lejanas? ¿Qué efecto tendría esto en la forma de las propias galaxias?

INTERACTIVO

Consulte la página del Sloan Digital Sky Survey (https://openstax.org/l/21sloandigskysu) para obtener más información sobre las galaxias en colisión.

Utilice esta simulación interactiva (https://openstax.org/l/21gravityorbits_es) para mover el Sol, la Tierra, la Luna y la estación espacial y ver los efectos en sus fuerzas gravitatorias y trayectorias orbitales. Visualice los tamaños y las distancias entre los diferentes cuerpos celestes; desactive la gravedad para ver qué pasaría sin ella.

Energía en órbitas circulares

En Energía potencial gravitacional y energía total, argumentamos que los objetos tienen límite gravitacional si su energía total es negativa. El argumento se basaba en el caso simple de que la velocidad se alejara o se acercara directamente al planeta. Ahora examinamos la energía total para una órbita circular y mostramos que, efectivamente, la energía total es negativa. Al igual que antes, partimos de la segunda ley de Newton aplicada a una órbita circular,

$$\begin{aligned} \frac{GmM_{\text{E}}}{r^2} &= ma_c = \frac{mv^2}{r} \\ \frac{GmM_{\text{E}}}{r} &= mv^2. \end{aligned}$$

En el último paso, multiplicamos por r en cada lado. El lado derecho es solo el doble de la energía cinética, por lo que tenemos

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_{\text{E}}}{2r}.$$

La energía total es la suma de las energías cinética y potencial, por lo que nuestro resultado final es

$$E = K + U = \frac{GmM_{\text{E}}}{2r} - \frac{GmM_{\text{E}}}{r} = -\frac{GmM_{\text{E}}}{2r}. \qquad 13.9$$

Podemos ver que la energía total es negativa, con la misma magnitud que la energía cinética. Para las órbitas circulares, la magnitud de la energía cinética es exactamente la mitad de la magnitud de la energía potencial. Sorprendentemente, este resultado se aplica a dos masas cualesquiera en órbitas circulares alrededor de su centro de masa común, a una distancia r entre sí. La prueba de esto se deja como ejercicio. Veremos en la siguiente sección que una expresión muy similar se aplica en el caso de las órbitas elípticas.

EJEMPLO 13.12

Energía necesaria para orbitar

En el Ejemplo 13.8, calculamos la energía necesaria para elevar simplemente el vehículo *Soyuz*, de 9000 kg, desde la superficie de la Tierra hasta la altura de la ISS, a 400 km por encima de la superficie. En otras palabras, calculamos su *cambio* de energía potencial. Ahora nos preguntamos, ¿qué cambio de energía total en el vehículo *Soyuz* se requiere para sacarlo de la superficie de la Tierra y ponerlo en órbita con la ISS para un encuentro (Figura 13.15)? ¿Qué parte de esa energía total es energía cinética?

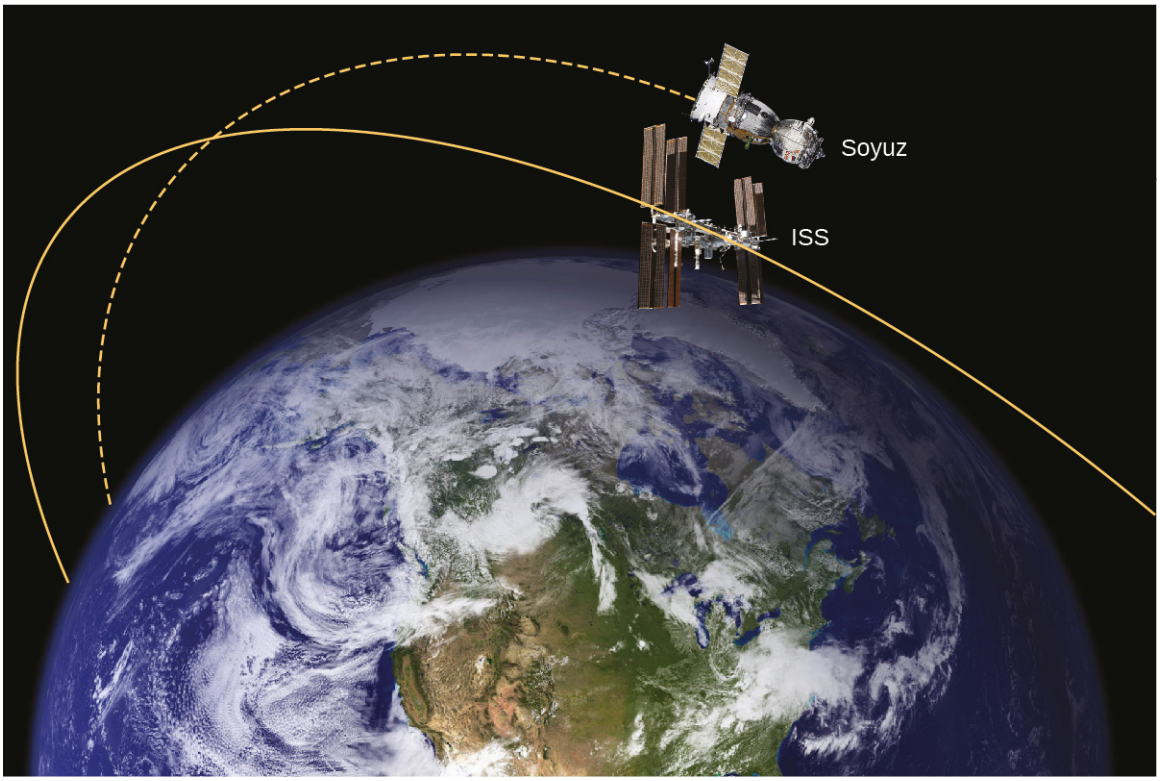


FIGURA 13.15 La *Soyuz* en un encuentro con la ISS. Obsérvese que este diagrama no está a escala; la *Soyuz* es mucho más pequeña que la ISS y su órbita está mucho más cerca de la Tierra (créditos: modificación de trabajos de la NASA).

Estrategia

La energía necesaria es la diferencia entre la energía total de la *Soyuz* en órbita y la de la superficie terrestre. Podemos utilizar la Ecuación 13.9 para hallar la energía total de la *Soyuz* en la órbita de la ISS. No obstante, la energía total en la superficie es simplemente la energía potencial, ya que parte del reposo. [Nótese que *no* utilizamos la Ecuación 13.9 en la superficie, ya que no estamos en órbita en la superficie]. La energía cinética se halla entonces a partir de la diferencia en el cambio de energía total y el cambio de energía potencial en Ejemplo 13.8. Alternativamente, podemos utilizar la Ecuación 13.7 para calcular $v_{\text{órbita}}$ y calcular la energía cinética directamente a partir de ella. La energía total requerida es entonces la energía cinética más el cambio de energía potencial que en el Ejemplo 13.8.

Solución

Desde la Ecuación 13.9, la energía total de la *Soyuz* en la misma órbita que la ISS es

$$\begin{aligned} E_{\text{órbita}} &= K_{\text{órbita}} + U_{\text{órbita}} = -\frac{GmM_{\text{E}}}{2r} \\ &= \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(9.000\ \text{kg})(5{,}96 \times 10^{24}\ \text{kg})}{2(6{,}36 \times 10^{6} + 4{,}00 \times 10^{5}\ \text{m})} = -2{,}65 \times 10^{11}\ \text{J}. \end{aligned}$$

La energía total en la superficie de la Tierra es

$$\begin{aligned} E_{\text{superficie}} &= K_{\text{superficie}} + U_{\text{superficie}} = 0 - \frac{GmM_{\text{E}}}{r} \\ &= -\frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(9.000\ \text{kg})(5{,}96 \times 10^{24}\ \text{kg})}{(6{,}36 \times 10^{6}\ \text{m})} \\ &= -5{,}63 \times 10^{11}\ \text{J}. \end{aligned}$$

El cambio de energía es $\Delta E = E_{\text{órbita}} - E_{\text{superficie}} = 2{,}98 \times 10^{11}$ J. Para obtener la energía cinética, restamos el cambio de energía potencial del Ejemplo 13.6, $\Delta U = 3{,}32 \times 10^{10}$ J. Eso nos da

$K_{\text{órbita}} = 2{,}98 \times 10^{11} - 3{,}32 \times 10^{10} = 2{,}65 \times 10^{11}$ J. Como se indicó anteriormente, la energía cinética de una órbita circular es siempre la mitad de la magnitud de la energía potencial, y la misma que la magnitud de la energía total. Nuestro resultado lo confirma.

El segundo enfoque consiste en utilizar la Ecuación 13.7 para hallar la rapidez orbital de la *Soyuz*, lo que hicimos para la ISS en el Ejemplo 13.9.

$$v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{E}}}{r}} = \sqrt{\frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}96 \times 10^{24}\ \text{kg})}{(6{,}36 \times 10^{6} + 4{,}00 \times 10^{5}\ \text{m})}} = 7{,}67 \times 10^{3}\ \text{m/s}.$$

Así que la energía cinética de la *Soyuz* en órbita es

$$K_{\text{órbita}} = \frac{1}{2}mv_{\text{órbita}}^2 = \frac{1}{2}(9.000\,\text{kg})(7{,}67 \times 10^{3}\ \text{m/s})^2 = 2{,}65 \times 10^{11}\ \text{J},$$

lo mismo que en el método anterior. La energía total es solo

$$E_{\text{órbita}} = K_{\text{órbita}} + \Delta U = 2{,}65 \times 10^{11} + 3{,}32 \times 10^{10} = 2{,}95 \times 10^{11}\ \text{J}.$$

Importancia

La energía cinética de la *Soyuz* es casi ocho veces el cambio de su energía potencial, o el 90 % de la energía total necesaria para el encuentro con la ISS. Es importante recordar que esta energía representa solo la que debe darse a la *Soyuz*. Con nuestra actual tecnología de cohetes, la masa del sistema de propulsión (el combustible del cohete, su contenedor y el sistema de combustión) supera con creces la de la carga útil, y hay que dar una enorme cantidad de energía cinética a esa masa. Así que el coste real en energía es muchas veces superior al cambio de energía de la propia carga útil.

13.5 Leyes del movimiento planetario de Kepler

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir las secciones cónicas y su relación con el movimiento orbital.
- Describir cómo se relaciona la velocidad orbital con la conservación del momento angular.
- Determinar el periodo de una órbita elíptica a partir de su eje mayor.

Usando los datos precisos recogidos por Tycho Brahe, Johannes Kepler analizó cuidadosamente las posiciones en el cielo de todos los planetas conocidos y de la Luna, y trazó sus posiciones a intervalos regulares de tiempo. A partir de este análisis formuló tres leyes, las cuales abordamos en esta sección.

Primera ley de Kepler

La opinión predominante en la época de Kepler era que todas las órbitas planetarias eran circulares. Los datos de Marte presentaron el mayor desafío a este punto de vista y eso finalmente animó a Kepler a abandonar la idea popular. **La primera ley de Kepler** establece que cada planeta se mueve a lo largo de una elipse, con el Sol situado en un foco de esta. Una elipse se define como el conjunto de todos los puntos tales que la suma de la distancia de cada punto a dos focos es una constante. La Figura 13.16 muestra una elipse y describe una forma sencilla de crearla.

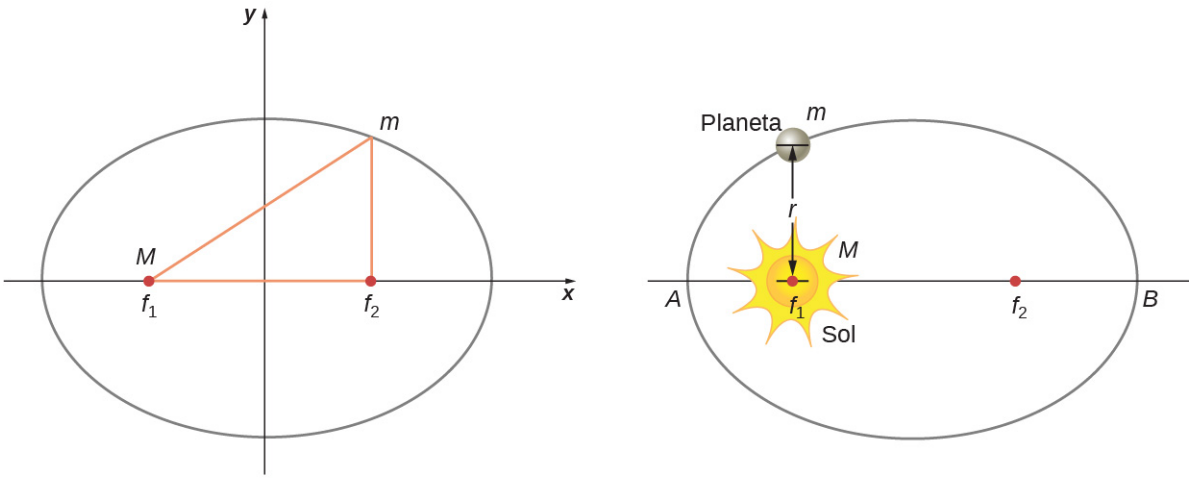


FIGURA 13.16 a) Una elipse es una curva en la que la suma de las distancias de un punto de la curva a dos focos (f_1 y f_2) es una constante. A partir de esta definición, se puede ver que una elipse se puede crear de la siguiente manera. Coloque un alfiler en cada foco y, a continuación, coloque un lazo de cuerda alrededor de un lápiz y de los alfileres. Manteniendo la cuerda tensa, mueva el lápiz en un circuito completo. Si los dos focos ocupan el mismo lugar, el resultado es un círculo, un caso especial de elipse. (b) Para una órbita elíptica, si $m \ll M$, entonces m sigue una trayectoria elíptica con M en un foco. Más exactamente, tanto m como M se mueven en su propia elipse alrededor del centro de masa común.

Para las órbitas elípticas, el punto de mayor aproximación de un planeta al Sol se denomina **perihelio**. Está etiquetado como punto A en la Figura 13.16. El punto más lejano es el **afelio** y está etiquetado como punto B en la figura. Para la órbita de la Luna alrededor de la Tierra, esos puntos se llaman perigeo y apogeo, respectivamente.

Una elipse tiene varias formas matemáticas, pero todas son un caso específico de la ecuación más general para secciones cónicas. Hay cuatro secciones cónicas diferentes, todas ellas dadas por la ecuación

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + e\cos\theta. \qquad 13.10$$

Las variables r y θ se muestran en la Figura 13.17 en el caso de una elipse. Las constantes α y e están determinadas por la energía total y el momento angular del satélite en un punto dado. La constante e se llama excentricidad. Los valores de α y e determinan cuál de las cuatro secciones cónicas representa la trayectoria del satélite.

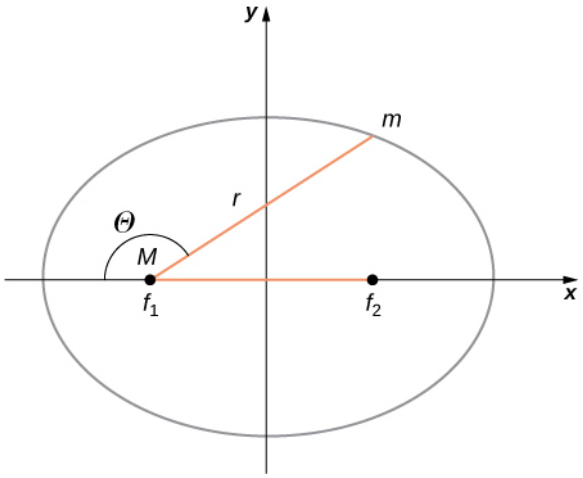


FIGURA 13.17 Como antes, la distancia entre el planeta y el Sol es *r*, y el ángulo medido desde el *eje x*, que está a lo largo del eje mayor de la elipse, es θ.

Uno de los verdaderos triunfos de la ley de la gravitación universal de Newton, con la fuerza es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado, es que cuando se combina con su segunda ley, la solución para la trayectoria de cualquier satélite es una sección cónica. Cada camino que toma m es una de las cuatro secciones cónicas: un círculo o una elipse para órbitas limitadas o cerradas, o una parábola o una hipérbola para órbitas no limitadas o abiertas. Estas secciones cónicas se muestran en la Figura 13.18.

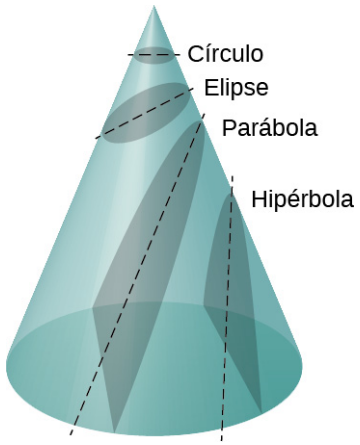


FIGURA 13.18 Todo movimiento causado por una fuerza cuadrada inversa es una de las cuatro secciones cónicas y está determinado por la energía y la dirección del cuerpo en movimiento.

Si la energía total es negativa, entonces $0 \leq e < 1$, y la Ecuación 13.10 representa un límite o una órbita cerrada de una elipse o un círculo, donde $e = 0$ [puede ver en la Ecuación 13.10 que para $e = 0$, $r = \alpha$, y por tanto el radio es constante]. Para las elipses, la excentricidad está relacionada con lo oblonga que se presente la elipse. Un círculo tiene una excentricidad cero, mientras que una elipse muy larga y dibujada tiene una excentricidad cercana a uno.

Si la energía total es exactamente cero, entonces $e = 1$ y la trayectoria es una parábola. Recordemos que un satélite con energía total cero tiene exactamente la velocidad de escape (la parábola se forma solamente cortando el cono paralelo a la línea tangente a lo largo de la superficie). Por último, si la energía total es positiva, entonces $e > 1$ y la trayectoria es una hipérbola. Estas dos últimas trayectorias representan órbitas no limitadas, donde m pasa por M una y solo una vez. Esta situación se ha observado en varios cometas que se acercan al Sol y luego se alejan para no volver jamás.

Nos hemos limitado al caso en el que la masa más pequeña (el planeta) orbita alrededor de una masa mucho más grande y, por tanto, estacionaria (el Sol), pero la Ecuación 13.10 se aplica también a dos masas cualesquiera que interactúen gravitatoriamente. Cada masa traza exactamente la misma forma de sección

cónica que la otra. Esa forma está determinada por la energía total y el momento angular del sistema, con el centro de masa del sistema situado en el foco. La relación de las dimensiones de las dos trayectorias es la inversa de la relación de sus masas.

INTERACTIVO

Puede ver una animación de dos objetos que interactúan en la página *My Solar System (Mi sistema solar)* en Phet (https://openstax.org/l/21mysolarsys). Elija la opción predeterminada Sun and Planet (Sol y planeta). También puede ver los problemas más complicados de varios cuerpos. Puede que la trayectoria real de la Luna le resulte bastante sorprendente, aunque obedece a las sencillas leyes del movimiento de Newton.

Transferencias orbitales

La gente ha imaginado viajar a los otros planetas de nuestro sistema solar desde que se descubrieron. Pero ¿cuál es la mejor manera de hacerlo? El método más eficaz fue descubierto en 1925 por Walter Hohmann, quien se inspiró en una popular novela de ciencia ficción de la época. El método se llama ahora transferencia de Hohmann. Para el caso de viajar entre dos órbitas circulares, la transferencia se realiza a lo largo de una elipse de "transferencia" que intercepta perfectamente esas órbitas en el afelio y el perihelio de la elipse. La Figura 13.19 muestra el caso de un viaje desde la órbita de la Tierra a la de Marte. Como se mostró antes, el Sol está en el foco de la elipse.

Para cualquier elipse, el semieje mayor se define como la mitad de la suma del perihelio y el afelio. En la Figura 13.17, el semieje mayor es la distancia desde el origen a cualquier lado de la elipse a lo largo del eje x, o sea, justo la mitad del eje más largo (llamado eje mayor). Por lo tanto, para viajar desde una órbita circular de radio r_1 hasta otra órbita circular de radio r_2, el afelio de la elipse de transferencia será igual al valor de la órbita mayor, mientras que el perihelio será la órbita menor. Por lo tanto, el semieje mayor, denominado a, viene dado por $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

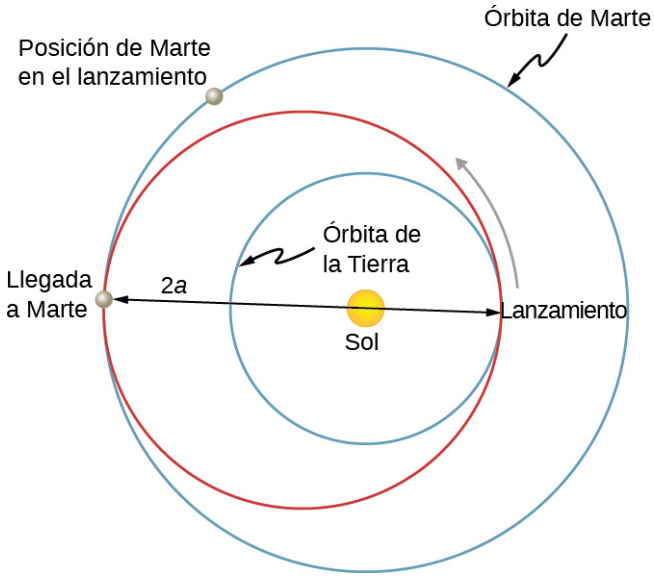


FIGURA 13.19 La elipse de transferencia tiene su perihelio en la órbita de la Tierra y su afelio en la órbita de Marte.

Tomemos el caso de viajar de la Tierra a Marte. Por el momento, ignoramos los planetas y suponemos que estamos solos en la órbita de la Tierra y deseamos trasladarnos a la órbita de Marte. A partir de la Ecuación 13.9, la expresión de la energía total, podemos ver que la energía total para una nave espacial en la órbita mayor (Marte) es mayor (menos negativa) que la de la órbita menor (Tierra). Para pasar a la elipse de transferencia desde la órbita de la Tierra, necesitaremos aumentar nuestra energía cinética, es decir, necesitamos un impulso de velocidad. El método más eficaz es una aceleración muy rápida a lo largo de la trayectoria orbital circular, que es también a lo largo de la trayectoria de la elipse en ese punto (de hecho, la

aceleración debe ser instantánea, de manera que las órbitas circular y elíptica sean congruentes durante la aceleración. En la práctica, la aceleración finita es lo suficientemente corta como para que la diferencia no sea una consideración significativa). Una vez que haya llegado a la órbita de Marte, necesitará otro impulso de velocidad para entrar en esa órbita, o se quedará en la órbita elíptica y simplemente caerá de nuevo al perihelio donde empezó. Para el viaje de vuelta, simplemente se invierte el proceso con un retroceso en cada punto de transferencia.

Para realizar el movimiento hacia la elipse de transferencia y luego hacia fuera, necesitamos conocer la velocidad de cada órbita circular y las velocidades de la órbita de transferencia en el perihelio y el afelio. El aumento de velocidad necesario es simplemente la diferencia entre la velocidad de la órbita circular y la velocidad de la órbita elíptica en cada punto. Podemos encontrar las velocidades orbitales circulares a partir de la Ecuación 13.7. Para determinar las velocidades de la elipse, afirmamos sin pruebas (ya que está fuera del alcance de este curso) que la energía total para una órbita elíptica es

$$E = -\frac{GmM_S}{2a}$$

donde M_S es la masa del Sol y a es el semieje mayor. Sorprendentemente, esto es lo mismo que la Ecuación 13.9 para órbitas circulares, pero con el valor del semieje mayor que sustituye al radio orbital. Como conocemos la energía potencial a partir de la Ecuación 13.4, podemos encontrar la energía cinética y, por tanto, la velocidad necesaria para cada punto de la elipse. Dejamos como problema de desafío encontrar esas velocidades de transferencia para un viaje de la Tierra a Marte.

Terminamos este debate con algunos detalles importantes. En primer lugar, no hemos tenido en cuenta la energía potencial gravitacional de la Tierra y Marte ni la mecánica de aterrizaje en Marte. En la práctica, eso debe formar parte de los cálculos. En segundo lugar, el momento lo es todo. No se quiere llegar a la órbita de Marte para descubrir que no está allí. Debemos salir de la Tierra en el momento exacto para que Marte esté en el afelio de nuestra elipse de transferencia justo cuando lleguemos. Esa oportunidad se presenta cada 2 años. Y el regreso también requiere una sincronización correcta. ¡El viaje total duraría algo menos de 3 años! Hay otras opciones que permiten un tránsito más rápido, como un sobrevuelo de Venus asistido por la gravedad. Pero estas otras opciones tienen un costo adicional en energía y peligro para los astronautas.

INTERACTIVO

Visite este sitio (https://openstax.org/l/21plantripmars) para obtener más detalles sobre la planificación de un viaje a Marte.

Segunda ley de Kepler

La **segunda ley de Kepler** establece que un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, el área dividida entre el tiempo, llamada velocidad areolar, es constante. Considere la Figura 13.20. El tiempo que tarda un planeta en desplazarse de la posición A a la B, barriendo el área A_1, es exactamente el tiempo que se tarda en pasar de la posición C a la D, barriendo el área A_2, y pasar de E a F, barriendo el área A_3. Estas áreas son las mismas: $A_1 = A_2 = A_3$.

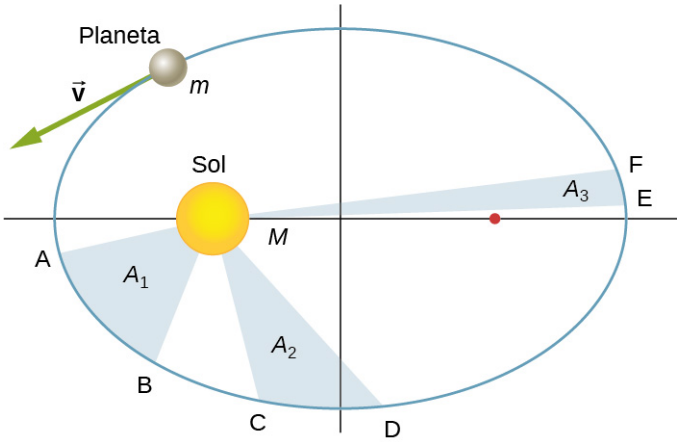


FIGURA 13.20 Las regiones sombreadas mostradas tienen áreas iguales y representan el mismo intervalo de tiempo.

Al comparar las áreas en la figura y la distancia recorrida a lo largo de la elipse en cada caso, podemos ver que para que las áreas sean iguales, el planeta debe acelerar a medida que se acerca al Sol y frenar a medida que se aleja. Este comportamiento es completamente coherente con nuestra ecuación de conservación, la Ecuación 13.5. Pero mostraremos que la segunda ley de Kepler es en realidad una consecuencia de la conservación del momento angular, que se mantiene para cualquier sistema con fuerzas radiales solamente.

Recuerde la definición de momento angular en la sección Momento angular, $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$. Para el caso del movimiento orbital, $\vec{\mathbf{L}}$ es el momento angular del planeta alrededor del Sol, $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición del planeta medido desde el Sol, y $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ es el momento lineal instantáneo en cualquier punto de la órbita. Como el planeta se mueve a lo largo de la elipse, $\vec{\mathbf{p}}$ es siempre tangente a la elipse.

Podemos resolver el momento lineal en dos componentes: un componente radial $\vec{\mathbf{p}}_{\text{rad}}$ a lo largo de la línea hacia el Sol, y un componente $\vec{\mathbf{p}}_{\text{perp}}$ perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$. El producto cruz para el momento angular puede escribirse entonces como

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times \left(\vec{\mathbf{p}}_{\text{rad}} + \vec{\mathbf{p}}_{\text{perp}}\right) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}_{\text{rad}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}_{\text{perp}}.$$

El primer término de la derecha es cero porque $\vec{\mathbf{r}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{p}}_{\text{rad}}$, y en segundo término $\vec{\mathbf{r}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{p}}_{\text{perp}}$, entonces la magnitud del producto cruz se reduce a $L = rp_{\text{perp}} = rmv_{\text{perp}}$. Obsérvese que el momento angular *no* depende de p_{rad}. Dado que la fuerza gravitacional es solo en la dirección radial, únicamente puede cambiar p_{rad} y no p_{perp}; por lo tanto, el momento angular debe permanecer constante.

Ahora considere la Figura 13.21. Una pequeña área triangular ΔA es barrida a tiempo Δt. La velocidad es a lo largo de la trayectoria y hace un ángulo θ con la dirección radial. Por lo tanto, la velocidad perpendicular viene dada por $v_{\text{perp}} = v\text{sen}\theta$. El planeta se mueve una distancia $\Delta s = v\Delta t\text{sen}\theta$ proyectada a lo largo de la dirección perpendicular a r. Como el área de un triángulo es la mitad de la base(r) por la altura (Δs), para un pequeño desplazamiento, el área viene dada por $\Delta A = \frac{1}{2}r\Delta s$. Al sustituir por Δs, multiplicar por m en el numerador y el denominador y reordenar, obtenemos

$$\Delta A = \frac{1}{2}r\Delta s = \frac{1}{2}r(v\Delta t\text{sen}\theta) = \frac{1}{2m}r(mv\text{sen}\theta\Delta t) = \frac{1}{2m}r(mv_{\text{perp}}\Delta t) = \frac{L}{2m}\Delta t.$$

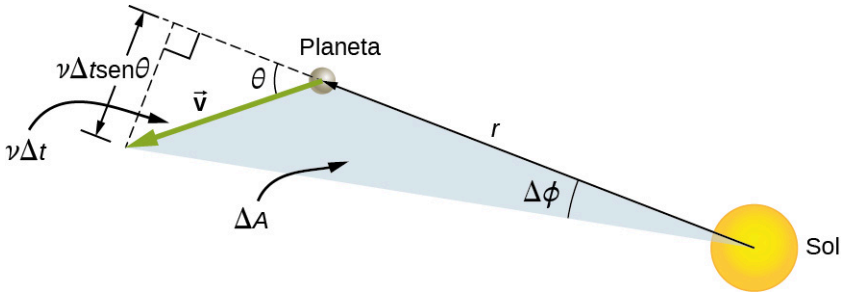


FIGURA 13.21 El elemento de área ΔA barrido a tiempo Δt cuando el planeta se mueve a través del ángulo $\Delta\phi$. El ángulo entre la dirección radial y $\vec{\mathbf{v}}$ es θ.

La velocidad areolar es simplemente la tasa de cambio del área con el tiempo, por lo que tenemos

$$\text{velocidad areolar} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L}{2m}.$$

Como el momento angular es constante, la velocidad areolar también debe ser constante. Esta es exactamente la segunda ley de Kepler. Al igual que la primera ley de Kepler, Newton demostró que era una consecuencia natural de su ley de la gravitación.

INTERACTIVO

Puede ver una versión animada (https://openstax.org/l/21animationgrav) de la Figura 13.20, y muchas otras animaciones interesantes también, en el sitio de la Escuela de Física (Universidad de Nueva Gales del Sur).

Tercera ley de Kepler

La **tercera ley de Kepler** establece que el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita. En la sección Órbitas de satélites y energía derivamos la tercera ley de Kepler para el caso especial de una órbita circular. La Ecuación 13.8 nos da el periodo de una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_\text{E}}}.$$

Para una elipse, recuerde que el semieje mayor es la mitad de la suma del perihelio y el afelio. Para una órbita circular, el semieje mayor (a) es el mismo que el radio de la órbita. De hecho, la Ecuación 13.8 nos da la tercera ley de Kepler si simplemente sustituimos r por a y elevamos al cuadrado ambos lados.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \qquad 13.11$$

Hemos cambiado la masa de la Tierra por la más general M, ya que esta ecuación se aplica a los satélites que orbitan cualquier masa grande.

EJEMPLO 13.13

Órbita del cometa Halley

Determine el semieje mayor de la órbita del cometa Halley, dado que llega al perihelio cada 75,3 años. Si el perihelio está a 0,586 UA, ¿cuál es el afelio?

Estrategia

Se nos da el periodo, por lo que podemos reordenar la Ecuación 13.11, y resolver el semieje mayor. Dado que conocemos el valor del perihelio, podemos usar la definición del semieje mayor, dada anteriormente en esta sección, para encontrar el afelio. Observamos que 1 unidad astronómica (UA) es el radio medio de la órbita de

la Tierra y se define como $1\ \text{UA} = 1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m}$.

Solución

Al reordenar la Ecuación 13.11 e insertar los valores del periodo del cometa Halley y la masa del Sol, tenemos

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{GM}{4\pi^2}T^2\right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(2{,}00 \times 10^{30}\ \text{kg})}{4\pi^2}(75{,}3\ \text{año} \times 365\ \text{días/año} \times 24\ \text{h/día} \times 3.600\ \text{s/h})^2\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

El resultado es un valor de $2{,}67 \times 10^{12}$ m o 17,8 UA para el semieje mayor.

El semieje mayor es la mitad de la suma del afelio y del perihelio, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}(\text{afelio} + \text{perihelio}) \\ \text{afelio} &= 2a - \text{perihelio}. \end{aligned}$$

Al sustituir los valores encontrados para el semieje mayor y el valor dado para el perihelio, encontramos que el valor del afelio es de 35,0 UA.

Importancia

Edmond Halley, contemporáneo de Newton, fue el primero en sospechar que tres cometas, registrados en 1531, 1607 y 1682, eran en realidad el mismo cometa. Antes de que Tycho Brahe hiciera mediciones de cometas, se creía que se trataba de acontecimientos puntuales, tal vez perturbaciones de la atmósfera, y que no se veían afectados por el Sol. Halley usó la nueva mecánica de Newton para predecir el regreso de su cometa homónimo en 1758.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.9

La órbita casi circular de Saturno tiene un radio medio de unas 9,5 UA y un periodo de 30 años, mientras que la de Urano es de unas 19 UA y tiene un periodo de 84 años. ¿Es esto coherente con nuestros resultados para el cometa Halley?

13.6 Fuerzas de marea

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el origen de las mareas oceánicas de la Tierra.
- Describir en qué se diferencian las mareas muertas y las salteadas.
- Describir cómo afectan las fuerzas de marea a los sistemas binarios.

El origen de las mareas oceánicas de la Tierra ha sido objeto de continua investigación durante más de 2000 años. Pero el trabajo de Newton se considera el inicio de la verdadera comprensión del fenómeno. Las mareas oceánicas son el resultado de las fuerzas gravitacionales de las mareas. Estas mismas fuerzas de marea están presentes en cualquier cuerpo astronómico. Son responsables del calor interno que crea la actividad volcánica en Io, una de las lunas de Júpiter, y de la ruptura de estrellas que se acercan demasiado a los agujeros negros.

Mareas lunares

Si usted vive en la orilla de un océano en casi todo el mundo, puede observar la subida y bajada del nivel del mar unas dos veces al día. Esto se debe a la combinación de la rotación de la Tierra sobre su eje y la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol.

Consideremos primero el efecto de la Luna. En la Figura 13.22, estamos mirando "hacia abajo" en el Polo Norte

de la Tierra. Un lado de la Tierra está más cerca de la Luna que el otro, por una distancia igual al diámetro de la Tierra. Por lo tanto, la fuerza gravitatoria es mayor en el lado cercano que en el lejano. La magnitud en el centro de la Tierra está entre estos valores. Por eso aparece una protuberancia de marea a ambos lados de la Tierra.

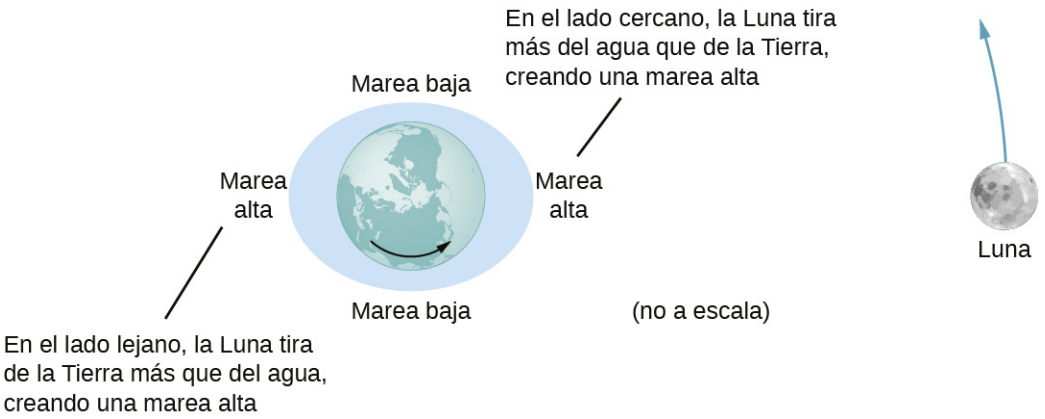


FIGURA 13.22 La fuerza de marea estira la Tierra a lo largo de la línea entre la Tierra y la Luna. Es la *diferencia* entre la fuerza gravitatoria del lado lejano y del lado cercano la que crea el abultamiento de marea a ambos lados del planeta. Las variaciones de las mareas de los océanos son del orden de unos pocos metros, por lo que este diagrama está muy exagerado.

La fuerza neta sobre la Tierra hace que ésta orbite alrededor del centro de masa Tierra-Luna, situado a unos 1600 km por debajo de la superficie terrestre a lo largo de la línea entre la Tierra y la Luna. La **fuerza de marea** puede considerarse como la *diferencia* entre la fuerza en el centro de la Tierra y la de cualquier otro lugar. En la Figura 13.23, esta diferencia se muestra a nivel del mar, donde observamos las mareas oceánicas. (Nótese que el cambio en el nivel del mar causado por estas fuerzas de marea se mide a partir del nivel del mar de referencia. Ya hemos visto que la Tierra se abomba muchos kilómetros en el ecuador debido a su rotación. Esto define el nivel del mar de referencia y aquí sólo consideramos la protuberancia de la marea, mucho más pequeña, medida a partir de ese nivel del mar de referencia).



FIGURA 13.23 La fuerza de marea es la *diferencia* entre la fuerza gravitatoria en el centro y la de otros lugares. En esta figura, las fuerzas de marea se muestran en la superficie del océano. Estas fuerzas disminuirían a cero al acercarse al centro de la Tierra.

¿Por qué la subida y la bajada de las mareas se producen dos veces al día? Mire de nuevo a la Figura 13.22. Si la Tierra no girara y la Luna estuviera fija, los bultos permanecerían en el mismo lugar de la Tierra. En relación con la Luna, las protuberancias permanecen fijas a lo largo de la línea que une la Tierra y la Luna. Pero la Tierra gira (en la dirección indicada por la flecha azul) aproximadamente cada 24 horas. En 6 horas, los

lugares cercanos y lejanos de la Tierra se desplazan hacia donde se producen las mareas bajas, y 6 horas más tarde, esos lugares vuelven a la posición de las mareas altas. Dado que la Luna también orbita la Tierra aproximadamente cada 28 días, y en la misma dirección en que gira la Tierra, el tiempo entre las mareas altas (y bajas) es en realidad de unas 12,5 horas. El calendario real de las mareas se complica por numerosos factores, el más importante de los cuales es otro cuerpo astronómico: el Sol.

El efecto del sol en las mareas

Además de las fuerzas de marea de la Luna sobre los océanos de la Tierra, el Sol también ejerce una fuerza de marea. La atracción gravitatoria del Sol sobre cualquier objeto de la Tierra es casi 200 veces superior a la de la Luna. Sin embargo, como mostraremos más adelante en un ejemplo, el efecto de *las mareas* del Sol es menor que el de la Luna, pero es un efecto importante. Dependiendo de las posiciones de la Luna y el Sol con respecto a la Tierra, el efecto neto de las mareas puede verse amplificado o atenuado.

La Figura 13.22 ilustra las posiciones relativas del Sol y de la Luna que crean las mayores mareas, llamadas **mareas vivas** (o mareas saltantes). Durante las mareas vivas, la Tierra, la Luna y el Sol están alineados y los efectos de las mareas se suman. (Recordemos que las fuerzas de marea causan abultamientos en ambos lados). La Figura 13.22(c) muestra las posiciones relativas para las mareas más pequeñas, llamadas **mareas muertas**. Los extremos de las mareas altas y bajas se ven afectados. Las mareas de primavera se producen durante la luna nueva o llena, y las mareas muertas se producen en la media luna.

INTERACTIVO

Puede ver una (https://openstax.org/l/21tidesinmot01) o dos (https://openstax.org/l/21tidesinmot02) animaciones de las mareas en movimiento.

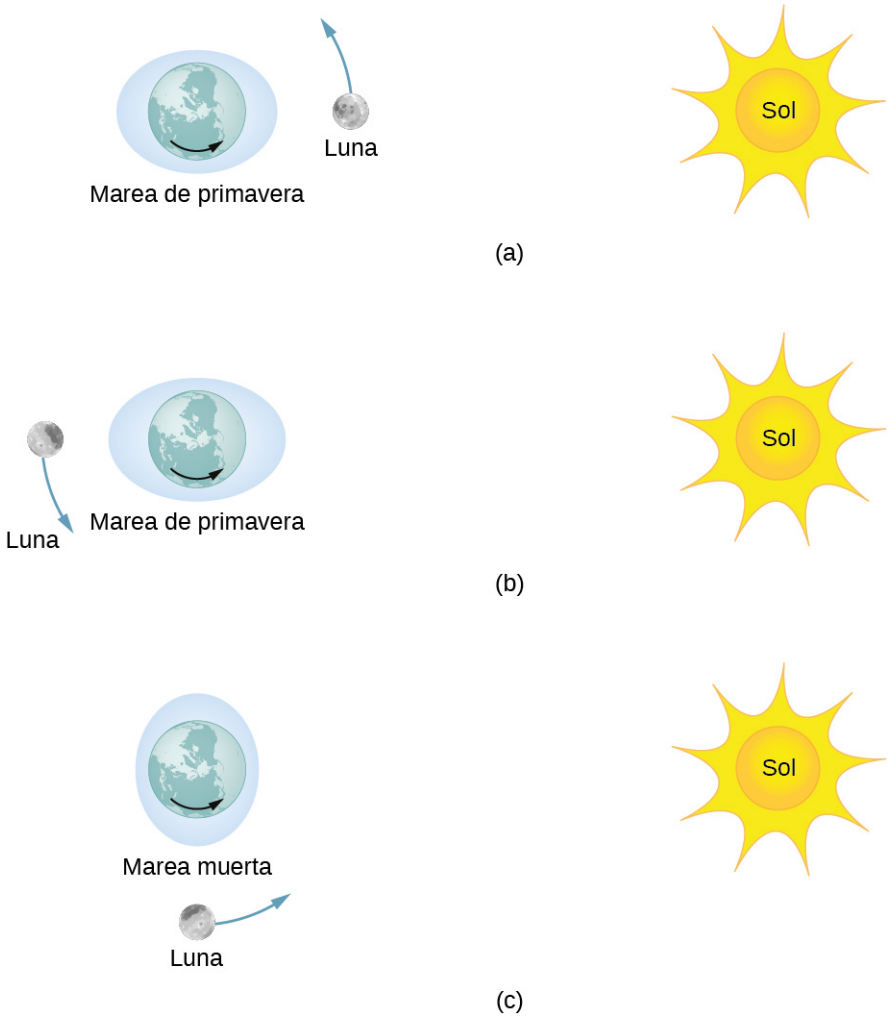


FIGURA 13.24 (a y b) Las mareas vivas se producen cuando el Sol y la Luna están alineados, mientras que (c) las mareas muertas se producen cuando el Sol y la Luna forman un triángulo rectángulo con la Tierra. (La figura no está dibujada a escala)

La magnitud de las mareas

Con datos precisos de las posiciones de la Luna y el Sol, se puede predecir con exactitud la hora de las mareas máximas y mínimas en la mayoría de los lugares de nuestro planeta.

INTERACTIVO

Visite este sitio (https://openstax.org/l/21tidepredic) para generar predicciones de mareas de hasta 2 años en el pasado o en el futuro, en más de 3000 lugares de los Estados Unidos.

Sin embargo, la magnitud de las mareas es mucho más complicada. Los ángulos relativos de la Tierra y la Luna determinan las mareas vivas y muertas, pero las magnitudes de estas mareas también se ven afectadas por las distancias a la Tierra. Las fuerzas de marea son mayores cuando las distancias son menores. Tanto la órbita de la Luna alrededor de la Tierra como la órbita de la Tierra alrededor del Sol son elípticas, por lo que una marea viva es excepcionalmente grande si se produce cuando la Luna está en el perigeo y la Tierra en el perihelio. Por el contrario, es relativamente pequeño si se produce cuando la Luna está en el apogeo y la Tierra en el afelio.

Las mayores causas de la variación de las mareas son la topografía de la costa local y la batimetría (el perfil de la profundidad) del fondo del océano. La gama de mareas debida a estos efectos es asombrosa. Aunque las mareas oceánicas son mucho más pequeñas que un metro en muchos lugares del mundo, las mareas de la

bahía de Fundy (Figura 13.25), en la costa este de Canadá, pueden llegar a ser de 16,3 metros.



FIGURA 13.25 Barcos en la bahía de Fundy con marea alta y baja. El cambio del nivel del mar, que se produce dos veces al día, supone un verdadero reto para el amarre seguro de las embarcaciones (créditos: modificación de trabajos de Dylan Kereluk).

EJEMPLO 13.14

Comparación de las fuerzas de marea

Comparar la fuerza gravitatoria de la Luna sobre una masa de 1,0 kg situada en el lado cercano y otra en el lado lejano de la Tierra. Repita la operación para el Sol y luego compare los resultados para confirmar que las fuerzas de marea de la Luna son aproximadamente el doble que las del Sol.

Estrategia

Usamos la ley de la gravitación de Newton dada por la Ecuación 13.1. Necesitamos las masas de la Luna y del Sol y sus distancias a la Tierra, así como el radio de la Tierra. Usamos los datos astronómicos del Apéndice D.

Solución

Al sustituir la masa de la Luna y la distancia media de la Tierra a la Luna, tenemos

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = (6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)\frac{(1{,}0\ \text{kg})(7{,}35 \times 10^{22}\ \text{kg})}{(3{,}84 \times 10^{8} \pm 6{,}37 \times 10^{6}\ \text{m})^2}.$$

En el denominador, usamos el signo menos para el lado cercano y el signo más para el lado lejano. Los resultados son

$$F_{\text{cerca de}} = 3{,}44 \times 10^{-5}\ \text{N} \quad \text{y} \quad F_{\text{lejos}} = 3{,}22 \times 10^{-5}\ \text{N}.$$

La fuerza gravitatoria de la Luna es casi un 7 % mayor en el lado cercano de la Tierra que en el lado lejano, pero ambas fuerzas son mucho menores que la de la propia Tierra sobre la masa de 1,0 kg. Sin embargo, esta pequeña diferencia crea las mareas. Ahora repetimos el problema, pero sustituyendo la masa del Sol y la distancia media entre la Tierra y el Sol. Los resultados son

$$F_{\text{cerca de}} = 5{,}89975 \times 10^{-3}\ \text{N} \quad \text{y} \quad F_{\text{lejos}} = 5{,}89874 \times 10^{-3}\ \text{N}.$$

Tenemos que mantener seis dígitos significativos ya que queremos comparar la diferencia entre ellos con la diferencia para la Luna. (Aunque no podemos justificar el valor absoluto con esta exactitud, ya que todos los valores del cálculo son iguales excepto las distancias, la precisión en la diferencia sigue siendo válida con tres dígitos) La diferencia entre las fuerzas cercanas y lejanas sobre una masa de 1,0 kg debidas a la Luna es

$$F_{\text{cerca de}} = 3{,}44 \times 10^{-5}\ \text{N} - 3{,}22 \times 10^{-5}\ \text{N} = 0{,}22 \times 10^{-5}\ \text{N},$$

mientras que la diferencia para el Sol es

$$F_{\text{cerca de}} - F_{\text{lejos}} = 5{,}89975 \times 10^{-3}\ \text{N} - 5{,}89874 \times 10^{-3}\ \text{N} = 0{,}101 \times 10^{-5}\ \text{N}.$$

Nótese que un enfoque más adecuado es escribir la diferencia de las dos fuerzas con la diferencia entre las distancias cercana y lejana expresada explícitamente. Con un poco de álgebra podemos demostrar que

$$F_{\text{marea}} = \frac{GMm}{r_1^2} - \frac{GMm}{r_2^2} = GMm\left(\frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_1^2 r_2^2}\right),$$

donde r_1 y r_2 son iguales hasta tres dígitos significativos, pero su diferencia $(r_2 - r_1)$, igual al diámetro de la Tierra, también se conoce con tres dígitos significativos. Los resultados del cálculo son los mismos. Este enfoque sería necesario si el número de dígitos significativos necesarios supera el disponible en su calculadora u ordenador.

Importancia

Obsérvese que las fuerzas ejercidas por el Sol son casi 200 veces mayores que las ejercidas por la Luna. Pero la *diferencia* de esas fuerzas para el Sol es la mitad que para la Luna. Esta es la naturaleza de las fuerzas de marea. La Luna tiene un mayor efecto de marea porque el cambio fraccionario en la distancia del lado cercano al lado lejano es mucho mayor para la Luna que para el Sol.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.10

La Tierra ejerce una fuerza de marea sobre la Luna. ¿Es mayor, igual o menor que la de la Luna en la Tierra? Tenga cuidado en su respuesta, ya que las fuerzas de marea surgen de la *diferencia* de fuerzas gravitatorias entre un lado y otro. Observe los cálculos que realizamos para la fuerza de marea en la Tierra y considere los valores que cambiarían significativamente para la Luna. El diámetro de la Luna es una cuarta parte del de la Tierra. Las fuerzas de marea en la Luna no son fáciles de detectar, ya que no hay líquido en la superficie.

Otros efectos de la marea

Las fuerzas de marea existen entre dos cuerpos cualesquiera. El efecto estira los cuerpos a lo largo de la línea entre sus centros. Aunque el efecto de las mareas en los mares de la Tierra es observable a diario, las consecuencias a largo plazo no pueden observarse tan fácilmente. Una de las consecuencias es la disipación de la energía de rotación debido a la fricción durante la flexión de los propios cuerpos. La velocidad de rotación de la Tierra disminuye a medida que las fuerzas de marea transfieren la energía de rotación en calor. El otro efecto, relacionado con esta disipación y la conservación del momento angular, se denomina "bloqueo" o sincronización de mareas. Ya le ha ocurrido a la mayoría de las lunas de nuestro sistema solar, incluida la Luna de la Tierra. La Luna mantiene una cara hacia la Tierra: su velocidad de rotación se ha acoplado a la velocidad orbital alrededor de la Tierra. El mismo proceso le está ocurriendo a la Tierra, y finalmente mantendrá una cara hacia la Luna. Si eso ocurre, ya no veríamos las mareas, ya que la protuberancia de las mareas permanecería en el mismo lugar de la Tierra, y la mitad del planeta no vería nunca la Luna. Sin embargo, este cierre tardará muchos miles de millones de años, quizás no antes de que nuestro Sol expire.

Uno de los ejemplos más dramáticos de los efectos de las mareas se encuentra en Io, una de las lunas de Júpiter. En 1979, la nave espacial *Voyager* envió espectaculares imágenes de la actividad volcánica de Io. Es el único otro cuerpo astronómico de nuestro sistema solar en el que hemos encontrado tal actividad. La Figura 13.26 muestra una imagen más reciente de Io tomada por la nave *New Horizons* en su camino hacia Plutón, mientras usa una ayuda gravitatoria de Júpiter.

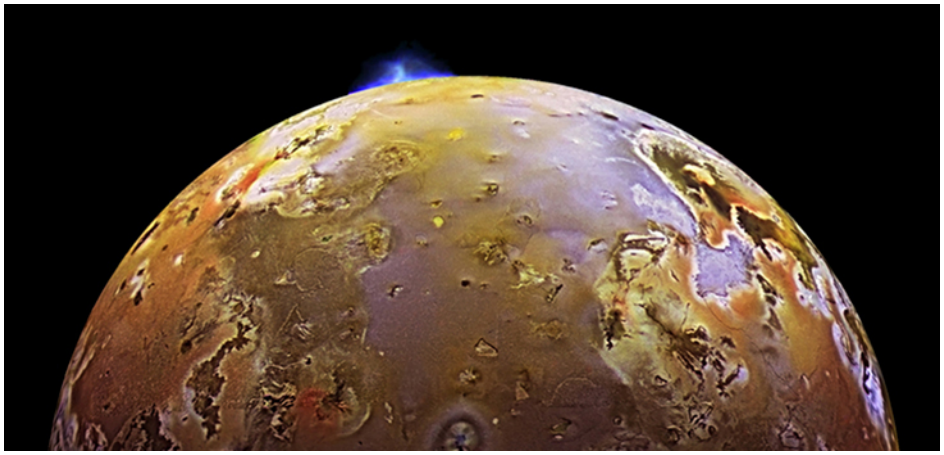


FIGURA 13.26 En Io se puede observar evidencia dramática de fuerzas de marea. La erupción que se ve en azul se debe al calor interno creado por las fuerzas de marea ejercidas sobre Io por Júpiter (créditos: modificación de trabajo de NASA, Jet Propulsion Laboratory [JPL] y la Universidad de Arizona).

Para algunas estrellas, el efecto de las fuerzas de marea puede ser catastrófico. Las fuerzas de marea en sistemas binarios muy cercanos pueden ser lo suficientemente fuertes como para arrancar la materia de una estrella a la otra, una vez que las fuerzas de marea superan las fuerzas de autogravedad cohesivas que mantienen a las estrellas unidas. Este efecto puede observarse en estrellas normales que orbitan alrededor de estrellas compactas cercanas, como las estrellas de neutrones o los agujeros negros. La Figura 13.27 muestra una representación artística de este proceso. A medida que la materia cae en la estrella compacta, forma un disco de acreción que se sobrecalienta e irradia en el espectro de rayos X.

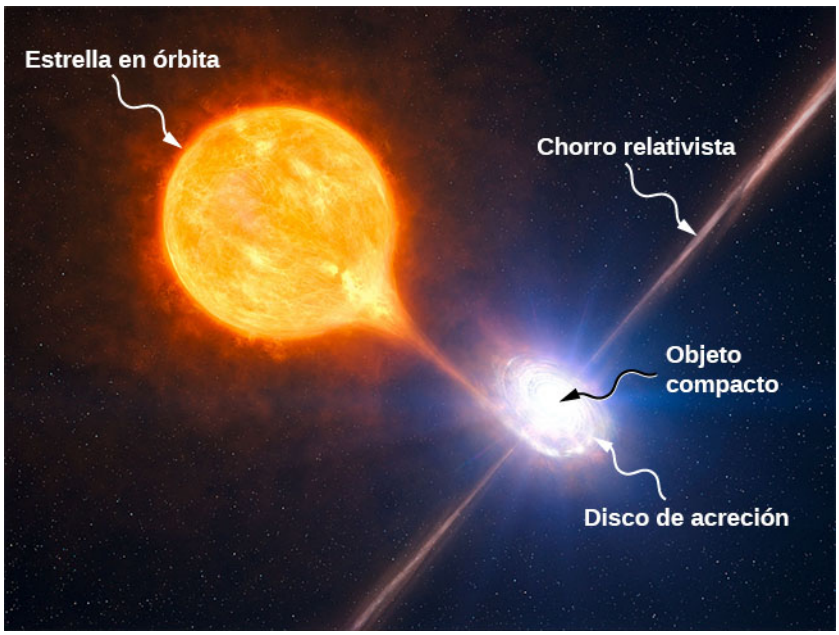


FIGURA 13.27 Las fuerzas de marea de un objeto compacto pueden arrancar la materia de una estrella en órbita. Además del disco de acreción que orbita alrededor del objeto compacto, a menudo se expulsa material a lo largo de chorros relativistas como se muestra (créditos: modificación de trabajo del Observatorio Europeo Austral [European Southern Observatory], L. Calçada y M. Kornmesser).

La producción de energía de estos sistemas binarios puede superar la producción típica de miles de estrellas. Otro ejemplo podría ser un cuásar. Los cuásares son objetos muy distantes e inmensamente brillantes, que a menudo superan la producción de energía de galaxias enteras. El consenso general entre los astrónomos es que se trata, de hecho, de agujeros negros masivos que producen energía radiante al caer en ellos la materia arrancada por las mareas de las estrellas cercanas.

13.7 La teoría de la gravedad de Einstein

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir cómo la teoría de la relatividad general aborda la gravitación.
- Explicar el principio de equivalencia.
- Calcular el radio de Schwarzschild de un objeto.
- Resumir la evidencia de los agujeros negros.

La ley de la gravitación universal de Newton predice con exactitud gran parte de lo que vemos en nuestro sistema solar. De hecho, solo se han necesitado las leyes de Newton para enviar con precisión cada vehículo espacial en su viaje. Las trayectorias de los asteroides que cruzan la Tierra, y de la mayoría de los demás objetos celestes, se pueden determinar con precisión solamente con las leyes de Newton. Sin embargo, muchos fenómenos han mostrado una discrepancia con respecto a lo que predicen las leyes de Newton, lo que incluye la órbita de Mercurio y el efecto que la gravedad tiene sobre la luz. En esta sección examinamos una forma diferente de concebir la gravitación.

Una revolución en perspectiva

En 1905, Albert Einstein publicó su teoría de la relatividad especial. Esta teoría se analiza con gran detalle en Relatividad (http://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/5-introduction), por lo que aquí solo diremos unas palabras. En esta teoría, ningún movimiento puede superar la velocidad de la luz: es el límite de velocidad del universo. Este simple hecho se ha verificado en innumerables experimentos. Sin embargo, tiene consecuencias increíbles: el espacio y el tiempo ya no son absolutos. Dos personas que se mueven una respecto a la otra no se ponen de acuerdo sobre la longitud de los objetos o el paso del tiempo. Casi toda la mecánica que aprendió en los capítulos anteriores, aunque es notablemente precisa incluso para velocidades de muchos miles de kilómetros por segundo, comienza a fallar cuando se acerca a la velocidad de la luz.

Este límite de velocidad del universo era también un desafío a la suposición inherente a la ley de la gravitación de Newton de que la gravedad es una **fuerza de acción a distancia**. Es decir, sin contacto físico, cualquier cambio en la posición de una masa se comunica instantáneamente a todas las demás. Esta suposición no proviene de ningún primer principio, ya que la teoría de Newton simplemente no aborda la cuestión (lo mismo se creía de las fuerzas electromagnéticas, también. Es justo decir que la mayoría de los científicos no se sentían completamente cómodos con el concepto de acción a distancia).

Un segundo supuesto aparece también en ley de la gravitación de Newton (Ecuación 13.1). Se supone que las masas son exactamente las mismas que las que se usan en la segunda ley de Newton, $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$. Hemos hecho esa suposición en muchas de nuestras derivaciones en este capítulo. Una vez más, no hay ningún principio subyacente que lo obligue, pero los resultados experimentales son coherentes con esta suposición. En la posterior **teoría de la relatividad general** de Einstein (1916), se abordaron ambos asuntos. Su teoría era una teoría de geometría **espacio-tiempo** y de cómo la masa (y la aceleración) distorsionan e interactúan con ese espacio-tiempo. No era una teoría de las fuerzas gravitacionales. Las matemáticas de la teoría general están fuera del alcance de este texto, pero podemos ver algunos principios subyacentes y sus consecuencias.

El principio de equivalencia

Einstein llegó a su teoría general en parte preguntándose por qué alguien que estaba en caída libre no sentía su peso. De hecho, es habitual hablar de los astronautas que orbitan la Tierra como si no tuvieran peso, a pesar de que la gravedad terrestre sigue siendo bastante fuerte allí. En la teoría general de Einstein no hay diferencia entre la caída libre e ingravidez. Esto se denomina **principio de equivalencia**. El corolario igualmente sorprendente de esto es que no hay diferencia entre un campo gravitacional uniforme y una aceleración uniforme en ausencia de gravedad. Centrémonos en esta última afirmación. Aunque un campo gravitacional perfectamente uniforme no es factible, podemos aproximarnos a él muy bien.

Dentro de un laboratorio de tamaño razonable en la Tierra, el campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ es esencialmente uniforme. El corolario dice que cualquier experimento físico realizado allí tiene los mismos resultados que los

realizados en un laboratorio acelerando a $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ en el espacio profundo, bien lejos de todas las demás masas. La Figura 13.28 ilustra el concepto.

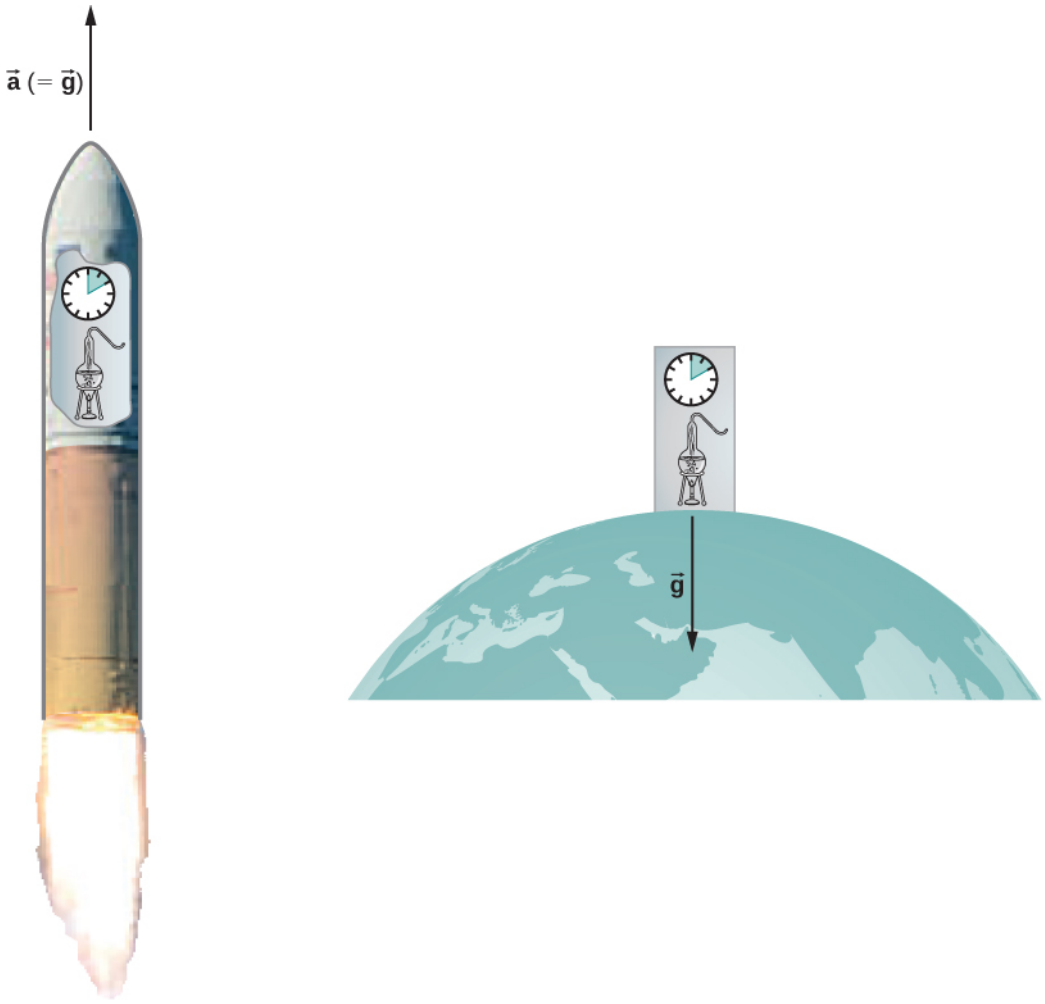


FIGURA 13.28 Según el principio de equivalencia, los resultados de todos los experimentos realizados en un laboratorio en un campo gravitacional uniforme son idénticos a los resultados de los mismos experimentos realizados en un laboratorio con aceleración uniforme.

¿Cómo estas dos situaciones aparentemente tan diferentes pueden ser iguales? La respuesta es que la gravitación no es una fuerza entre dos objetos, sino que es el resultado de la respuesta de cada objeto al efecto que el otro tiene en el espacio-tiempo que lo rodea. Un campo gravitacional uniforme y una aceleración uniforme tienen exactamente el mismo efecto en el espacio-tiempo.

Una teoría geométrica de la gravedad

La geometría euclidiana supone un espacio "plano" en el que, entre los atributos más conocidos, una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos, la suma de los ángulos de todos los triángulos debe ser 180 grados y las líneas paralelas nunca se cruzan. La **geometría no euclidiana** no se investigó seriamente hasta el siglo XIX, por lo que no es de extrañar que el espacio euclidiano se asuma inherentemente en todas las leyes de Newton.

La teoría general de la relatividad pone en tela de juicio esta suposición tan arraigada. Solo el espacio vacío es plano. La presencia de masa —o energía, ya que la relatividad no distingue entre ambas— distorsiona o curva el espacio y el tiempo, o espacio-tiempo, a su alrededor. El movimiento de cualquier otra masa es simplemente una respuesta a este espacio-tiempo curvado. La Figura 13.29 es una representación bidimensional de una masa más pequeña orbitando en respuesta al espacio distorsionado creado por la presencia de una masa más grande. En una imagen más precisa pero confusa, también veríamos el espacio distorsionado por la masa en

órbita, y ambas masas estarían en movimiento en respuesta a la distorsión total del espacio. Tenga en cuenta que la figura es una representación para ayudar a visualizar el concepto. Son distorsiones en nuestro espacio y tiempo tridimensionales. No los vemos como lo haríamos con un hoyuelo en una pelota. Solo vemos la distorsión mediante cuidadosas mediciones del movimiento de los objetos y de la luz al desplazarse por el espacio.

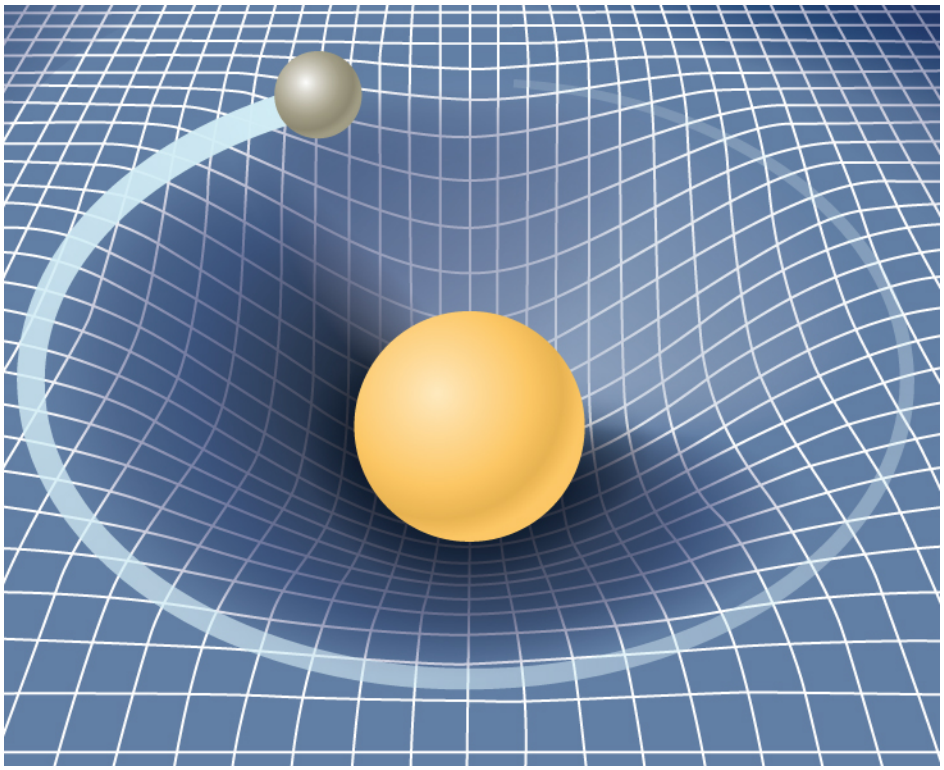


FIGURA 13.29 Una masa más pequeña orbitando en el espacio-tiempo distorsionado de una masa más grande. De hecho, toda masa o energía distorsiona el espacio-tiempo.

Para campos gravitacionales débiles, los resultados de la relatividad general no difieren significativamente de la ley de la gravitación de Newton. Pero para campos gravitacionales intensos, los resultados divergen, y se ha demostrado que la relatividad general predice los resultados correctos. Incluso en el campo gravitacional relativamente débil de nuestro Sol, a la distancia de la órbita de Mercurio, podemos observar el efecto. Desde mediados del siglo XIX, se ha medido cuidadosamente la órbita elíptica de Mercurio. Sin embargo, aunque es elíptica, su movimiento se complica porque la posición del perihelio de la elipse avanza lentamente. La mayor parte del avance se debe a la atracción gravitacional de otros planetas, pero una pequeña parte de ese avance no podría explicarse por la ley de Newton. En un momento dado, incluso se buscó un planeta “compañero” que explicara la discrepancia. Pero la relatividad general predice correctamente las mediciones. Desde entonces muchas mediciones, como la deflexión de la luz de objetos lejanos por el Sol, han verificado que la relatividad general predice correctamente las observaciones.

Cerramos este debate con un comentario final. A menudo nos hemos referido a las distorsiones del espacio-tiempo o a las distorsiones tanto del espacio como del tiempo. Tanto en la relatividad especial como en la general, la dimensión del tiempo está en pie de igualdad con cada una de las dimensiones espaciales (difieren en su lugar en ambas teorías solo por un factor de escala que en el fondo no tiene importancia). Cerca de una masa muy grande, no solo se “estira” el espacio cercano, sino que el tiempo se dilata o se “ralentiza”. En la siguiente sección se analizan estos efectos con más detalle.

Agujeros negros

La teoría de la gravitación de Einstein se expresa en una ecuación tensorial de apariencia engañosa (los tensores son una generalización de los escalares y vectores), la cual expresa cómo una masa determina la curvatura del espacio-tiempo a su alrededor. Las soluciones a esa ecuación arrojan una de las predicciones

más fascinantes: el **agujero negro**. La predicción es que si un objeto es lo suficientemente denso, colapsará sobre sí mismo y quedará rodeado por un **horizonte de sucesos** del que nada puede escapar. El nombre de "agujero negro", acuñado por el astrónomo John Wheeler en 1969, hace referencia al hecho de que la luz no puede escapar de un objeto así. Karl Schwarzschild fue el primero en observar este fenómeno en 1916, pero en aquella época se consideraba sobre todo una curiosidad matemática.

Sorprendentemente, la idea de un cuerpo masivo del que la luz no puede escapar se remonta a finales del siglo XVIII. Independientemente, John Michell y Pierre-Simon Laplace usaron la ley de la gravitación de Newton para demostrar que la luz que abandona la superficie de una estrella con suficiente masa no puede escapar. Su trabajo se basó en el hecho de que la velocidad de la luz había sido medida por Ole Rømer en 1676. Observó discrepancias en los datos sobre el periodo orbital de la luna Io en torno a Júpiter. Rømer se dio cuenta de que la diferencia surgía de las posiciones relativas de la Tierra y Júpiter en diferentes momentos y que podía encontrar la velocidad de la luz a partir de esa diferencia. Tanto Michell como Laplace se dieron cuenta de que, dado que la luz tenía una velocidad finita, podía haber una estrella lo suficientemente masiva como para que la velocidad de escape de su superficie pudiera superar esa velocidad. Por lo tanto, la luz siempre volvería a la estrella. Curiosamente, los observadores que se encuentran lo suficientemente lejos de las estrellas más grandes no podrían verlas, pero sí podrían ver una estrella más pequeña desde la misma distancia.

Recordemos que en Energía potencial gravitacional y energía total, encontramos que la velocidad de escape, dada por la Ecuación 13.6, es independiente de la masa del objeto que escapa. Aunque la naturaleza de la luz no se comprendía del todo en aquella época, la masa de la luz, si es que la tenía, no era relevante. Por lo tanto, la Ecuación 13.6 debería ser válida para la luz. Al sustituir c, la velocidad de la luz, por la velocidad de escape, tenemos

$$v_{\text{esc}} = c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Por lo tanto, solo necesitamos valores para R y M tales que la velocidad de escape supere a c, y entonces la luz no podrá escapar. Michell planteó que si una estrella tuviera la densidad de nuestro Sol y un radio que se extendiera más allá de la órbita de Marte, la luz no podría escapar de su superficie. También conjeturó que todavía podríamos detectar una estrella así por el efecto gravitacional que tendría sobre los objetos que la rodean. Se trata de una conclusión perspicaz, ya que es precisamente así como deducimos la existencia de tales objetos en la actualidad. Aunque todavía no hemos visitado un agujero negro, y puede que nunca lo hagamos, la evidencia circunstancial de que existen es tan convincente que pocos astrónomos dudan de su existencia.

Antes de examinar parte de esa evidencia, volvamos a centrar nuestra atención en la solución de Schwarzschild a la ecuación tensorial de la relatividad general. En esa solución surge un radio crítico, ahora llamado **radio de Schwarzschild** (R_{S}). Para cualquier masa M, si esa masa se comprimiera hasta el punto de que su radio fuera menor que el radio de Schwarzschild, entonces colapsaría hasta convertirse en una singularidad, y cualquier cosa que pasara dentro de ese radio no podría escapar. Una vez dentro R_{S}, la flecha del tiempo lleva todas las cosas a la singularidad (en un sentido matemático amplio, una singularidad es cuando el valor de una función llega al infinito. En este caso, se trata de un punto en el espacio de volumen cero con una masa finita. Por lo tanto, la densidad de masa y la energía gravitacional se vuelven infinitas). El radio de Schwarzschild viene dado por

$$R_{\text{S}} = \frac{2GM}{c^2}. \qquad 13.12$$

Si mira nuestra ecuación de la velocidad de escape con $v_{\text{esc}} = c$, observará que da precisamente este resultado. Pero eso no es más que un accidente fortuito causado por varias suposiciones incorrectas. Una de estas suposiciones es el uso de la expresión clásica *incorrecta* para la energía cinética de la luz. ¿Qué densidad debe tener un objeto para convertirse en un agujero negro?

EJEMPLO 13.15

Calcular el radio de Schwarzschild

Calcule el radio de Schwarzschild para el Sol y la Tierra. Compare la densidad del núcleo de un átomo con la densidad necesaria para comprimir uniformemente la masa de la Tierra hasta su radio de Schwarzschild. La densidad de un núcleo es de, aproximadamente, $2{,}3 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$.

Estrategia

Usamos la Ecuación 13.12 para este cálculo. Solo necesitamos las masas de la Tierra y del Sol, que obtenemos de los datos astronómicos que figuran en el Apéndice D.

Solución

Al sustituir la masa del Sol, tenemos

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg})}{(3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 2{,}95 \times 10^3\ \text{m}.$$

Se trata de un diámetro de solo unos 6 km. Si usamos la masa de la Tierra, obtenemos $R_S = 8{,}85 \times 10^{-3}$ m. ¡Se trata de un diámetro de menos de 2 cm! Si empaquetamos la masa de la Tierra en una esfera con el radio $R_S = 8{,}85 \times 10^{-3}$ m, obtenemos una densidad de

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg}}{(4/3\,\pi)(8{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m})^3} = 2{,}06 \times 10^{30}\ \text{kg/m}^3.$$

Importancia

Una **estrella de neutrones** es el objeto más compacto que se conoce, aparte de un agujero negro. La estrella de neutrones está compuesta por neutrones con la densidad de un núcleo atómico y, como muchos agujeros negros, se cree que es el remanente de una supernova: una estrella que explota al final de su vida. Para crear un agujero negro desde la Tierra, tendríamos que comprimirla hasta una densidad trece órdenes de magnitud mayor que la de una estrella de neutrones. Este proceso requeriría una fuerza inimaginable. No se conoce ningún mecanismo que pueda hacer que un objeto del tamaño de la Tierra se convierta en un agujero negro. En el caso del Sol, usted debería poder demostrar que tendría que estar comprimido a una densidad solo unas 80 veces superior a la de un núcleo (Nota: Una vez que la masa se comprime dentro de su radio de Schwarzschild, la relatividad general dicta que colapsará hasta convertirse en una singularidad. Estos cálculos solo muestran la densidad que debemos alcanzar para iniciar ese colapso).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 13.11

Compruebe su comprensión Considere la densidad necesaria para que la Tierra sea un agujero negro en comparación con la necesaria para el Sol. ¿Qué conclusión puede sacar de esta comparación sobre lo que se necesitaría para crear un agujero negro? ¿Espera que el universo tenga muchos agujeros negros con poca masa?

El horizonte de sucesos

El radio de Schwarzschild también se denomina horizonte de sucesos de un agujero negro. Hemos observado que tanto el espacio como el tiempo se estiran cerca de objetos masivos, como los agujeros negros. La Figura 13.30 ilustra ese efecto sobre el espacio. La distorsión causada por nuestro Sol es en realidad bastante pequeña, y el diagrama está exagerado para más claridad. Consideremos la estrella de neutrones, descrita en el Ejemplo 13.15. Aunque la distorsión del espacio-tiempo en la superficie de una estrella de neutrones es muy alta, el radio sigue siendo mayor que su radio de Schwarzschild. Hay objetos que podrían seguir escapando de su superficie.

Sin embargo, si una estrella de neutrones gana masa adicional, acabaría colapsando, encogiéndose más allá

del radio de Schwarzschild. Una vez que eso ocurra, toda la masa sería empujada, inevitablemente, a una singularidad. En el diagrama, el espacio se estira hasta el infinito. El tiempo también se estira hasta el infinito. A medida que los objetos caen hacia el horizonte de sucesos, los vemos acercarse cada vez más lentamente, pero sin llegar nunca al horizonte de sucesos. Como observadores externos, nunca vemos objetos que atraviesen el horizonte de sucesos: efectivamente el tiempo se detiene.

INTERACTIVO

Visite este sitio (https://openstax.org/l/21spacetelescop) para ver un ejemplo animado de estas distorsiones espaciales.

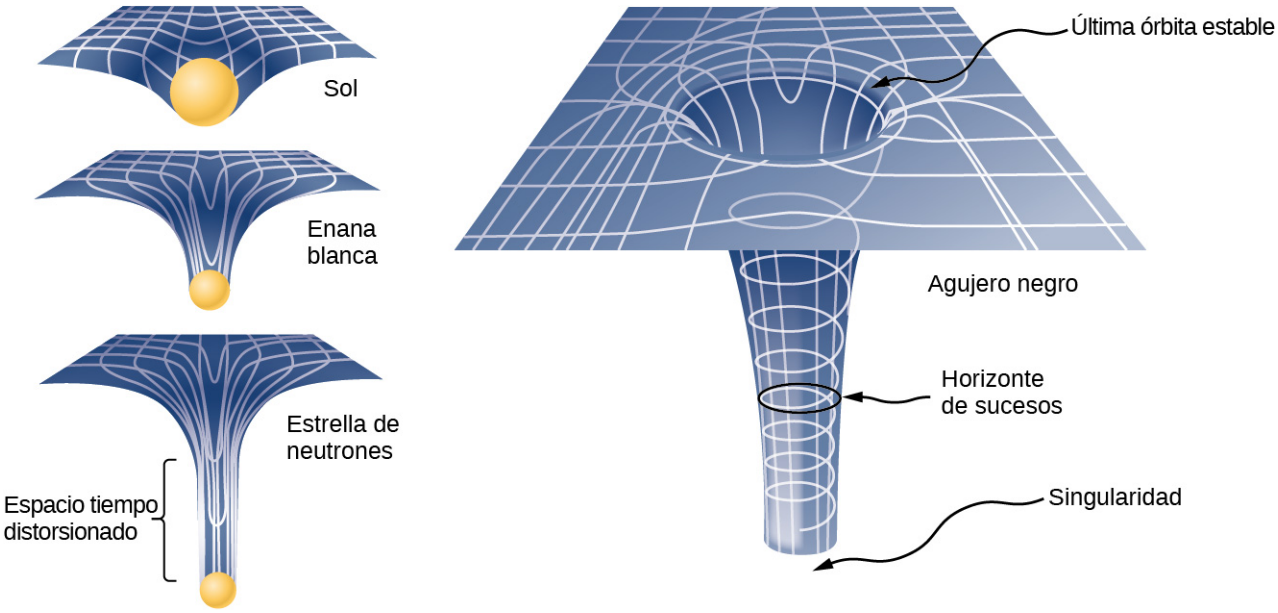


FIGURA 13.30 La distorsión del espacio se hace más notable alrededor de masas cada vez más grandes. Una vez que la densidad de masa alcanza un nivel crítico se forma un agujero negro, y el tejido del espacio-tiempo se desgarra. La curvatura del espacio es mayor en la superficie de cada uno de los tres primeros objetos mostrados y es finita. La curvatura disminuye entonces (no se muestra) hasta llegar a cero a medida que se desplaza hacia el centro del objeto. Pero el agujero negro es diferente. La curvatura se vuelve infinita: La superficie ha colapsado hasta una singularidad, y el cono se extiende hasta el infinito (Nota: Estos diagramas no están a ninguna escala) (créditos: modificación de trabajo de la NASA).

La evidencia de los agujeros negros

No fue hasta la década de los años 60 del siglo XX, cuando se descubrió la primera estrella de neutrones, y se renovó el interés por la existencia de los agujeros negros. La evidencia para agujeros negros se basa en varios tipos de observaciones, como análisis de la radiación de binarias de rayos X, lentes gravitacionales de la luz de las galaxias lejanas y el movimiento de objetos visibles alrededor de compañeros invisibles. Nos centraremos en estas observaciones posteriores en relación con lo que hemos aprendido en este capítulo. Aunque la luz no puede escapar de un agujero negro para que la veamos, sí podemos ver el efecto gravitacional del agujero negro sobre masas circundantes.

La evidencia más cercana de un agujero negro, y quizás más dramática, está en el centro de nuestra galaxia Vía Láctea. El Grupo del Centro Galáctico de la Universidad de California en Los Ángeles (UCLA), con el uso de datos obtenidos por los telescopios W. M. Keck, ha determinado las órbitas de varias estrellas cercanas al centro de nuestra galaxia. Algunos de esos datos se muestran en la Figura 13.31. Se destacan las órbitas de dos estrellas. A partir de las mediciones de los periodos y tamaños de sus órbitas, se estima que orbitan alrededor de una masa de 4 millones de masas solares aproximadamente. Nótese que la masa debe residir en la región creada por la intersección de las elipses de las estrellas. La región en la que debe residir esa masa encajaría dentro de la órbita de Mercurio y, sin embargo, no se ve nada allí en el espectro visible.

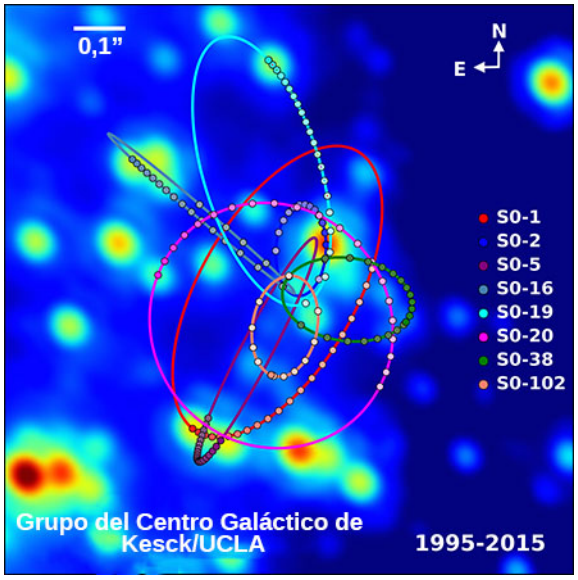


FIGURA 13.31 Trayectorias de las estrellas que orbitan alrededor de una masa en el centro de nuestra galaxia Vía Láctea. A partir de su movimiento, se estima que en el centro reside un agujero negro de unos 4 millones de masas solares (créditos: modificación de trabajo del Grupo del Centro Galáctico de la UCLA, equipo láser del Observatorio W. M. Keck).

La física de la creación y evolución estelar está bien establecida. La última fuente de energía que hace brillar las estrellas es la energía autogravitacional que desencadena la fusión. El comportamiento general es que cuanto más masiva es una estrella, más brilla y más corta es su vida. La inferencia lógica es que una masa que es 4 millones de veces la masa de nuestro Sol, confinada en una región muy pequeña y que no se puede ver, no tiene otra interpretación viable que la de un agujero negro. Las observaciones extragalácticas sugieren fuertemente que los agujeros negros son comunes en el centro de las galaxias.

INTERACTIVO

Visite la página principal del Grupo del Centro Galáctico de la UCLA (https://openstax.org/l/21galacenter01) para obtener información sobre binarias de rayos X y lentes gravitacionales. Visite esta página (https://openstax.org/l/21galacenter02) para observar una visualización tridimensional de las estrellas que orbitan cerca del centro de nuestra galaxia, donde la animación se encuentra cerca de la parte inferior de la página.

Materia oscura

Las estrellas que orbitan cerca del mismo corazón de nuestra galaxia proporcionan una fuerte evidencia de la existencia de un agujero negro allí, pero las órbitas de las estrellas alejadas del centro sugieren otro fenómeno intrigante que también se observa indirectamente. Recordemos que en Gravitación cerca de la superficie terrestre podemos considerar que la masa de objetos esféricos se encuentra en un punto del centro para calcular sus efectos gravitacionales sobre otras masas. Del mismo modo, podemos tratar la masa total que se encuentra dentro de la órbita de cualquier estrella de nuestra galaxia como si estuviera situada en el centro del disco de la Vía Láctea. Podemos estimar esa masa a partir del recuento de las estrellas visibles e incluir en nuestra estimación la masa del agujero negro del centro también.

Pero cuando lo hacemos, descubrimos que la rapidez orbital de las estrellas es demasiado rápida para ser causada por esa cantidad de materia. La Figura 13.32 muestra las velocidades orbitales de las estrellas en función de su distancia al centro de la Vía Láctea. La línea azul representa las velocidades que esperaríamos a partir de nuestras estimaciones de la masa, mientras que la curva verde es la que obtenemos de mediciones directas. Al parecer, hay una gran cantidad de materia que no vemos, que se calcula que es unas cinco veces mayor que la que vemos, por lo que se le ha denominado materia oscura. Además, el perfil de velocidad no sigue lo que esperamos de la distribución observada de estrellas visibles. No solo la estimación de la masa

total es incongruente con los datos, sino que la distribución esperada también lo es. Y este fenómeno no se limita a nuestra galaxia, sino que parece ser una característica de todas las galaxias. De hecho, el problema se observó por primera vez en la década de los años 30 del siglo XX, cuando se midió que galaxias dentro de cúmulos orbitaban alrededor del centro de masa de esos cúmulos más rápido de lo que deberían según las estimaciones de masa visibles.

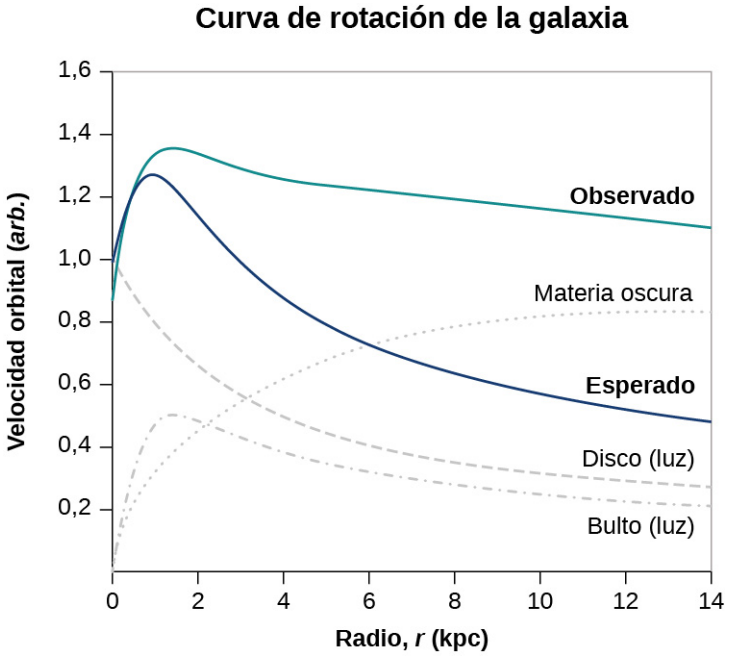


FIGURA 13.32 La curva azul muestra la velocidad orbital esperada de las estrellas de la Vía Láctea en función de las estrellas visibles que podemos ver. La curva verde muestra que las velocidades reales son más altas, lo que sugiere que hay materia adicional que no se ve (créditos: modificación de trabajo de Matthew Newby).

Hay dos ideas predominantes sobre lo que podría ser esta materia: WIMP y MACHO. WIMP significa partículas masivas de interacción débil (interacting massive particles, WIMP). Estas partículas (los neutrinos son un ejemplo) interactúan muy débilmente con la materia ordinaria y, por tanto, son muy difíciles de detectar directamente. MACHO significa objetos compactos masivos del halo (massive compact halo objects, MACHO), los cuales se componen de materia bariónica ordinaria, como neutrones y protones. Ambas ideas tienen aspectos no resueltos, y se necesitará mucha más investigación para resolver el misterio.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

afelio punto más alejado del Sol de un cuerpo en órbita; el término correspondiente para el punto más alejado de la Luna respecto a la Tierra es el apogeo

agujero negro una masa que se vuelve tan densa, que colapsa sobre sí misma, creando una singularidad en el centro rodeada por un horizonte de sucesos

campo gravitacional campo vectorial que rodea a la masa que crea el campo. El campo se representa mediante líneas de campo, en las que la dirección del campo es tangente a las líneas, y la magnitud (o intensidad de campo) es inversamente proporcional a la separación de las líneas. Otras masas responden a este campo.

constante de la gravitación universal constante que representa la fuerza de gravedad, que supuestamente es la misma en todo el universo

espacio-tiempo el concepto de espacio-tiempo es que el tiempo es esencialmente otra coordenada que se trata del mismo modo que cualquier coordenada espacial individual; en las ecuaciones que representan tanto la relatividad especial como la general, el tiempo aparece en el mismo contexto que las coordenadas espaciales

estrella de neutrones objeto más compacto conocido, fuera de un agujero negro

fuerza de acción a distancia tipo de fuerza ejercida sin contacto físico

fuerza de marea *diferencia* entre la fuerza gravitatoria en el centro de un cuerpo y la de cualquier otro lugar del cuerpo; la fuerza de marea estira el cuerpo

geometría no euclidiana geometría de espacio curvo que describe las relaciones entre ángulos y líneas en la superficie de una esfera, un hiperboloide, etc.

horizonte de sucesos ubicación del radio de Schwarzschild, y es el lugar cercano a un agujero negro del que ningún objeto, ni siquiera la luz, puede escapar

la ley de la gravitación de Newton cada masa atrae a cualquier otra masa con una fuerza proporcional al producto de sus masas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre estas, y con dirección a lo largo de la línea que une el centro de masa de cada una

límite gravitacional dos objetos tienen límite gravitacional si sus órbitas son cerradas; los sistemas de limite gravitacional tienen una energía mecánica total negativa

marea muerta marea baja creada cuando la Luna y el Sol forman un triángulo rectángulo con la Tierra

marea viva marea alta creada cuando la Luna, el Sol y la Tierra están a lo largo de una línea

perihelio punto de máxima aproximación al Sol de un cuerpo en órbita; el término correspondiente para la máxima aproximación de la Luna a la Tierra es el perigeo

periodo orbital tiempo necesario para que un satélite complete una órbita

peso aparente lectura del peso de un objeto en una balanza que no tiene en cuenta la aceleración

primera ley de Kepler ley que establece que cada planeta se mueve a lo largo de una elipse, con el Sol situado en un foco de la elipse

principio de equivalencia parte de la teoría general de la relatividad, afirma que no hay diferencia entre caída libre e ingravidez, o un campo gravitacional uniforme y una aceleración uniforme

radio de Schwarzschild radio crítico (R_S) de tal manera que si una masa se comprimiera hasta el punto de que su radio fuera menor que el radio de Schwarzschild, entonces la masa colapsaría hasta convertirse en una singularidad, y cualquier cosa que pasara dentro de ese radio no podría escapar

rapidez orbital rapidez de un satélite en una órbita circular; también se puede utilizar para la rapidez instantánea en órbitas no circulares, donde la velocidad es inconstante

segunda ley de Kepler ley que establece que un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, lo que significa que tiene una velocidad areolar constante

teoría de la relatividad general Teoría de Einstein para gravitación y marcos de referencia acelerados; en esta teoría, la gravitación es el resultado de la masa y la energía que distorsionan el espacio-tiempo a su alrededor; también se suele denominar teoría de la gravedad de Einstein

tercera ley de Kepler ley que establece que el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita

velocidad de escape velocidad inicial que necesita un objeto para escapar de la atracción gravitatoria de otro; se define más exactamente como la velocidad de un objeto con energía

mecánica total nula

Ecuaciones Clave

Ley de la gravitación de Newton	$\vec{\mathbf{F}}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}$
Aceleración debido a gravedad en la superficie de la Tierra	$g = G\frac{M_\text{E}}{r^2}$
Energía potencial gravitacional más allá de la Tierra	$U = -\frac{GM_\text{E}m}{r}$
Conservación de energía	$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$
Velocidad de escape	$v_\text{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
Rapidez orbital	$v_\text{órbita} = \sqrt{\frac{\text{GM}_\text{E}}{r}}$
Periodo orbital	$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\text{GM}_\text{E}}}$
Energía en órbita circular	$E = K + U = -\frac{Gm\text{M}_\text{E}}{2r}$
Secciones cónicas	$\frac{\alpha}{r} = 1 + e\cos\theta$
Tercera ley de Kepler	$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$
Radio de Schwarzschild	$R_\text{S} = \frac{2GM}{c^2}$

Resumen

13.1 Ley de la gravitación universal de Newton

- Todas las masas se atraen entre sí con una fuerza gravitatoria proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.
- Las masas esféricamente simétricas pueden tratarse como si toda su masa estuviera situada en el centro.
- Los objetos asimétricos pueden tratarse como si su masa estuviera concentrada en su centro de masa, siempre que su distancia a otras masas sea grande en comparación con su tamaño.

13.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre

- El peso de un objeto es la atracción gravitatoria entre la Tierra y el objeto.
- El campo gravitacional se representa como líneas que indican la dirección de la fuerza gravitatoria; el espacio entre las líneas indica la intensidad del campo.
- El peso aparente difiere del peso real debido a la aceleración del objeto.

13.3 Energía potencial gravitacional y energía total

- La aceleración debida a la gravedad cambia a medida que nos alejamos de la Tierra, y la expresión de la energía potencial gravitatoria deberá reflejar este cambio.
- La energía total de un sistema es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria, y esta energía total se conserva en el movimiento orbital.
- Los objetos deben tener una velocidad mínima, la velocidad de escape, para salir de un planeta

y no regresar.
- Los objetos con una energía total inferior a cero están ligados; los que tienen cero o más, no están ligados.

13.4 Órbita satelital y energía

- La velocidad orbital se determina por la masa del cuerpo en órbita y la distancia al centro de ese cuerpo, y no por la masa de un objeto en órbita mucho más pequeño.
- El periodo de la órbita también es independiente de la masa del objeto en órbita.
- Cuerpos de masas comparables orbitan alrededor de su centro de masa común y sus velocidades y periodos deben determinarse a partir de la segunda ley de Newton y de la ley de gravitación.

13.5 Leyes del movimiento planetario de Kepler

- Todo movimiento orbital sigue la trayectoria de una sección cónica. Las órbitas limitadas o cerradas son un círculo o una elipse; las órbitas no limitadas o abiertas son una parábola o una hipérbola.
- La velocidad areolar de cualquier órbita es constante, un reflejo de la conservación del momento angular.
- El cuadrado del periodo de una órbita elíptica es proporcional al cubo del semieje mayor de dicha órbita.

13.6 Fuerzas de marea

- Las mareas de la Tierra están causadas por la diferencia de fuerzas gravitatorias de la Luna y el Sol en los distintos lados de la Tierra.
- Las mareas de primavera o de otoño (altas) se producen cuando la Tierra, la Luna y el Sol están alineados, y las mareas de otoño o (bajas) cuando forman un triángulo rectángulo.
- Las fuerzas de marea pueden crear un calentamiento interno, cambios en el movimiento orbital e incluso la destrucción de los cuerpos en órbita.

13.7 La teoría de la gravedad de Einstein

- Según la teoría de la relatividad general, la gravedad es el resultado de las distorsiones del espacio-tiempo creadas por masa y energía.
- El principio de equivalencia establece que tanto la masa como la aceleración distorsionan el espacio-tiempo y son indistinguibles en circunstancias comparables.
- Los agujeros negros, consecuencia del colapso gravitacional, son singularidades con un horizonte de sucesos proporcional a su masa.
- La evidencia de la existencia de agujeros negros sigue siendo circunstancial, pero la cantidad de esa evidencia es abrumadora.

Preguntas Conceptuales

13.1 Ley de la gravitación universal de Newton

1. La acción a distancia, como es el caso de la gravedad, se consideraba antes ilógica y, por tanto, falsa. ¿Cuál es el determinante último de la verdad en la ciencia, y por qué se aceptó finalmente esta acción a distancia?

2. En la ley de la gravitación universal, Newton supuso que la fuerza era proporcional al producto de las dos masas ($\sim m_1 m_2$). Aunque todas las conjeturas científicas deberán verificarse experimentalmente, ¿puede aportar argumentos de por qué debe ser así? (Puede considerar ejemplos sencillos en los que cualquier otra forma llevaría a resultados contradictorios).

13.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre

3. ¿Deben los ingenieros tener en cuenta la rotación de la Tierra a la hora de construir edificios muy altos en cualquier lugar que no sea el ecuador o esté muy cerca de los polos?

13.3 Energía potencial gravitacional y energía total

4. Se ha señalado que un satélite con energía total negativa está en una órbita limitada, mientras que uno con energía total cero o positiva está en una órbita no limitada. ¿Por qué es así? ¿Qué elección de la energía potencial gravitacional se ha hecho para que esto sea cierto?

5. Se demostró que la energía necesaria para elevar un satélite a una órbita terrestre *baja* (el cambio de energía potencial) es apenas una pequeña fracción de la energía cinética necesaria para mantenerlo en órbita. ¿Esto es así para las órbitas más grandes? ¿Existe una tendencia en la relación entre la energía cinética y el cambio en la energía potencial a medida que aumenta el tamaño de la órbita?

13.4 Órbita satelital y energía

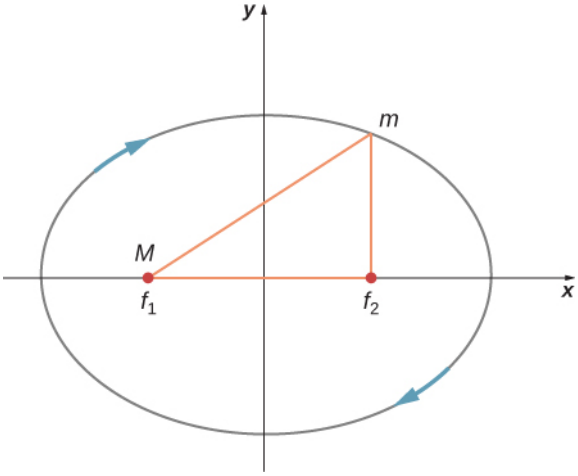
6. Un estudiante argumenta que un satélite en órbita está en caída libre porque sigue cayendo hacia la Tierra. Otro señala que un satélite en órbita no está en caída libre porque la aceleración debida a la gravedad no es $9{,}80\ \text{m/s}^2$. ¿Con quién está de acuerdo y por qué?

7. Muchos satélites se colocan en órbitas geosincrónicas. ¿Qué tienen de especial estas órbitas? Para una red de comunicación global, ¿cuántos de estos satélites serían necesarios?

13.5 Leyes del movimiento planetario de Kepler

8. ¿Las leyes de Kepler son puramente descriptivas o contienen información causal?

9. En el siguiente diagrama de un satélite en órbita elíptica alrededor de una masa mucho mayor, se indica dónde es mayor y dónde menor su velocidad. ¿Qué ley de conservación dicta este comportamiento? Indique las direcciones de la fuerza, la aceleración y la velocidad en estos puntos. Dibuje los vectores de estas mismas tres magnitudes en los dos puntos de intersección del eje *y* (a lo largo del semieje menor) y a partir de ahí determine si la velocidad es creciente decreciente, o está en un máximo/mínimo.



13.6 Fuerzas de marea

10. Cuando un objeto cae en un agujero negro, las fuerzas de marea aumentan. ¿Estas fuerzas de marea desgarrarán siempre el objeto al acercarse al radio de Schwarzschild? ¿Cómo afecta la masa del agujero negro y el tamaño del objeto a tu respuesta?

13.7 La teoría de la gravedad de Einstein

11. El principio de equivalencia establece que todos los experimentos realizados en un laboratorio en un campo gravitacional uniforme no pueden distinguirse de los realizados en un laboratorio que no está en un campo gravitacional, sino que se acelera uniformemente. Para este último caso, considere lo que ocurre con un rayo láser a cierta altura disparado perfectamente en horizontal hacia el suelo, a través del laboratorio en aceleración (vea esto desde un marco no acelerado fuera del laboratorio). En relación con la altura del láser, ¿dónde impactará el rayo láser en la pared más lejana? ¿Qué dice esto sobre el efecto de un campo gravitacional en la luz? ¿El hecho de que la luz no tenga masa supone alguna diferencia en el argumento?

12. Cuando una persona se acerca al radio de Schwarzschild de un agujero negro, los observadores externos ven que todos los procesos de esa persona (sus relojes, su ritmo cardíaco, etc.) se ralentizan y se detienen al llegar al radio de Schwarzschild (la persona que cae en el agujero negro no ve afectados sus propios procesos). Pero la velocidad de la luz es la misma en todas partes para todos los observadores. ¿Qué dice esto sobre el espacio al acercarse al agujero negro?

Problemas

13.1 Ley de la gravitación universal de Newton

13. Evalúe la magnitud de la fuerza gravitatoria entre dos bolas esféricas de acero de 5 kg, separadas por una distancia de centro a centro de 15 cm.

14. Estime la fuerza gravitatoria entre dos luchadores de sumo, con masas de 220 kg y 240 kg, cuando están abrazados y sus centros están a 1,2 m de distancia.

15. La astrología da mucha importancia a la posición de los planetas en el momento del nacimiento. La única fuerza conocida que ejerce un planeta sobre la Tierra es la gravitatoria. (a) Calcule la fuerza gravitatoria que ejerce sobre un bebé de 4,20 kg un padre de 100 kg que se encuentra a 0,200 m de distancia en el momento del nacimiento (está asistiendo, por lo que está cerca del niño). (b) Calcule la fuerza

que ejerce Júpiter sobre el bebé si se encuentra a su máxima distancia de la Tierra, unos $6{,}29 \times 10^{11}$ m lejos. ¿Cómo se compara la fuerza de Júpiter sobre el bebé con la fuerza del padre sobre el bebé? Otros objetos de la habitación y del edificio del hospital también ejercen fuerzas gravitatorias similares. (Por supuesto, podría haber una fuerza desconocida actuando, pero los científicos primero tienen que estar convencidos de que haya siquiera un efecto, y mucho menos de que una fuerza desconocida lo cause).

16. Una montaña situada a 10,0 km de una persona ejerce sobre ella una fuerza gravitatoria igual al 2,00 % de su peso. (a) Calcule la masa de la montaña. (b) Compare la masa de la montaña con la de la Tierra. (c) ¿Qué no es razonable en estos resultados? (d) ¿Qué premisas no son razonables o son incoherentes? (Tenga en cuenta que las mediciones gravitacionales precisas pueden detectar fácilmente el efecto de las montañas cercanas y las variaciones en la geología local).

17. La Estación Espacial Internacional tiene una masa de aproximadamente 370.000 kg. (a) ¿Cuál es la fuerza sobre una astronauta de 150 kg de peso si se encuentra a 20 m del centro de masa de la estación? (b) ¿Qué precisión cree que tendrá su respuesta?



FIGURA 13.33 (créditos: ©ESA-David Ducros).

18. El asteroide Toutatis pasó cerca de la Tierra en 2006 a una distancia cuatro veces superior a la de nuestra Luna. Este fue el mayor acercamiento que tendremos hasta 2060. Si tiene una masa de $5{,}0 \times 10^{13}$ kg, ¿qué fuerza ejerció sobre la Tierra en su máxima aproximación?

19. (a) ¿Cuál fue la aceleración de la Tierra causada por el asteroide Toutatis (ver problema anterior) en su máxima aproximación? (b) ¿Cuál fue la aceleración de Toutatis en ese momento?

13.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre

20. (a) Calcule la masa de la Tierra dado que la aceleración debida a la gravedad en el Polo Norte se mide en $9{,}832\ \text{m/s}^2$ y el radio de la Tierra en el polo es de 6356 km. (b) Compare esto con el valor de la Hoja de Datos de la Tierra de la NASA de $5{,}9726 \times 10^{24}$ kg.

21. (a) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna? (b) ¿En la superficie de Marte? La masa de Marte es $6{,}418 \times 10^{23}$ kg y su radio es $3{,}38 \times 10^{6}$ m.

22. (a) Calcule la aceleración debida a la gravedad en la superficie del Sol. (b) ¿En qué factor aumentaría su peso si pudiera estar de pie en el Sol? (No importa que no pueda).

23. La masa de una partícula es de 15 kg. (a) ¿Cuál es su peso en la Tierra? (b) ¿Cuál es su peso en la Luna? (c) ¿Cuál es su masa en la Luna? (d) ¿Cuál es su peso en el espacio exterior lejos de cualquier cuerpo celeste? (e) ¿Cuál es su masa en este punto?

24. En un planeta cuyo radio es $1{,}2 \times 10^{7}$ m, la aceleración debida a la gravedad es $18\ \text{m/s}^2$. ¿Cuál es la masa del planeta?

25. El diámetro medio del planeta Saturno es $1{,}2 \times 10^{8}$ m, y su densidad de masa media es $0{,}69\ \text{g/cm}^3$. Halle la aceleración debida a la gravedad en la superficie de Saturno.

26. El diámetro medio del planeta Mercurio es $4{,}88 \times 10^{6}$ m, y la aceleración debida a la gravedad en su superficie es $3{,}78\ \text{m/s}^2$. Calcule la masa de este planeta.

27. La aceleración debida a la gravedad en la superficie de un planeta es tres veces mayor que en la superficie de la Tierra. Se sabe que la densidad de la masa del planeta es el doble de la de la Tierra. ¿Cuál es el radio de este planeta en términos del radio de la Tierra?

28. Un cuerpo en la superficie de un planeta con el mismo radio que el de la Tierra pesa 10 veces más que en la Tierra. ¿Cuál es la masa de este planeta en términos de la masa de la Tierra?

13.3 Energía potencial gravitacional y energía total

29. Calcule la velocidad de escape de un proyectil desde la superficie de Marte.

30. Calcule la velocidad de escape de un proyectil desde la superficie de Júpiter.

31. ¿Cuál es la velocidad de escape de un satélite

situado en la órbita de la Luna alrededor de la Tierra? Supongamos que la Luna no está cerca.

32. (a) Evalúe la energía potencial gravitatoria entre dos esferas de acero de 5,00 kg separadas por una distancia de centro a centro de 15,0 cm. (b) Suponiendo que ambas están inicialmente en reposo una respecto de la otra en el espacio profundo, utilice la conservación de la energía para calcular con cuánta rapidez se desplazarán en el momento del impacto. Cada esfera tiene un radio de 5,10 cm.

33. Un asteroide de tamaño medio situado $5{,}0 \times 10^7$ km de la Tierra con masa $2{,}0 \times 10^{13}$ kg se dirige directamente hacia la Tierra a una rapidez de 2,0 km/s. ¿Cuál será su rapidez justo antes de chocar con nuestra atmósfera? (Puede pasar por alto el tamaño del asteroide).

34. a) ¿Cuál será la energía cinética del asteroide del problema anterior justo antes de que choque con la Tierra? b) Compare esta energía con la de la mayor bomba de fisión, 2100 TJ. ¿Qué impacto tendría esto en la Tierra?

35. (a) ¿Cuál es el cambio de energía de una carga útil de 1000 kg tomada en reposo en la superficie de la Tierra y colocada en reposo en la superficie de la Luna? (b) ¿Cuál sería la respuesta si la carga útil fuera llevada desde la superficie de la Luna a la Tierra? ¿Es este un cálculo razonable de la energía necesaria para mover una carga útil de un lado a otro?

13.4 Órbita satelital y energía

36. Si un planeta con 1,5 veces la masa de la Tierra viajara en la órbita terrestre, ¿cuál sería su periodo?

37. Dos planetas en órbitas circulares alrededor de una estrella tienen velocidades de v y $2v$. (a) ¿Cuál es la relación de los radios orbitales de los planetas? (b) ¿Cuál es la relación de sus periodos?

38. Utilizando la distancia media de la Tierra al Sol, y el periodo orbital de la Tierra, (a) calcule la aceleración centrípeta de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. (b) Compare este valor con el de la aceleración centrípeta en el Ecuador debida a la rotación de la Tierra.

39. (a) ¿Cuál es el radio orbital de un satélite terrestre que tiene un periodo de 1,00 h? (b) ¿Qué es lo que no es razonable en este resultado?

40. Calcule la masa del Sol a partir de los datos de la órbita terrestre y compare el valor obtenido con la masa real del Sol.

41. Halle la masa de Júpiter por el hecho de que Io, su luna más interna, tiene un radio orbital medio de 421.700 km y un periodo de 1,77 días.

42. Las observaciones astronómicas de nuestra Vía Láctea indican que tiene una masa de aproximadamente $8{,}0 \times 10^{11}$ masas solares. Una estrella que orbita en la periferia de la galaxia está aproximadamente $6{,}0 \times 10^4$ años luz de su centro. (a) ¿Cuál debería ser el periodo orbital de esa estrella? (b) Si su periodo es $6{,}0 \times 10^7$ años en cambio, ¿cuál es la masa de la galaxia? Estos cálculos se utilizan para implicar la existencia de otra materia, como un agujero negro muy masivo en el centro de la Vía Láctea.

43. (a) Para evitar que un pequeño satélite derive hacia un asteroide cercano, se coloca en una órbita con un periodo de 3,02 horas y un radio de 2,0 km. ¿Cuál es la masa del asteroide? (b) ¿Le parece razonable esta masa para el tamaño de la órbita?

44. La Luna y la Tierra giran en torno a su centro de masa común, que se encuentra a unos 4.700 km del centro de la Tierra. (Esto es a 1.690 km por debajo de la superficie.) (a) Calcule la aceleración debida a la gravedad de la Luna en ese punto. (b) Calcule la aceleración centrípeta del centro de la Tierra al girar alrededor de ese punto una vez cada mes lunar (unos 27,3 d) y compárela con la aceleración hallada en la parte (a). Comente si son o no iguales y por qué deberían o no serlo.

45. El Sol orbita la Vía Láctea una vez cada $2{,}60 \times 10^8$ años, en una órbita aproximadamente circular con un radio promedio de $3{,}00 \times 10^4$ años luz. (Un año-luz es la distancia que recorre la luz en 1 año). Calcule la aceleración centrípeta del Sol en su órbita galáctica. ¿Su resultado apoya la afirmación de que un marco de referencia casi inercial puede localizarse en el Sol? (b) Calcule la rapidez media del Sol en su órbita galáctica. ¿Le sorprende la respuesta?

46. Un satélite terrestre geosincrónico es aquel que tiene un periodo orbital de exactamente 1 día. Estas órbitas son útiles para la comunicación y la observación meteorológica, porque el satélite permanece sobre el mismo punto de la Tierra (siempre que orbite en el plano ecuatorial en la misma dirección que la rotación de la Tierra). Calcule el radio de dicha órbita con base en los datos de la Tierra del Apéndice D.

13.5 Leyes del movimiento planetario de Kepler

47. Calcule la masa del Sol a partir de los datos de la órbita media de la Tierra y compare el valor obtenido con el valor comúnmente indicado del Sol de $1{,}989 \times 10^{30}$ kg.

48. Io orbita alrededor de Júpiter con un radio medio de 421.700 km y un periodo de 1,769 días. Según estos datos, ¿cuál es la masa de Júpiter?

49. El radio orbital "medio" que se indica para objetos astronómicos que orbitan alrededor del Sol no suele ser una media integrada, sino que se calcula de forma que dé el periodo correcto cuando se aplica a la ecuación para órbitas circulares. Teniendo en cuenta esto, ¿cuál es el radio orbital medio en términos de afelio y perihelio?

50. El perihelio del cometa Halley está a 0,586 UA y el afelio a 17,8 UA. Dado que su velocidad en el perihelio es de 55 km/s, ¿cuál es la velocidad en el afelio ($1 \text{ UA} = 1{,}496 \times 10^{11}$ m)? *(Pista:* Puede usar la conservación de la energía o del momento angular, pero esta última es mucho más fácil).

51. El perihelio del cometa Lagerkvist está a 2,61 UA y tiene un periodo de 7,36 años. Demuestre que el afelio de este cometa es de 4,95 UA.

52. ¿Cuál es la relación entre la velocidad en el perihelio y en el afelio del cometa Lagerkvist del problema anterior?

53. Eros tiene una órbita elíptica alrededor del Sol, con una distancia de perihelio de 1,13 UA y de afelio de 1,78 UA. ¿Cuál es el periodo de su órbita?

13.6 Fuerzas de marea

54. (a) ¿Cuál es la diferencia entre las fuerzas sobre una masa de 1,0 kg en el lado cercano de Io y el lado lejano debido a Júpiter? Io tiene un radio medio de 1.821 km y un radio orbital medio en torno a Júpiter de 421.700 km. (b) Compare esta diferencia con la calculada para la Tierra debido a la Luna calculada en el Ejemplo 13.14. Las fuerzas de marea son la causa de la actividad volcánica de Io.

55. Si el Sol se colapsara en un agujero negro, el punto de no retorno para un investigador estaría aproximadamente a 3 km de la singularidad del centro. ¿Podría el investigador sobrevivir a la visita incluso a 300 km del centro? Responda a esto encontrando la diferencia en la atracción gravitatoria que los agujeros negros ejercen sobre una masa de 1,0 kg en la cabeza y en los pies del investigador.

56. Considere la Figura 13.23 en Fuerzas de marea. Este diagrama representa las fuerzas de marea para las mareas vivas. Dibuje un diagrama similar para las mareas muertas. *(Pista:* Para simplificar, imaginemos que el Sol y la Luna contribuyen por igual. Su diagrama sería la suma vectorial de dos campos de fuerza (como en la Figura 13.23), reducida por un factor de dos, y superpuesta en ángulos rectos).

13.7 La teoría de la gravedad de Einstein

57. ¿Cuál es el radio de Schwarzschild para el agujero negro del centro de nuestra galaxia si tiene la masa de 4 millones de masas solares?

58. ¿Cuál sería el radio de Schwarzschild, en años luz, si nuestra galaxia Vía Láctea de 100.000 millones de estrellas colapsara en un agujero negro? Compare esto con nuestra distancia al centro, unos 13.000 años luz.

Problemas Adicionales

59. Una estrella de neutrones es una estrella fría y colapsada con densidad nuclear. Una determinada estrella de neutrones tiene una masa dos veces superior a la de nuestro Sol y un radio de 12,0 km. (a) ¿Cuál sería el peso de un astronauta de 100 kg al pisar su superficie? (b) ¿Qué nos dice esto sobre el aterrizaje en una estrella de neutrones?

60. (a) ¿A qué distancia del centro de la Tierra la fuerza gravitacional neta de la Tierra y de la Luna sobre un objeto sería cero? (b) Si se igualan las *magnitudes* de las fuerzas se obtendrán dos respuestas de la cuadrática. ¿Entiende por qué hay dos posiciones, pero solo una en la que la fuerza neta es cero?

61. ¿A qué distancia del centro del Sol la fuerza gravitacional neta de la Tierra y del Sol sobre una nave espacial sería cero?

62. Calcule los valores de g en la superficie de la Tierra para los siguientes cambios en las propiedades de la Tierra: (a) su masa se duplica y su radio se reduce a la mitad; (b) su densidad de masa se duplica y su radio no cambia; (c) su densidad de masa se reduce a la mitad y su

masa no cambia.

63. Suponga que puede comunicarse con los habitantes de un planeta de otro sistema solar. Le dicen que en su planeta, cuyo diámetro y masa son $5{,}0 \times 10^3$ km y $3{,}6 \times 10^{23}$ kg, respectivamente, el récord de salto de altura es de 2,0 m. Teniendo en cuenta que este récord se acerca a los 2,4 m en la Tierra, ¿qué conclusión sacaría sobre la capacidad de salto de sus amigos extraterrestres?

64. (a) Suponga que su peso medido en el ecuador es la mitad de su peso medido en el polo en un planeta cuya masa y diámetro son iguales a los de la Tierra. ¿Cuál es el periodo de rotación del planeta?; (b) ¿habría que tener en cuenta la forma de este planeta?

65. Un cuerpo de masa de 100 kg se pesa en el polo norte y en el ecuador con una balanza de resorte. ¿Cuál es la lectura de la balanza en estos dos puntos? Supongamos que $g = 9{,}83$ m/s^2 en el poste.

66. Encuentre la velocidad necesaria para escapar del sistema solar partiendo de la superficie de la Tierra. Suponga que no hay otros cuerpos implicados y no tome en cuenta que la Tierra se mueve en su órbita *[Pista:* La Ecuación 13.6 no corresponde. Use la Ecuación 13.5 e incluya la energía potencial tanto de la Tierra como del Sol].

67. Considere el problema anterior e incluya el hecho de que la Tierra tiene una rapidez orbital alrededor del Sol de 29,8 km/s. (a) ¿Qué velocidad respecto a la Tierra sería necesaria y en qué dirección debería salir de la Tierra? (b) ¿Cuál será la forma de la trayectoria?

68. Se observa un cometa a 1,50 UA del Sol con una velocidad de 24,3 km/s. ¿Este cometa está en una órbita ligada o no ligada?

69. Un asteroide tiene una velocidad de 15,5 km/s cuando se encuentra a 2,00 UA del Sol. En su máxima aproximación, se encuentra a 0,400 UA del Sol. ¿Cuál es su velocidad en ese punto?

70. Los desechos espaciales dejados por antiguos satélites y sus lanzadores se están convirtiendo en un peligro para otros satélites. (a) Calcule la velocidad de un satélite en una órbita a 900 km sobre la superficie de la Tierra. (b) Suponga que un remache suelto está en una órbita del mismo radio que interseca la órbita del satélite en un ángulo de 90°. ¿Cuál es la velocidad del remache con respecto al satélite justo antes de chocar con él? (c) Si su masa es de 0,500 g, y llega a reposar dentro del satélite, ¿cuánta energía en julios genera la colisión? (Supongamos que la velocidad del satélite no cambia apreciablemente porque su masa es mucho mayor que la del remache).

71. Un satélite de masa de 1.000 kg está en órbita circular alrededor de la Tierra. El radio de la órbita del satélite es igual a dos veces el radio de la Tierra. (a) ¿A qué distancia está el satélite? (b) Encuentre las energías cinética, potencial y total del satélite.

72. Después de que Ceres fuera ascendido a planeta enano, ahora reconocemos que el mayor asteroide conocido es Vesta, con una masa de $2{,}67 \times 10^{20}$ kg y un diámetro que oscila entre 578 km y 458 km. Suponga que Vesta es esférica con un radio de 520 km y encuentre la velocidad de escape aproximada de su superficie.

73. (a) Dado el asteroide Vesta que tiene un diámetro de 520 km y una masa de $2{,}67 \times 10^{20}$ kg, ¿cuál sería el periodo orbital de una sonda espacial en una órbita circular de 10,0 km desde su superficie? (b) ¿Por qué este cálculo es marginalmente útil en el mejor de los casos?

74. ¿Cuál es la velocidad orbital de nuestro sistema solar en torno al centro de la Vía Láctea? Supongamos que la masa dentro de una esfera de radio igual a nuestra distancia del centro es de unos 100.000 millones de masas solares. Nuestra distancia al centro es de 27.000 años luz.

75. (a) Usando la información del problema anterior, ¿qué velocidad necesita para escapar de la galaxia Vía Láctea desde nuestra posición actual? (b) ¿Necesitaría acelerar una nave espacial a esta velocidad respecto a la Tierra?

76. Las órbitas circulares en la Ecuación 13.10 para secciones cónicas deben tener excentricidad cero. A partir de esto, y usando la segunda ley de Newton aplicada a la aceleración centrípeta, demuestre que el valor de α en la Ecuación 13.10 viene dada por $\alpha = \frac{L^2}{GMm^2}$ donde L es el momento angular del cuerpo en órbita. El valor de α es constante y viene dado por esta expresión independientemente del tipo de órbita.

77. Demuestre que para una excentricidad igual a uno en la Ecuación 13.10 para secciones cónicas, la trayectoria es una parábola. Hágalo sustituyendo las coordenadas cartesianas, x y y, por las coordenadas polares, r y θ, y muestre

que tiene la forma general de una parábola, $x = ay^2 + by + c$.

78. Usando la técnica mostrada en la sección Órbitas de satélites y energía, demuestre que dos masas m_1 y m_2 en órbitas circulares alrededor de su centro de masa común tendrán una energía total $E = K + E = K_1 + K_2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{2r}$. Hemos mostrado la energía cinética de ambas masas de forma explícita *(Pista:* Las masas orbitan a radios r_1 y r_2, respectivamente, donde $r = r_1 + r_2$. Asegúrese de no confundir el radio necesario para la aceleración centrípeta con el de la fuerza gravitacional).

79. Dada la distancia del perihelio, p, y la distancia del afelio, q, para una órbita elíptica, demuestre que la velocidad en el perihelio, v_p, viene dada por $v_p = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Sol}}}{(q+p)}\frac{q}{p}}$. *(Pista:* Use la conservación del momento angular para relacionar v_p y v_q, y luego sustituya en la ecuación de conservación de la energía).

80. El cometa P/1999 R1 tiene un perihelio de 0,0570 UA y un afelio de 4,99 UA. Usando los resultados del problema anterior, encuentre su velocidad en el afelio. *(Pista:* La expresión es para el perihelio. Use la simetría para reescribir la expresión del afelio).

Problemas De Desafío

81. Se excava un túnel a través del centro de un planeta perfectamente esférico y sin aire de radio R. Usando la expresión para g derivada en Gravitación cerca de la superficie terrestre para una densidad uniforme, demuestre que una partícula de masa m lanzada en el túnel ejecutará un movimiento armónico simple. Deduzca el periodo de oscilación de m y demuestre que tiene el mismo periodo que una órbita en la superficie.

82. Siguiendo la técnica empleada en la sección Gravitación cerca de la superficie terrestre, halle el valor de g como una función de radio r desde el centro de un planeta de cáscara esférica de densidad constante ρ con radios interiores y exteriores $_{R_{\text{en}}}$ y $_{R_{\text{fuera}}}$. Encuentre g para ambos $R_{\text{en}} < r < R_{\text{fuera}}$ y para $r < R_{\text{en}}$. Suponga que el interior de la cáscara se mantiene sin aire y describa el viaje dentro del planeta de la cáscara esférica.

83. Demuestre que la velocidad areolar para una órbita circular de radio r alrededor de una masa M es $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\sqrt{GMr}$. ¿Su expresión da el valor correcto de la velocidad areolar de la Tierra alrededor del Sol?

84. Demuestre que el periodo de la órbita para dos masas, m_1 y m_2, en órbitas circulares de radios r_1 y r_2, respectivamente, alrededor de su centro de masa común, viene dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(m_1+m_2)}}$ donde $r = r_1 + r_2$. *(Pista:* Las masas orbitan a radios r_1 y r_2, respectivamente, donde $r = r_1 + r_2$. Use la expresión del centro de masa para relacionar los dos radios y observe que las dos masas deben tener momentos iguales pero opuestos. Comience con la relación del periodo con la circunferencia y la velocidad de la órbita para una de las masas. Use el resultado del problema anterior usando los momentos en las expresiones de la energía cinética).

85. Demuestre que para pequeños cambios en la altura h, tales que $h << \text{R}_\text{E}$, la Ecuación 13.4 se reduce a la expresión $\Delta U = mgh$.

86. Usando la Figura 13.9, dibuje cuidadosamente un diagrama de cuerpo libre para el caso de un péndulo simple colgado en la latitud lambda, y etiquete todas las fuerzas que actúan sobre la masa puntual, m. Establezca las ecuaciones de movimiento para el equilibrio, fije una coordenada en la dirección de la aceleración centrípeta (hacia P en el diagrama) y la otra perpendicular a ella. Demuestre que el ángulo de deflexión ε, definido como el ángulo entre la cuerda del péndulo y la dirección radial hacia el centro de la Tierra, viene dado por la expresión siguiente. ¿Cuál es el ángulo de deflexión a 45 grados de latitud? Supongamos que la Tierra es una esfera perfecta. $\tan(\lambda + \varepsilon) = \frac{g}{(g-\omega^2 R_{\text{E}})}\tan\lambda$, donde ω es la velocidad angular de la Tierra.

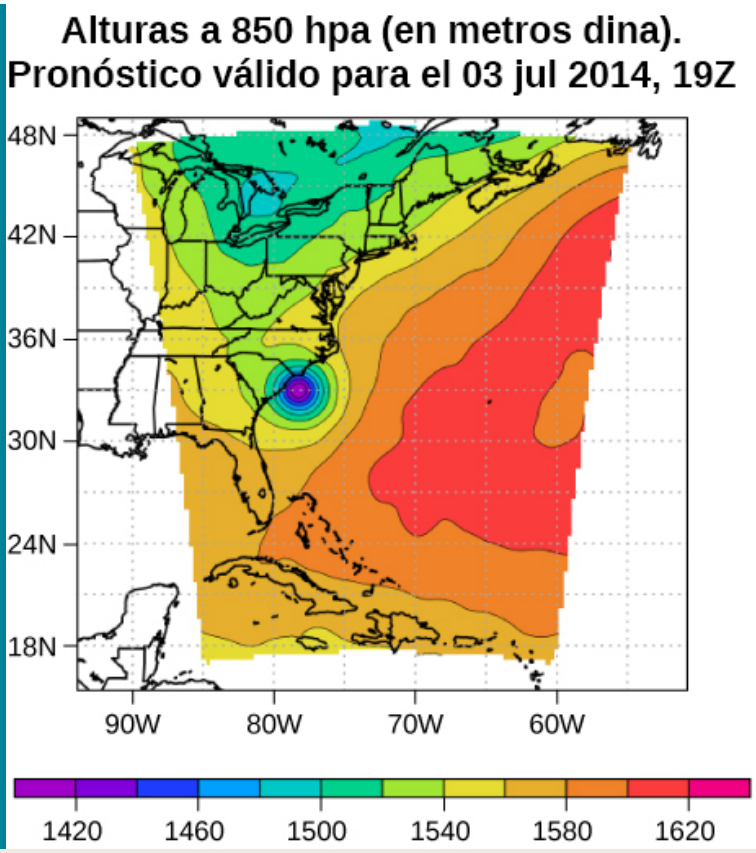
87. (a) Demuestre que la fuerza de marea sobre un pequeño objeto de masa m, definida como la *diferencia* de la fuerza gravitacional que se ejercería sobre m a una distancia en el lado cercano y en el lejano del objeto, debido a la gravitación a una distancia R de M, viene dada por $F_{\text{marea}} = \frac{2GMm}{R^3}\Delta r$ donde Δr es la distancia entre el lado cercano y el lejano y $\Delta r << R$. (b) Suponga que está cayendo de pie en el agujero negro del centro de nuestra galaxia. Tiene una

masa de 4 millones de masas solares. ¿Cuál sería la diferencia entre la fuerza en la cabeza y en los pies en el radio de Schwarzschild (horizonte de sucesos)? Suponga que los pies y la cabeza tienen cada uno una masa de 5,0 kg y están a 2,0 m de distancia. ¿Sobreviviría al atravesar el horizonte de sucesos?

88. Encuentre las velocidades de transferencia de Hohmann, $\Delta v_{\text{ElipseTierra}}$ y $\Delta v_{\text{ElipseMarte}}$, necesario para un viaje a Marte. Use la Ecuación 13.7 para encontrar las velocidades orbitales circulares de la Tierra y Marte. Usando la Ecuación 13.4 y la energía total de la elipse (con semieje mayor *a*), dado por $E = -\frac{GmM_S}{2a}$, encuentre las velocidades en la Tierra (perihelio) y en Marte (afelio) necesarias para estar en la elipse de transferencia. La diferencia, Δv, en cada punto es el aumento de velocidad o la velocidad de transferencia necesaria.

CAPÍTULO 14

Mecánica de fluidos



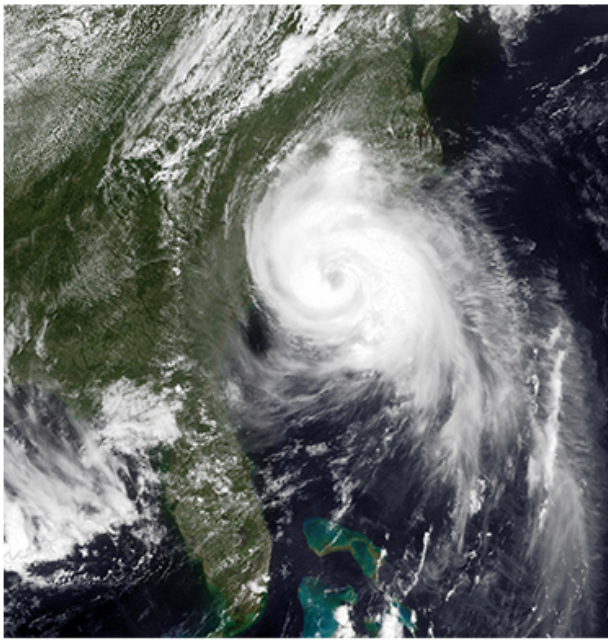


Figura 14.1 Este mapa de presión (izquierda) y la foto de satélite (derecha) se usaron para modelar la trayectoria y el impacto del huracán Arthur en su recorrido por la costa este de los Estados Unidos en julio de 2014. Los modelos informáticos usan ecuaciones de fuerza y energía para predecir patrones meteorológicos en desarrollo. Los científicos integran numéricamente estas ecuaciones dependientes del tiempo, junto con los presupuestos energéticos de la energía solar de ondas larga y corta, para modelar cambios en la atmósfera. El mapa de presión de la izquierda se creó con el modelo de investigación y pronóstico meteorológico diseñado en el Centro Nacional de Investigación Atmosférica. Los colores representan la altura de la superficie de presión de 850 mbar (crédito de la izquierda: modificación del trabajo realizado por el Centro Nacional de Investigación Atmosférica; crédito de la derecha: modificación de trabajo del Laboratorio de Investigación Naval [Naval Research Laboratory, NRL] de la División de Meteorología Marina de Monterey, Oficina Nacional de Administración Oceánica y Atmosférica).

ESQUEMA DEL CAPITULO

14.1 Fluidos, densidad y presión
14.2 Medir la presión
14.3 Principio de Pascal y la hidráulica
14.4 Principio de Arquímedes y flotabilidad
14.5 Dinámicas de fluidos
14.6 Ecuación de Bernoulli
14.7 Viscosidad y turbulencia

INTRODUCCIÓN Imagínese caminando por una playa de la costa oriental de los Estados Unidos. El aire huele

a sal marina y el sol calienta el cuerpo. De repente, aparece una alerta en su teléfono móvil. Una depresión tropical se ha convertido en huracán. La presión atmosférica ha caído casi un 15 % por debajo de la media. Como consecuencia, los meteorólogos esperan lluvias torrenciales, vientos de más de 100 mph y millones de dólares en daños. Mientras se prepara para evacuar, se pregunta: ¿Cómo un descenso tan pequeño de la presión puede provocar un cambio tan intenso en las condiciones meteorológicas?

La presión es un fenómeno físico que es responsable de mucho más que las condiciones meteorológicas. Los cambios de presión hacen que los oídos "se destapen" durante el despegue en un avión. Los cambios de presión también pueden hacer que los buceadores sufran un trastorno, a veces mortal, conocido como "síndrome de descompresión", que se produce cuando el nitrógeno disuelto en el agua del cuerpo a profundidades extremas vuelve a un estado gaseoso en el cuerpo cuando el buceador sale a la superficie. La presión está en el centro del fenómeno llamado flotabilidad, que hace que los globos de aire caliente se eleven y los barcos floten. Antes de poder comprender plenamente el papel que desempeña la presión en estos fenómenos, debemos hablar de los estados de la materia y del concepto de densidad.

14.1 Fluidos, densidad y presión

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Indicar las diferentes fases de la materia.
- Describir las características de las fases de la materia a nivel molecular o atómico.
- Distinguir entre materiales compresibles e incompresibles.
- Definir densidad y sus unidades SI relacionadas.
- Comparar y contrastar las densidades de varias sustancias.
- Definir la presión y sus unidades SI relacionadas.
- Explicar la relación entre presión y fuerza.
- Calcular fuerza dada presión y área.

La materia suele existir en forma sólida, líquida o gaseosa; estos estados se conocen comúnmente como fases de la materia. En esta sección examinaremos en detalle cada una de estas fases.

Características de los sólidos

Los sólidos son rígidos y tienen formas específicas y volúmenes definidos. Los átomos o moléculas de un sólido están muy cerca unos de otros y existe una fuerza importante entre estas moléculas. Los sólidos adoptarán una forma determinada por la naturaleza de estas fuerzas entre las moléculas. Aunque los verdaderos sólidos no son incompresibles, se requiere una gran fuerza para cambiar la forma de un sólido. En algunos casos, la fuerza entre moléculas puede hacer que estas se organicen en una red, como se muestra en la Figura 14.2. La estructura de este entramado tridimensional se representa como moléculas conectadas por enlaces inflexibles (modelados como resortes rígidos), lo cual permite una libertad de movimiento limitada. Incluso una gran fuerza solo produce pequeños desplazamientos en los átomos o las moléculas de la red, y el sólido mantiene su forma. Los sólidos también resisten fuerzas de cizallamiento (fuerzas de cizallamiento son aquellas que se aplican tangencialmente a una superficie, como se describe en la sección Equilibrio estático y elasticidad).

Características de los fluidos

Los líquidos y los gases se consideran **fluidos** porque ceden a las fuerzas de cizallamiento, mientras que los sólidos las resisten. Al igual que los sólidos, las moléculas de un líquido están unidas a las moléculas vecinas, pero poseen muchos menos enlaces. Las moléculas de un líquido no están encerradas en su sitio y se pueden mover unas respecto a otras. La distancia entre moléculas es similar a las distancias en un sólido, por lo que los líquidos tienen volúmenes definidos, pero la forma de un líquido cambia según la forma de su recipiente. Los gases no están unidos a átomos vecinos y pueden tener grandes separaciones entre moléculas. Los gases no tienen formas específicas ni volúmenes definidos, ya que sus moléculas se mueven para llenar el recipiente en el que se encuentran (Figura 14.2).

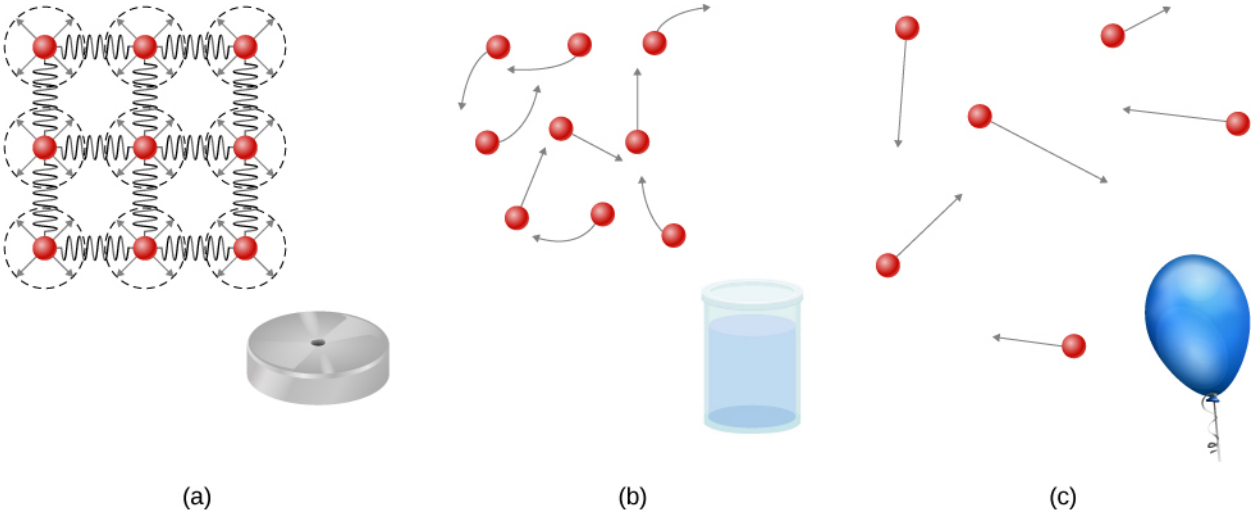


FIGURA 14.2 (a) Los átomos de un sólido están siempre en estrecho contacto con átomos vecinos, y se mantienen en su sitio por fuerzas representadas aquí por resortes. (b) Los átomos de un líquido están también en estrecho contacto pero pueden deslizarse unos sobre otros. Las fuerzas entre los átomos resisten en gran medida intentos de comprimirlos. (c) Los átomos de un gas se mueven libremente y están separados por grandes distancias. Un gas debe mantenerse en un recipiente cerrado para evitar que se expanda libremente y se escape.

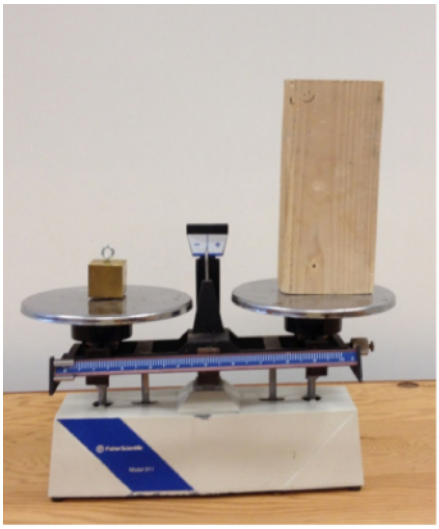
Los líquidos se deforman fácilmente cuando se les somete a estrés y no recuperan su forma original cuando se les retira la fuerza. Esto ocurre porque los átomos o las moléculas de un líquido son libres de deslizarse y cambiar de vecinos. Es decir, los líquidos fluyen (por lo que son un tipo de fluido) y las moléculas se mantienen unidas por atracción mutua. Cuando se coloca un líquido en un recipiente sin tapa, este permanece en el recipiente. Debido a que los átomos están estrechamente empaquetados, los líquidos, al igual que los sólidos, se resisten a la compresión; se necesita una fuerza extremadamente grande para cambiar el volumen de un líquido.

En cambio, los átomos de los gases están separados por grandes distancias, por lo que las fuerzas entre los átomos de un gas son muy débiles, excepto cuando los átomos chocan entre sí. Esto hace que los gases sean relativamente fáciles de comprimir y les permite fluir (lo que los convierte en fluidos). Cuando se colocan en un recipiente abierto, los gases, a diferencia de los líquidos, se escapan.

En este capítulo, generalmente, nos referimos a gases y a líquidos simplemente como fluidos, y haremos una distinción entre ellos solo cuando se comportan de manera diferente. Existe otra fase de la materia, el plasma, que existe a muy altas temperaturas. A altas temperaturas, las moléculas se pueden disociar en átomos, y los átomos se disocian en electrones (con cargas negativas) y protones (con cargas positivas), lo que forma un plasma. El plasma no se tratará en profundidad en este capítulo porque tiene propiedades muy diferentes de las otras tres fases comunes de la materia, tratadas en este capítulo, debido a las fuertes fuerzas eléctricas entre las cargas.

Densidad

Supongamos que un bloque de latón y un bloque de madera tienen exactamente la misma masa. Si se dejan caer ambos bloques en un tanque de agua, ¿por qué la madera flota y el latón se hunde (Figura 14.3)? Esto ocurre porque el latón tiene una densidad mayor que el agua, mientras que la madera tiene una densidad menor que el agua.



(a)



(b)

FIGURA 14.3 (a) Un bloque de latón y un bloque de madera tienen ambos el mismo peso y masa, pero el bloque de madera tiene un volumen mucho mayor. (b) Cuando se coloca en una pecera llena de agua, el cubo de latón se hunde y el bloque de madera flota (el bloque de madera es el mismo en ambas imágenes; se le dio la vuelta para que cupiera en la balanza) (créditos: modificación de trabajos de Joseph J. Trout, Universidad de Stockton).

La **densidad** es una característica importante de las sustancias. Es crucial, por ejemplo, para determinar si un objeto se hunde o flota en un fluido.

Densidad

La densidad media de una sustancia u objeto se define como su masa por unidad de volumen,

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad 14.1$$

donde la letra griega ρ (rho) es el símbolo de la densidad, m es la masa y V es el volumen.

La unidad SI de densidad es kg/m^3. En la Tabla 14.1 se enumeran algunos valores representativos. La unidad de densidad cgs es gramo por centímetro cúbico, g/cm^3, donde

$$1\ \text{g/cm}^3 = 1.000\ \text{kg/m}^3.$$

El sistema métrico se concibió originalmente para que el agua tuviera una densidad de $1\ \text{g/cm}^3$, equivalente a $10^3\ \text{kg/m}^3$ Así, la unidad de masa básica, el kilogramo, se concibió por primera vez como la masa de 1.000 mL de agua, que tiene un volumen de $1.000\ \text{cm}^3$

Sólidos (0,0°C)		**Líquidos (0,0°C)**		**Gases (0,0°C, 101,3 kPa)**	
Sustancia	**$\rho(\text{kg/m}^3)$**	**Sustancia**	**$\rho(\text{kg/m}^3)$**	**Sustancia**	**$\rho(\text{kg/m}^3)$**
Aluminio	$2{,}70 \times 10^3$	Benceno	$8{,}79 \times 10^2$	Aire	$1{,}29 \times 10^0$
Hueso	$1{,}90 \times 10^3$	Sangre	$1{,}05 \times 10^3$	Dióxido de carbono	$1{,}98 \times 10^0$
Latón	$8{,}44 \times 10^3$	Alcohol etílico	$8{,}06 \times 10^2$	Monóxido de carbono	$1{,}25 \times 10^0$

Sólidos (0,0°C)		Líquidos (0,0°C)		Gases (0,0°C, 101,3 kPa)	
Hormigón	$2{,}40 \times 10^{3}$	Gasolina	$6{,}80 \times 10^{2}$	Helio	$1{,}80 \times 10^{-1}$
Cobre	$8{,}92 \times 10^{3}$	Glicerina	$1{,}26 \times 10^{3}$	Hidrógeno	$9{,}00 \times 10^{-2}$
Corcho	$2{,}40 \times 10^{2}$	Mercurio	$1{,}36 \times 10^{4}$	Metano	$7{,}20 \times 10^{-2}$
La corteza terrestre	$3{,}30 \times 10^{3}$	Aceite de oliva	$9{,}20 \times 10^{2}$	Nitrógeno	$1{,}25 \times 10^{0}$
Vidrio	$2{,}60 \times 10^{3}$			Óxido nitroso	$1{,}98 \times 10^{0}$
Oro	$1{,}93 \times 10^{4}$			Oxígeno	$1{,}43 \times 10^{0}$
Granito	$2{,}70 \times 10^{3}$				
Hierro	$7{,}86 \times 10^{3}$				
Plomo	$1{,}13 \times 10^{4}$				
Roble	$7{,}10 \times 10^{2}$				
Pino	$3{,}73 \times 10^{2}$				
Platino	$2{,}14 \times 10^{4}$				
Poliestireno	$1{,}00 \times 10^{2}$				
Tungsteno	$1{,}93 \times 10^{4}$				
Uranio	$1{,}87 \times 10^{3}$				

TABLA 14.1 Densidades de algunas sustancias comunes

Como se puede ver al examinar la Tabla 14.1, la densidad de un objeto puede ayudar a identificar su composición. La densidad del oro, por ejemplo, es unas 2,5 veces la del hierro, que es unas 2,5 veces la del aluminio. La densidad también revela algo sobre la fase de la materia y su subestructura. Obsérvese que las densidades de los líquidos y de los sólidos son más o menos comparables, lo que concuerda con el hecho de que sus átomos están en estrecho contacto. Las densidades de los gases son mucho menores que las de los líquidos y los sólidos porque los átomos de los gases están separados por grandes cantidades de espacio vacío. Los gases se muestran para una temperatura estándar de $0{,}0°C$ y una presión estándar de 101,3 kPa, y existe una fuerte dependencia de las densidades con la temperatura y la presión. Las densidades de los sólidos y los líquidos mostrados se dan para la temperatura estándar de $0{,}0°C$ y las densidades de sólidos y líquidos dependen de la temperatura. La densidad de sólidos y los líquidos aumenta normalmente con la disminución de la temperatura.

La Tabla 14.2 muestra la densidad del agua en varias fases y temperaturas. La densidad del agua aumenta con la disminución de la temperatura, y alcanza un máximo a $4{,}0°C$, y luego disminuye cuando la temperatura cae por debajo de $4{,}0°C$ Este comportamiento de la densidad del agua explica por qué se forma hielo en la parte superior de una masa de agua.

Sustancia	$\rho(\text{kg/m}^3)$
Hielo (0°C)	$9{,}17 \times 10^2$
Agua (0°C)	$9{,}998 \times 10^2$
Agua (4°C)	$1{,}000 \times 10^3$
Agua (20°C)	$9{,}982 \times 10^2$
Agua (100°C)	$9{,}584 \times 10^2$
Vapor (100°C, 101,3 kPa)	$1{,}670 \times 10^2$
Agua de mar (0°C)	$1{,}030 \times 10^3$

TABLA 14.2 Densidades de agua

La densidad de una sustancia no es necesariamente constante en todo su volumen. Si la densidad es constante en toda una sustancia, se dice que es una sustancia homogénea. Una barra de hierro maciza es un ejemplo de sustancia homogénea. La densidad es constante en todo momento, y la densidad de cualquier muestra de la sustancia es la misma que su densidad media. Si la densidad de una sustancia no fuera constante, se dice que es una sustancia heterogénea. Un trozo de queso suizo es un ejemplo de material heterogéneo que contiene tanto el queso sólido como vacíos llenos de gas. La densidad en un lugar específico dentro de un material heterogéneo se llama *densidad local*, y se da como una función de lugar, $\rho = \rho(x, y, z)$ (Figura 14.4).

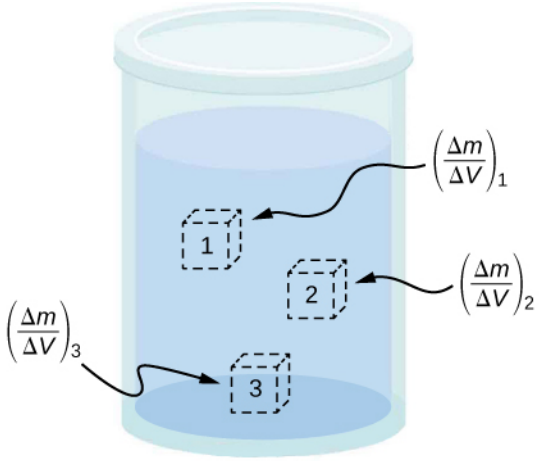


FIGURA 14.4 La densidad puede variar en una mezcla heterogénea. La densidad local en un punto se obtiene de la división de la masa entre el volumen en un pequeño volumen alrededor de un punto dado.

La densidad local se puede obtener mediante un proceso de limitación, basado en la densidad media en un pequeño volumen alrededor del punto en cuestión, tomando el límite en el que el tamaño del volumen se aproxima a cero,

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad 14.2$$

donde ρ es la densidad, m es la masa y V es el volumen.

Dado que los gases son libres de expandirse y contraerse, sus densidades varían considerablemente con la

temperatura, mientras que las densidades de los líquidos varían poco con la temperatura. Por ello, las densidades de los líquidos suelen tratarse como constantes, con la densidad igual a la densidad media.

La densidad es una propiedad dimensional; por lo tanto, al comparar las densidades de dos sustancias hay que tener en cuenta las unidades. Por esto, para comparar densidades se suele usar una cantidad más conveniente y sin dimensiones llamada **gravedad específica**. La gravedad específica se define como la relación entre la densidad del material y la densidad del agua a 4,0 °C y una atmósfera de presión, la cual es $1.000\ \text{kg/m}^3$:

$$\text{Gravedad específica} = \frac{\text{Densidad del material}}{\text{Densidad del agua}}.$$

La comparación usa el agua porque la densidad del agua es $1\ \text{g/cm}^3$, que se usó originalmente para definir el kilogramo. La gravedad específica, al ser sin dimensiones, permite comparar fácilmente los materiales sin tener que preocuparse por la unidad de densidad. Por ejemplo, la densidad del aluminio es de 2,7 en g/cm^3 (2.700 en kg/m^3), pero su gravedad específica es de 2,7, independientemente de la unidad de densidad. La gravedad específica es una magnitud especialmente útil en relación con la flotabilidad, de la que hablaremos más adelante en este capítulo.

Presión

Seguro que ha oído la palabra “presión” en relación con la sangre (presión arterial alta o baja) y en relación con las condiciones meteorológicas (sistemas meteorológicos de alta y baja presión). Estos son solo dos de los muchos ejemplos de presión en fluidos (recordemos que introdujimos la idea de presión en la sección Equilibrio estático y elasticidad, en el contexto de tensión de compresibilidad y tensión).

Presión

La**presión** (p) se define como la fuerza normal F por unidad de superficie A sobre la que se aplica la fuerza, o

$$p = \frac{F}{A}. \qquad 14.3$$

Para definir la presión en un punto específico, se señala como la fuerza dF ejercida por un fluido sobre un elemento infinitesimal de área dA que contiene el punto, lo que genera $p = \frac{dF}{dA}$

Una fuerza determinada puede tener un efecto significativamente diferente, según sea el área sobre la que se ejerce la fuerza. Por ejemplo, una fuerza aplicada a un área de $1\ \text{mm}^2$ tiene una presión que es 100 veces mayor que la misma fuerza aplicada a un área de $1\ \text{cm}^2$. Por eso una aguja afilada es capaz de atravesar la piel cuando se ejerce una pequeña fuerza, pero al aplicar la misma fuerza con un dedo no se perfora la piel (Figura 14.5).

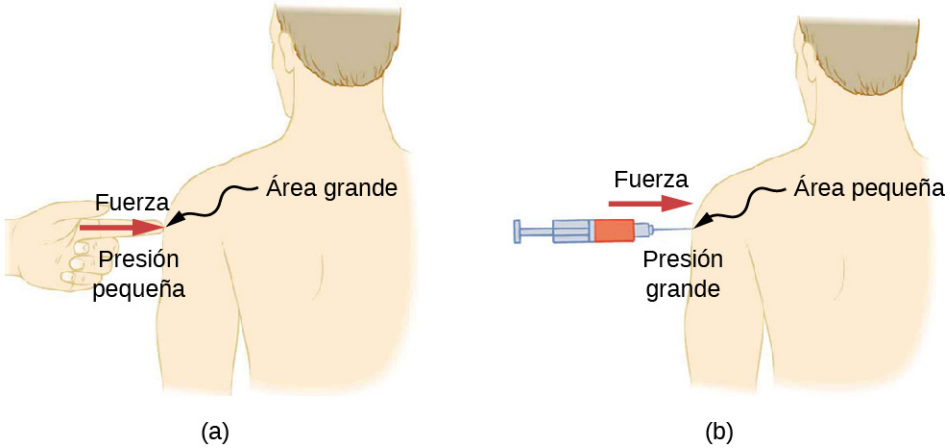


FIGURA 14.5 (a) Una persona a quien se le pincha con un dedo puede irritarse, pero la fuerza tiene un efecto poco duradero. (b) En cambio, la misma fuerza aplicada a un área del tamaño del extremo afilado de una aguja es suficiente para romper la piel.

Tenga en cuenta que aunque la fuerza es un vector, la presión es un escalar. La presión es una cantidad escalar porque se define como proporcional a la magnitud de la fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie. La unidad del SI para la presión es el *pascal* (Pa), llamado así por el matemático y físico francés Blaise Pascal (1623-1662), donde

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2.$$

Para la presión se usan otras unidades, de las que hablaremos más adelante en el capítulo.

Variación de presión con profundidad en un fluido de densidad constante

La presión se define para todos los estados de la materia, pero es especialmente importante cuando se habla de fluidos. Una característica importante de los fluidos es que no existe una resistencia significativa al componente de una fuerza aplicada en paralelo a la superficie de un fluido. Las moléculas del fluido simplemente circulan para acomodar la fuerza horizontal. Una fuerza aplicada perpendicularmente a la superficie comprime o expande el fluido. Si se intenta comprimir un fluido, se observa que se desarrolla una fuerza de reacción en cada punto del interior del fluido en dirección hacia el exterior, lo que equilibra la fuerza aplicada sobre las moléculas en el límite.

Consideremos un fluido de densidad constante como se muestra en la Figura 14.6. La presión en el fondo del recipiente se debe a la presión de la atmósfera (p_0) más la presión debido al peso del fluido. La presión debido al fluido es igual al peso del fluido dividido entre el área. El peso del fluido es igual a su masa por la aceleración debido a la gravedad.

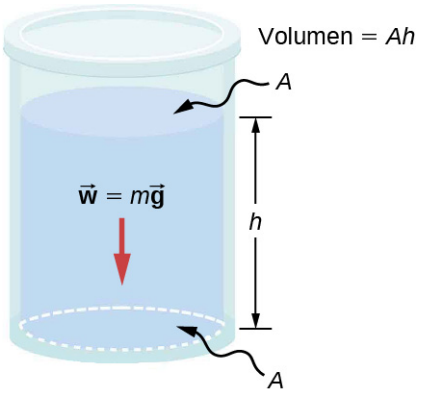


FIGURA 14.6 El fondo de este recipiente soporta todo el peso del fluido que contiene. Los lados verticales no pueden ejercer una fuerza ascendente sobre el fluido (ya que no puede soportar una fuerza de cizallamiento), por lo que el fondo debe soportarlo todo.

Como la densidad es constante, el peso se puede calcular usando la densidad:

$$w = mg = \rho V g = \rho A h g.$$

La presión en el fondo del recipiente es, por tanto, igual a la presión atmosférica sumada al peso del fluido dividido entre el área:

$$p = p_0 + \frac{\rho A h g}{A} = p_0 + \rho h g.$$

Esta ecuación solo sirve para presión a una profundidad para un fluido de densidad constante.

Presión en una profundidad para un fluido de densidad constante

La presión a una profundidad en un fluido de densidad constante es igual a la presión de la atmósfera más la presión debido al peso del fluido, o

$$p = p_0 + \rho h g, \qquad 14.4$$

Donde p es la presión a una profundidad determinada, p_0 es la presión de la atmósfera, ρ es la densidad del fluido, g es la aceleración debido a la gravedad y h es la profundidad.

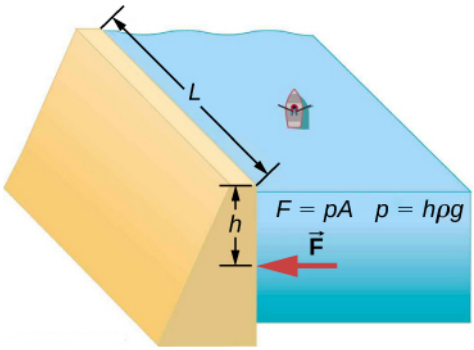


FIGURA 14.7 La presa de las Tres Gargantas, erigida en el río Yangtze en el centro de China en 2008, creó un enorme embalse que desplazó a más de un millón de personas (créditos: modificación de trabajo de “Le Grand Portage”/Flickr).

EJEMPLO 14.1

¿Qué fuerza debe soportar una presa?

Consideremos la presión y la fuerza que actúan sobre la presa que retiene un embalse de agua (Figura 14.7). Supongamos que la presa tiene 500 m de ancho y el agua tiene 80,0 m de profundidad en la presa, como se ilustra a continuación. (a) ¿Cuál es la presión media sobre la presa debido al agua? (b) Calcule la fuerza ejercida contra la presa.



La presión media p debido al peso del agua es la presión a la profundidad media h de 40,0 m, ya que la presión aumenta linealmente con la profundidad. La fuerza ejercida por el agua sobre la presa es la presión media por el área de contacto, $F = pA$.

solución

a. La presión media debido al peso de un fluido es

$$p = h\rho g. \tag{14.5}$$

Al introducir la densidad del agua de la Tabla 14.2 y tomando h como la profundidad media de 40,0 m, obtenemos

$$\begin{aligned} p &= (40{,}0\ \text{m})\left(10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}80\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \\ &= 3{,}92 \times 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 392\ \text{kPa}. \end{aligned}$$

b. Ya hemos encontrado el valor de p. El área de la presa es

$$A = 80{,}0\ \text{m} \times 500\ \text{m} = 4{,}00 \times 10^4\ \text{m}^2,$$

para que

$$\begin{aligned} F &= (3{,}92 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(4{,}00 \times 10^4\ \text{m}^2) \\ &= 1{,}57 \times 10^{10}\ \text{N}. \end{aligned}$$

Importancia

Aunque esta fuerza parece grande, es pequeña comparada con el $1{,}96 \times 10^{13}\,\text{N}$ peso del agua en el embalse. De hecho, es solo el 0,0800 % del peso.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 14.1

Si el embalse del Ejemplo 14.1 cubriera el doble de superficie, pero se mantuviera a la misma profundidad, ¿habría que rediseñar la presa?

Presión en un fluido estático en un campo gravitacional uniforme

Un *fluido estático* es un fluido que no está en movimiento. En cualquier punto dentro de un fluido estático, la presión en todos los lados debe ser igual; de lo contrario, el fluido en ese punto reaccionaría a una fuerza neta y se aceleraría.

La presión en cualquier punto de un fluido estático depende únicamente de la profundidad en ese punto. Como se ha comentado, la presión de un fluido cerca de la Tierra varía con la profundidad debido al peso del fluido por encima de un nivel determinado. En los ejemplos anteriores hemos supuesto que la densidad es constante y que la densidad media del fluido es una buena representación de la densidad. Esta es una aproximación razonable para líquidos como el agua, donde se requieren grandes fuerzas para comprimir el líquido o cambiar el volumen. En una piscina, por ejemplo, la densidad es aproximadamente constante, y el agua del fondo se comprime muy poco por el peso del agua de arriba. Sin embargo, viajar por la atmósfera es una situación muy diferente. La densidad del aire comienza a cambiar significativamente a poca distancia de la superficie de la Tierra.

Para obtener una fórmula de la variación de la presión con la profundidad en un tanque que contiene un fluido de densidad ρ en la superficie de la Tierra, debemos partir de la hipótesis de que la densidad del fluido no es constante. El fluido situado en niveles más profundos está sometido a más fuerza que el fluido más cercano a la superficie debido al peso del fluido que está por encima. Por lo tanto, la presión calculada a una profundidad determinada es diferente de la presión calculada usando una densidad constante.

Imagine un elemento delgado de fluido a una profundidad h, como se muestra en la Figura 14.8. Supongamos que el elemento tenga un área de sección transversal A y una altura Δy Las fuerzas que actúan sobre el elemento son debido a las presiones $p(y)$ por encima y $p\,(y + \Delta y)$ debajo de ella. El peso del propio elemento

también se muestra en el diagrama de cuerpo-libre.

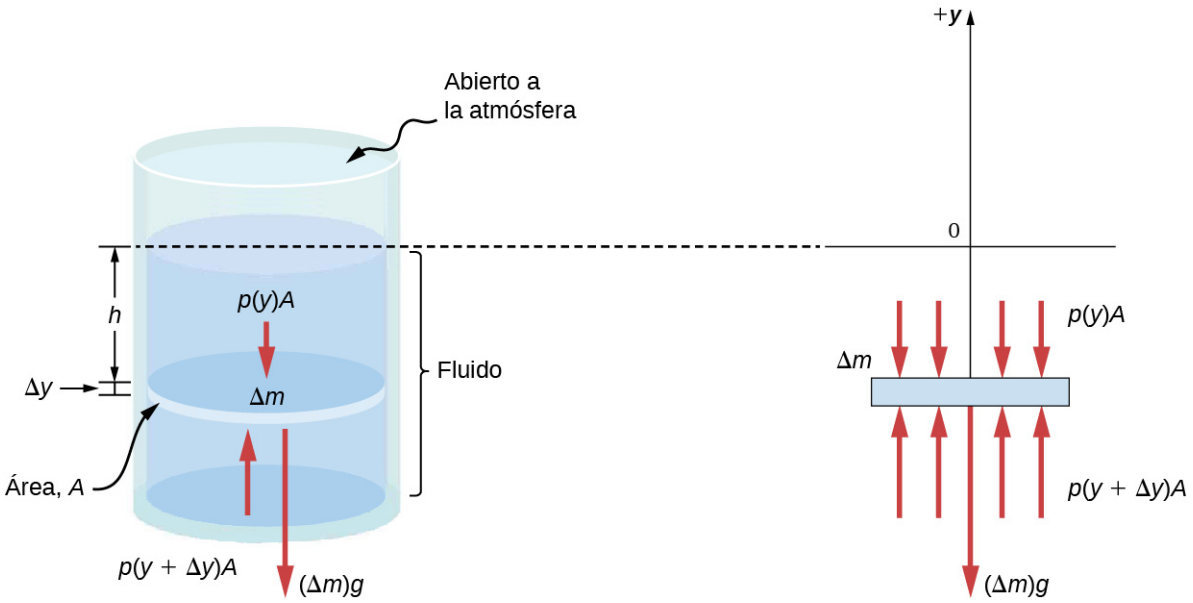


FIGURA 14.8 Fuerzas sobre un elemento de masa dentro de un fluido. El peso del propio elemento se muestra en el diagrama de cuerpo-libre.

Dado que el elemento de fluido entre y y $y + \Delta y$ no se acelera, las fuerzas están equilibradas. Usando un eje cartesiano $y$orientado hacia arriba, encontramos la siguiente ecuación para el componente y:

$$p\,(y + \Delta y)\,A - p\,(y)\,A - g\Delta m = 0 (\Delta y < 0). \qquad \textbf{14.6}$$

Obsérvese que si el elemento tuviera un componente de aceleración $y$distinto de cero, el lado derecho no sería cero, sino que sería la masa por la aceleración y. La masa del elemento se puede escribir en términos de la densidad del fluido y del volumen de los elementos:

$$\Delta m = |\rho A \Delta y| = -\rho A \Delta y \quad (\Delta y < 0)\,.$$

Al poner esta expresión para Δm en la Ecuación 14.6 y luego dividir ambos lados entre $A\Delta y$, encontramos

$$\frac{p(y + \Delta y) - p(y)}{\Delta y} = -\rho g. \qquad \textbf{14.7}$$

Al tomar el límite del elemento infinitesimal $\Delta y \to 0$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial, la cual da la variación de la presión en un fluido:

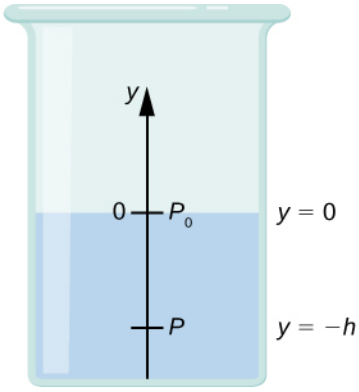
$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \qquad \textbf{14.8}$$

Esta ecuación nos dice que la tasa de cambio de presión en un fluido es proporcional a su densidad. La solución de esta ecuación depende de si la densidad ρ es constante o cambia con la profundidad, es decir, de la función $\rho(y)$.

Si el rango de la profundidad analizada no es demasiado grande, podemos suponer que la densidad es constante. Pero si el rango de profundidad es lo suficientemente grande como para que la densidad varíe de forma apreciable, como en el caso de la atmósfera, hay un cambio significativo en densidad con profundidad. En ese caso, no podemos usar la aproximación de una densidad constante.

Presión en un fluido con densidad constante

Usemos la Ecuación 14.9 para elaborar una fórmula de la presión a una profundidad h de la superficie en un tanque de un líquido como agua, donde la densidad del líquido se puede tomar como constante.



Tenemos que integrar la Ecuación 14.9 de $y = 0$, donde la presión es la presión atmosférica (p_0), hasta $y = -h$, la coordenada $y$de la profundidad:

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p} dp &= -\int_{0}^{-h} \rho g dy \\ p - p_0 &= \rho g h \\ p &= p_0 + \rho g h. \end{aligned} \qquad 14.9$$

Por lo tanto, la presión a una profundidad del fluido en la superficie de la Tierra es igual a la presión atmosférica más ρgh si la densidad del fluido es constante a lo largo de la altura, como hemos comprobado anteriormente.

Obsérvese que la presión en un fluido solo depende de la profundidad desde la superficie y no de la forma del recipiente. Así, en un recipiente en el que un fluido puede moverse libremente en varias partes, el líquido se mantiene al mismo nivel en cada parte, independientemente de la forma, como se muestra en la Figura 14.9.



FIGURA 14.9 Si un fluido puede circular libremente entre las partes de un recipiente, sube a la misma altura en cada una de ellas. En el recipiente de la imagen, la presión en el fondo de cada columna es la misma; si no lo fuera, el fluido circularía hasta que las presiones se igualaran.

Variación de la presión atmosférica con la altura

El cambio de la presión atmosférica con la altura es de especial interés. Supongamos que la temperatura del aire es constante, y que la ley de termodinámica de los gases ideales describe la atmósfera con una buena aproximación, podemos encontrar la variación de la presión atmosférica con la altura, cuando la temperatura es constante (analizaremos la ley de los gases ideales en un capítulo posterior, pero suponemos que está familiarizado con ella desde la escuela secundaria y la química). Supongamos que $p(y)$ es la presión atmosférica a la altura y. La densidad ρ en y, la temperatura T en la escala Kelvin (K) y la masa m de una molécula de aire están relacionadas con la presión absoluta por la ley de los gases ideales, en la forma

$$p = \rho \frac{k_B T}{m} \text{ (atmósfera)}, \qquad 14.10$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, que tiene un valor de $1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

Es posible que haya encontrado la ley de los gases ideales en la forma $pV = nRT$, donde n es el número de

moles y R es la constante del gas. Aquí, la misma ley se ha escrito de forma diferente, usando la densidad ρ en vez del volumen V. Por lo tanto, si la presión p cambia con la altura, también lo hace la densidad ρ. Usando la densidad de la ley de los gases ideales, la tasa de variación de la presión con la altura viene dada por

$$\frac{dp}{dy} = -p\left(\frac{mg}{k_\mathrm{B}T}\right),$$

donde las cantidades constantes se han recogido dentro de los paréntesis. Al sustituir estas constantes por un único símbolo α, la ecuación parece mucho más sencilla:

$$\begin{aligned}
\tfrac{dp}{dy} &= -\alpha p \\
\tfrac{dp}{p} &= -\alpha dy \\
\int_{p_0}^{p(y)} \tfrac{dp}{p} &= \int_0^y -\alpha dy \\
[\ln(p)]_{p_0}^{p(y)} &= [-\alpha y]_0^y \\
\ln(p) - \ln(p_0) &= -\alpha y \\
\ln\left(\tfrac{p}{p_0}\right) &= -\alpha y
\end{aligned}$$

Esto da la solución

$$p(y) = p_0 \exp(-\alpha y).$$

Así, la presión atmosférica desciende exponencialmente con la altura, ya que el eje y apunta hacia arriba desde el suelo y y tiene valores positivos en la atmósfera por encima del nivel del mar. La presión se reduce en un factor de $\frac{1}{e}$ cuando la altura es $\frac{1}{\alpha}$, que nos da una interpretación física para α: La constante $\frac{1}{\alpha}$ es una escala de longitud que caracteriza cómo varía la presión con la altura y, a menudo, se denomina altura de la escala de presión.

Podemos obtener un valor aproximado de α usando la masa de una molécula de nitrógeno como sustituto de una molécula de aire. A una temperatura de 27 °C, o 300 K, encontramos

$$\alpha = -\frac{mg}{k_\mathrm{B}T} = \frac{4{,}8 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg} \times 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \times 300\ \mathrm{K}} = \frac{1}{8.800\ \mathrm{m}}.$$

Por lo tanto, por cada 8.800 metros, la presión del aire disminuye en un factor $1/e$, es decir, aproximadamente un tercio de su valor. Esto solo nos da una estimación aproximada de la situación real, ya que hemos asumido tanto una temperatura como un g constantes a distancias tan grandes de la Tierra, ninguno de los cuales es correcto en la realidad.

Dirección de la presión en un fluido

La presión de los fluidos no tiene dirección, ya que es una cantidad escalar, mientras que las fuerzas debido a la presión tienen direcciones bien definidas: Siempre se ejercen perpendicularmente a cualquier superficie. La explicación es que los fluidos no pueden soportar ni ejercer fuerzas de cizallamiento. Así, en un fluido estático encerrado en un tanque, la fuerza ejercida sobre sus paredes se ejerce perpendicularmente a la superficie interior. Asimismo, la presión se ejerce perpendicularmente a las superficies de cualquier objeto dentro del fluido. La Figura 14.10 ilustra la presión que ejerce el aire sobre las paredes de un neumático y por el agua sobre el cuerpo de un nadador.

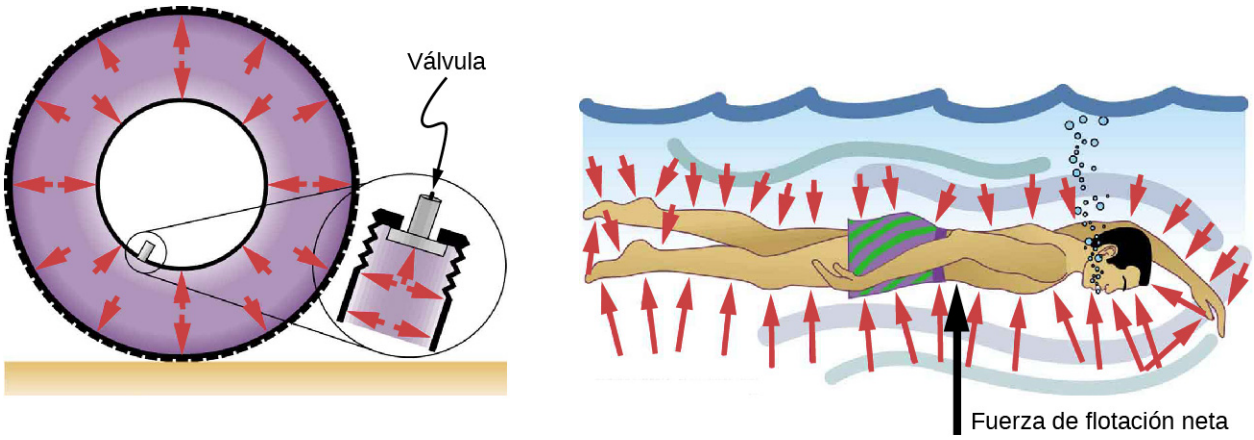


FIGURA 14.10 (a) La presión en el interior de este neumático ejerce fuerzas perpendiculares a todas las superficies con las que entra en contacto. Las flechas representan las direcciones y magnitudes de las fuerzas ejercidas en varios puntos. (b) La presión se ejerce perpendicularmente a todos los lados de este nadador, ya que el agua fluiría en el espacio que él ocupa si no estuviera allí. Las flechas representan las direcciones y magnitudes de las fuerzas ejercidas en varios puntos del nadador. Obsérvese que las fuerzas son mayores por debajo, debido a la mayor profundidad, dando una fuerza neta ascendente o fuerza de flotación. La fuerza vertical neta sobre el nadador es igual a la suma de la fuerza de flotación y el peso del nadador.

14.2 Medir la presión

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Definir presión manométrica y presión absoluta.
- Explicar distintos métodos para medir la presión.
- Comprender el funcionamiento de barómetros de tubo abierto.
- Describir detalladamente cómo funcionan manómetros y barómetros.

En la sección anterior, derivamos una fórmula para calcular la variación de la presión para un fluido en equilibrio hidrostático. Resulta que es un cálculo muy útil. Las mediciones de la presión son importantes tanto en la vida cotidiana como en aplicaciones científicas y de ingeniería. En esta sección, analizaremos las diferentes formas en que se puede registrar y medir la presión.

Presión manométrica vs. presión absoluta

Supongamos que el manómetro de un tanque de buceo lleno marca 3000 psi, lo que equivale a 207 atmósferas aproximadamente. Cuando se abre la válvula, el aire comienza a escapar porque la presión interna del tanque es mayor que la presión atmosférica fuera del tanque. El aire sigue saliendo del tanque hasta que la presión interna del tanque es igual a la presión de la atmósfera fuera del tanque. En este punto, el manómetro del tanque marca cero, aunque la presión interna del tanque es en realidad de 1 atmósfera, la misma que la presión del aire fuera del tanque.

La mayoría de los manómetros, como el del tanque de buceo, están calibrados para leer cero a la presión atmosférica. Las lecturas de presión de estos medidores se denominan **presión manométrica**, que es la presión relativa a la presión atmosférica. Cuando la presión interna del tanque es superior a la presión atmosférica, el medidor registra un valor positivo.

Algunos medidores están diseñados para medir presión negativa. Por ejemplo, muchos experimentos de física se deben llevar a cabo en una cámara de vacío, una cámara rígida de la que se extrae parte del aire. La presión interna de la cámara de vacío es menor que la presión atmosférica, por lo que el manómetro de la cámara lee un valor negativo.

A diferencia de la presión manométrica, la **presión absoluta** tiene en cuenta la presión atmosférica, la cual en

efecto se suma a la presión de cualquier fluido que no esté encerrado en un recipiente rígido.

Presión absoluta

La presión absoluta, o presión total, es la suma de la presión manométrica y la presión atmosférica:

$$p_{\text{abs}} = p_{\text{g}} + p_{\text{atm}} \qquad \textbf{14.11}$$

donde p_{abs} es la presión absoluta, p_{g} es la presión manométrica y p_{atm} es la presión atmosférica.

Por ejemplo, si un medidor de aire para neumáticos marca 34 psi, la presión absoluta es 34 psi más 14,7 psi (p_{atm} en psi) o 48,7 psi (equivalente a 336 kPa).

En la mayoría de los casos, la presión absoluta en fluidos no puede ser negativa. Los fluidos tienden a empujar más que a halar, por lo que la menor presión absoluta en un fluido es cero (una presión absoluta negativa es un halón). Así, la menor presión manométrica posible es $p_{\text{g}} = -p_{\text{atm}}$ (que hace p_{abs} cero). No existe un límite teórico para la magnitud de la presión manométrica.

Medir la presión

Para medir la presión se usan una variedad de dispositivos que van desde medidores de aire para neumáticos hasta tensiómetros. Para comprobar la presión de los fluidos se usan habitualmente otros tipos de manómetros, como los manómetros mecánicos. En esta sección exploraremos algunos de ellos.

Cualquier propiedad que cambie con la presión de forma conocida se puede usar para construir un manómetro. Algunos de los tipos más comunes son los extensómetros, lo cuales usan el cambio de forma de un material con la presión; los manómetros de capacidad, los cuales usan el cambio de capacidad eléctrica debido al cambio de forma con la presión; los manómetros piezoeléctricos, los cuales generan una diferencia de voltaje a través de un material piezoeléctrico con una diferencia de presión entre los dos lados; y los medidores de iones, los cuales miden la presión mediante ionización de moléculas en cámaras altamente evacuadas. Los diferentes manómetros son útiles en diferentes rangos de presión y en diferentes situaciones físicas. Algunos ejemplos se muestran en Figura 14.11.



(a) (b) (c)

FIGURA 14.11 a) Los medidores se usan para medir y monitorear la presión en cilindros de gas. Los gases comprimidos se usan en muchas aplicaciones industriales y médicas. (b) Hay muchos modelos diferentes para los medidores de aire para neumáticos, pero todos tienen el mismo propósito: medir la presión interna del neumático. Estos permiten que conductor mantenga los neumáticos inflados a la presión óptima para el peso de la carga y las condiciones de conducción. (c) Un medidor de ionización es un dispositivo de alta sensibilidad que se usa para monitorear la presión de los gases en un sistema cerrado. Las moléculas de gas neutro se ionizan por la liberación de electrones, y la corriente se traduce en una lectura de presión. Los medidores de ionización se usan habitualmente en aplicaciones industriales que dependen de sistemas de vacío.

Manómetros

Una de las clases más importantes de manómetros aplica la propiedad de que la presión debido al peso de un fluido de densidad constante viene dada por $p = h\rho g$. El tubo en forma de U que se muestra en la Figura 14.12 es un ejemplo de *manómetro*; en la parte (a), ambos lados del tubo están abiertos a la atmósfera, lo que

permite que la presión atmosférica empuje hacia abajo en cada lado por igual para que sus efectos se anulen.

Un manómetro con un solo lado abierto a la atmósfera es un dispositivo ideal para medir presiones manométricas. La presión manométrica es $p_g = h\rho g$ y se encuentra al medir h. Por ejemplo, supongamos que un lado del tubo en U está conectado a alguna fuente de presión p_{abs}, como el globo de la parte (b) de la figura o el tarro de cacahuetes envasado al vacío que se muestra en la parte (c). La presión se transmite sin disminuir al manómetro, y los niveles de fluido ya no son iguales. En la parte (b), p_{abs} es mayor que la presión atmosférica, mientras que en la parte (c), p_{abs} es menor que la presión atmosférica. En ambos casos, p_{abs} difiere de la presión atmosférica en una cantidad $h\rho g$, donde ρ es la densidad del fluido en el manómetro. En la parte (b), p_{abs} puede soportar una columna de fluido de altura h, por lo que debe ejercer una presión $h\rho g$ mayor que la presión atmosférica (la presión manométrica p_g es positiva). En la parte (c), la presión atmosférica puede soportar una columna de fluido de altura h, por lo que p_{abs} es menor que la presión atmosférica en una cantidad $h\rho g$ (la presión manométrica p_g es negativa).

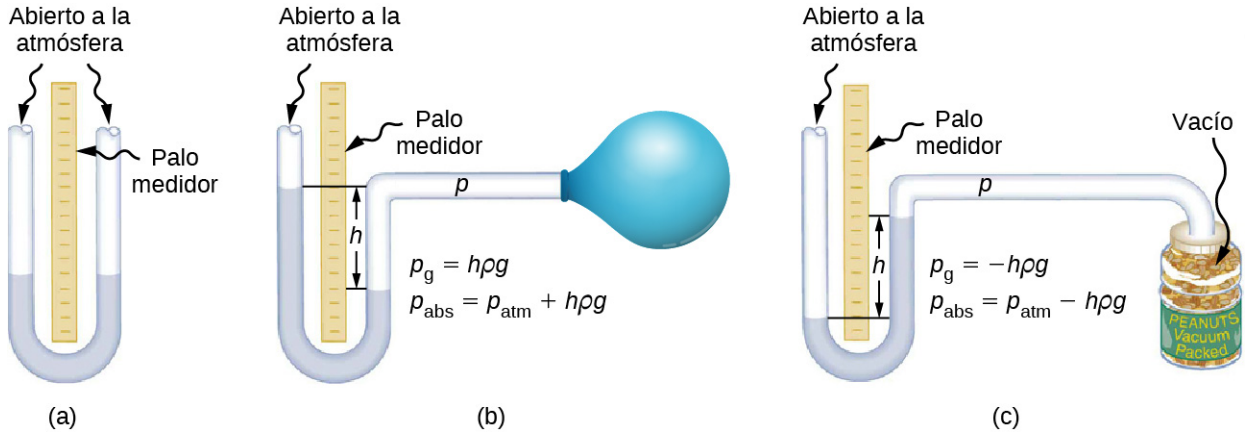


FIGURA 14.12 Un manómetro de tubo abierto tiene un lado abierto a la atmósfera. (a) La profundidad del fluido debe ser la misma en ambos lados, o la presión que cada lado ejerce en el fondo será desigual y el líquido fluirá desde el lado más profundo. (b) Una presión manométrica positiva $p_g = h\rho g$ transmitida a un lado del manómetro puede soportar una columna de fluido de altura h. (c) Del mismo modo, la presión atmosférica es mayor que una presión manométrica negativa p_g por una cantidad $h\rho g$. La rigidez del tarro impide que la presión atmosférica se transmita a los cacahuetes.

Barómetros

Los manómetros suelen usar un tubo en forma de U con un fluido (a menudo mercurio) para medir la presión. Un *barómetro* (véase la Figura 14.13) es un dispositivo que suele usar una sola columna de mercurio para medir presión atmosférica. El barómetro, inventado por el matemático y físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) en 1643, se construye a partir de un tubo de vidrio cerrado por un extremo y lleno de mercurio. A continuación, se invierte el tubo y se coloca en una piscina de mercurio. Este dispositivo mide la presión atmosférica, en vez de la presión manométrica, porque hay un vacío casi puro por encima del mercurio en el tubo. La altura del mercurio es tal que $h\rho g = p_{atm}$. Cuando la presión atmosférica varía, el mercurio sube o baja.

Los meteorólogos monitorean de cerca los cambios en la presión atmosférica (a menudo denominada presión barométrica) en el entendido de que el aumento del mercurio suele indicar una mejora de las condiciones meteorológicas y el descenso del mercurio indica un deterioro. El barómetro también se puede usar como un altímetro, toda vez que la presión atmosférica media varía con la altitud. Los barómetros y manómetros de mercurio son tan comunes que, a menudo, se citan unidades de mm Hg para la presión atmosférica y la presión arterial.

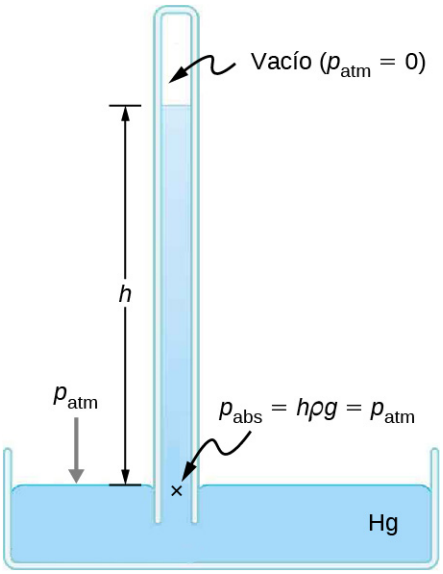


FIGURA 14.13 Un barómetro de mercurio mide presión atmosférica. La presión debido al peso del mercurio, $h\rho g$, es igual a la presión atmosférica. La atmósfera es capaz de forzar el mercurio en el tubo hasta una altura h porque la presión sobre el mercurio es cero.

EJEMPLO 14.2

Alturas de los fluidos en un tubo en U abierto

Un tubo en U con ambos extremos abiertos se llena con un líquido de densidad ρ_1 a una altura h en ambos lados (Figura 14.14). Un líquido de densidad $\rho_2 < \rho_1$ se vierte en un lado y el líquido 2 se deposita sobre el líquido 1. Las alturas de los dos lados son diferentes. La altura hasta el tope del líquido 2 desde la interfase es h_2 y la altura hasta el tope del líquido 1 desde el nivel de la interfase es h_1. Deduzca una fórmula para la diferencia de altura.

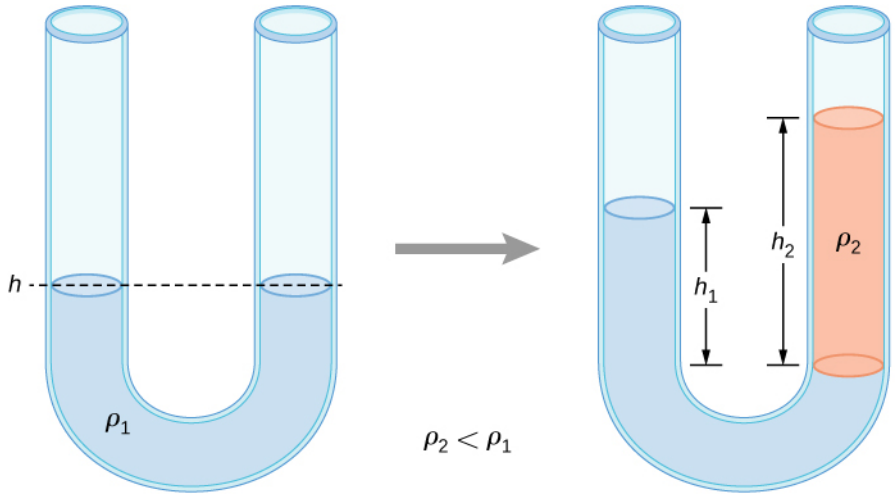


FIGURA 14.14 En un tubo en U se muestran dos líquidos de diferente densidad.

Estrategia

La presión en los puntos situados a la misma altura en los dos lados de un tubo en U debe ser la misma mientras los dos puntos estén en el mismo líquido. Por lo tanto, consideramos dos puntos al mismo nivel en los dos brazos del tubo: un punto es la interfase en el lado del líquido 2 y el otro es un punto en el brazo con líquido 1 que está al mismo nivel que la interfase en el otro brazo. La presión en cada punto se debe a la presión atmosférica más el peso del líquido que está encima.

$$\text{Presión en el lado con líquido 1} = p_0 + \rho_1 g h_1$$
$$\text{Presión en el lado con líquido 2} = p_0 + \rho_2 g h_2$$

Solución

Como los dos puntos están en el líquido 1 y están a la misma altura, la presión en los dos puntos debe ser la misma. Por lo tanto, tenemos

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2.$$

Por lo tanto,

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2.$$

Esto significa que la diferencia de alturas en los dos lados del tubo en U es

$$h_2 - h_1 = \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) h_2.$$

El resultado tiene sentido si ponemos $\rho_2 = \rho_1$, que da $h_2 = h_1$. Si los dos lados tienen la misma densidad, tienen la misma altura.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 14.2

El mercurio es una sustancia peligrosa. ¿Por qué cree que se suele usar mercurio en los barómetros en vez de un fluido más seguro como el agua?

Unidades de presión

Como ya se ha dicho, la unidad del Sistema Internacional (SI) para presión es el pascal (Pa), donde

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2.$$

Además del pascal, hay muchas otras unidades de presión de uso común (Tabla 14.3). En meteorología, la presión atmosférica se suele describir en la unidad de milibares (mbar), donde

$$1.000 \text{ mbar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

El milibar es una unidad conveniente para los meteorólogos porque la presión atmosférica media a nivel del mar en la Tierra es $1{,}013 \times 10^5$ Pa $= 1.013$ mbar $= 1$ atm. Usando las ecuaciones derivadas al considerar la presión a una profundidad en un fluido, la presión también puede medirse en milímetros o pulgadas de mercurio. La presión en el fondo de una columna de mercurio de 760 mm a 0 °C en un recipiente cuyo tope está evacuado es igual a la presión atmosférica. Así, también se usa 760 mm Hg en vez de 1 atmósfera de presión. En los laboratorios de física del vacío, los científicos suelen usar otra unidad llamada torr, que recibe el nombre de Torricelli, quien, como acabamos de ver, inventó el manómetro de mercurio para medir presión. Un torr equivale a una presión de 1 mm Hg.

Unidad	Definición
Unidad del SI: el Pascal	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
Unidad inglesa: libras por pulgada cuadrada (lb/in^2 o psi)	$1 \text{ psi} = 6{,}895 \times 10^3$ Pa
Otras unidades de presión	$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$ $= 1{,}013 \times 10^5$ Pa $= 14{,}7$ psi $= 29{,}9$ pulgadas de Hg $= 1.013$ mbar

Unidad	Definición
	$1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa}$
	$1\ \text{torr} = 1\ \text{mm Hg} = 133{,}3\ \text{Pa}$

TABLA 14.3 Resumen de las unidades de presión

14.3 Principio de Pascal y la hidráulica

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Enunciar el principio de Pascal.
- Describir aplicaciones del principio de Pascal.
- Derivar relaciones entre fuerzas en un sistema hidráulico.

En 1653, el filósofo y científico francés Blaise Pascal publicó su *Tratado sobre el equilibrio de los líquidos*, en el cual trataba los principios de los fluidos estáticos. Un fluido estático es un fluido que no está en movimiento. Cuando un fluido no circula, decimos que el fluido está en equilibrio estático. Si el fluido es agua, decimos que está en **equilibrio hidrostático**. Para un fluido en equilibrio estático, la fuerza neta sobre cualquier parte del fluido debe ser cero; de lo contrario, el fluido comenzará a fluir.

Las observaciones de Pascal —demostradas experimentalmente— sientan las bases de la hidráulica, uno de los desarrollos más importantes de la tecnología mecánica moderna. Pascal observó que un cambio de presión aplicado a un fluido encerrado se transmite sin disminuir a todo el fluido y a las paredes de su recipiente. Por ello, a menudo, sabemos más sobre la presión que sobre otras magnitudes físicas de los fluidos. Además, el principio de Pascal implica que la presión total en un fluido es la suma de las presiones de diferentes fuentes. Un buen ejemplo es que el fluido a una profundidad depende de la profundidad del fluido y de la presión de la atmósfera.

Principio de Pascal

El**principio de Pascal** (también conocido como ley de Pascal) establece que, cuando se aplica un cambio de presión a un fluido encerrado, este se transmite sin disminuir a todas las porciones del fluido y a las paredes de su recipiente. En un fluido cerrado, como los átomos del fluido son libres de moverse transmiten la presión a todas las partes del fluido *y* a las paredes del recipiente. Cualquier cambio en la presión se transmite sin disminuir.

Obsérvese que este principio no dice que la presión es la misma en todos los puntos de un fluido, lo cual no es cierto, ya que la presión en un fluido cerca de la Tierra varía con la altura. Más bien, este principio se aplica al *cambio* de presión. Supongamos que se coloca agua en un recipiente cilíndrico de altura H y área de sección transversal A que tiene un pistón móvil de masa m (Figura 14.15). La adición de peso Mg en la parte superior del pistón aumenta la presión en el tope en Mg/A, ya que el peso adicional también actúa sobre el área A de la tapa:

$$\Delta p_{\text{tope}} = \frac{Mg}{A}.$$

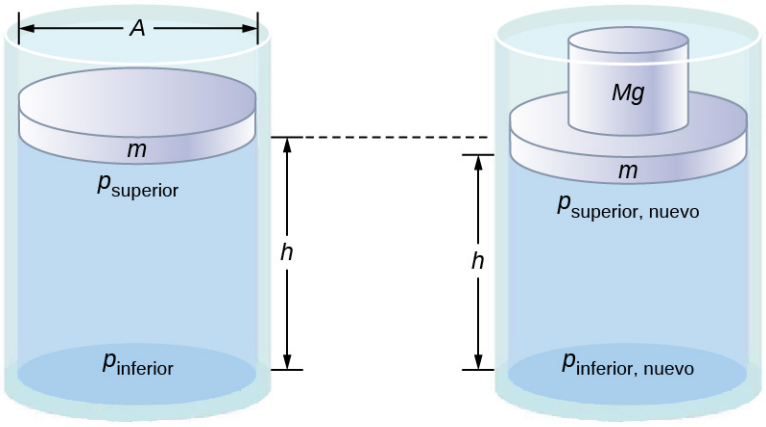


FIGURA 14.15 La presión en un fluido cambia cuando el fluido se comprime. (a) La presión en la capa superior del fluido es diferente de la presión en la capa inferior. (b) El aumento de presión al añadir peso al pistón es el mismo en todas partes, por ejemplo, $p_{\text{tope nuevo}} - p_{\text{tope}} = p_{\text{fondo nuevo}} - p_{\text{fondo}}$

Según el principio de Pascal, la presión en todos los puntos del agua cambia en la misma cantidad, Mg/A. Así, la presión en el fondo también aumenta en Mg/A. La presión en el fondo del recipiente es igual a la suma de la presión atmosférica, la presión debido al fluido y la presión suministrada por la masa. El cambio de presión en el fondo del recipiente debido a la masa es

$$\Delta p_{\text{fondo}} = \frac{Mg}{A}.$$

Dado que los cambios de presión son los mismos en todas las partes del fluido, ya no necesitamos subíndices para designar el cambio de presión para el tope o el fondo:

$$\Delta p = \Delta p_{\text{tope}} = \Delta p_{\text{fondo}} = \Delta p_{\text{en todas partes}}.$$

INTERACTIVO

El barril de Pascal es una gran demostración del principio de Pascal. Vea una simulación (https://openstax.org/l/21pascalbarrel) del experimento de Pascal de 1646, en el que demostró los efectos del cambio de presión en un fluido.

Aplicaciones del principio de Pascal y sistemas hidráulicos

Los sistemas hidráulicos se usan para accionar frenos de automóviles, gatos hidráulicos y muchos otros sistemas mecánicos (Figura 14.16).

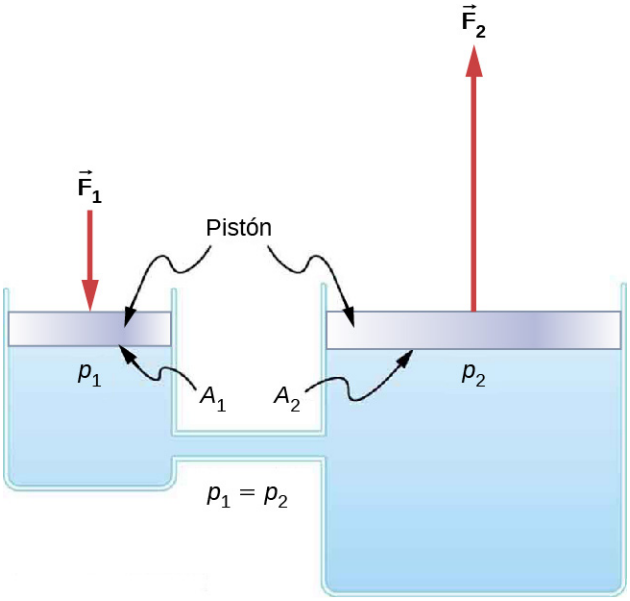


FIGURA 14.16 Un sistema hidráulico típico con dos cilindros llenos de fluido, tapados con pistones y conectados por un tubo llamado línea hidráulica. Una fuerza descendente $\vec{\mathbf{F}}_1$ en el pistón izquierdo crea un cambio en la presión que se transmite sin disminuir a todas las partes del fluido encerrado. Esto genera una fuerza ascendente $\vec{\mathbf{F}}_2$ en el pistón derecho que es más grande que $\vec{\mathbf{F}}_1$ porque el pistón derecho tiene una mayor superficie.

Podemos derivar una relación entre las fuerzas en este sencillo sistema hidráulico al aplicar el principio de Pascal. Obsérvese en primer lugar que los dos pistones del sistema están a la misma altura, por lo que no hay diferencia de presión debido a una diferencia de profundidad. La presión debido a F_1 que actúa en el área A_1 es simplemente

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1}, \text{según la definición de } p = \frac{F}{A}.$$

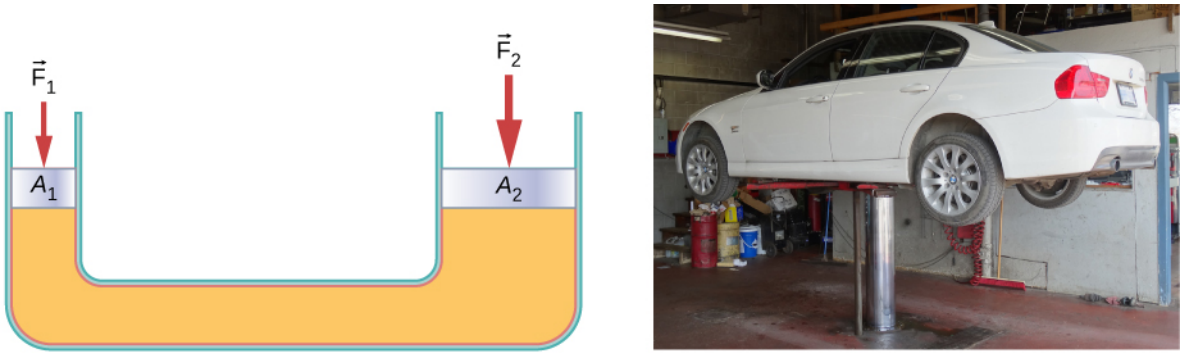
Según el principio de Pascal, esta presión se transmite sin disminuir en todo el fluido y a todas las paredes del recipiente. Así, una presión p_2 se siente en el otro pistón que es igual a p_1 Eso es, $p_1 = p_2$. Sin embargo, dado que$p_2 = F_2/A_2$, vemos que

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}. \qquad \textbf{14.12}$$

Esta ecuación relaciona las proporciones entre la fuerza y el área en cualquier sistema hidráulico, siempre que los pistones estén a la misma altura vertical y que la fricción en el sistema sea insignificante.

Los sistemas hidráulicos pueden aumentar o disminuir la fuerza que se les aplica. Para que la fuerza sea mayor, la presión se aplica a un área más grande. Por ejemplo, si se aplica una fuerza de 100 N al cilindro izquierdo en la Figura 14.16 y el cilindro derecho tiene un área cinco veces mayor, entonces la fuerza de salida es de 500 N. Los sistemas hidráulicos son análogos a las palancas simples, pero tienen la ventaja de que la presión se puede enviar a través de líneas tortuosamente curvas a varios lugares a la vez.

El **gato hidráulico** es un sistema hidráulico de este tipo. Un gato hidráulico se usa para levantar cargas pesadas, como las que usan los mecánicos para levantar un automóvil. Consta de un fluido incompresible en un tubo en U provisto de un pistón móvil a cada lado. Un lado del tubo en U es más estrecho que el otro. Una pequeña fuerza aplicada sobre un área pequeña puede equilibrar una fuerza mucho mayor en el otro lado sobre un área mayor (Figura 14.17).



(a) (b)

FIGURA 14.17 (a) Un gato hidráulico funciona al aplicar fuerzas (F_1, F_2) a un fluido incompresible en un tubo en U mediante un pistón móvil (A_1, A_2) a cada lado del tubo. (b) Los mecánicos de automóviles suelen usar gatos hidráulicos para levantar vehículos y poder hacer reparaciones y mantenimiento (créditos b: modificación de trabajo de Jane Whitney).

A partir del principio de Pascal, se puede demostrar que la fuerza necesaria para levantar el automóvil es menor que su peso:

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2,$$

donde F_1 es la fuerza aplicada para levantar el automóvil, A_1 es el área de la sección transversal del pistón más pequeño, A_2 es el área de la sección transversal del pistón más grande y F_2 es el peso del automóvil.

EJEMPLO 14.3

Calcular la fuerza en los cilindros de las ruedas: Pascal pisa el freno

Considere el sistema hidráulico de un automóvil que se muestra en la Figura 14.18. Supongamos que se aplica una fuerza de 100 N al pedal de freno, la cual actúa sobre el cilindro del pedal (actúa como cilindro "maestro") a través de una palanca. Se ejerce una fuerza de 500 N sobre el cilindro del pedal. La presión creada en el cilindro del pedal se transmite a los cuatro cilindros de las ruedas. El cilindro del pedal tiene un diámetro de 0,500 cm y cada cilindro de la rueda tiene un diámetro de 2,50 cm. Calcular la magnitud de la fuerza F_2 creada en cada uno de los cilindros de las ruedas.

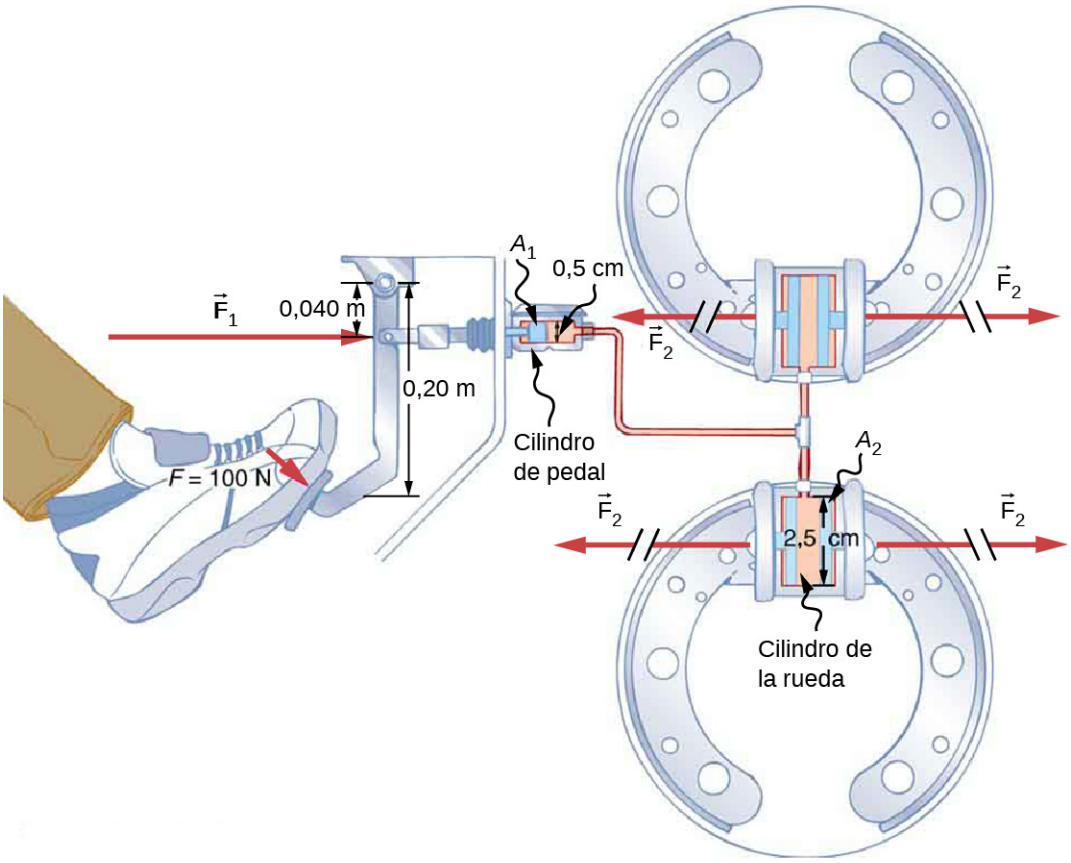


FIGURA 14.18 Los frenos hidráulicos usan el principio de Pascal. El conductor pisa el pedal de freno, y ejerce una fuerza que se ve incrementada por la palanca simple y de nuevo por el sistema hidráulico. Cada uno de los cilindros de rueda idénticos recibe la misma presión y, por lo tanto, crea la misma salida de fuerza F_2 Las áreas de la sección transversal circular de los cilindros del pedal y de la rueda están representadas por A_1 y A_2, respectivamente.

Estrategia

Nos dan la fuerza F_1 aplicada al cilindro del pedal. Las áreas de la sección transversal A_1 y A_2 se pueden calcular a partir de sus diámetros dados. Entonces podemos usar la siguiente relación para encontrar la fuerza F_2:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}.$$

Manipule esto algebraicamente para obtener F_2 en un lado y sustituir valores conocidos.

Solución

El principio de Pascal aplicado a sistemas hidráulicos viene dado por $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{A_2}{A_1} F_1 = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} F_1 \\ &= \frac{(1{,}25\ \text{cm})^2}{(0{,}250\ \text{cm})^2} \times 500\ \text{N} = 1{,}25 \times 10^4\ \text{N}. \end{aligned}$$

Importancia

Este valor es la fuerza ejercida por cada uno de los cuatro cilindros de la rueda. Tenga en cuenta que podemos añadir tantos cilindros de rueda como queramos. Si cada uno tiene un diámetro de 2,50 cm, cada uno ejercerá $1{,}25 \times 10^4$ N. Un sistema hidráulico simple, como ejemplo de máquina simple, puede aumentar la fuerza

pero no puede soportar más trabajo del que se realiza en él. El trabajo es la fuerza por la distancia recorrida, y el cilindro de la rueda se desplaza una distancia menor que el cilindro del pedal. Además, cuantas más ruedas se añaden, menor es la distancia que recorre cada una. Muchos sistemas hidráulicos —como los frenos de potencia y los de las excavadoras— tienen una bomba motorizada que realiza la mayor parte del trabajo del sistema.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 14.3

¿Una prensa hidráulica seguirá funcionando correctamente si se usa un gas en vez de un líquido?

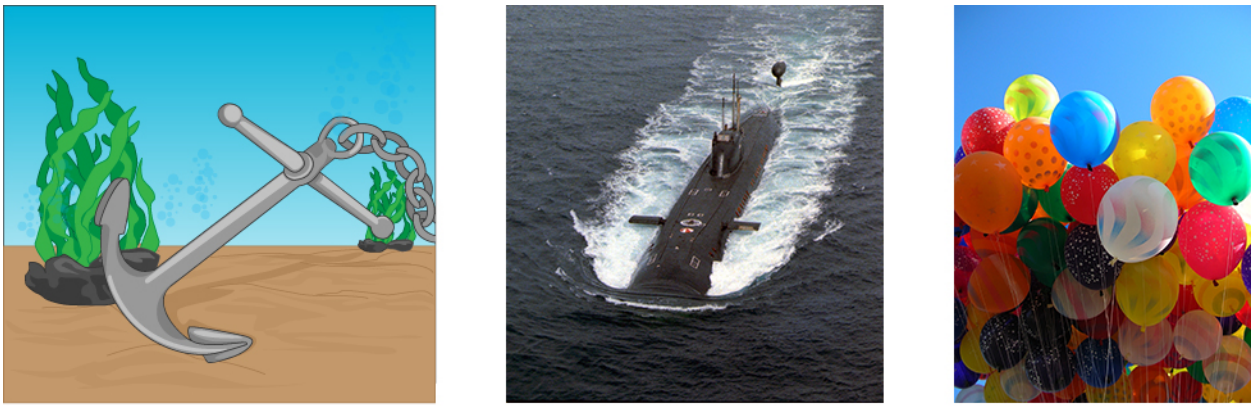
14.4 Principio de Arquímedes y flotabilidad

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Definir la fuerza de flotación.
- Enunciar el principio de Arquímedes.
- Describir la relación entre densidad y principio de Arquímedes.

Algunos objetos flotan debido a una fuerza de flotación cuando se colocan en un fluido. ¿De dónde procede esta fuerza de flotación? ¿Por qué algunas cosas flotan y otras no? ¿Los objetos que se hunden reciben algún tipo de soporte del fluido? ¿Su cuerpo flota debido a la atmósfera o solo los globos de helio se afectan (Figura 14.19)?



(a) (b) (c)

FIGURA 14.19 (a) Incluso objetos que se hunden, como esta ancla, están parcialmente sostenidos por el agua cuando se sumergen. (b) Los submarinos tienen densidad ajustable (tanques de lastre) para que puedan flotar o hundirse según se desee. (c) Los globos llenos de helio tiran hacia arriba de sus cuerdas, lo que demuestra el efecto de flotación del aire (créditos b: modificación de trabajo de Allied Navy; crédito c: modificación de trabajo de "Crystl"/Flickr).

Las respuestas a todas estas preguntas, y a muchas otras, se basan en el hecho de que la presión aumenta con la profundidad en un fluido. Esto significa que la fuerza ascendente sobre el fondo de un objeto en un fluido es mayor que la fuerza descendente sobre la parte superior del objeto. Existe una fuerza ascendente, o **fuerza de flotación**, sobre cualquier objeto en cualquier fluido (Figura 14.20). Si la fuerza de flotación es mayor que el peso del objeto, este sube a la superficie y flota. Si la fuerza de flotación es menor que el peso del objeto, este se hunde. Si la fuerza de flotación es igual al peso del objeto, este puede permanecer suspendido a su profundidad actual. La fuerza de flotación siempre está presente, ya sea que el objeto flote, se hunda o esté suspendido en un fluido.

Fuerza de flotación

La fuerza de flotación es la fuerza ascendente sobre cualquier objeto en cualquier fluido.

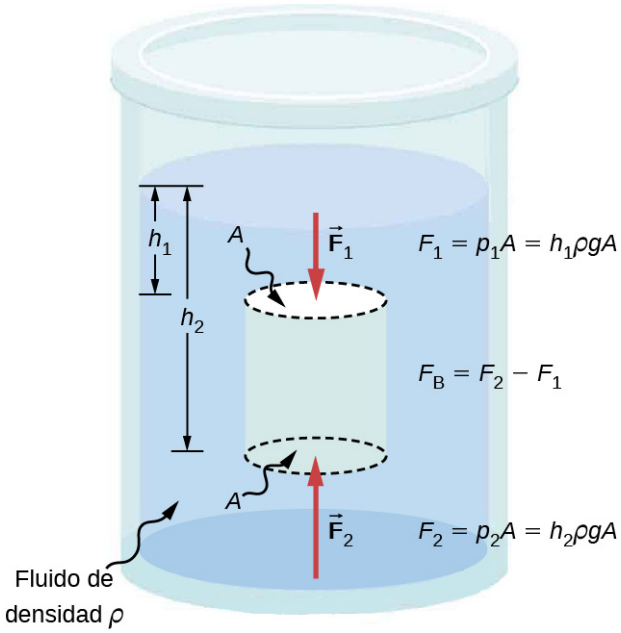


FIGURA 14.20 La presión debido al peso de un fluido aumenta con la profundidad porque $p = hpg$ Este cambio de presión y la fuerza ascendente asociada en la parte inferior del cilindro son mayores que la fuerza descendente en la parte superior del cilindro. Las diferencias en la fuerza generan la fuerza de flotación F_B (las fuerzas horizontales se anulan).

Principio de Arquímedes

¿Cuán grande es la fuerza de flotación? Para responder esta pregunta, piense en lo que ocurre cuando se extrae un objeto sumergido de un fluido, como en la Figura 14.21. Si el objeto no estuviera en el fluido, el espacio que ocupa el objeto estaría ocupado por un fluido con un peso w_{fl}. El fluido circundante soporta el peso, por lo que la fuerza de flotación debe ser igual a w_{fl}, el peso del fluido desplazado por el objeto.

Principio de Arquímedes

La fuerza de flotación de un objeto es igual al peso del fluido que desplaza. En forma de ecuación, **el principio de Arquímedes** es

$$F_B = w_{fl},$$

donde F_B es la fuerza de flotación y w_{fl} es el peso del fluido desplazado por el objeto.

Este principio recibe su nombre del matemático e inventor griego Arquímedes (circa 287-212 a. C.), quien enunció este principio mucho antes de que los conceptos de fuerza estuvieran bien establecidos.

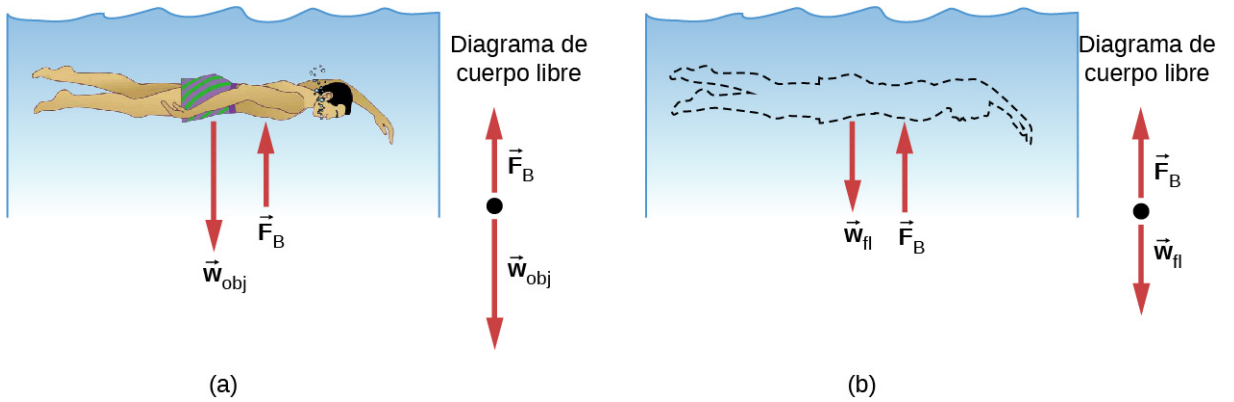


FIGURA 14.21 a) Un objeto sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotación F_B. Si F_B es mayor que el peso del objeto, el objeto se eleva. Si F_B es menor que el peso del objeto, el objeto se hunde. (b) Si el objeto se retira, es reemplazado por un fluido con peso w_{fl}. Como el fluido circundante soporta este peso, la fuerza de flotación debe ser igual al peso del fluido desplazado.

El principio de Arquímedes se refiere a la fuerza de flotación que se genera cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, ya sea parcial o totalmente. La fuerza que proporciona la presión de un fluido actúa sobre un cuerpo perpendicularmente a su superficie. En otras palabras, la fuerza debido a la presión en la parte inferior apunta hacia arriba, mientras que en la parte superior, la fuerza debido a la presión apunta hacia abajo; las fuerzas debido a las presiones en los lados apuntan hacia el cuerpo.

Como la parte inferior del cuerpo está a mayor profundidad que la superior, la presión en la parte inferior del cuerpo es mayor que la presión en la parte superior, como se muestra en la Figura 14.20. Por lo tanto, una fuerza neta hacia arriba actúa sobre el cuerpo. Esta fuerza ascendente es la fuerza de flotación o, simplemente, *flotabilidad*.

INTERACTIVO

La exclamación “eureka” (que significa “lo he encontrado”) se ha atribuido, a menudo, a Arquímedes al hacer el descubrimiento que conduciría al principio de Arquímedes. Algunos dicen que todo empezó en una bañera. Para escuchar esta historia, vea este video (https://openstax.org/l/21archNASA) o explore Scientific American (https://openstax.org/l/21archsciamer) para saber más.

Densidad y principio de Arquímedes

Si deja caer un bloque de arcilla en el agua, se hundirá. Pero si se moldea el mismo bloque de arcilla en forma de barco, este flotará. Debido a su forma, el barco de arcilla desplaza más agua que el bloque y experimenta una mayor fuerza de flotación, aunque su masa sea la misma. Lo mismo ocurre con los barcos de acero.

La densidad media de un objeto es lo que determina en última instancia si flota. Si la densidad media de un objeto es menor que la del fluido que lo rodea, flotará. La explicación es que el fluido, al tener una mayor densidad, contiene más masa y, por tanto, más peso en el mismo volumen. La fuerza de flotación, que es igual al peso del fluido desplazado, es por tanto mayor que el peso del objeto. Asimismo, un objeto más denso que el fluido se hundirá.

El grado de inmersión de un objeto flotante depende de la comparación de la densidad del objeto con la del fluido. En la Figura 14.22, por ejemplo, el barco sin carga tiene una densidad menor y se sumerge menos en comparación con el mismo barco cuando está cargado. Podemos derivar una expresión cuantitativa para la fracción sumergida considerando la densidad. La fracción sumergida es la relación entre el volumen sumergido y el volumen del objeto, o

$$\text{fracción sumergida} = \frac{V_{\text{sub}}}{V_{\text{obj}}} = \frac{V_{\text{fl}}}{V_{\text{obj}}}.$$

El volumen sumergido es igual al volumen de fluido desplazado, que llamamos V_{fl} Ahora podemos obtener la

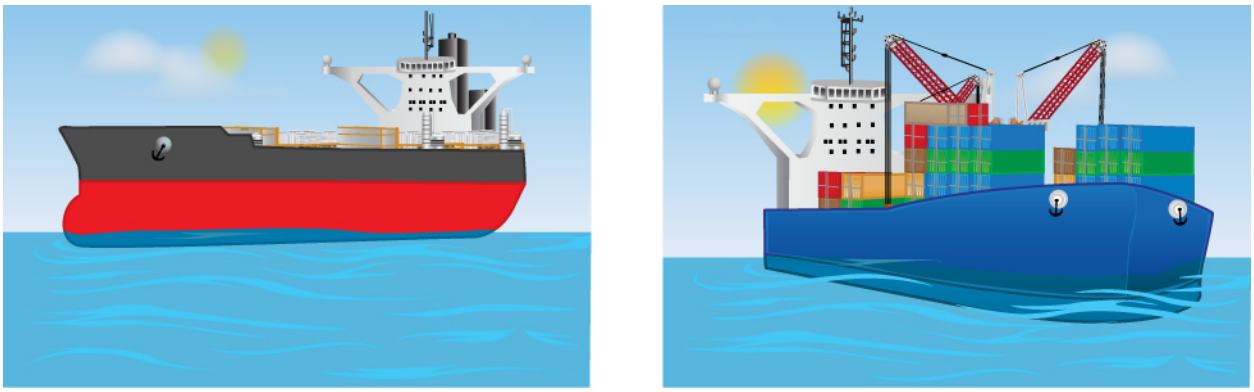
relación entre las densidades al sustituir $\rho = \frac{m}{V}$ en la expresión. Esto da

$$\frac{V_{\text{fl}}}{V_{\text{obj}}} = \frac{m_{\text{fl}}/\rho_{\text{fl}}}{m_{\text{obj}}/\rho_{\text{obj}}},$$

donde ρ_{obj} es la densidad media del objeto y ρ_{fl} es la densidad del fluido. Como el objeto flota, su masa y la del fluido desplazado son iguales, por lo que se anulan de la ecuación, y queda

$$\text{fracción sumergida} = \frac{\rho_{\text{obj}}}{\rho_{\text{fl}}}.$$

Podemos usar esta relación para medir densidades.



(a) (b)

FIGURA 14.22 Un barco sin carga (a) flota más alto en el agua que un barco con carga (b).

EJEMPLO 14.4

Cálculo de densidad media

Supongamos que una mujer de 60,0 kg flota en agua dulce con el 97,0 % de su volumen sumergido cuando sus pulmones están llenos de aire. ¿Cuál es su densidad media?

Estrategia

Podemos encontrar la densidad de la mujer al resolver la ecuación

$$\text{fracción sumergida} = \frac{\rho_{\text{obj}}}{\rho_{\text{fl}}}$$

para la densidad del objeto. Esto arroja

$$\rho_{\text{obj}} = \rho_{\text{persona}} = (\text{fracción sumergida}) \cdot \rho_{\text{fl}}.$$

Conocemos tanto la fracción sumergida como la densidad del agua, por lo que podemos calcular la densidad de la mujer.

Solución

Al introducir los valores conocidos en la expresión de su densidad, obtenemos

$$\rho_{\text{persona}} = 0{,}970 \cdot \left(10^3 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 970 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Importancia

La densidad de la mujer es menor que la del fluido. Esperamos esto porque ella flota.

Numerosos objetos o sustancias de baja densidad flotan en fluidos de mayor densidad: el aceite en el agua, un globo de aire caliente en la atmósfera, un trozo de corcho en el vino, un iceberg en agua salada y la cera

caliente en una “lámpara de lava”, por nombrar algunos. Un ejemplo menos obvio son las cadenas montañosas que flotan sobre la corteza y el manto de mayor densidad que hay debajo. Incluso la Tierra aparentemente sólida tiene características fluidas.

Medición de densidad

Una de las técnicas más comunes para determinar la densidad se muestra en Figura 14.23.

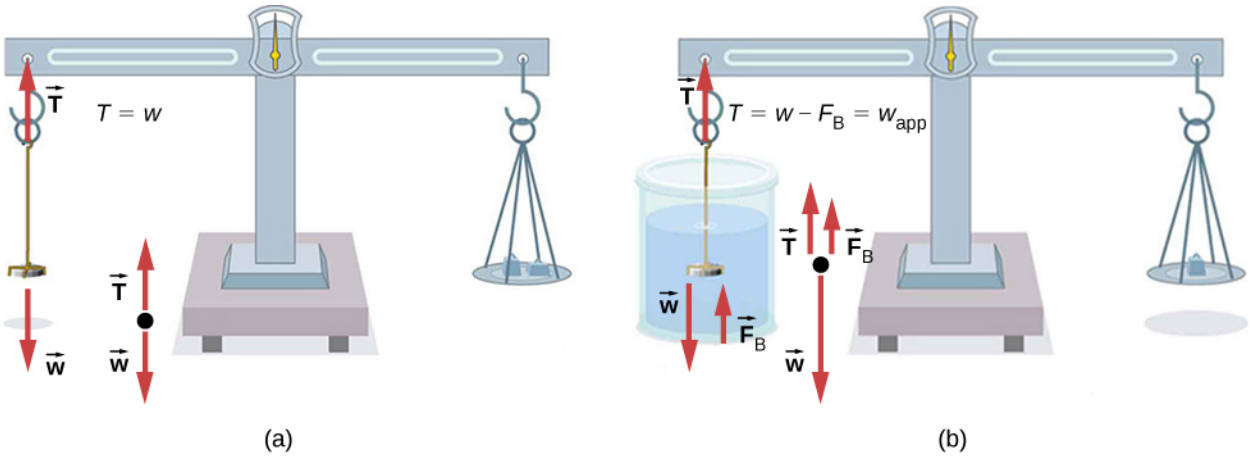


FIGURA 14.23 (a) Se pesa una moneda en el aire. (b) Se determina el peso aparente de la moneda mientras está completamente sumergida en un fluido de densidad conocida. Estas dos medidas se usan para calcular la densidad de la moneda.

Un objeto, en este caso una moneda, se pesa en el aire y luego se vuelve a pesar sumergido en un líquido. Se puede calcular la densidad de la moneda, una indicación de su autenticidad, si se conoce la densidad del fluido. Podemos usar esta misma técnica para determinar la densidad del fluido si se conoce la densidad de la moneda.

Todos estos cálculos se basan en el principio de Arquímedes, que establece que la fuerza de flotación sobre el objeto es igual al peso del fluido desplazado. Esto, a su vez, significa que el objeto parece pesar menos cuando está sumergido; a esta medida la llamamos peso aparente del objeto. El objeto sufre una pérdida de peso aparente igual al peso del fluido desplazado. Alternativamente, en las balanzas que miden la masa, el objeto sufre una pérdida de masa aparente igual a la masa del fluido desplazado. Es decir, la pérdida de peso aparente es igual al peso del fluido desplazado, o la pérdida de masa aparente es igual a la masa del fluido desplazado.

14.5 Dinámicas de fluidos

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir las características del flujo.
- Calcular la tasa de flujo.
- Describir la relación entre tasa de flujo y velocidad.
- Explicar las consecuencias de la ecuación de continuidad para la conservación de la masa.

La primera parte de este capítulo trata de la estática de los fluidos, el estudio de los fluidos en reposo. El resto de este capítulo trata de dinámicas de fluidos, el estudio de fluidos en movimiento. Incluso las formas más básicas de movimiento de fluidos pueden ser bastante complejas. Por eso limitamos nuestra investigación a **fluidos ideales** en muchos de los ejemplos. Un fluido ideal es aquel con una **viscosidad** insignificante. La viscosidad es una medida de la fricción interna en un fluido; la examinamos con más detalle en la sección Viscosidad y turbulencia. En algunos ejemplos examinamos un fluido incompresible —para el que se requiere una fuerza extremadamente grande para cambiar el volumen—, ya que su densidad es constante en todo momento.

Características del flujo

Los vectores de velocidad se usan, a menudo, para ilustrar el movimiento de los fluidos en aplicaciones como la meteorología. Por ejemplo, el viento —el movimiento fluido del aire en la atmósfera— se puede representar mediante vectores que indican la velocidad y la dirección del viento en cualquier punto del mapa. La Figura 14.24 muestra vectores de velocidad que describen los vientos durante el huracán Arthur en 2014.

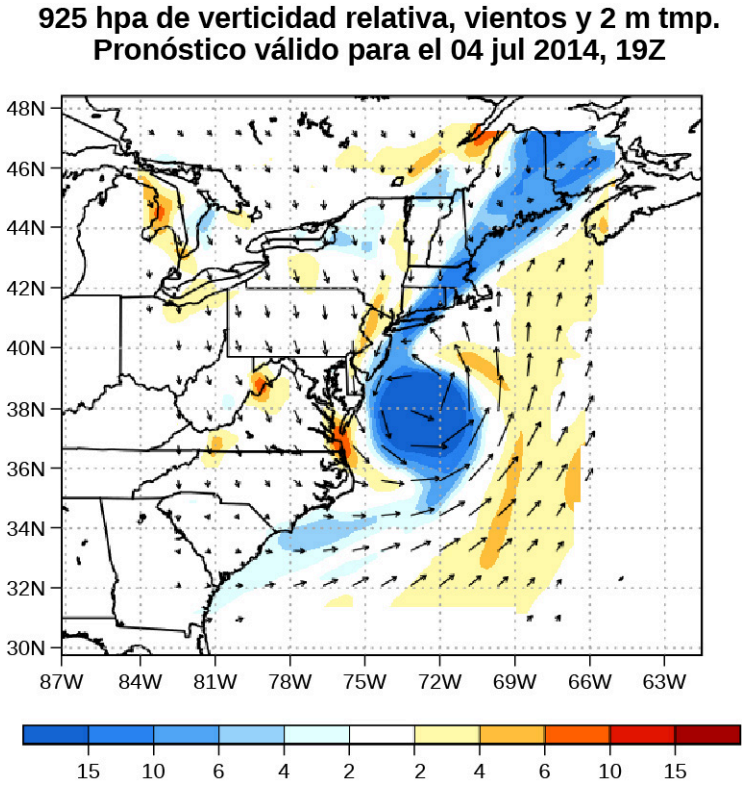
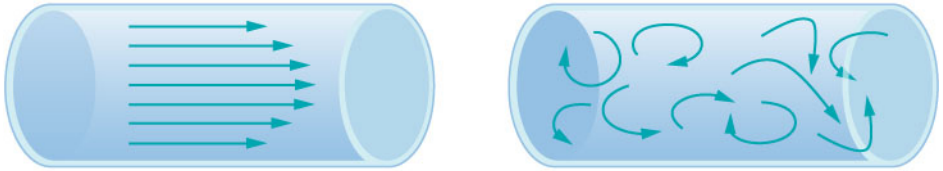


FIGURA 14.24 Los vectores de velocidad muestran el flujo del viento en el huracán Arthur. Obsérvese la circulación del viento alrededor del ojo del huracán. La velocidad del viento es mayor cerca del ojo. Los colores representan la vorticidad relativa, una medida de giro o rotación del aire (créditos: modificación de trabajo de Joseph Trout, Universidad de Stockton).

Otro método para representar el movimiento de los fluidos es la *línea de corriente*. Una línea de corriente representa la trayectoria de un pequeño volumen de fluido mientras fluye. La velocidad es siempre tangencial a la línea de corriente. Los diagramas de la Figura 14.25 usan líneas de corriente para ilustrar dos ejemplos de fluidos que se desplazan por una tubería. El primer fluido presenta un **flujo laminar** (a veces descrito como flujo estacionario), representado por líneas de corriente suaves y paralelas. Observe que en el ejemplo mostrado en la parte (a), la velocidad del fluido es mayor en el centro y disminuye cerca de las paredes de la tubería debido a la viscosidad del fluido y a la fricción entre las paredes de la tubería y el fluido. Se trata de un caso especial de flujo laminar, en el que la fricción entre la tubería y el fluido es alta, lo que se conoce como condiciones de frontera sin deslizamiento. El segundo diagrama representa el **flujo turbulento**, en el que las líneas de corriente son irregulares y cambian con el tiempo. En el flujo turbulento las trayectorias del fluido circulante son irregulares, ya que diferentes partes del fluido se mezclan o forman pequeñas regiones circulares que se asemejan a remolinos. Esto puede ocurrir cuando la velocidad del fluido alcanza una determinada velocidad crítica.



(a) Flujo laminar (b) Flujo turbulento

FIGURA 14.25 (a) El flujo laminar se puede considerar como capas de fluido que se mueven en trayectorias paralelas y regulares. (b) En el flujo turbulento, las regiones de fluido se mueven en trayectorias irregulares que chocan entre sí, lo que provoca mezclas y remolinos.

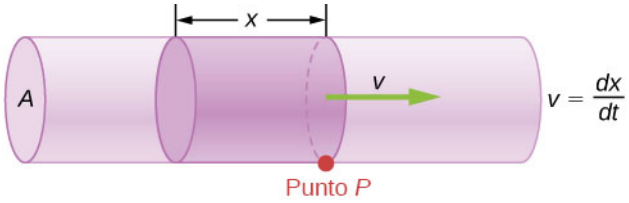
La tasa de flujo y su relación con la velocidad

El volumen de fluido que pasa por un lugar determinado a través de un área durante un espacio de tiempo se denomina **tasa de flujo** Q o, más exactamente, tasa de flujo volumétrica. En símbolos, esto se escribe como

$$Q = \frac{dV}{dt} \qquad 14.13$$

donde V es el volumen y t es el tiempo transcurrido. En la Figura 14.26, el volumen del cilindro es Ax, por lo que la tasa de flujo es

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(Ax) = A\frac{dx}{dt} = Av.$$



$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(Ax) = A\frac{dx}{dt} = Av$$

FIGURA 14.26 La tasa de flujo es el volumen del fluido que circula por un punto a través del área A por unidad de tiempo. Aquí, el cilindro sombreado de fluido pasa por el punto P en una tubería uniforme en el tiempo t.

La unidad del SI para la tasa de flujo es m^3/s, pero hay otras unidades de uso común para Q, como litros por minuto (L/min). Tenga en cuenta que un litro (L) es 1/1.000 de un metro cúbico o 1.000 centímetros cúbicos (10^{-3} m^3 o 10^3 cm^3).

La tasa de flujo y la velocidad son magnitudes físicas relacionadas, pero bastante diferentes. Para aclarar la distinción, consideremos la tasa de flujo de un río. Cuanto mayor sea la velocidad del agua, mayor será la tasa de flujo del río. Pero la tasa de flujo también depende del tamaño y de la forma del río. Un arroyo rápido de montaña lleva mucha menos agua que el río Amazonas en Brasil, por ejemplo. La Figura 14.26 ilustra la tasa de flujo volumétrica. La tasa de flujo volumétrica es $Q = \frac{dV}{dt} = Av$, donde A es el área de la sección transversal de la tubería y v es la magnitud de la velocidad.

La relación precisa entre tasa de flujo Q y rapidez media v es

$$Q = Av,$$

donde A es el área de la sección transversal y v es la rapidez media. La relación nos dice que la tasa de flujo es directamente proporcional tanto a la rapidez media del fluido como al área de la sección transversal de un río, tubería u otro conducto. Cuanto mayor sea el conducto, mayor será su área de sección transversal. La Figura 14.26 ilustra cómo se obtiene esta relación. El cilindro sombreado tiene un volumen $V = Ad$, que pasa por el punto P en un tiempo t. Al dividir ambos lados de esta relación entre t se obtiene

$$\frac{V}{t} = \frac{Ad}{t}.$$

Observamos que $Q = V/t$ y la rapidez media es $v = d/t$. Por lo tanto, la ecuación se convierte en $Q = Av$.

La figura Figura 14.27 muestra un fluido incompresible que circula a lo largo de una tubería de radio decreciente. Como el fluido es incompresible, la misma cantidad de fluido debe pasar por cualquier punto del tubo en un tiempo determinado para garantizar la continuidad del flujo. El flujo es continuo porque no hay fuentes ni sumideros que añadan o quiten masa, por lo que la masa que entra en la tubería debe ser igual a la que sale de ella. En este caso, como el área de la sección transversal de la tubería disminuye, la velocidad debe aumentar necesariamente. Esta lógica puede ampliarse para decir que la tasa de flujo debe ser la misma en todos los puntos de la tubería. En particular, para los puntos 1 y 2 arbitrarios,

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2, \\ A_1 v_1 &= A_2 v_2. \end{aligned} \qquad \textbf{14.14}$$

Se denomina *ecuación de continuidad* y es válida para cualquier fluido incompresible (con densidad constante). Las consecuencias de la ecuación de continuidad se pueden observar cuando el agua fluye desde una manguera hacia una boquilla de pulverización estrecha: sale con una gran velocidad, lo cual es el propósito de la boquilla. A la inversa, cuando un río desemboca en un extremo de un embalse, el agua disminuye considerablemente su velocidad, que quizá vuelva a aumentar al salir del otro extremo del embalse. En otras palabras, la velocidad aumenta cuando el área de la sección transversal disminuye, y la velocidad disminuye cuando el área de la sección transversal aumenta.

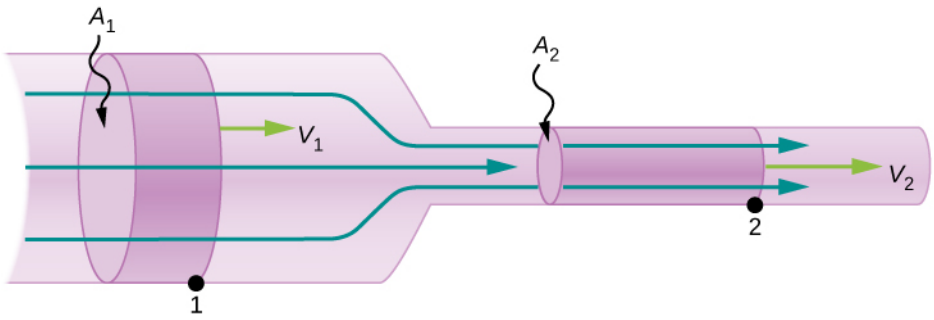


FIGURA 14.27 Cuando un tubo se estrecha, el mismo volumen ocupa una mayor longitud. Para que el mismo volumen pase por los puntos 1 y 2 en un tiempo determinado, la velocidad debe ser mayor en el punto 2. El proceso es exactamente reversible. Si el fluido circula en sentido contrario, su velocidad disminuye cuando el tubo se ensancha (obsérvese que los volúmenes relativos de los dos cilindros y las flechas de los vectores de velocidad correspondientes no están dibujados a escala).

Como los líquidos son esencialmente incompresibles, la ecuación de continuidad es válida para todos los líquidos. Sin embargo, los gases son compresibles, por lo que la ecuación debe aplicarse con precaución a los gases si están sometidos a compresión o expansión.

EJEMPLO 14.5

Cálculo de la velocidad del fluido a través de una boquilla

A una manguera de jardín con un radio de 0,900 cm se le acopla una boquilla con un diámetro de 0,500 cm. La tasa de flujo que pasa por la manguera y la boquilla es de 0,500 L/s. Calcule la velocidad del agua (a) en la manguera y (b) en la boquilla.

Estrategia

Podemos usar la relación entre tasa de flujo y velocidad para encontrar ambas velocidades. Usamos el subíndice 1 para la manguera y el 2 para la boquilla.

Solución

a. Resolvemos la ecuación de la tasa de flujo para la velocidad y usamos $\pi {r_1}^2$ para el área de la sección transversal de la manguera, obteniendo

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r_1^2}.$$

Al sustituir los valores y usar las conversiones de unidades adecuadas se obtiene

$$v = \frac{(0{,}500\ \text{L/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{L})}{3{,}14(9{,}00\ \times\ 10^{-3}\ \text{m})^2} = 1{,}96\ \text{m/s}.$$

b. Podríamos repetir este cálculo para encontrar la velocidad en la boquilla v_2, pero usamos la ecuación de continuidad para dar una visión algo diferente. La ecuación dice

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Resolver para v_2 y al sustituir πr^2 para el área de la sección transversal se obtiene

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2} v_1.$$

Al sustituir valores conocidos,

$$v_2 = \frac{(0{,}900\ \text{cm})^2}{(0{,}250\ \text{cm})^2}\ 1{,}96\ \text{m/s} = 25{,}5\ \text{m/s}.$$

Importancia

Una velocidad de 1,96 m/s es más o menos correcta para el agua que sale de una manguera sin boquilla. La boquilla produce un chorro considerablemente más rápido por el simple hecho de constreñir el flujo a un tubo más estrecho.

La solución de la última parte del ejemplo muestra que la velocidad es inversamente proporcional al cuadrado del radio del tubo, por lo que los efectos son grandes cuando varía el radio. Podemos apagar una vela a bastante distancia, por ejemplo, frunciendo los labios, mientras que soplar una vela con la boca abierta es bastante ineficaz.

Conservación de la masa

La tasa de flujo de un fluido también se puede describir mediante la *tasa de flujo de masa* o flujo másico. Es la velocidad con la que una masa del fluido pasa por un punto. Consulte de nuevo la Figura 14.26, pero esta vez considere la masa en el volumen sombreado. La masa se puede determinar a partir de la densidad y el volumen:

$$m = \rho V = \rho A x.$$

La tasa de flujo de masa es entonces

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho A x) = \rho A \frac{dx}{dt} = \rho A v,$$

donde ρ es la densidad, A es el área de la sección transversal y v es la magnitud de la velocidad. La tasa de flujo de masa es una magnitud importante en las dinámicas de fluidos, y se puede usar para resolver muchos problemas. Considere la Figura 14.28. La tubería de la figura comienza en la entrada con un área de sección transversal de A_1 y se constriñe a una salida con un área de sección transversal menor de A_2. La masa del fluido que entra en la tubería tiene que ser igual a la masa del fluido que sale de ella. Por esto la velocidad en la salida (v_2) es mayor que la velocidad de la entrada (v_1). Usando el hecho de que la masa del fluido que entra en la tubería debe ser igual a la masa del fluido que sale de ella, podemos encontrar una relación entre la velocidad y el área de la sección transversal tomando la tasa de cambio de la masa que entra y la que sale:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dm}{dt}\right)_1 &= \left(\frac{dm}{dt}\right)_2 \\ \rho_1 A_1 v_1 &= \rho_2 A_2 v_2. \end{aligned} \qquad \textbf{14.15}$$

Ecuación 14.15 también se conoce como la ecuación de continuidad en forma general. Si la densidad del fluido se mantiene constante a través de la constricción —es decir, el fluido es incompresible— entonces la densidad se anula de la ecuación de continuidad,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

La ecuación se reduce para demostrar que la tasa de flujo volumétrica que entra en la tubería es igual a la tasa de flujo volumétrica que sale de ella.

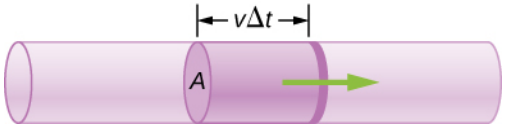


FIGURA 14.28 Geometría para derivar la ecuación de continuidad. La cantidad de líquido que entra en el área de la sección transversal (sombreada) debe ser igual a la cantidad de líquido que sale del área de la sección transversal si el líquido es incompresible.

14.6 Ecuación de Bernoulli

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar los términos de la ecuación de Bernoulli.
- Explicar cómo se relaciona la ecuación de Bernoulli con la conservación de la energía.
- Describir cómo derivar el principio de Bernoulli a partir de la ecuación de Bernoulli.
- Hacer cálculos usando el principio de Bernoulli.
- Describir algunas aplicaciones del principio de Bernoulli.

Como mostramos en la Figura 14.27, cuando un fluido circula en un canal más estrecho, su velocidad aumenta. Eso significa que su energía cinética también aumenta. El aumento de la energía cinética procede del trabajo neto realizado sobre el fluido para empujarlo hacia el interior del canal. Además, si el fluido cambia de posición vertical, la fuerza gravitacional realiza un trabajo sobre el fluido.

Se produce una diferencia de presión cuando el canal se estrecha. Esta diferencia de presión resulta en una fuerza neta sobre el fluido porque la presión por el área es igual a la fuerza, y esta fuerza neta hace trabajo. Recordemos el teorema de trabajo-energía,

$$W_{\text{neta}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

El trabajo neto realizado aumenta la energía cinética del fluido. En consecuencia, la presión cae en un fluido que se mueve rápidamente, esté o no confinado en un tubo.

Hay muchos ejemplos comunes de caída de presión en fluidos que se mueven rápidamente. Por ejemplo, las cortinas de la ducha tienen la desagradable costumbre de abultarse dentro de la cabina cuando la ducha está abierta. La explicación es que el chorro de agua y aire a gran velocidad crea una región de menor presión en el interior de la ducha, mientras que la presión en el otro lado permanece a la presión atmosférica estándar. Esta diferencia de presión genera una fuerza neta que empuja la cortina hacia dentro. Del mismo modo, cuando un automóvil adelanta a un camión en la carretera, los dos vehículos parecen acercarse el uno al otro. La explicación es la misma: la alta velocidad del aire entre el automóvil y el camión crea una región de menor presión entre los vehículos, y una mayor presión en el exterior hace que sean empujados juntos (Figura 14.29). Este efecto se observó a mediados del siglo XIX cuando se comprobó que trenes que pasaban en direcciones opuestas se inclinaban precariamente uno hacia el otro.

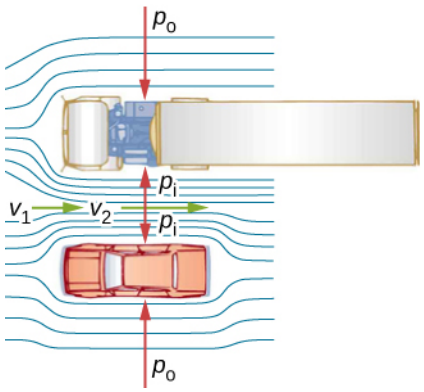


FIGURA 14.29 Una vista aérea de un automóvil que pasa por delante de un camión en una autopista. El aire que pasa entre los vehículos fluye por un canal más estrecho y debe aumentar su velocidad (v_2 es mayor que v_1), lo que hace que la presión entre ellos disminuya (p_i es menor que p_o). Una mayor presión en el exterior empuja al automóvil y al camión juntos.

Conservación de energía y ecuación de Bernoulli

La aplicación del principio de conservación de la energía al flujo laminar sin fricción conduce a una relación muy útil entre presión y velocidad de flujo en un fluido. Esta relación se denomina **ecuación de Bernoulli**, en honor a Daniel Bernoulli (1700-1782), quien publicó sus estudios sobre movimiento de fluidos en su libro *Hydrodynamica* (1738).

Considere un fluido incompresible que circula a través de una tubería que tiene un diámetro y una altura variables, como se muestra en la Figura 14.30. Los subíndices 1 y 2 en la figura denotan dos lugares a lo largo de la tubería e ilustran las relaciones entre las áreas de las secciones transversales A, la velocidad del flujo v, la altura desde el suelo y y la presión p en cada punto. Suponemos que la densidad en los dos puntos es la misma, por lo tanto, la densidad se denota por ρ sin subíndices, y como el fluido es incompresible, los volúmenes sombreados deben ser iguales.

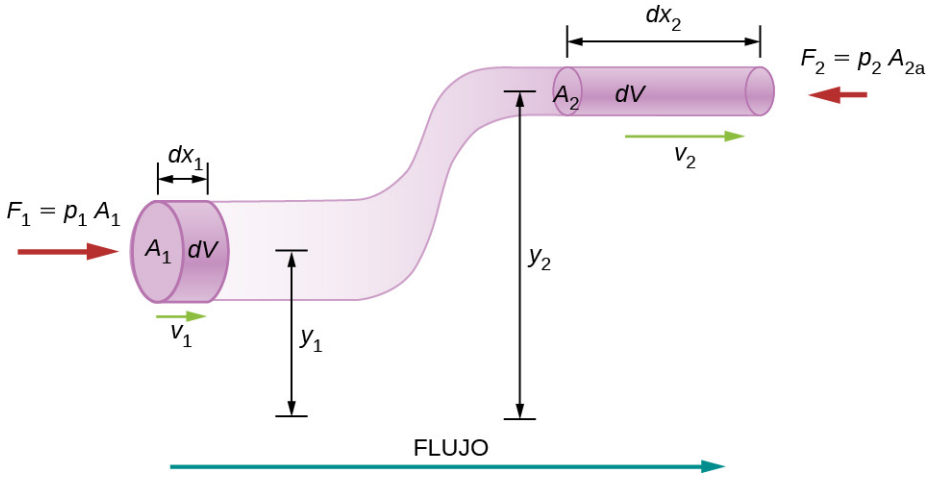


FIGURA 14.30 La geometría usada para la derivación de la ecuación de Bernoulli.

También suponemos que no hay fuerzas viscosas en el fluido, por lo que la energía de cualquier parte del fluido se conservará. Para derivar la ecuación de Bernoulli, primero calculamos el trabajo realizado sobre el fluido:

$$dW = F_1\,dx_1 - F_2\,dx_2$$

$$dW = p_1 A_1\,dx_1 - p_2 A_2\,dx_2 = p_1\,dV - p_2\,dV = (p_1 - p_2)\,dV.$$

El trabajo realizado se debe a la fuerza conservativa de la gravedad y al cambio en la energía cinética del fluido. El cambio en la energía cinética del fluido es igual a

$$dK = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\rho dV\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

El cambio de energía potencial es

$$dU = mgy_2 - mgy_1 = \rho dV g\left(y_2 - y_1\right).$$

La ecuación de la energía se convierte entonces en

$$\begin{aligned} dW &= dK + dU \\ (p_1 - p_2)\,dV &= \tfrac{1}{2}\rho dV\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho dV g\left(y_2 - y_1\right) \\ (p_1 - p_2) &= \tfrac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g\left(y_2 - y_1\right). \end{aligned}$$

Al reordenar la ecuación se obtiene la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2.$$

Esta relación establece que la energía mecánica de cualquier parte del fluido cambia como consecuencia del trabajo realizado por el fluido externo a esa parte, debido a la variación de la presión a lo largo del camino. Dado que los dos puntos fueron elegidos arbitrariamente, podemos escribir la ecuación de Bernoulli de forma más general como un principio de conservación a lo largo del flujo.

Ecuación de Bernoulli

Para un fluido incompresible y sin fricción, la combinación de la presión y la suma de las densidades de energías cinética y potencial es constante no solo en el tiempo, sino también a lo largo de una línea de corriente:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \qquad \textbf{14.16}$$

Hay que tener en cuenta el hecho de que en una situación dinámica las presiones a la misma altura en diferentes partes del fluido pueden ser diferentes si tienen diferentes velocidades de flujo.

Análisis de la ecuación de Bernoulli

Según la ecuación de Bernoulli, si seguimos un pequeño volumen de fluido a lo largo de su trayectoria, varias cantidades de la suma pueden cambiar, pero el total permanece constante. La ecuación de Bernoulli es, de hecho, solo una declaración conveniente de la conservación de la energía para un fluido incompresible en ausencia de fricción.

La forma general de la ecuación de Bernoulli tiene tres términos y es ampliamente aplicable. Para entenderlo mejor, consideremos algunas situaciones concretas que simplifican e ilustran su uso y significado.

Ecuación de Bernoulli para fluidos estáticos

En primer lugar, consideremos una situación muy sencilla en la que el fluido es estático, es decir, $v_1 = v_2 = 0$. La ecuación de Bernoulli en ese caso es

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2.$$

Podemos simplificar aún más la ecuación al establecer $h_2 = 0$. (se puede elegir cualquier altura para una altura de referencia de cero, como se hace a menudo para otras situaciones en las que interviene la fuerza gravitacional, lo que hace que todas las demás alturas sean relativas). En este caso, obtenemos

$$p_2 = p_1 + \rho g h_1.$$

Esta ecuación nos dice que en fluidos estáticos la presión aumenta con la profundidad. Al pasar del punto 1 al punto 2 del fluido, la profundidad aumenta en h_1, y en consecuencia, p_2 es mayor que p_1 por una cantidad $\rho g h_1$. En el caso más sencillo, p_1 es cero en la parte superior del fluido, y obtenemos la conocida relación $p = \rho g h$. (Recordemos que $p = \rho g h$ y $\Delta U_g = -mgh$.) Así, la ecuación de Bernoulli confirma el hecho de que el

cambio de presión debido al peso de un fluido es ρgh. Aunque presentamos la ecuación de Bernoulli para movimiento de fluidos, esta incluye gran parte de lo que hemos estudiado antes para fluidos estáticos.

Principio de Bernoulli

Supongamos que un fluido se mueve pero su profundidad es constante, es decir, $h_1 = h_2$. Con esta condición, la ecuación de Bernoulli se convierte en

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Las situaciones en las que el fluido circula a una profundidad constante son tan comunes que esta ecuación suele llamarse también **principio de Bernoulli**, lo cual es simplemente la ecuación de Bernoulli para fluidos a profundidad constante (nótese de nuevo que esto se aplica a un pequeño volumen de fluido mientras lo seguimos a lo largo de su trayectoria). El principio de Bernoulli refuerza el hecho de que la presión disminuye al aumentar la velocidad en un fluido en movimiento: Si v_2 es mayor que v_1 en la ecuación, entonces p_2 debe ser menor que p_1 para que la igualdad se mantenga.

EJEMPLO 14.6

Calcular presión

En el Ejemplo 14.5, comprobamos que la velocidad del agua en una manguera aumenta de 1,96 m/s a 25,5 m/s yendo de la manguera a la boquilla. Calcule la presión en la manguera, dado que la presión absoluta en la boquilla es $1{,}01 \times 10^5\ \text{N/m}^2$ (atmosférico, como debe ser) y si se supone un flujo nivelado y sin fricción.

Estrategia

Flujo nivelado significa profundidad constante, por lo que se aplica el principio de Bernoulli. Usamos el subíndice 1 para los valores de la manguera y el 2 para los de la boquilla. Por lo tanto, se nos pide que encontremos $p1$.

Solución

Resolver el principio de Bernoulli para p_1 arroja

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2).$$

Al sustituir valores conocidos,

$$\begin{aligned} p_1 &= 1{,}01 \times 10^5\ \text{N/m}^2 + \tfrac{1}{2}(10^3\ \text{kg/m}^3)[(25{,}5\ \text{m/s})^2 - (1{,}96\ \text{m/s})^2] \\ &= 4{,}24 \times 10^5\ \text{N/m}^2. \end{aligned}$$

Importancia

Esta presión absoluta en la manguera es mayor que en la boquilla, como era de esperarse, ya que v es mayor en la boquilla. La presión p_2 en la boquilla debe ser atmosférica, ya que el agua sale a la atmósfera sin otros cambios en las condiciones.

Aplicaciones del principio de Bernoulli

Hay muchos dispositivos y situaciones en los que el fluido circula a una altura constante y, por tanto, se puede analizar con el principio de Bernoulli.

Arrastre

El principio de Bernoulli se aplica desde hace mucho tiempo usando reducción de la presión en fluidos de alta velocidad para mover cosas. Con una mayor presión en el exterior, el fluido de alta velocidad obliga a otros fluidos a entrar en la corriente. Este proceso se denomina *arrastre*. Los dispositivos de arrastre se han usado desde la antigüedad como bombas para elevar el agua a pequeñas alturas, como es necesario para drenar pantanos, campos u otras áreas bajas. Algunos otros dispositivos que usan el concepto de arrastre se muestran en la Figura 14.31.

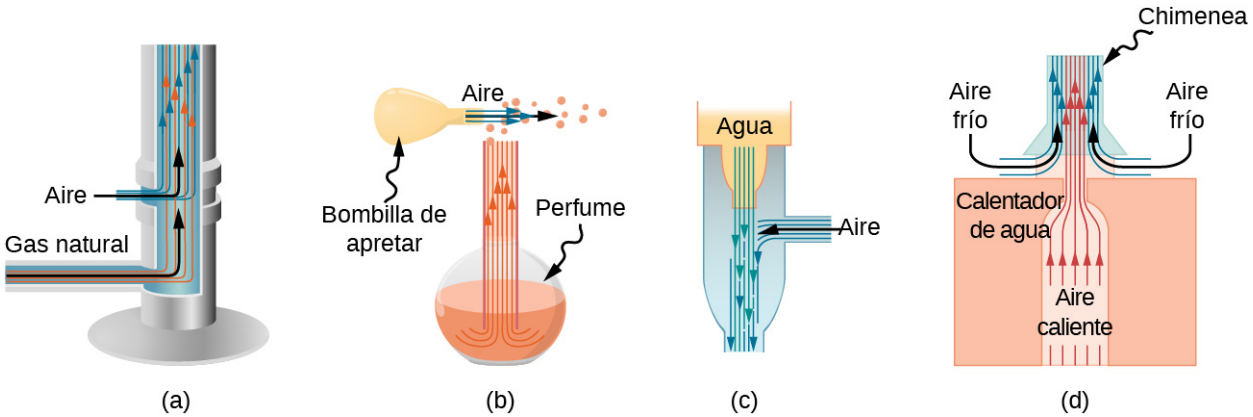


FIGURA 14.31 Los dispositivos de arrastre usan el aumento de la velocidad del fluido para crear presiones bajas, que luego arrastran un fluido dentro de otro. (a) Un mechero Bunsen usa una boquilla de gas ajustable, y arrastra aire para una combustión adecuada. (b) Un atomizador usa una pera de presión para crear un chorro de aire que arrastra gotas de perfume. Los pulverizadores de pintura y los carburadores usan técnicas muy similares para mover sus respectivos líquidos. (c) Un aspirador común usa un chorro de agua a gran velocidad para crear una región de menor presión. Los aspiradores se pueden usar como bombas de succión en situaciones dentales y quirúrgicas o para drenar un sótano inundado o producir una presión reducida en un recipiente. (d) La chimenea de un calentador de agua está diseñada para arrastrar el aire hacia la tubería que atraviesa el techo.

Medición de velocidad

La Figura 14.32 muestra dos dispositivos que aplican el principio de Bernoulli para medir velocidad de fluidos. El manómetro de la parte (a) está conectado a dos tubos lo suficientemente pequeños como para no perturbar apreciablemente el flujo. El tubo orientado hacia el fluido que se aproxima crea un punto muerto con velocidad cero ($v_1 = 0$) delante de él, mientras que el fluido que pasa por el otro tubo tiene una velocidad v_2. Esto significa que el principio de Bernoulli, tal y como se establece en

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

se convierte en

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Así, la presión p_2 sobre la segunda apertura se reduce en $\frac{1}{2}\rho v_2^2$, por lo que el fluido en el manómetro aumenta en h en el lado conectado a la segunda abertura, donde

$$h \propto \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

(recordemos que el símbolo $\propto$ significa “proporcional a”). Al resolver para v_2, vemos que

$$v_2 \propto \sqrt{h}.$$

La parte (b) muestra una versión de este dispositivo que es de uso común para medir varias velocidades de fluidos; tales dispositivos se usan frecuentemente como indicadores de la velocidad del aire en los aviones.

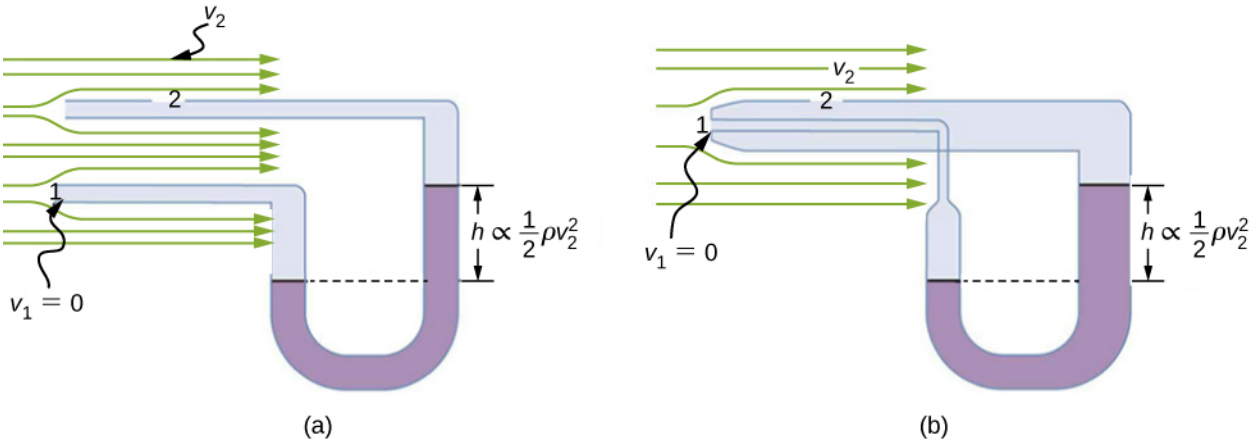


FIGURA 14.32 Medición de la velocidad del fluido basada en el principio de Bernoulli. (a) Se conecta un manómetro a dos tubos que están cerca entre sí y son lo suficientemente pequeños como para no perturbar el flujo. El tubo 1 está abierto en el extremo que da al flujo. Allí se crea un punto muerto con velocidad cero. El tubo 2 tiene una abertura en el lateral, por lo que el fluido tiene una velocidad v a través de la abertura; por lo tanto, la presión allí disminuye. La diferencia de presión en el manómetro es $\frac{1}{2}\rho v_2^2$, por lo que h es proporcional a $\frac{1}{2}\rho v_2^2$. (b) Este tipo de dispositivo de medición de la velocidad es un tubo de Prandtl, también conocido como tubo de Pitot.

Una manguera de incendios

Todas las aplicaciones anteriores de la ecuación de Bernoulli implicaban condiciones simples, como altura o presión constantes. El siguiente ejemplo es una aplicación más general de la ecuación de Bernoulli en la que cambian presión, velocidad y altura.

EJEMPLO 14.7

Calcular presión: una boquilla de manguera de incendios

Las mangueras que se usan en los grandes incendios estructurales tienen un diámetro interior de 6,40 cm (Figura 14.33). Supongamos que dicha manguera transporta un flujo de 40,0 L/s, a partir de una presión manométrica de $1{,}62 \times 10^6 \text{N/m}^2$. La manguera sube 10,0 m por una escalera hasta una boquilla con un diámetro interior de 3,00 cm. ¿Cuál es la presión en la boquilla?

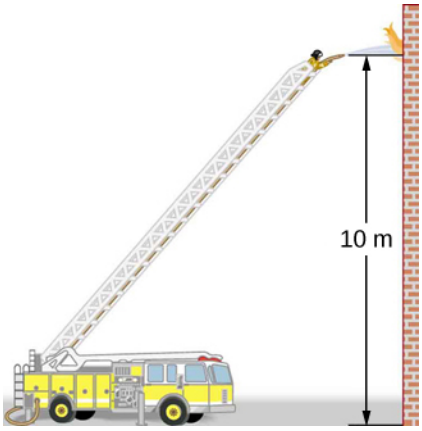


FIGURA 14.33 La presión en la boquilla de esta manguera contra incendios es menor que en el suelo por dos motivos: el agua tiene que ir cuesta arriba para llegar a la boquilla y la velocidad aumenta en la boquilla. A pesar de su baja presión, el agua puede ejercer una gran fuerza sobre cualquier cosa que golpee en virtud de su energía cinética. La presión de la corriente de agua se iguala a la presión atmosférica una vez que sale al aire.

Estrategia

Debemos usar la ecuación de Bernoulli para resolver la presión, ya que la profundidad no es constante.

Solución

La ecuación de Bernoulli es

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las condiciones iniciales en el suelo y a las condiciones finales dentro de la boquilla, respectivamente. Primero debemos encontrar las velocidades v_1 y v_2. Toda vez que $Q = A_1 v_1$, obtenemos

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{40{,}0 \times 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}}{\pi(3{,}20 \times 10^{-2}\,\text{m})^2} = 12{,}4\,\text{m/s}.$$

Del mismo modo, encontramos

$$v_2 = 56{,}6\ \text{m/s}.$$

Esta velocidad bastante grande es útil para alcanzar el fuego. Ahora, al tomar h_1 sea cero, resolvemos la ecuación de Bernoulli para p_2:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) - \rho g h_2.$$

Al sustituir valores conocidos se obtiene

$$\begin{aligned} p_2 &= 1{,}62 \times 10^6\ \text{N/m}^2 + \tfrac{1}{2}(1.000\ \text{kg/m}^3)[(12{,}4\ \text{m/s})^2 - (56{,}6\ \text{m/s})^2] \\ &\quad -(1.000\ \text{kg/m}^3)(9{,}80\ \text{m/s}^2)(10{,}0\ \text{m}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Importancia

Este valor es una presión manométrica, ya que la presión inicial se dio como presión manométrica. Así, la presión de la boquilla es igual a la presión atmosférica, como debe ser, porque el agua sale a la atmósfera sin cambios en sus condiciones.

14.7 Viscosidad y turbulencia

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar qué es la viscosidad.
- Calcular el flujo y la resistencia con la ley de Poiseuille.
- Explicar cómo cae la presión debido a la resistencia.
- Calcular el número de Reynolds para un objeto que se mueve a través de un fluido.
- Usar el número de Reynolds de un sistema para determinar si es laminar o turbulento.
- Describir las condiciones en las que un objeto tiene una velocidad terminal.

En Aplicaciones de las leyes de Newton, donde se introdujo el concepto de fricción, vimos que un objeto que se desliza por el suelo con una velocidad inicial y sin fuerza aplicada llega al reposo debido a la fuerza de fricción. La fricción depende de los tipos de materiales en contacto y es proporcional a la fuerza normal. En ese mismo capítulo hablamos también de arrastre y resistencia del aire. Explicamos que a bajas velocidades el arrastre es proporcional a la velocidad, mientras que a altas velocidades el arrastre es proporcional a la velocidad al cuadrado. En esta sección introducimos las fuerzas de fricción que actúan sobre fluidos en movimiento. Por ejemplo, un fluido que circula por una tubería está sujeto a una resistencia, un tipo de fricción, entre el fluido y las paredes. La fricción también se produce entre las diferentes capas de fluido. Estas fuerzas resistivas afectan la forma en que el fluido circula a través de la tubería.

Viscosidad y flujo laminar

Cuando se sirve un vaso de jugo, el líquido fluye libre y rápidamente. Pero si vierte sirope de arce sobre sus panqueques, ese líquido fluye lentamente y se pega a la jarra. La diferencia es la fricción del fluido, tanto dentro del propio fluido como entre este y su entorno. A esta propiedad de los fluidos la llamamos *viscosidad*. El jugo tiene una baja viscosidad, mientras que el sirope tiene una alta viscosidad.

La definición precisa de la viscosidad se basa en el flujo laminar, o no turbulento. La Figura 14.34 muestra de forma esquemática en qué se diferencian el flujo laminar y el turbulento. Cuando el flujo es laminar, las capas fluyen sin mezclarse. Cuando el flujo es turbulento, las capas se mezclan y se producen velocidades significativas en direcciones distintas de la dirección general del flujo.

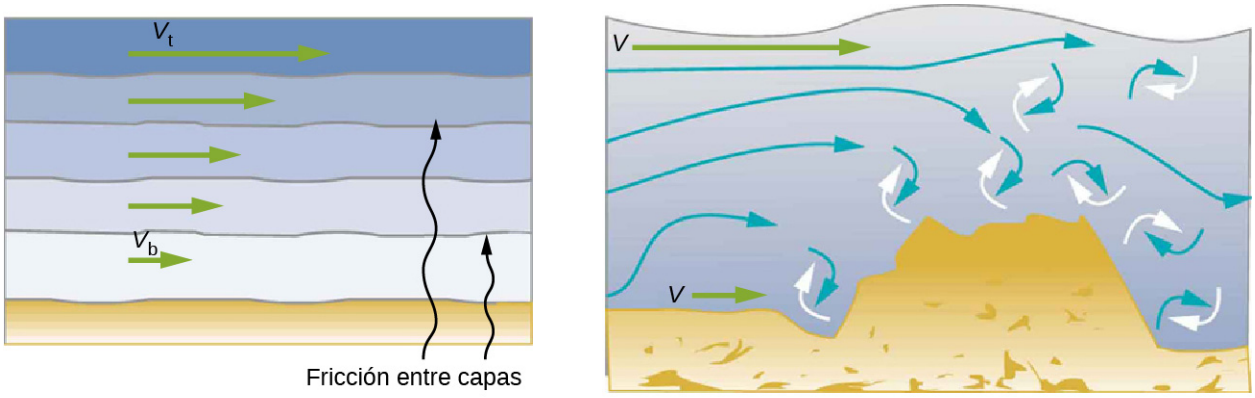


FIGURA 14.34 (a) El flujo laminar se produce en capas sin mezclarse. Obsérvese que la viscosidad provoca un arrastre entre las capas, así como con la superficie fija. La velocidad cerca del fondo del flujo (v_b) es menor que la velocidad cerca de la cima (v_t) porque en este caso, la superficie del recipiente contenedor está en el fondo. (b) Una obstrucción en el recipiente provoca un flujo turbulento. El flujo turbulento mezcla el fluido. Hay más interacción, mayor calentamiento y más resistencia que en el flujo laminar.

La turbulencia es un fluido circulante en el cual las capas se mezclan entre sí mediante torbellinos y remolinos. Tiene dos causas principales. En primer lugar, cualquier obstrucción o esquina afilada, como en un grifo, crea turbulencia al impartir velocidades perpendiculares al flujo. En segundo lugar, las altas velocidades provocan turbulencia. El arrastre entre capas adyacentes de fluido y entre el fluido y su entorno puede formar remolinos y torbellinos si la velocidad es lo suficientemente grande. En la Figura 14.35, la velocidad del humo que se acelera alcanza el punto en que comienza a arremolinarse debido al arrastre entre el humo y el aire circundante.



FIGURA 14.35 El humo se eleva suavemente durante un tiempo y luego comienza a formar remolinos y torbellinos. El flujo suave se denomina flujo laminar, mientras que los remolinos y torbellinos tipifican el flujo turbulento. El humo se eleva más rápidamente cuando fluye suavemente que después de volverse turbulento, lo que sugiere que la turbulencia plantea más resistencia al flujo (créditos: "Creativity103"/Flickr).

La Figura 14.36 muestra cómo se mide la viscosidad de un fluido. El fluido que se va a medir se coloca entre dos placas paralelas. La placa inferior se mantiene fija, mientras que la placa superior se mueve hacia la derecha y arrastra el fluido con ella. La capa (o lámina) de fluido en contacto con cualquiera de las placas no se mueve con respecto a la placa, por lo que la capa superior se mueve a una velocidad v mientras que la capa inferior permanece en reposo. Cada capa sucesiva, de arriba hacia abajo, ejerce una fuerza sobre la que está por debajo, tratando de arrastrarla, lo que produce una variación continua de la velocidad desde v hasta 0, como se muestra. Se procura que el flujo sea laminar, es decir, que las capas no se mezclen. El movimiento de la figura es como un movimiento de cizallamiento continuo. Los fluidos tienen una resistencia al cizallamiento cero, pero la velocidad a la que se cizallan está relacionada con los mismos factores geométricos A y L que la deformación por cizallamiento de los sólidos. En el diagrama, el fluido está inicialmente en reposo. La capa de fluido en contacto con la placa móvil se acelera y comienza a moverse debido a la fricción interna entre la placa móvil y el fluido. La siguiente capa está en contacto con la capa en movimiento; como hay fricción interna entre las dos capas, también se acelera, y así sucesivamente a través de la profundidad del fluido. También hay fricción interna entre la placa estacionaria y la capa más baja de fluido, junto a la placa de la estación. La fuerza es necesaria para mantener la placa en movimiento a una velocidad constante debido a la fricción interna.

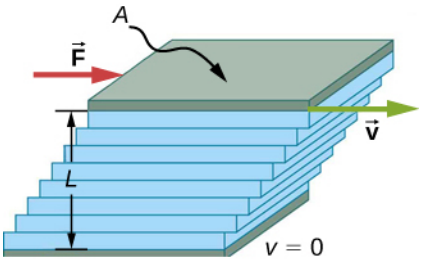


FIGURA 14.36 Medición de viscosidad para el flujo laminar de un fluido entre dos placas de área A. La placa inferior es fija. Cuando la placa superior es empujada hacia la derecha, arrastra el fluido con ella.

Se requiere una fuerza F para mantener la placa superior en Figura 14.36 movimiento a una velocidad constante v, y hay experimentos que han demostrado que esta fuerza depende de cuatro factores. En primer lugar, F es directamente proporcional a v (hasta que la velocidad es tan alta que se produce turbulencia; entonces se necesita una fuerza mucho mayor, y tiene una dependencia más complicada de v). En segundo

lugar, F es proporcional al área A de la placa. Esta relación parece razonable, ya que A es directamente proporcional a la cantidad de fluido que se mueve. En tercer lugar, F es inversamente proporcional a la distancia entre las placas L. Esta relación también es razonable; L es como un brazo de palanca, y cuanto mayor sea el brazo de palanca, menor será la fuerza necesaria. En cuarto lugar, F es directamente proporcional al coeficiente de viscosidad, η. Cuanto mayor sea la viscosidad, mayor será la fuerza necesaria. Estas dependencias se combinan en la ecuación

$$F = \eta \frac{vA}{L}.$$

Esta ecuación nos da una definición de trabajo de la viscosidad del fluido η. Resolver para η da

$$\eta = \frac{FL}{vA} \qquad 14.17$$

que define la viscosidad en términos de cómo se mide.

La unidad SI de la viscosidad es $\mathrm{N \cdot m/\left[(m/s)\,m^2\right] = \left(N/m^2\right)\,s}$ o $\mathrm{Pa \cdot s}$. En la Tabla 14.4 se enumeran los coeficientes de viscosidad de varios fluidos. La viscosidad varía de un fluido a otro en varios órdenes de magnitud. Como es de esperar, las viscosidades de los gases son mucho menores que las de los líquidos, y estas viscosidades suelen depender de la temperatura.

Fluido	Temperatura (°C)	Viscosidad $\eta \times 10^3$
Aire	0	0,0171
	20	0,0181
	40	0,0190
	100	0,0218
Amoníaco	20	0,00974
Dióxido de carbono	20	0,0147
Helio	20	0,0196
Hidrógeno	0	0,0090
Mercurio	20	0,0450
Oxígeno	20	0,0203
Vapor	100	0,0130
Agua líquida	0	1,792
	20	1,002
	37	0,6947
	40	0,653

Fluido	Temperatura (°C)	Viscosidad $\eta \times 10^3$
	100	0,282
Sangre completa	20	3,015
	37	2,084
Plasma sanguíneo	20	1,810
	37	1,257
Alcohol etílico	20	1,20
Metanol	20	0,584
Aceite (máquina pesada)	20	660
Aceite (motor, SAE 10)	30	200
Aceite (de oliva)	20	138
Glicerina	20	1.500
Miel	20	2.000-10.000
Sirope de arce	20	2.000-3.000
Leche	20	3,0
Aceite (maíz)	20	65

TABLA 14.4 Coeficientes de viscosidad de varios fluidos

Flujo laminar confinado en tubos: Ley de Poiseuille

¿Qué causa el flujo? La respuesta, como es lógico, es una diferencia de presión. De hecho, existe una relación muy sencilla entre flujo horizontal y presión. La tasa de flujo Q está en la dirección de alta a baja presión. Cuanto mayor sea la diferencia de presión entre dos puntos, mayor será la tasa de flujo. Esta relación se puede expresar como

$$Q = \frac{p_2 - p_1}{R}$$

donde p_1 y p_2 son las presiones en dos puntos, como por ejemplo en cada extremo de un tubo, y R es la resistencia al flujo. La resistencia R incluye todo, excepto la presión, que afecta la tasa de flujo. Por ejemplo, R es mayor para un tubo largo que para uno corto. Cuanto mayor es la viscosidad de un fluido, mayor es el valor de R. La turbulencia aumenta mucho R, mientras que el aumento del diámetro de un tubo disminuye R.

Si la viscosidad es cero, el fluido no tiene fricción y la resistencia al flujo también es cero. Al comparar el flujo sin fricción en un tubo con el flujo viscoso, como en la Figura 14.37, vemos que para un fluido viscoso, la velocidad es mayor a mitad de camino debido al arrastre en los límites. Podemos ver el efecto de la viscosidad en la llama de un mechero Bunsen [parte (c)], aunque la viscosidad del gas natural es pequeña.

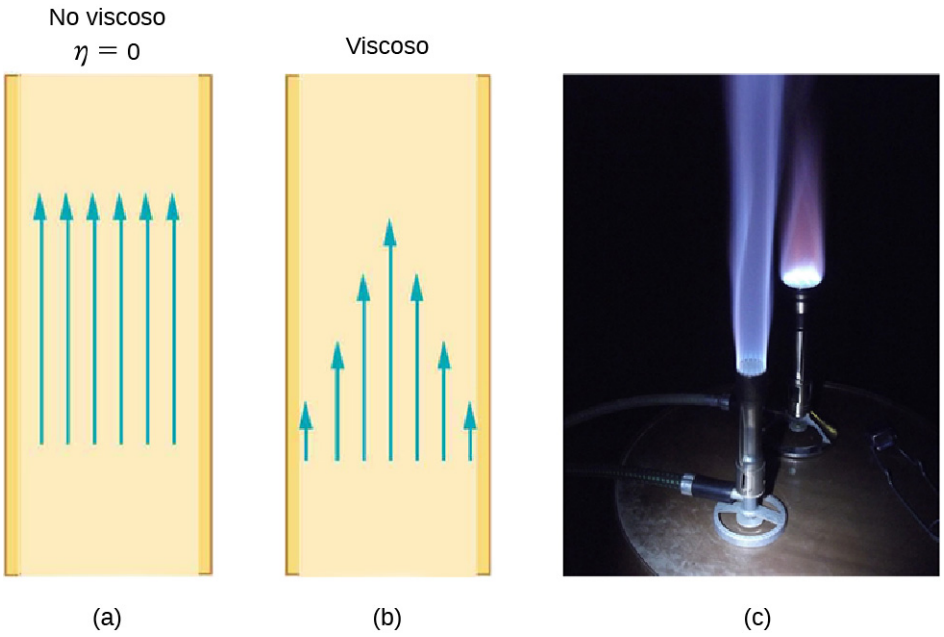


FIGURA 14.37 (a) Si el fluido circulante en un tubo tiene una resistencia insignificante, la velocidad es la misma a lo largo de todo el tubo. (b) Cuando un fluido viscoso circula a través de un tubo, su velocidad en las paredes es cero, y aumenta constantemente hasta su máximo en el centro del tubo. (c) La forma de la llama de un mechero Bunsen se debe al perfil de velocidad a través del tubo (créditos c: modificación de trabajo de "jasonwoodhead23"/Flickr).

La resistencia R al flujo laminar de un fluido incompresible con viscosidad η a través de un tubo horizontal de radio uniforme r y longitud l, viene dada por

$$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}. \tag{14.18}$$

Esta ecuación se denomina **ley de Poiseuille para la resistencia**, llamada así en honor al científico francés J. L. Poiseuille (1799-1869), que la dedujo en un intento de comprender el flujo de la sangre a través del cuerpo.

Examinemos la expresión de Poiseuille para R para ver si tiene un buen sentido intuitivo. Vemos que la resistencia es directamente proporcional a la viscosidad del fluido η y la longitud l de un tubo. Al fin y al cabo, ambos afectan directamente a la cantidad de fricción encontrada: cuanto mayor sea uno de ellos, mayor será la resistencia y menor el flujo. El radio r de un tubo afecta la resistencia, lo que también tiene sentido, porque cuanto mayor sea el radio, mayor será el flujo (los demás factores permanecen iguales). Pero es sorprendente que r se eleve a la cuarta potencia en la ley de Poiseuille. Este exponente significa que cualquier cambio en el radio de un tubo tiene un efecto muy grande en la resistencia. Por ejemplo, duplicar el radio de un tubo disminuye la resistencia en un factor de $2^4 = 16$.

En conjunto, $Q = \frac{p_2 - p_1}{R}$ y $R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$ dan la siguiente expresión para la tasa de flujo:

$$Q = \frac{(p_2 - p_1)\pi r^4}{8\eta l}. \tag{14.19}$$

Esta ecuación describe el flujo laminar a través de un tubo. A veces se denomina ley de Poiseuille para el flujo laminar, o simplemente **ley de Poiseuille** (Figura 14.38).

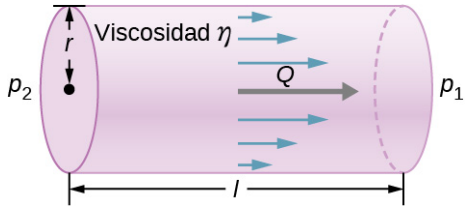


FIGURA 14.38 La ley de Poiseuille se aplica al flujo laminar de un fluido incompresible de viscosidad η a través de un tubo de longitud l y radio r. El sentido del flujo es de mayor a menor presión. La tasa de flujo Q es directamente proporcional a la diferencia de presión $p_2 - p_1$, e inversamente proporcional a la longitud l del tubo y a la viscosidad η del fluido. La tasa de flujo aumenta con el radio en un factor de r^4.

EJEMPLO 14.8

Usar la tasa de flujo: sistemas de aire acondicionado

Se está diseñando un sistema de aire acondicionado para suministrar aire a una presión manométrica de 0,054 Pa a una temperatura de 20 °C. El aire se envía a través de un conducto redondo aislado de 18,00 cm de diámetro. El conducto tiene una longitud de 20 metros y está abierto a una habitación a una presión atmosférica de 101,30 kPa. La habitación tiene una longitud de 12 metros, una anchura de 6 metros y una altura de 3 metros. (a) ¿Cuál es la tasa de flujo volumétrica que pasa por la tubería al suponer un flujo laminar? (b) Estime el tiempo necesario para sustituir completamente el aire de la habitación. (c) Los constructores deciden ahorrar dinero usando un conducto de 9,00 cm de diámetro. ¿Cuál es la nueva tasa de flujo?

Estrategia

Al suponer un flujo laminar, la ley de Poiseuille establece que

$$Q = \frac{(p_2 - p_1)\pi r^4}{8\eta l} = \frac{dV}{dt}.$$

Tenemos que comparar el radio de la arteria antes y después de la reducción de la tasa de flujo. Obsérvese que se nos da el diámetro del conducto, por lo que debemos dividir entre dos para obtener el radio.

Solución

a. Se supone una diferencia de presión constante y se usa la viscosidad $\eta = 0{,}0181\ \text{mPa} \cdot \text{s}$,

$$Q = \frac{(0{,}054\ \text{Pa})\,(3{,}14)\,(0{,}09\ \text{m})^4}{8\left(0{,}0181 \times 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s}\right)(20\ \text{m})} = 3{,}84 \times 10^{-3}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

b. Se supone un flujo constante $Q = \frac{dV}{dt} \approx \frac{\Delta V}{\Delta t}$

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{(12\ \text{m})\,(6\ \text{m})\,(3\ \text{m})}{3{,}84 \times 10^{-3}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 5{,}63 \times 10^4\ \text{s} = 15{,}63\ \text{h}.$$

c. Usando el flujo laminar, la ley de Poiseuille arroja

$$Q = \frac{(0{,}054\ \text{Pa})\,(3{,}14)\,(0{,}045\ \text{m})^4}{8\left(0{,}0181 \times 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s}\right)(20\ \text{m})} = 2{,}40 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Así, la disminución del radio del conducto a la mitad reduce la tasa de flujo al 6,25 % del valor original.

Importancia

En general, al suponer un flujo laminar, la disminución del radio tiene un efecto más dramático que la modificación de la longitud. Si se aumenta la longitud y todas las demás variables permanecen constantes, la tasa de flujo disminuye:

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{\frac{(p_2-p_1)\pi r_A^4}{8\eta l_A}}{\frac{(p_2-p_1)\pi r_B^4}{8\eta l_B}} = \frac{l_B}{l_A}$$

$$Q_B = \frac{l_A}{l_B} Q_A.$$

Al duplicar la longitud, la tasa de flujo se reduce a la mitad de la original.

Si se disminuye el radio y todas las demás variables permanecen constantes, la tasa de flujo volumétrica disminuye en un factor mucho mayor.

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{\frac{(p_2-p_1)\pi r_A^4}{8\eta l_A}}{\frac{(p_2-p_1)\pi r_B^4}{8\eta l_B}} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^4$$

$$Q_B = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^4 Q_A$$

Al reducir el radio a la mitad, la tasa de flujo disminuye a una dieciseisava parte del original.

El flujo y la resistencia como causas de caídas de presión

La presión del agua en los hogares es, a veces, más baja de lo normal en momentos de mucho uso, como los días calurosos de verano. La caída de presión se produce en el conducto de agua antes de que llegue a los hogares. Consideremos el flujo a través del conducto de agua como se ilustra en la Figura 14.39. Podemos entender por qué la presión p_1 a la vivienda disminuye en los momentos de mayor uso, reordenando la ecuación de la tasa de flujo:

$$Q = \frac{p_2-p_1}{R}$$

$$p_2-p_1 = RQ.$$

En este caso, p_2 es la presión en la obra de agua y R es la resistencia del conducto de agua. En los momentos de mayor uso, la tasa de flujo Q es grande. Esto significa que $p_2 - p_1$ también debe ser grande. Así, p_1 debe disminuir. Es correcto pensar que el flujo y la resistencia hacen que la presión baje de p_2 hasta p_1. La ecuación $p_2 - p_1 = RQ$ es válido tanto para flujos laminares como turbulentos.

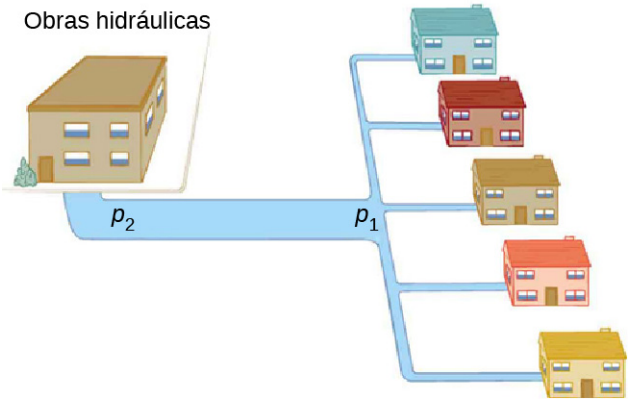


FIGURA 14.39 Durante los momentos de mayor uso se produce una importante caída de presión en el conducto de agua, y p_1 suministrado a los usuarios es significativamente menor que p_2 creado en las obras de agua. Si el flujo es muy pequeño, la caída de presión es insignificante y $p_2 \approx p_1$.

También podemos usar $p_2 - p_1 = RQ$ para analizar las caídas de presión que se producen en sistemas más complejos en los que el radio del tubo no es el mismo en todas partes. La resistencia es mucho mayor en lugares estrechos, como en una arteria coronaria obstruida. Para una tasa de flujo dada Q, la pérdida de carga

es mayor donde el tubo es más estrecho. Así es como los grifos de agua controlan el flujo. Además, R aumenta mucho con la turbulencia, y una constricción que crea turbulencia reduce mucho la presión descendente. La placa en una arteria reduce la presión y, por tanto, el flujo, tanto por su resistencia como por la turbulencia que crea.

Medición de turbulencia

Un indicador llamado **número de Reynolds** N_R puede revelar si el flujo es laminar o turbulento. Para un flujo en un tubo de diámetro uniforme, el número de Reynolds se define como

$$N_R = \frac{2\rho v r}{\eta} \text{(flujo en el tubo)} \qquad 14.20$$

donde ρ es la densidad del fluido, v su velocidad, η su viscosidad y r el radio del tubo. El número de Reynolds es una cantidad sin dimensiones. Hay experimentos que han revelado que N_R está relacionado con el inicio de turbulencia. Para N_R por debajo de unos 2.000, el flujo es laminar. Para N_R por encima de unos 3.000, el flujo es turbulento.

Para valores de N_R entre 2.000 y 3.000 aproximadamente, el flujo es inestable, es decir, puede ser laminar, pero pequeños obstáculos y la rugosidad de la superficie pueden hacerlo turbulento, y puede oscilar aleatoriamente entre ser laminar y turbulento. De hecho, el flujo de un fluido con un número de Reynolds entre 2.000 y 3.000 es un buen ejemplo de comportamiento caótico. Un sistema se define como caótico cuando su comportamiento es tan sensible a algún factor que es extremadamente difícil de predecir. Es difícil, pero no imposible, predecir si el flujo es turbulento o no cuando el número de Reynolds de un fluido cae en este rango debido a la dependencia extremadamente sensible de factores como rugosidad y obstrucciones en la naturaleza del flujo. Una pequeña variación de un factor tiene un efecto exagerado (o no lineal) en el flujo.

EJEMPLO 14.9

Usar la tasa de flujo: flujo turbulento o flujo laminar

En el Ejemplo 14.8, encontramos que la tasa de flujo volumétrica de un sistema de aire acondicionado es $Q = 3{,}84 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$. Este cálculo suponía un flujo laminar. (a) ¿Esta era una buena suposición? (b) ¿A qué velocidad se convertiría el flujo en turbulento?

Estrategia

Para determinar si el flujo de aire a través del sistema de aire acondicionado es laminar, primero tenemos que encontrar la velocidad, que se puede encontrar por

$$Q = Av = \pi r^2 v.$$

Entonces, podemos calcular el número de Reynolds usando la ecuación siguiente, y determinar si entra en el rango del flujo laminar

$$R = \frac{2\rho v r}{\eta}.$$

Solución

a. Usando los valores dados:

$$v = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{3{,}84 \times 10^{-3}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{3{,}14(0{,}09\ \text{m})^2} = 0{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$R = \frac{2\rho v r}{\eta} = \frac{2\left(1{,}23\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)(0{,}15\ \frac{\text{m}}{\text{s}})(0{,}09\ \text{m})}{0{,}0181 \times 10^{-3}\ \text{Pa·s}} = 1.835.$$

Como el número de Reynolds es 1.835 < 2.000, el flujo es laminar y no turbulento. La suposición de que el flujo era laminar es válida.

b. Para encontrar la velocidad máxima del aire para mantener el flujo laminar, considere el número de

Reynolds.

$$R = \frac{2\rho v r}{\eta} \leq 2.000$$

$$v = \frac{2.000\left(0{,}0181 \times 10^{-3}\,\text{Pa·s}\right)}{2\left(1{,}23\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)(0{,}09\ \text{m})} = 0{,}16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Importancia

Cuando se traslada un fluido de un punto a otro, es deseable limitar la turbulencia. La turbulencia provoca un desperdicio de energía, ya que parte de la energía destinada a mover el fluido se disipa cuando se forman torbellinos. En este caso, el sistema de aire acondicionado será menos eficiente una vez que la velocidad supere los 0,16 m/s, ya que este es el punto en el que comenzará a producirse turbulencia.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

densidad masa por unidad de volumen de una sustancia u objeto

ecuación de Bernoulli ecuación resultante de aplicar conservación de la energía a un fluido incompresible sin fricción: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h =$ constante, en todo el fluido

equilibrio hidrostático estado en el que el agua no circula, o es estática

fluido ideal fluido con viscosidad insignificante

fluidos líquidos y gases; un fluido es un estado de la materia que cede a las fuerzas de cizallamiento

flujo laminar tipo de fluido circulante en el que las capas no se mezclan

flujo turbulento tipo de fluido circulante en el que las capas se mezclan a través de remolinos y torbellinos

fuerza de flotación fuerza ascendente neta sobre cualquier objeto en cualquier fluido debido a la diferencia de presión a diferentes profundidades

gato hidráulico máquina simple que usa cilindros de diferentes diámetros para distribuir fuerza

gravedad específica relación entre la densidad de un objeto y la de un fluido (generalmente agua)

Ley de Poiseuille velocidad de flujo laminar de un fluido incompresible en un tubo: $Q = \frac{(p_2 - p_1)\pi r^4}{8\eta l}$.

Ley de Poiseuille para la resistencia resistencia al flujo laminar de un fluido incompresible en un tubo $R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$

número de Reynolds parámetro sin dimensiones que puede revelar si un determinado flujo es laminar o turbulento

presión fuerza por unidad de superficie ejercida perpendicularmente a la superficie sobre la que actúa la fuerza

presión absoluta suma de la presión manométrica y la presión atmosférica

presión manométrica presión relativa a la presión atmosférica

principio de Arquímedes la fuerza de flotación de un objeto es igual al peso del fluido que desplaza

principio de Bernoulli la ecuación de Bernoulli aplicada a profundidad constante:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

principio de Pascal un cambio en la presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminuir a todas las porciones del fluido y a las paredes de su recipiente.

tasa de flujo abreviado Q, es el volumen V que pasa por un punto determinado durante un tiempo t o $Q = dV/dt$

turbulencia fluido circulante en el que las capas se mezclan por torbellinos y remolinos

viscosidad medida de la fricción interna en un fluido

Ecuaciones Clave

Densidad de una muestra a densidad constante	$\rho = \frac{m}{V}$
Presión	$p = \frac{F}{A}$
Presión a una profundidad h en un fluido de densidad constante	$p = p_0 + \rho g h$
Cambio de la presión con la altura en un fluido de densidad constante	$\frac{dp}{dy} = -\rho g$
Presión absoluta	$p_{\text{abs}} = p_{\text{g}} + p_{\text{atm}}$
Principio de Pascal	$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$
Tasa de flujo volumétrica	$Q = \frac{dV}{dt}$

Ecuación de continuidad (densidad constante)	$A_1 v_1 = A_2 v_2$
Ecuación de continuidad (forma general)	$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$
Ecuación de Bernoulli	$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}$
Viscosidad	$\eta = \frac{FL}{vA}$
Ley de Poiseuille para la resistencia	$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$
Ley de Poiseuille	$Q = \frac{(p_2 - p_1)\pi r^4}{8\eta l}$

Resumen

14.1 Fluidos, densidad y presión

- Un fluido es un estado de la materia que cede a las fuerzas laterales o de cizallamiento. Tanto los líquidos como los gases son fluidos. La estática de los fluidos es la física de los fluidos estacionarios.
- La densidad es la masa por unidad de volumen de una sustancia u objeto, definida como $\rho = m/V$. La unidad SI de densidad es kg/m^3.
- La presión es la fuerza por unidad de superficie perpendicular sobre la que se aplica la fuerza, $p = F/A$. La unidad SI de presión es el pascal: $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$
- La presión debido al peso de un líquido de densidad constante viene dada por $p = \rho gh$, donde p es la presión, h es la profundidad del líquido, ρ es la densidad del líquido y g es la aceleración debido a la gravedad.

14.2 Medir la presión

- La presión manométrica es la presión relativa a la presión atmosférica.
- La presión absoluta es la suma de la presión manométrica y la presión atmosférica.
- Los manómetros de tubo abierto tienen tubos en forma de U y un extremo está siempre abierto. Se usan para medir presión. Un barómetro de mercurio es un aparato que mide presión atmosférica.
- La unidad de presión del SI es el pascal (Pa), pero se suelen usar otras unidades.

14.3 Principio de Pascal y la hidráulica

- La presión es la fuerza por unidad de área.
- Un cambio en la presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminuir a todas las porciones del fluido y a las paredes de su recipiente.
- Un sistema hidráulico es un sistema de fluidos cerrado que se usa para ejercer fuerzas.

14.4 Principio de Arquímedes y flotabilidad

- La fuerza de flotación es la fuerza ascendente neta sobre cualquier objeto en cualquier fluido. Si la fuerza de flotación es mayor que el peso del objeto, este subirá a la superficie y flotará. Si la fuerza de flotación es menor que el peso del objeto, este se hundirá. Si la fuerza de flotación es igual al peso del objeto, este puede permanecer suspendido a su profundidad actual. La fuerza de flotación está siempre presente y actúa sobre cualquier objeto sumergido parcial o totalmente en un fluido.
- El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación de un objeto es igual al peso del fluido que desplaza.

14.5 Dinámicas de fluidos

- La tasa de flujo Q se define como el volumen V que pasa por un punto en el tiempo t, o $Q = \frac{dV}{dt}$ donde V es el volumen y t es el tiempo. La unidad SI de la tasa de flujo es m^3/s, pero se pueden usar otros índices, como L/min.
- La tasa de flujo y la velocidad están relacionadas por $Q = Av$ donde A es el área de la sección transversal del flujo y v es su velocidad media.
- La ecuación de continuidad establece que para un fluido incompresible la masa que entra en una tubería debe ser igual a la masa que sale de ella.

14.6 Ecuación de Bernoulli

- La ecuación de Bernoulli establece que la suma en cada lado de la siguiente ecuación es constante, o la misma en dos puntos cualesquiera de un fluido incompresible sin fricción:
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2.$$
- El principio de Bernoulli es la ecuación de Bernoulli aplicada a situaciones en las que la altura del fluido es constante. Los términos que implican profundidad (o altura h) se restan, con lo que se obtiene
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$
- El principio de Bernoulli tiene muchas aplicaciones, como arrastre y medición de la velocidad.

14.7 Viscosidad y turbulencia

- El flujo laminar se caracteriza por un flujo suave del fluido en capas que no se mezclan.
- La turbulencia se caracteriza por torbellinos y remolinos que mezclan capas de fluido.
- Viscosidad del fluido η se debe a la fricción dentro de un fluido.
- El flujo es proporcional a la diferencia de presión e inversamente proporcional a la resistencia:
$$Q = \frac{p - 2p_1}{R}.$$
- La caída de presión causada por el flujo y la resistencia viene dada por $p_2 - p_1 = RQ$.
- El número de Reynolds N_R puede revelar si el flujo es laminar o turbulento. Es $N_R = \frac{2\rho v r}{\eta}$.
- Para N_R por debajo de unos 2.000, el flujo es laminar. Para N_R por encima de unos 3.000, el flujo es turbulento. Para valores de N_R entre 2.000 y 3.000, puede ser cualquiera de los dos o ambos.

Preguntas Conceptuales

14.1 Fluidos, densidad y presión

1. ¿Cuáles de las siguientes sustancias son fluidos a temperatura ambiente y presión atmosférica: aire, mercurio, agua o vidrio?

2. ¿Por qué los gases son más fáciles de comprimir que los líquidos y los sólidos?

3. Explique cómo varía la densidad del aire con la altitud.

4. La imagen muestra un vaso de agua con hielo lleno hasta el borde. ¿Se desbordará el agua cuando se derrita el hielo? Explique su respuesta.



5. ¿Cómo se relaciona la presión con el afilado de un cuchillo y su capacidad de corte?

6. ¿Por qué una fuerza ejercida por un fluido estático sobre una superficie es siempre perpendicular a esta?

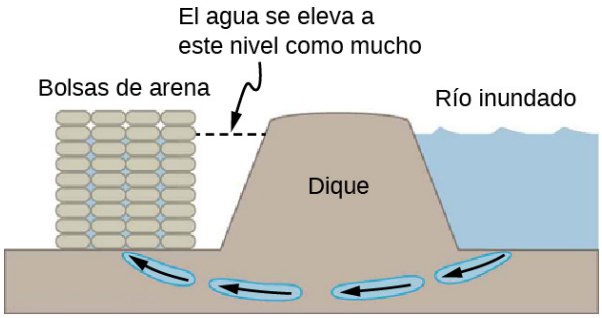
7. Imagine que en un lugar remoto cerca del polo norte un trozo de hielo flota en un lago. Junto al lago, un glaciar con el mismo volumen que el hielo flotante se asienta en tierra. Si ambos trozos de hielo se derritieran debido al aumento de la temperatura global, y todo el hielo derretido fuera a parar al lago, ¿cuál de los dos haría subir más el nivel del lago? Explique.

8. En el ballet, bailar *en puntas* (sobre las puntas de los dedos) es mucho más duro para los dedos de los pies que bailar o caminar normalmente. Explique por qué en términos de presión.

9. La presión atmosférica ejerce una gran fuerza (igual al peso de la atmósfera por encima de su cuerpo, unas 10 toneladas) sobre la parte superior de su cuerpo cuando está tumbado en la playa tomando el sol. ¿Por qué usted puede levantarse?

10. ¿Por qué la presión atmosférica disminuye más rápidamente que linealmente con la altitud?

11. La imagen muestra cómo sacos de arena colocados alrededor de una fuga fuera de un dique fluvial pueden detener eficazmente el flujo de agua que está debajo del dique. Explique cómo la pequeña cantidad de agua dentro de la columna de sacos de arena es capaz de equilibrar la masa de agua mucho mayor que hay detrás del dique.



12. ¿Existe una fuerza neta sobre una presa debido a la presión atmosférica? Explique su respuesta.

13. ¿La presión atmosférica se suma a la presión del gas en un tanque rígido? ¿Y en un globo de juguete? ¿Cuándo, en general, la presión atmosférica no afecta la presión total de un fluido?

14. Se puede romper una botella de vino fuerte golpeando un corcho con el puño, pero el corcho debe presionar directamente contra el líquido que llena la botella; no puede haber aire entre el corcho y el líquido. Explique por qué la botella se rompe solamente si no hay aire entre el corcho y el líquido.

14.2 Medir la presión

15. Explique por qué el fluido alcanza niveles iguales en ambos lados de un manómetro si ambos lados están abiertos a la atmósfera, aunque los tubos sean de distinto diámetro.

14.3 Principio de Pascal y la hidráulica

16. Supongamos que el cilindro principal de un sistema hidráulico está a una altura mayor que el cilindro que controla. Explique cómo afectará esto a la fuerza producida en el cilindro que se está controlando.

14.4 Principio de Arquímedes y flotabilidad

17. Se necesita más fuerza para halar el tapón en una bañera llena que cuando está vacía. ¿Esto contradice el principio de Arquímedes? Explique su respuesta.

18. ¿Los fluidos ejercen fuerzas de flotación en un ambiente "ingrávido", como en el transbordador espacial? Explique su respuesta.

19. ¿El mismo barco flotará más alto en agua salada que en agua dulce? Explique su respuesta.

20. Las canicas que se dejan caer en una bañera parcialmente llena se hunden hasta el fondo. Parte de su peso lo soporta la fuerza de flotación, pero la fuerza descendente en el fondo de la bañera aumenta exactamente en el peso de las canicas. Explique por qué.

14.5 Dinámicas de fluidos

21. Muchas figuras del texto muestran líneas de corriente. Explique por qué la velocidad del fluido es mayor donde las líneas de corriente están más juntas *(Pista:* Considere la relación entre la velocidad del fluido y el área de la sección transversal por la que circula el fluido).

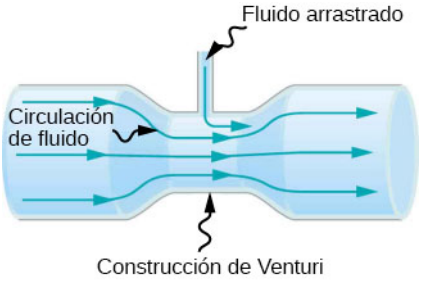
14.6 Ecuación de Bernoulli

22. Puede lanzar un chorro de agua desde una manguera de jardín a una distancia considerablemente mayor cubriendo parcialmente la abertura con el pulgar. Explique cómo funciona esto.

23. El agua se dispara casi verticalmente hacia arriba en una fuente decorativa y se observa que la corriente se ensancha a medida que sube. Por el contrario, un chorro de agua que cae directamente de un grifo se estrecha. Explique por qué.

24. Revise la Figura 14.29. Responda las siguientes dos preguntas. ¿Por qué p_o es menos que la atmosférica? ¿Por qué p_o es mayor que p_i?

25. Un tubo con un segmento estrecho diseñado para mejorar el arrastre se llama Venturi, como el que se muestra a continuación. Los venturis son muy usados en carburadores y aspiradores. ¿Cómo esta estructura refuerza el arrastre?



26. Algunos tubos de chimenea tienen forma de T, con un travesaño en la parte superior que ayuda a aspirar los gases cuando hay una ligera brisa. Explique cómo funciona esto en términos del principio de Bernoulli.

27. ¿Existe un límite en la altura a la que un dispositivo de arrastre puede elevar un fluido? Explique su respuesta.

28. ¿Por qué es preferible que los aviones despeguen contra el viento en vez de con el viento?

29. En ocasiones, los tejados se desprenden

verticalmente durante un ciclón tropical, y los edificios, a veces, explotan hacia fuera cuando los golpea un tornado. Use el principio de Bernoulli para explicar estos fenómenos.

30. Es peligroso situarse cerca de las vías del tren cuando pasa un tren de cercanías a gran velocidad. Explique por qué la presión atmosférica lo empujaría hacia el tren en movimiento.

31. La presión del agua dentro de una boquilla de manguera puede ser inferior a la presión atmosférica debido al efecto Bernoulli. Explique en términos de energía cómo el agua puede salir de la boquilla contra la presión atmosférica opuesta.

32. David bajó la ventanilla de su automóvil mientras conducía por la autopista. Una bolsa de plástico vacía que había en el suelo salió rápidamente volando por la ventana. Explique por qué.

33. Según la ecuación de Bernoulli, ¿cuáles son las tres formas de energía en un fluido? (Nótese que estas formas son conservadoras, a diferencia de la transferencia de calor y otras formas disipativas no incluidas en la ecuación de Bernoulli).

34. La vieja bota de goma que se muestra a continuación tiene dos fugas. ¿A qué altura máxima puede brotar el agua de la fuga 1? ¿En qué se diferencia la velocidad del agua que sale de la fuga 2 de la de la fuga 1? Explique sus respuestas en términos de energía.



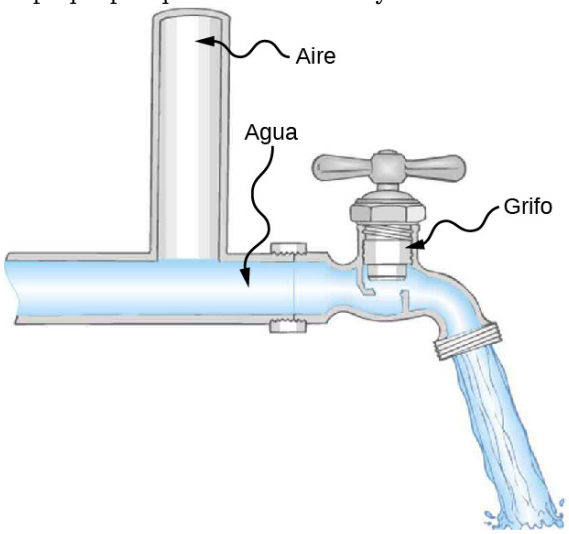
35. La presión del agua dentro de una boquilla de manguera puede ser inferior a la presión atmosférica debido al efecto Bernoulli. Explique en términos de energía cómo el agua puede salir de la boquilla contra la presión atmosférica opuesta.

14.7 Viscosidad y turbulencia

36. Explique por qué la viscosidad de un líquido disminuye con la temperatura, es decir, ¿cómo un aumento de la temperatura puede reducir los efectos de las fuerzas de cohesión en un líquido? Explique también por qué la viscosidad de un gas aumenta con la temperatura, es decir, ¿cómo el aumento de la temperatura del gas crea más colisiones entre átomos y moléculas?

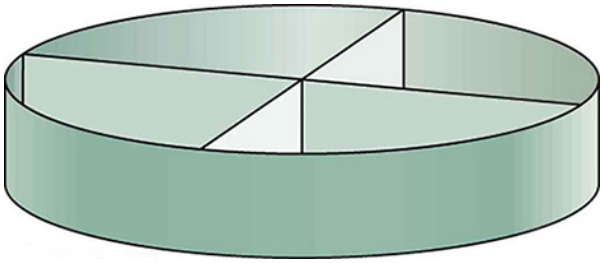
37. Cuando se rema con una canoa río arriba, lo más sensato es viajar lo más cerca posible de la orilla. Cuando se navega en canoa río abajo, generalmente, es mejor permanecer cerca del centro. Explique por qué.

38. Las tuberías suelen incluir tubos llenos de aire cerca de los grifos de agua (véase la siguiente figura). Explique por qué son necesarios y cómo funcionan.



39. El ultrasonido doppler se puede usar para medir la velocidad de la sangre en el cuerpo. Si se produce una constricción parcial de una arteria, ¿dónde se espera que la velocidad de la sangre sea mayor: en la constricción o después de ella? ¿Cuáles son las dos causas distintas de una mayor resistencia en la constricción?

40. Los desagües del fregadero suelen tener un dispositivo como el que se muestra a continuación para ayudar a acelerar el flujo de agua. ¿Cómo funciona esto?



Problemas

14.1 Fluidos, densidad y presión

41. El oro se vende por onza troy (31,103 g). ¿Cuál es el volumen de 1 onza troy de oro puro?

42. El mercurio se suele suministrar en frascos que contienen 34,5 kg (unas 76 lb). ¿Cuál es el volumen en litros de esta cantidad de mercurio?

43. ¿Cuál es la masa de una respiración profunda de aire que tiene un volumen de 2,00 L? Analice el efecto que tiene tomar esa respiración en el volumen y la densidad de su cuerpo.

44. Un método sencillo para hallar la densidad de un objeto es medir su masa y luego medir su volumen sumergiéndolo en una probeta graduada. ¿Cuál es la densidad de una roca de 240 g que desplaza $89{,}0\ \text{cm}^3$ de agua? (Obsérvese que la exactitud y las aplicaciones prácticas de esta técnica son más limitadas que otras que se basan en el principio de Arquímedes).

45. Supongamos que tenemos una taza de café con sección trasversal circular y lados verticales (radio uniforme). ¿Cuál es su radio interior si contiene 375 g de café cuando se llena hasta una profundidad de 7,50 cm? Supongamos que el café tiene la misma densidad que el agua.

46. Un tanque de gasolina rectangular puede contener 50,0 kg de gasolina cuando está lleno. ¿Cuál es la profundidad del depósito si tiene 0,500 m de ancho por 0,900 m de largo? (b) Analice si este tanque de gasolina tiene un volumen razonable para un vehículo de pasajeros.

47. Un compactador de basura puede comprimir su contenido hasta 0,350 veces su volumen original. Sin tener en cuenta la masa de aire expulsada, ¿en qué factor aumenta la densidad de la basura?

48. Un bidón de gasolina de acero de 2,50 kg contiene 20,0 L de gasolina cuando está lleno. ¿Cuál es la densidad media del bidón de gasolina lleno teniendo en cuenta el volumen ocupado por el acero y por la gasolina?

49. ¿Cuál es la densidad del oro de 18,0 quilates que es una mezcla de 18 partes de oro, 5 partes de plata y 1 parte de cobre? (Estos valores son partes por masa, no por volumen). Supongamos que se trata de una mezcla simple que tiene una densidad media igual a las densidades ponderadas de sus constituyentes.

50. La punta de un clavo ejerce una tremenda presión cuando se golpea con un martillo, ya que ejerce una gran fuerza sobre un área pequeña. ¿Qué fuerza se debe ejercer sobre un clavo con una punta circular de 1,00 mm de diámetro para crear una presión de $3{,}00 \times 10^9\ \text{N/m}^2$? (Esta alta presión es posible porque el martillo que golpea el clavo se apoya en una distancia muy corta).

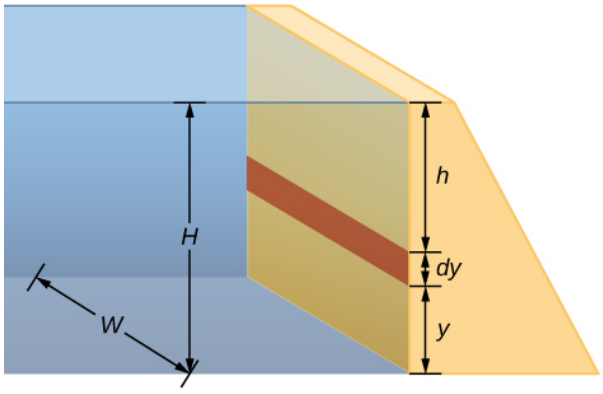
51. Un tubo de vidrio contiene mercurio. ¿Cuál sería la altura de la columna de mercurio que crearía una presión igual a 1,00 atm?

52. Las mayores profundidades oceánicas de la Tierra se encuentran en la Fosa de las Marianas, cerca de Filipinas. Calcule la presión debido al océano en el fondo de esta fosa, dado que su profundidad es de 11,0 km y se supone que la densidad del agua de mar es constante en todo su recorrido.

53. Verifique que la unidad SI de $h\rho g$ es N/m^2

54. ¿Qué presión se ejerce en el fondo de un depósito de gasolina de 0,500 m de ancho y 0,900 m de largo que puede contener 50,0 kg de gasolina cuando está lleno?

55. Una presa sirve para contener un río. La presa tiene una altura $H = 12$ m y una anchura $W = 10$ m. Supongamos que la densidad del agua es $\rho = 1.000\ \text{kg/m}^3$. (a) Determine la fuerza neta sobre la presa. (b) ¿Por qué el espesor de la presa aumenta con la profundidad?



14.2 Medir la presión

56. Encuentre las presiones manométricas y absolutas en el globo y en el tarro de cacahuetes mostrados en la Figura 14.12, suponiendo que el manómetro conectado al globo usa agua y el manómetro conectado al tarro contiene mercurio. Exprese en unidades de centímetros de agua para el globo y de milímetros de mercurio para el tarro, tomando $h = 0{,}0500\text{m}$ para cada uno.

57. ¿Qué altura debe tener un manómetro lleno de agua para medir una presión arterial de hasta 300 mm Hg?

58. Suponga que los neumáticos de la bicicleta son perfectamente flexibles y soportan el peso de la bicicleta y del ciclista solo por la presión y calcule el área total de los neumáticos en contacto con el suelo si la bicicleta y el ciclista tienen una masa total de 80,0 kg y la presión manométrica en los neumáticos es $3{,}50 \times 10^5$ Pa.

14.3 Principio de Pascal y la hidráulica

59. ¿Cuánta presión se transmite en el sistema hidráulico considerado en el Ejemplo 14.3? Exprese su respuesta en atmósferas.

60. ¿Qué fuerza se debe ejercer sobre el cilindro principal de un ascensor hidráulico para soportar el peso de un automóvil de 2.000 kg (un automóvil grande) que descansa sobre un segundo cilindro? El cilindro principal tiene un diámetro de 2,00 cm y el segundo cilindro tiene un diámetro de 24,0 cm.

61. Un anfitrión vierte los restos de varias botellas de vino en una jarra después de una fiesta. A continuación, el anfitrión introduce un corcho de 2,00 cm de diámetro en la botella y lo pone en contacto directo con el vino. El anfitrión se sorprende cuando golpea el corcho en su lugar y el fondo de la jarra (con un diámetro de 14,0 cm) se rompe. Calcule la fuerza adicional ejercida contra el fondo si golpea el corcho con una fuerza de 120 N.

62. Un determinado sistema hidráulico está diseñado para ejercer una fuerza 100 veces mayor que la que se introduce en él. (a) ¿Cuál debe ser la relación entre el área del cilindro que se controla y el área del cilindro principal? (b) ¿Cuál debe ser la relación entre sus diámetros? (c) ¿En qué factor se reduce la distancia por la que se mueve la fuerza de salida en relación con la distancia por la que se mueve la fuerza de entrada? Supongamos que no hay pérdidas por fricción.

63. Verifique que el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida para un sistema hidráulico y suponga que no hay pérdidas por fricción. Demuestre que la distancia que recorre la fuerza de salida se reduce en el mismo factor en que se incrementa la fuerza de salida. Supongamos que el volumen del fluido es constante. ¿Qué efecto tendría la fricción dentro del fluido y entre los componentes del sistema sobre la fuerza de salida? ¿De qué manera dependerá esto de que el fluido se mueva o no?

14.4 Principio de Arquímedes y flotabilidad

64. ¿Qué fracción de hielo se sumerge cuando flota en agua dulce, dada la densidad del agua a $0\ ^\circ\text{C}$ está muy cerca de $1.000\ \text{kg/m}^3$?

65. Si el cuerpo de una persona tiene una densidad de $995\ \text{kg/m}^3$, ¿qué fracción del cuerpo estará sumergida cuando flote suavemente en (a) agua dulce? (b) ¿Y en agua salada con una densidad de $1.027\ \text{kg/m}^3$?

66. Una roca con una masa de 540 g en el aire tiene una masa aparente de 342 g cuando se sumerge en el agua. (a) ¿Qué masa de agua se desplaza? (b) ¿Cuál es el volumen de la roca? (c) ¿Cuál es su densidad media? ¿Esto es coherente con el valor del granito?

67. El principio de Arquímedes se puede usar para calcular la densidad de un fluido, así como la de un sólido. Supongamos que un trozo de hierro con una masa de 390,0 g en el aire tiene una masa aparente de 350,5 g cuando está completamente sumergido en un líquido desconocido. (a) ¿Qué masa de fluido desplaza el hierro? (b) ¿Cuál es el volumen del hierro usando su densidad dada en Tabla 14.1? (c) Calcule la densidad del fluido e identifíquela.

68. Calcule la fuerza de flotación sobre un globo de helio de 2,00 L. (b) Dado que la masa de la goma en el globo es de 1,50 g, ¿cuál es la fuerza vertical neta sobre el globo si se suelta? No hay que tener en cuenta el volumen de la goma.

69. ¿Cuál es la densidad de una mujer que flota en agua dulce con $4{,}00\%$ de su volumen sobre la superficie? (Esto se podría medir colocándola en un tanque con marcas en el lateral para medir la cantidad de agua que desplaza cuando flota y cuando se mantiene bajo el agua). (b) ¿Qué porcentaje de su volumen está por encima de la superficie cuando flota en agua de mar?

70. Un hombre tiene una masa de 80 kg y una densidad de 955kg/m^3 (excluye el aire de los pulmones). (a) Calcule su volumen. (b) Encuentre la fuerza de flotación que el aire ejerce sobre él. (c) ¿Cuál es la relación entre la fuerza de flotación y su peso?

71. Se puede fabricar una brújula sencilla colocando un pequeño imán de barra sobre un corcho que flota en el agua. (a) ¿Qué fracción de un corcho liso quedará sumergida al flotar en el agua? (b) Si el corcho tiene una masa de 10,0 g y

se coloca un imán de 20,0 g sobre él, ¿qué fracción del corcho quedará sumergida? (c) ¿El imán de barra y el corcho flotarán en alcohol etílico?

72. ¿Qué porcentaje del peso de un ancla de hierro será soportado por la fuerza de flotación cuando se sumerja en agua salada?

73. Consulte la Figura 14.20 y demuestre que la fuerza de flotación sobre el cilindro es igual al peso del fluido desplazado (principio de Arquímedes). Puede suponer que la fuerza de flotación es $F_2 - F_1$ y que los extremos del cilindro tienen áreas iguales A Obsérvese que el volumen del cilindro (y el del fluido que desplaza) es igual a $(h_2 - h_1)A$

74. Un hombre de 75,0 kg flota en agua dulce con el 3,00 % de su volumen por encima del agua cuando sus pulmones están vacíos, y con el 5,00 % de su volumen por encima del agua cuando sus pulmones están llenos. Calcule el volumen de aire que inhala —llamado capacidad pulmonar— en litros. (b) ¿Le resulta razonable este volumen pulmonar?

14.5 Dinámicas de fluidos

75. ¿Cuál es la tasa de flujo media en cm^3/s de gasolina al motor de un automóvil que circula a 100 km/h si tiene una media de 10,0 km/L?

76. El corazón de un adulto en reposo bombea sangre a una velocidad de 5,00 L/min. (a) Convierta este valor en cm^3/s. (b) ¿Cuál es esta tasa en m^3/s?

77. Las cataratas Huka en el río Waikato son una de las atracciones turísticas naturales más visitadas de Nueva Zelanda. Por lo general, el río tiene una tasa de flujo de unos 300.000 L/s. En el desfiladero, el río se estrecha hasta 20 m de ancho y tiene una profundidad media de 20 m. (a) ¿Cuál es la rapidez media del río en el desfiladero? (b) ¿Cuál es la rapidez media del agua del río aguas abajo de las cataratas cuando se ensancha hasta 60 m y su profundidad aumenta hasta una media de 40 m?

78. (a) Calcule el tiempo que se tardaría en llenar una piscina privada con una capacidad de 80.000 L usando una manguera de jardín que suministre 60 L/min. (b) ¿Cuánto tiempo se tardaría si se pudiera desviar un río de tamaño moderado, que fluye a $5.000\ \text{m}^3/\text{s}$ en la piscina?

79. ¿Cuál es la velocidad del fluido en una manguera de incendios de 9,00 cm de diámetro que transporta 80,0 L de agua por segundo? (b) ¿Cuál es la tasa de flujo en metros cúbicos por segundo? (c) ¿Sus respuestas serían diferentes si agua salada sustituyera al agua dulce en la manguera de incendios?

80. El agua se mueve a una velocidad de 2,00 m/s a través de una manguera con un diámetro interior de 1,60 cm. (a) ¿Cuál es la tasa de flujo en litros por segundo? (b) La velocidad del fluido en la boquilla de esta manguera es de 15,0 m/s. ¿Cuál es el diámetro interior de la boquilla?

81. Demostrar que la velocidad de un fluido incompresible a través de una constricción, como en un tubo de Venturi, aumenta en un factor igual al cuadrado del factor en que disminuye el diámetro (lo contrario se aplica para el flujo que sale de una constricción hacia una región de mayor diámetro).

82. El agua sale directamente de un grifo de 1,80 cm de diámetro a una velocidad de 0,500 m/s (debido a la construcción del grifo, no hay variación en la velocidad a través de la corriente). (a) ¿Cuál es la tasa de flujo en cm^3/s? b) ¿Cuál es el diámetro de la corriente a 0,200 m por debajo del grifo? No hay que tener en cuenta los efectos debido a la tensión superficial.

14.6 Ecuación de Bernoulli

83. Compruebe que la presión tiene unidades de energía por unidad de volumen.

84. Suponga que tiene un medidor de velocidad del viento como el tubo de Pitot que se muestra en la Figura 14.32. ¿En qué factor debe aumentar la velocidad del viento para duplicar el valor de h en el manómetro? ¿Esto es independiente del fluido en movimiento y del fluido en el manómetro?

85. Si la lectura de la presión de su tubo de Pitot es de 15,0 mm Hg a una velocidad de 200 km/h, ¿cuál será a 700 km/h a la misma altitud?

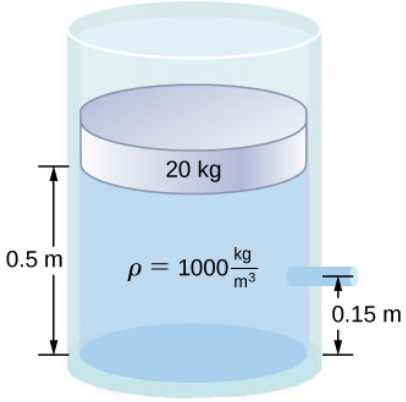
86. Cada pocos años, los vientos en Boulder, Colorado alcanzan velocidades sostenidas de 45,0 m/s (unas 100 mph) cuando la corriente en chorro desciende durante el comienzo de la primavera. Aproximadamente, ¿cuál es la fuerza debido a la ecuación de Bernoulli en un tejado con una superficie de 220m^2? La densidad típica del aire en Boulder es $1{,}14\text{kg/m}^3$ y la presión atmosférica correspondiente es $8{,}89 \times 10^4\text{N/m}^2$ (el principio de Bernoulli, tal como se indica en el

texto, supone un flujo laminar. El uso del principio aquí produce solo un resultado aproximado, porque hay una turbulencia significativa).

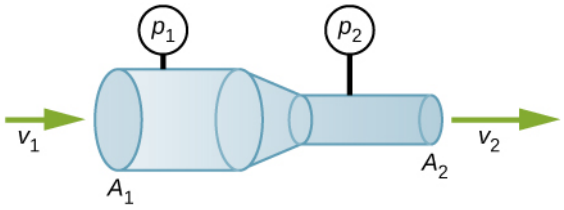
87. ¿Cuál es la caída de presión debido al efecto Bernoulli cuando el agua entra en una boquilla de 3,00 cm de diámetro desde una manguera de incendios de 9,00 cm de diámetro mientras transporta un flujo de 40,0 L/s? (b) ¿A qué altura máxima por encima de la boquilla puede subir el agua? (La altura real será significativamente menor debido a la resistencia del aire).

88. (a) Con la ecuación de Bernoulli, demuestre que la velocidad del fluido medida v para un tubo de Pitot, como el de Figura 14.32(b), viene dada por $v = \left(\frac{2\rho' gh}{\rho}\right)^{1/2}$, donde h es la altura del fluido del manómetro, ρ' es la densidad del fluido del manómetro, ρ es la densidad del fluido en movimiento y g es la aceleración debido a la gravedad (obsérvese que v es efectivamente proporcional a la raíz cuadrada de h, como se indica en el texto). (b) Calcule v para el aire en movimiento si la h de un manómetro de mercurio es de 0,200 m.

89. Un recipiente de agua tiene un área de sección transversal de $A = 0{,}1\ \text{m}^2$ Un pistón se asienta sobre el agua (véase la siguiente figura). Hay un surtidor situado a 0,15 m del fondo del tanque, abierto a la atmósfera, y un chorro de agua sale del surtidor. El área de la sección transversal del surtidor es $A_s = 7{,}0 \times 10^{-4}\text{m}^2$. (a) ¿Cuál es la velocidad del agua al salir del surtidor? (b) Si la abertura del surtidor está situada a 1,5 m del suelo, ¿a qué distancia del surtidor llega el agua al suelo? Ignore todas las fuerzas de fricción y disipación.



90. Un fluido de densidad constante circula a través de una reducción en una tubería. Encuentre una ecuación para el cambio de presión, en términos de v_1, A_1, A_2, y la densidad.



14.7 Viscosidad y turbulencia

91. (a) Calcule la fuerza de retardo debido a la viscosidad de la capa de aire entre un carrito y una pista de aire nivelada dada la siguiente información: la temperatura del aire es 20 °C, el carrito se mueve a 0,400 m/s, su superficie es $2{,}50 \times 10^{-2}\ \text{m}^2$, y el espesor de la capa de aire es $6{,}00 \times 10^{-5}$ m. (b) ¿Cuál es la relación entre esta fuerza y el peso del carrito de 0,300 kg?

92. Las arteriolas (pequeñas arterias) que conducen a un órgano se estrechan para disminuir el flujo hacia el órgano. Para apagar un órgano, el flujo sanguíneo se reduce de forma natural al 1,00 % de su valor original. ¿En qué factor se contraen los radios de las arteriolas?

93. Una partícula esférica que cae a una velocidad terminal en un líquido debe tener la fuerza gravitacional equilibrada por la fuerza de arrastre y la fuerza de flotación. La fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado, mientras que la fuerza de arrastre se supone dada por la Ley de Stokes, $F_s = 6\pi r\eta v$. Demuestre que la velocidad terminal viene dada por $v = \frac{2R^2 g}{9\eta}(\rho_s - \rho_1)$, donde R es el radio de la esfera, ρ_s es su densidad y ρ_1 es la densidad del fluido y η el coeficiente de viscosidad.

94. Usando la ecuación del problema anterior, encuentre la viscosidad del aceite de motor en el que cae una bola de acero de radio 0,8 mm con una velocidad terminal de 4,32 cm/s. Las densidades de la bola y del aceite son de 7,86 y 0,88 g/mL, respectivamente.

95. Un paracaidista alcanzará una velocidad límite cuando el arrastre del aire sea igual a su peso. Para un paracaidista con un cuerpo grande, la turbulencia es un factor a altas velocidades. La fuerza de arrastre es entonces aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad. Tomando la fuerza de arrastre como $F_D = \frac{1}{2}\rho A v^2$, y fijando esta igual al peso del paracaidista, encuentre la velocidad terminal para una persona que cae en “águila abierta”.

96. (a) Compruebe que una disminución del 19,0 %

del flujo laminar a través de un tubo se debe a una disminución del 5,00 % del radio, al suponer que todos los demás factores permanecen constantes. (b) ¿Qué incremento del flujo se obtiene de un aumento del 5,00 % del radio, al suponer también que todos los demás factores permanecen constantes?

97. Cuando los médicos diagnostican obstrucciones arteriales, citan la reducción de la tasa de flujo. Si la tasa de flujo de una arteria se ha reducido al 10,0 % de su valor normal por un coágulo de sangre y la diferencia de presión media ha aumentado un 20,0 %, ¿en qué factor ha reducido el coágulo el radio de la arteria?

98. Un pozo de petróleo lanza crudo a 25,0 m en el aire a través de una tubería de 0,100 m de diámetro. Descarte la resistencia del aire, pero no la de la tubería, suponga un flujo laminar y calcule la presión en la entrada de la tubería vertical de 50,0 m de longitud. Tome la densidad del petróleo para ser $900\ \text{kg/m}^3$ y que su viscosidad sea $1{,}00(\text{N/m}^2)\cdot\text{s}$ (o $1{,}00\ \text{Pa}\cdot\text{s}$). Hay que tener en cuenta la presión debido a la columna de aceite de 50,0 m en la tubería.

99. El hormigón se bombea desde una mezcladora hasta el lugar donde se va a vaciar, en vez de transportarlo en carretillas. La tasa de flujo es de 200 L/min a través de una manguera de 50,0 m de longitud y 8,00 cm de diámetro, y la presión en la bomba es de $8{,}00\times10^6\ \text{N/m}^2$. (a) Calcule la resistencia de la manguera. (b) ¿Cuál es la viscosidad del hormigón si se supone que el flujo es laminar? (c) ¿Cuánta potencia se suministra, si se supone que el punto de uso está al mismo nivel que la bomba? Puede descartar la potencia suministrada para aumentar la velocidad del hormigón.

100. Compruebe que el flujo de petróleo es laminar para un pozo de petróleo que lanza crudo a 25,0 m en el aire a través de una tubería de 0,100 m de diámetro. El tubo vertical tiene 50 m de longitud. Tome la densidad del petróleo para ser $900\ \text{kg/m}^3$ y que su viscosidad sea $1{,}00(\text{N/m}^2)\cdot\text{s}$ (o $1{,}00\ \text{Pa}\cdot\text{s}$).

101. Calcule los números de Reynolds para el flujo de agua a través de (a) una boquilla con un radio de 0,250 cm; y (b) una manguera de jardín con un radio de 0,900 cm, cuando la boquilla está unida a la manguera. La tasa de flujo que pasa por la manguera y la boquilla es de 0,500 L/s. ¿Es posible que el flujo en cualquiera de ellos sea laminar?

102. Una manguera de incendios tiene un diámetro interior de 6,40 cm. Supongamos que dicha manguera transporta un flujo de 40,0 L/s a partir de una presión manométrica de $1{,}62\times10^6\ \text{N/m}^2$. La manguera sube 10,0 m por una escalera hasta una boquilla con un diámetro interior de 3,00 cm. Calcule los números de Reynolds para el flujo en la manguera y en la boquilla para demostrar que el flujo en cada una debe ser turbulento.

103. ¿A partir de qué tasa de flujo se puede producir turbulencia en una tubería de agua de 0,200 m de diámetro? Supongamos que un $20\ ^\circ\text{C}$ temperatura.

Problemas Adicionales

104. Antes de los dispositivos de almacenamiento digital, como la memoria del teléfono móvil, la música se almacenaba en discos de vinilo con surcos de distinta profundidad cortados en el disco. Un fonógrafo usaba una aguja, la cual se movía sobre los surcos y medía su profundidad. La presión que ejerce la aguja de un fonógrafo sobre un disco es sorprendentemente grande. Si el equivalente a 1,00 g es soportado por una aguja cuya punta es un círculo de 0,200 mm de radio, ¿qué presión se ejerce sobre el disco en Pa?

105. Las torres de agua almacenan agua por encima del nivel de los consumidores para los momentos de mayor uso, lo que elimina la necesidad de usar bombas de alta velocidad. ¿A qué altura sobre el usuario debe estar el nivel de agua para crear una presión manométrica de $3{,}00\times10^5\ \text{N/m}^2$?

106. El humor acuoso del ojo de una persona ejerce una fuerza de 0,300 N sobre la $1{,}10\text{cm}^2$ área de la córnea. ¿Qué presión es esta en mm Hg?

107. (a) Convierta las lecturas normales de presión arterial de 120 sobre 80 mm Hg a newtons por metro cuadrado usando la relación para presión debido al peso de un fluido ($p = h\rho g$) en vez de un factor de conversión. (b) Explique por qué la presión arterial de un bebé sería, probablemente, menor que la de un adulto. En concreto, considere la menor altura a la que debe bombearse la sangre.

108. Las ollas a presión existen desde hace más de 300 años, aunque su uso ha disminuido mucho en los años recientes (los primeros modelos tenían la desagradable costumbre de

explotar). ¿Qué fuerza deben soportar los cierres que sujetan la tapa de una olla a presión si la tapa circular es 25,0 cm de diámetro y la presión manométrica en su interior es de 300 atm? Ignore el peso de la tapa.

109. Los huesos de las aves tienen bolsas de aire para reducir su peso, lo que también les confiere una densidad media significativamente menor que la de los huesos de otros animales. Supongamos que un ornitólogo pesa un hueso de ave en el aire y en el agua y encuentra que su masa es de 45,0 g y su masa aparente cuando está sumergido es de 3,60 g (supongamos que el hueso es hermético). (a) ¿Qué masa de agua se desplaza? (b) ¿Cuál es el volumen del hueso? (c) ¿Cuál es su densidad media?

110. En una medición por inmersión de la densidad de una mujer, se encuentra que tiene una masa de 62,0 kg en el aire y una masa aparente de 0,0850 kg cuando está completamente sumergida con los pulmones vacíos. (a) ¿Qué masa de agua desplaza? (b) ¿Cuál es su volumen? (c) Calcule su densidad. (d) Si su capacidad pulmonar es de 1,75 L, ¿es capaz de flotar sin pisar el agua con los pulmones llenos de aire?

111. Algunos peces tienen una densidad ligeramente inferior a la del agua y deben ejercer una fuerza (nadar) para mantenerse sumergidos. ¿Qué fuerza debe ejercer un mero de 85,0 kg para permanecer sumergido en agua salada si la densidad de su cuerpo es $1.015\ \text{kg/m}^3$?

112. El sistema circulatorio humano tiene, aproximadamente, 1×10^9 vasos capilares. Cada recipiente tiene un diámetro de, aproximadamente, 8μm. Suponga que el gasto cardíaco es de 5 L/min y determine la velocidad media del flujo sanguíneo a través de cada vaso capilar.

113. La tasa de flujo a través de un $2{,}00 \times 10^{-6}$ mradio capilar es $3{,}80 \times 10^9\ \text{cm}^3/\text{s}$. (a) ¿Cuál es la velocidad del flujo sanguíneo? (b) Suponga que toda la sangre del cuerpo pasa por los capilares, ¿cuántos debe haber para transportar un flujo total de $90{,}0\ \text{cm}^3/\text{s}$?

114. El ventrículo izquierdo del corazón de un adulto en reposo bombea sangre a una tasa de flujo de $83{,}0\ \text{cm}^3/\text{s}$, aumentando su presión en 110 mm Hg, su velocidad de cero a 30,0 cm/s, y su altura en 5,00 cm (todas las cifras se promedian a lo largo de todo el latido del corazón). Calcule la potencia total del ventrículo izquierdo. Tenga en cuenta que la mayor parte de la potencia se usa para aumentar la presión arterial.

115. Una bomba de sumidero (que se usa para drenar el agua del sótano de casas construidas por debajo del nivel freático) está drenando un sótano inundado a una velocidad de 0,750 L/s, con una presión de salida de $3{,}00 \times 10^5\ \text{N/m}^2$. a) El agua entra en una manguera con un diámetro interior de 3,00 cm y sube 2,50 m por encima de la bomba. ¿Cuál es su presión en este punto? b) La manguera pasa por encima del muro de los cimientos, pierde 0,500 m de altura y se ensancha hasta los 4,00 cm de diámetro. ¿Cuál es la presión ahora? Es posible que descarte pérdidas por fricción en ambas partes del problema.

116. Una solución de glucosa que se administra por vía intravenosa tiene una tasa de flujo de$4{,}00\ \text{cm}^3/\text{min}$. ¿Cuál será la nueva tasa de flujo si se sustituye la glucosa por sangre total con la misma densidad pero con una viscosidad 2,50 veces superior a la de la glucosa? Todos los demás factores permanecen constantes.

117. Una arteria pequeña tiene una longitud de $1{,}1 \times 10^{-3}\,\text{m}$ y un radio de $2{,}5 \times 10^{-5}\,\text{m}$. Si la caída de presión a través de la arteria es de 1,3 kPa, ¿cuál es la tasa de flujo a través de la arteria? (Supongamos que la temperatura es 37 °C).

118. La angioplastia es una técnica en la que se dilatan las arterias parcialmente obstruidas por la placa para aumentar el flujo sanguíneo. ¿En qué factor debe aumentar el radio de una arteria para que el flujo sanguíneo se multiplique por 10?

119. Supongamos que el radio de un vaso sanguíneo disminuye hasta el 90,0 % de su valor original debido a los depósitos de placa y que el organismo compensa aumentando la diferencia de presión a lo largo del vaso para mantener la tasa de flujo constante. ¿En qué factor debe aumentar la diferencia de presión? b) Si la obstrucción crea turbulencia, ¿qué efecto adicional tendría sobre la tasa de flujo?

Problemas De Desafío

120. La presión sobre la presa mostrada al principio de la sección de problemas aumenta con la profundidad. Por lo tanto, hay un torque neto en la presa. Encuentre el torque neto.

121. La temperatura de la atmósfera no es siempre constante y puede aumentar o disminuir con la altura. En una atmósfera neutra, donde no hay una cantidad significativa de mezcla vertical, la temperatura disminuye a un ritmo de 6,5 K por km aproximadamente. La magnitud de la disminución de la temperatura a medida que aumenta la altura se conoce como la tasa de lapso (Γ). (el símbolo es la letra griega mayúscula gamma). Supongamos que la presión superficial es $p_0 = 1{,}013 \times 10^5$ Pa donde $\mathrm{T} = 293$ K y la tasa de caída es $\left(-\Gamma = 6{,}5\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}\right)$. Estime la presión a 3,0 km por encima de la superficie de la Tierra.

122. Un submarino queda varado en el fondo del océano con su escotilla a 25,0 m de profundidad. Calcule la fuerza necesaria para abrir la escotilla desde el interior, dado que es circular y tiene 0,450 m de diámetro. La presión del aire dentro del submarino es de 1,00 atm.

123. Los troncos, a veces, flotan verticalmente en un lago porque un extremo se ha encharcado y es más denso que el otro. ¿Cuál es la densidad media de un tronco de diámetro uniforme que flota con el 20,0 % de su longitud por encima del agua?

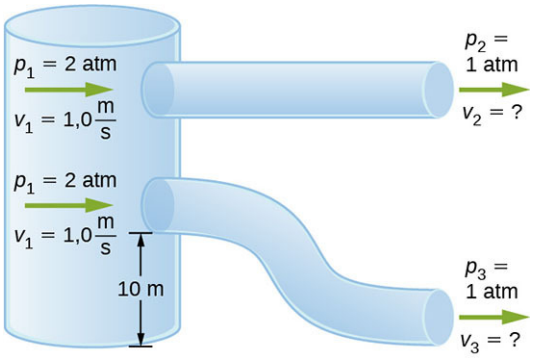
124. Se sabe de estafadores que representan lingotes de tungsteno chapados en oro como si fueran de oro puro y los venden a precios muy inferiores al valor del oro, pero muy superiores al coste del tungsteno. ¿Con qué exactitud se debe poder medir la masa de un lingote de este tipo dentro y fuera del agua para saber que se trata de tungsteno casi puro y no de oro puro?

125. El volumen interior de una casa equivale al de un sólido rectangular de 13,0 m de ancho por 20,0 m de largo y 2,75 m de alto. La casa se calienta con un calentador de gas de aire forzado. El conducto principal de entrada de aire del calentador tiene un diámetro de 0,300 m. ¿Cuál es la rapidez media del aire en el conducto si este transporta un volumen igual al del interior de la casa cada 15 minutos?

126. Se usa una manguera de jardín con un diámetro de 2,0 cm para llenar un cubo, que tiene un volumen de 0,10 metros cúbicos. Tarda 1,2 minutos en llenarse. Una boquilla ajustable se acopla a la manguera para disminuir el diámetro de la abertura, lo que aumenta la velocidad del agua. La manguera se mantiene nivelada con el suelo a una altura de 1,0 metros y se va disminuyendo el diámetro hasta llegar a un lecho de flores que se encuentra a 3,0 metros de distancia. (a) ¿Cuál es la tasa de flujo volumétrica del agua que pasa por la boquilla cuando el diámetro es de 2,0 cm? (b) ¿Cuál es la velocidad del agua que sale de la manguera? (c) ¿Cuál debe ser la velocidad del agua que sale de la manguera para llegar al lecho de flores que se encuentra a 3,0 metros de distancia? (d) ¿Cuál es el diámetro de la boquilla necesario para llegar al lecho de flores?

127. Una regla general citada con frecuencia en el diseño de aeronaves es que las alas deben producir unos 1.000 N de sustentación por metro cuadrado de ala (el hecho de que un ala tenga una superficie superior y otra inferior no duplica su área). (a) En el despegue, un avión viaja a 60,0 m/s, por lo que la velocidad del aire respecto a la parte inferior del ala es de 60,0 m/s. Dada la densidad del aire a nivel del mar como $1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$, ¿a qué velocidad debe moverse sobre la superficie superior para crear la sustentación ideal? b) ¿A qué velocidad debe moverse el aire sobre la superficie superior a una velocidad de crucero de 245 m/s y a una altitud en la que la densidad del aire es una cuarta parte de la del nivel del mar? (Obsérvese que no se trata de toda la sustentación del avión: una parte procede del cuerpo del avión, otra del empuje del motor, etc. Además, el principio de Bernoulli da una respuesta aproximada porque el flujo sobre el ala crea turbulencia).

128. Dos tuberías de diámetro igual y constante salen de una estación de bombeo de agua y vierten el agua por un extremo abierto a la atmósfera (véase la siguiente figura). El agua entra a una presión de dos atmósferas y a una velocidad de $(\mathrm{v}_1 = 1{,}0\ \mathrm{m/s})$. Un tubo desciende una altura de 10 m. ¿Cuál es la velocidad del agua al salir de cada tubería?



129. El fluido circula originalmente a través de un tubo a una velocidad de $100\ \text{cm}^3/\text{s}$. Para ilustrar la sensibilidad de la tasa de flujo a diversos factores, calcule la nueva tasa de flujo para los siguientes cambios, todos los demás factores permanecen iguales que en las condiciones originales. (a) La diferencia de presión aumenta en un factor de 1,50. (b) Se sustituye un nuevo fluido con una viscosidad 3,00 veces mayor. (c) Se sustituye el tubo por uno con una longitud 4,00 veces mayor. (d) Se usa otro tubo con un radio 0,100 veces mayor que el original. (e) Se sustituye otro tubo con un radio 0,100 veces mayor que el original y la mitad de la longitud, y la diferencia de presión aumenta en un factor de 1,50.

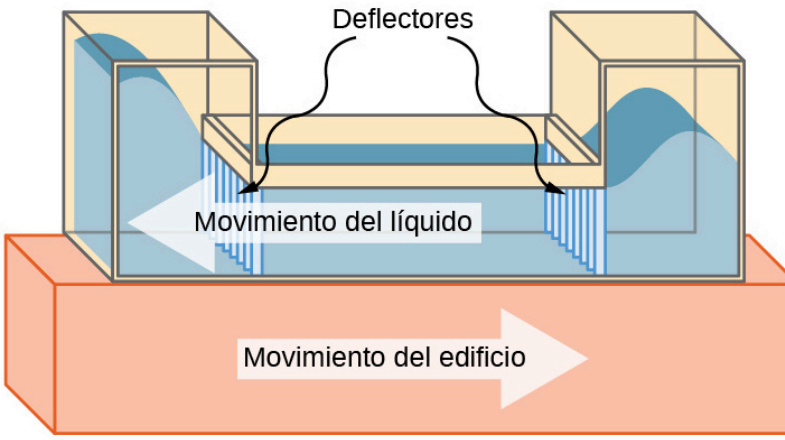
130. Durante una carrera de maratón, el flujo sanguíneo de un corredor aumenta hasta 10,0 veces su ritmo en reposo. La viscosidad de la sangre descendió al 95,0 % de su valor normal, y la diferencia de presión sanguínea en el sistema circulatorio aumentó en un 50,0 %. ¿En qué factor ha aumentado los radios medios de sus vasos sanguíneos?

131. El agua suministrada a una casa por una tubería principal tiene una presión de $3{,}00 \times 10^5\ \text{N/m}^2$ temprano en un día de verano cuando el uso del vecindario es bajo. Esta presión produce un flujo de 20,0 L/min a través de una manguera de jardín. Más tarde, la presión a la salida del conducto de agua y a la entrada de la casa disminuye y se obtiene un flujo de solo 8,00 L/min a través de la misma manguera. (a) ¿Qué presión se suministra ahora a la casa si se supone que la resistencia es constante? (b) ¿En qué factor ha aumentado la tasa de flujo en el conducto de agua para provocar esta disminución de la presión suministrada? La presión en la entrada del conducto de agua es $5{,}00 \times 10^5\ \text{N/m}^2$, y la tasa de flujo original era de 200 L/min. (c) ¿Cuántos usuarios más hay, si se supone que cada uno consuma 20,0 L/min por la mañana?

132. La gasolina se transporta por tuberías subterráneas desde las refinerías hasta los principales usuarios. La tasa de flujo es $3{,}00 \times 10^{-2}\ \text{m}^3/\text{s}$ (unos 500 gal/min), la viscosidad de la gasolina es $1{,}00 \times 10^{-3}\ (\text{N/m}^2) \cdot \text{s}$, y su densidad es $680\ \text{kg/m}^3$. (a) ¿Qué diámetro mínimo debe tener la tubería para que el número de Reynolds sea inferior a 2.000? (b) ¿Qué diferencia de presión debe mantenerse a lo largo de cada kilómetro de la tubería para mantener esta tasa de flujo?

CAPÍTULO 15
Oscilaciones





(a) (b)

Figura 15.1 (a) El edificio Comcast de Filadelfia, Pensilvania, que se eleva sobre el horizonte, tiene una altura de 305 metros (1.000 pies) aproximadamente. A esta altura, los pisos superiores pueden oscilar de un lado a otro debido a actividad sísmica y a vientos fluctuantes. (b) Arriba se muestra un dibujo esquemático de un amortiguador de masa de columna líquida sintonizado instalado en la parte superior del Comcast, que consiste en un depósito de 300.000 galones de agua para reducir las oscilaciones.

ESQUEMA DEL CAPITULO

15.1 Movimiento armónico simple
15.2 Energía en el movimiento armónico simple
15.3 Comparación de movimiento armónico simple y movimiento circular
15.4 Péndulos
15.5 Oscilaciones amortiguadas
15.6 Oscilaciones forzadas

INTRODUCCIÓN Comenzamos el estudio de las oscilaciones con sistemas simples de péndulos y resortes. Aunque estos sistemas parezcan bastante básicos, los conceptos involucrados tienen muchas aplicaciones en la vida real. Por ejemplo, el edificio Comcast de Filadelfia, Pensilvania tiene una altura de 305 metros (1.000 pies) aproximadamente. A medida que los edificios se construyen más altos pueden actuar como péndulos físicos invertidos, y los pisos superiores oscilan debido a actividad sísmica y a vientos fluctuantes. En el edificio Comcast, se usa un amortiguador de masa sintonizada para reducir las oscilaciones. En la parte superior del edificio se ha instalado un amortiguador de masa de columna líquida sintonizado, que consiste en

un depósito de 300.000 galones de agua. Este depósito en forma de U permite que el agua oscile libremente a una frecuencia que coincide con la frecuencia natural del edificio. La amortiguación se consigue al ajustar los niveles de turbulencia en el agua en movimiento mediante deflectores.

15.1 Movimiento armónico simple

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Definir los términos periodo y frecuencia.
- Enumerar las características del movimiento armónico simple.
- Explicar el concepto de deslizamiento de fase.
- Escribir las ecuaciones de movimiento para el sistema de una masa y un resorte que experimenta un movimiento armónico simple.
- Describir el movimiento de una masa que oscila sobre un resorte vertical.

Al pulsar una cuerda de guitarra, el sonido resultante tiene un tono constante y dura mucho tiempo (Figura 15.2). La cuerda vibra alrededor de una posición de equilibrio, y una oscilación se completa cuando la cuerda parte de la posición inicial, se desplaza a una de las posiciones extremas, luego a la otra posición extrema y vuelve a su posición inicial. Definimos **movimiento periódico** como cualquier movimiento que se repite a intervalos de tiempo regulares, como el exhibido por la cuerda de la guitarra o por un niño que se balancea en un columpio. En esta sección, estudiamos las características básicas de las oscilaciones y su descripción matemática.



FIGURA 15.2 Cuando se puntea una cuerda de guitarra, esta oscila hacia arriba y hacia abajo en un movimiento periódico. La cuerda que vibra hace oscilar las moléculas de aire circundantes, lo que produce ondas sonoras (créditos: Yutaka Tsutano).

Periodo y frecuencia en oscilaciones

En ausencia de fricción, el tiempo para completar una oscilación permanece constante y se denomina **periodo** (T). Sus unidades suelen ser segundos, pero pueden ser cualquier unidad de tiempo conveniente. La palabra "periodo" se refiere al tiempo de algún acontecimiento, ya sea repetitivo o no, pero en este capítulo nos ocuparemos principalmente del movimiento periódico, que es por definición repetitivo.

Un concepto estrechamente relacionado con el de periodo es el de frecuencia de un evento. La **frecuencia (*f*)** se define como el número de eventos por unidad de tiempo. Para el movimiento periódico, la frecuencia es el número de oscilaciones por unidad de tiempo. La relación entre frecuencia y periodo es

$$f = \frac{1}{T}. \tag{15.1}$$

La unidad del SI para la frecuencia es el *hercio* (Hz) y se define como un *ciclo por segundo*:

$$1\ \text{Hz} = 1\frac{\text{ciclo}}{\text{s}} \quad \text{o} \quad 1\ \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}} = 1\ \text{s}^{-1}.$$

Un ciclo es una **oscilación** completa.

EJEMPLO 15.1

Determinar la frecuencia de ultrasonidos médicos

Los profesionales de la medicina usan ecógrafos para obtener imágenes que permitan examinar órganos internos del cuerpo. Un ecógrafo emite ondas sonoras de alta frecuencia, que se reflejan en los órganos, y una computadora las recibe y las usa para crear una imagen. Podemos usar las fórmulas presentadas en este módulo para determinar la frecuencia, basándonos en lo que sabemos sobre las oscilaciones. Consideremos un dispositivo de imagen médica que produce ultrasonidos oscilando con un periodo de 0,400 μs. ¿Cuál es la frecuencia de esta oscilación?

Estrategia

Se da el periodo (*T*) y se pide encontrar la frecuencia (*f*).

Solución

Sustituir 0,400 μs para T en $f = \frac{1}{T}$:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}400 \times 10^{-6}\ \text{s}}.$$

Resolver para encontrar

$$f = 2{,}50 \times 10^{6}\ \text{Hz}.$$

Importancia

Esta frecuencia de sonido es mucho más alta que la frecuencia más alta que puede oír el ser humano (el rango de audición humana es de 20 Hz a 20.000 Hz); por eso se llama ultrasonido. Las oscilaciones adecuadas a esta frecuencia generan ultrasonidos que se usan para diagnósticos médicos no invasivos, como la observación de un feto en el útero.

Características de movimiento armónico simple

Un tipo muy común de movimiento periódico es el llamado **movimiento armónico simple (Simple Harmonic Motion, SHM)**. Un sistema que oscila con SHM se llama **oscilador armónico simple**.

Movimiento armónico simple

En el movimiento armónico simple, la aceleración del sistema, y por tanto la fuerza neta, es proporcional al desplazamiento y actúa en sentido contrario a este.

Un buen ejemplo de SHM es un objeto con masa m unido a un resorte sobre una superficie sin fricción, como se muestra en la Figura 15.3. El objeto oscila alrededor de la posición de equilibrio, y la fuerza neta sobre el objeto es igual a la fuerza proporcionada por el resorte. Esta fuerza obedece a la ley de Hooke $F_s = -kx$, como se ha comentado en un capítulo anterior.

Si la fuerza neta se puede describir mediante la ley de Hooke y no hay *amortiguación* (ralentización debido a fricción o a otras fuerzas no conservativas), entonces un oscilador armónico simple oscila con igual desplazamiento a ambos lados de la posición de equilibrio, como se muestra para un objeto sobre un resorte en la Figura 15.3. El desplazamiento máximo desde el equilibrio se llama **amplitud** (*A*). Las unidades de amplitud y desplazamiento son las mismas, pero están sujetas al tipo de oscilación. Para el objeto sobre el resorte, las unidades de amplitud y desplazamiento son metros.

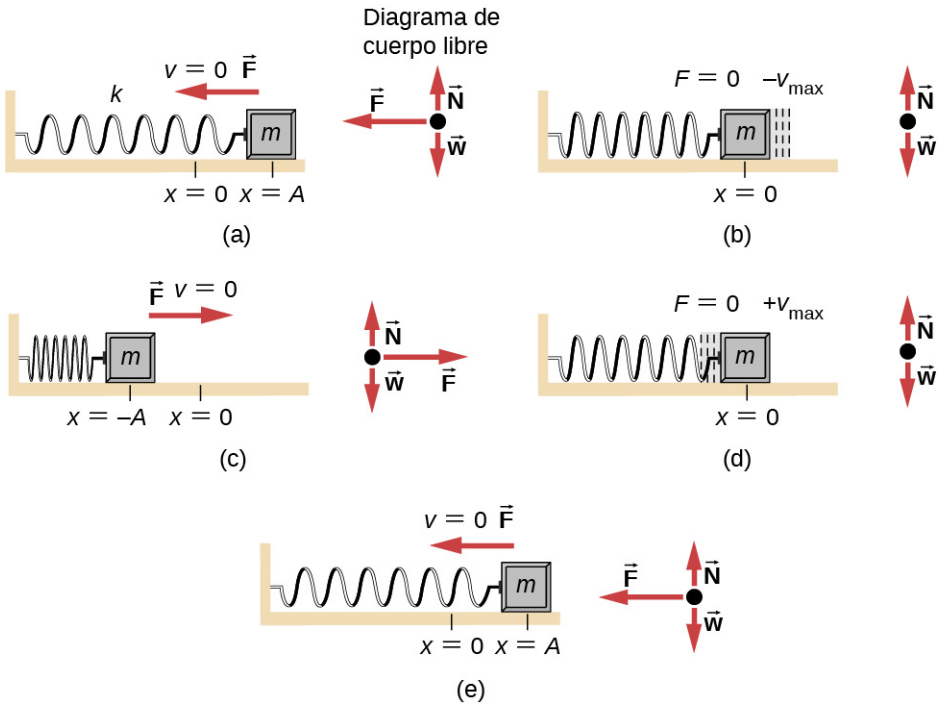


FIGURA 15.3 Un objeto unido a un resorte que se desliza sobre una superficie sin fricción es un oscilador armónico simple sin complicaciones. En las figuras anteriores, una masa está unida a un resorte y colocada sobre una mesa sin fricción. El otro extremo del resorte se fija a la pared. La posición de la masa, cuando el resorte no está ni estirado ni comprimido, se marca como $x = 0$ y es la posición de equilibrio. (a) La masa se desplaza a una posición $x = A$ y se libera del reposo. (b) La masa se acelera mientras se mueve en la dirección *x* negativa, y alcanza una velocidad negativa máxima en $x = 0$. (c) La masa continúa moviéndose en la dirección *x*negativa, y frena hasta detenerse en $x = -A$. (d) La masa comienza ahora a acelerar en la dirección *x* positiva, y alcanza una velocidad máxima positiva en $x = 0$. (e) La masa continúa entonces moviéndose en la dirección positiva hasta que se detiene en $x = A$. La masa continúa en SHM que tiene una amplitud *A* y un periodo *T*. La velocidad máxima del objeto se produce al pasar por el equilibrio. Cuanto más rígido sea el resorte, menor será el periodo *T*. Cuanto mayor sea la masa del objeto, mayor será el periodo *T*.

¿Qué tiene de significativo el SHM? Por un lado, el periodo T y la frecuencia f de un oscilador armónico simple son independientes de la amplitud. La cuerda de una guitarra, por ejemplo, oscila con la misma frecuencia tanto si se puntea con suavidad como con fuerza.

Hay dos factores importantes que afectan el periodo de un oscilador armónico simple. El periodo está relacionado con la rigidez del sistema. Un objeto muy rígido tiene una **constante de fuerza (*k*)** grande, lo que hace que el sistema tenga un periodo menor. Por ejemplo, se puede ajustar la rigidez de un trampolín: cuanto más rígido sea, más rápido vibrará y más corto será su periodo. El periodo también está sujeto a la masa del sistema oscilante. Cuanto más masivo sea el sistema, más largo será el periodo. Por ejemplo, una persona pesada en un trampolín rebota hacia arriba y hacia abajo más lentamente que una persona liviana. De hecho, la masa *m* y la constante de fuerza *k* son los *únicos* factores que afectan el periodo y la frecuencia del SHM. Para obtener una ecuación para el periodo y la frecuencia, primero debemos definir y analizar las ecuaciones de movimiento. Obsérvese que la constante de fuerza se denomina, a veces, *constante de resorte*.

Ecuaciones de SHM

Consideremos un bloque unido a un resorte en una mesa sin fricción (Figura 15.4). La **posición de equilibrio** (la posición en la que el resorte no está ni estirado ni comprimido) se marca como $x = 0$. En la posición de equilibrio la fuerza neta es cero.

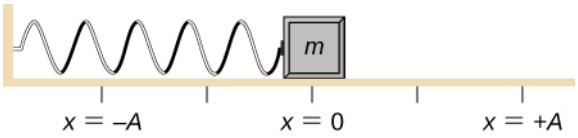


FIGURA 15.4 Un bloque está unido a un resorte y se coloca en una mesa sin fricción. La posición de equilibrio, en la que el resorte no está ni extendido ni comprimido, se marca como $x = 0$.

Se trabaja en el bloque para sacarlo a una posición de $x = +A$, y así se libera del reposo. La posición x máxima (A) se llama amplitud del movimiento. El bloque comienza a oscilar en SHM entre $x = +A$ y $x = -A$, donde A es la amplitud del movimiento y T es el periodo de la oscilación. El periodo es el tiempo de una oscilación. La Figura 15.5 muestra el movimiento del bloque cuando completa una oscilación y media después de soltarlo. La Figura 15.6 muestra un gráfico de la posición del bloque versus tiempo. Cuando se representa posición versus tiempo, es evidente que los datos pueden ser modelados por una función coseno con una amplitud A y un periodo T. La función coseno $\cos\theta$ se repite cada múltiplo de 2π, mientras que el movimiento del bloque se repite cada periodo T. Sin embargo, la función $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ se repite cada múltiplo entero del periodo. El máximo de la función coseno es uno, por lo que es necesario multiplicar la función coseno por la amplitud A.

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = A\cos(\omega t). \qquad 15.2$$

Recordemos del capítulo sobre la rotación que la frecuencia angular es igual a $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. En este caso, el periodo es constante, por lo que la frecuencia angular se define como 2π dividido entre el periodo, $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

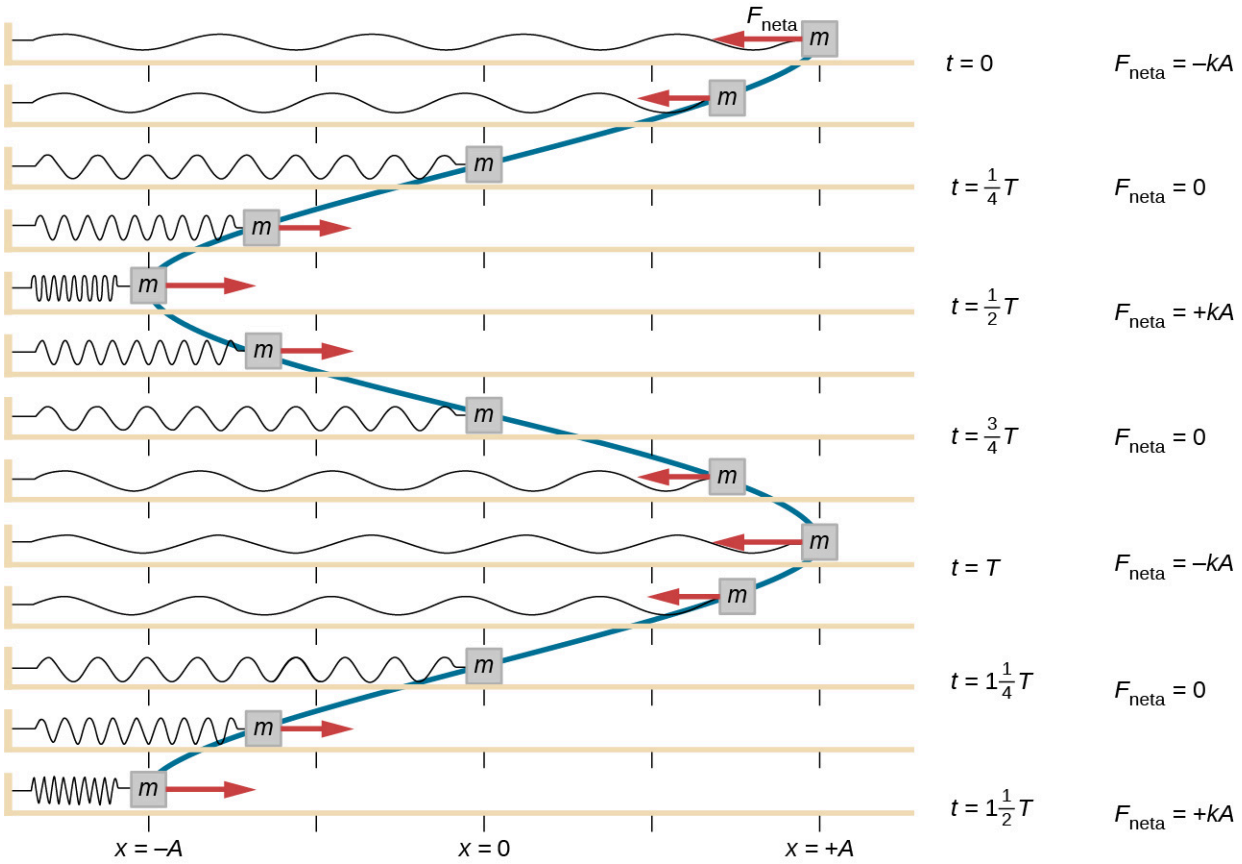


FIGURA 15.5 Se fija un bloque a un extremo de un resorte y se coloca sobre una mesa sin fricción. El otro extremo del resorte se ancla a la pared. La posición de equilibrio, donde la fuerza neta es igual a cero, se marca como $x = 0$ m. Se trabaja en el bloque, sacándolo para $x = +A$, y el bloque se libera del reposo. El bloque oscila entre $x = +A$ y $x = -A$. La fuerza también se muestra como un vector.

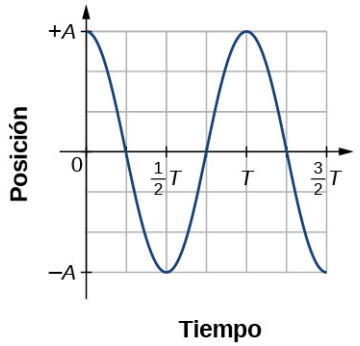


FIGURA 15.6 Un gráfico de la posición del bloque mostrado en la Figura 15.5 como una función de tiempo. La posición se puede modelar como una función periódica, como una función coseno o seno.

La ecuación de la posición como una función de tiempo $x(t) = A\cos(\omega t)$ es bueno para modelar datos, donde la posición del bloque en el momento inicial $t = 0{,}00$ s está en la amplitud A y la velocidad inicial es cero. A menudo, cuando se toman datos experimentales, la posición de la masa en el momento inicial $t = 0{,}00$ s no es igual a la amplitud y la velocidad inicial no es cero. Considere 10 segundos de datos recogidos por un estudiante en el laboratorio, que se muestran en la Figura 15.7.

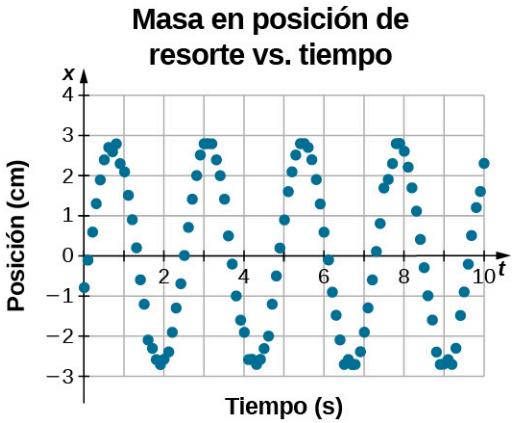


FIGURA 15.7 Los datos recogidos por un estudiante en el laboratorio indican la posición de un bloque unido a un resorte, medida con un telémetro sónico. Los datos se recogen a partir del momento $t = 0{,}00$s, pero la posición inicial está cerca de la posición $x \approx -0{,}80\text{ cm} \neq 3{,}00\text{ cm}$, por lo que la posición inicial no es igual a la amplitud $x_0 = +A$. La velocidad es la derivada temporal de la posición, que es la pendiente en un punto del gráfico de posición versus tiempo. La velocidad no es $v = 0{,}00$ m/s en el momento $t = 0{,}00$ s, como se desprende de la pendiente del gráfico de posición versus tiempo, que no es cero en el momento inicial.

Los datos de la Figura 15.7 pueden seguir siendo modelados con una función periódica, como una función coseno, pero la función está desplazada hacia la derecha. Este deslizamiento se conoce como **deslizamiento de fase** y suele representarse con la letra griega pi (ϕ). La ecuación de la posición como una función de tiempo para un bloque sobre un resorte es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

Esta es la ecuación generalizada para el SHM donde t es el tiempo medido en segundos, ω es la frecuencia angular con unidades de segundos inversos, A es la amplitud medida en metros o centímetros y ϕ es el deslizamiento de fase medido en radianes (Figura 15.8). Cabe señalar que, dado que las funciones seno y coseno solo se diferencian por un deslizamiento de fase, este movimiento podría modelarse usando la función coseno o la función seno.

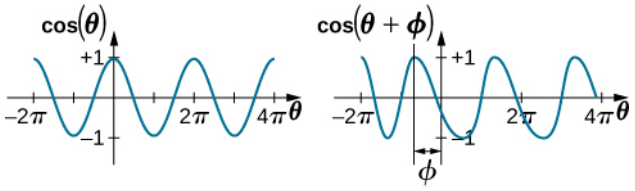


FIGURA 15.8 (a) Una función coseno. (b) Una función coseno desplazada hacia la izquierda por un ángulo ϕ. El ángulo ϕ se conoce como el deslizamiento de fase de la función.

La velocidad de la masa sobre un resorte, que oscila en SHM, se puede encontrar tomando la derivada de la ecuación de posición:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\cos(\omega t + \phi)) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \omega) = -v_{\text{máx.}}\,\text{sen}(\omega t + \phi).$$

Dado que la función sinusoidal oscila entre –1 y +1, la velocidad máxima es la amplitud por la frecuencia angular, $v_{\text{máx.}} = A\omega$. La velocidad máxima se produce en la posición de equilibrio ($x = 0$) cuando la masa se mueve hacia $x = +A$. La velocidad máxima en sentido negativo se alcanza en la posición de equilibrio ($x = 0$) cuando la masa se mueve hacia $x = -A$ y es igual a $-v_{\text{máx.}}$.

La aceleración de la masa sobre el resorte se puede encontrar tomando la derivada temporal de la velocidad:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi)) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -a_{\text{máx.}}\cos(\omega t + \phi).$$

La aceleración máxima es $a_{\text{máx.}} = A\omega^2$. La aceleración máxima se produce en la posición ($x = -A$), y la aceleración en la posición ($x = -A$) y es igual a $-a_{\text{máx.}}$.

Resumen de ecuaciones de movimiento para SHM

En resumen, el movimiento oscilatorio de un bloque sobre un resorte puede modelarse con las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad (15.3)$$
$$v(t) = -v_{\text{máx.}}\,\text{sen}(\omega t + \phi) \quad (15.4)$$
$$a(t) = -a_{\text{máx.}}\cos(\omega t + \phi) \quad (15.5)$$
$$x_{\text{máx.}} = A \quad (15.6)$$
$$v_{\text{máx.}} = A\omega \quad (15.7)$$
$$a_{\text{máx.}} = A\omega^2. \quad (15.8)$$

Aquí, A es la amplitud del movimiento, T es el periodo, ϕ es el deslizamiento de fase y $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ es la frecuencia angular del movimiento del bloque.

EJEMPLO 15.2

Determinación de las ecuaciones de movimiento de un bloque y un resorte

Se coloca un bloque de 2,00 kg en una superficie sin fricción. Un resorte con una constante de fuerza de $k = 32{,}00$ N/m se fija al bloque y el extremo opuesto del resorte se fija a la pared. El resorte se puede comprimir o extender. La posición de equilibrio está marcada como $x = 0{,}00$ m.

Se trabaja en el bloque, sacándolo para $x = +0{,}02$ m. El bloque se libera del reposo y oscila entre $x = +0{,}02$ m y $x = -0{,}02$ m. El periodo del movimiento es de 1,57 s. Determine las ecuaciones de movimiento.

Estrategia

Primero encontramos la frecuencia angular. El deslizamiento de fase es cero, $\phi = 0{,}00$ rad, porque el bloque se libera del reposo en $x = A = +0{,}02$ m. Una vez hallada la frecuencia angular, podemos determinar la velocidad y la aceleración máximas.

Solución

La frecuencia angular se puede encontrar y usar para encontrar la velocidad y la aceleración máximas:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{1{,}57\text{ s}} = 4{,}00\text{ s}^{-1}; \\ v_{\text{máx.}} &= A\omega = 0{,}02\text{m}\left(4{,}00\text{ s}^{-1}\right) = 0{,}08\text{ m/s}; \\ a_{\text{máx.}} &= A\omega^2 = 0{,}02\text{ m}\left(4{,}00\text{ s}^{-1}\right)^2 = 0{,}32\text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Solo queda rellenar las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \phi) = (0{,}02\text{ m})\cos\left(4{,}00\text{ s}^{-1}t\right); \\ v(t) &= -v_{\text{máx.}}\,\text{sen}(\omega t + \phi) = (-0{,}08\text{ m/s})\,\text{sen}\left(4{,}00\text{ s}^{-1}t\right); \\ a(t) &= -a_{\text{máx.}}\cos(\omega t + \phi) = \left(-0{,}32\text{ m/s}^2\right)\cos\left(4{,}00\text{ s}^{-1}t\right). \end{aligned}$$

Importancia

La posición, la velocidad y la aceleración se pueden encontrar para cualquier tiempo. Es importante recordar que al usar estas ecuaciones, su calculadora debe estar en modo radianes.

El periodo y la frecuencia de una masa en un resorte

Una característica interesante del SHM de un objeto unido a un resorte es que la frecuencia angular, y por tanto el periodo y la frecuencia del movimiento, dependen únicamente de la masa y la constante de fuerza, y no de otros factores como la amplitud del movimiento. Podemos usar las ecuaciones de movimiento y la segunda ley de Newton ($\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = m\vec{\mathbf{a}}$) para encontrar ecuaciones para la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo.

Considere el bloque sobre un resorte en una superficie sin fricción. Hay tres fuerzas sobre la masa: el peso, la fuerza normal y la fuerza debido al resorte. Las únicas dos fuerzas que actúan perpendicularmente a la superficie son el peso y la fuerza normal, que tienen magnitudes iguales y direcciones opuestas, y por tanto suman cero. La única fuerza que actúa paralela a la superficie es la fuerza debido al resorte, por lo que la fuerza neta debe ser igual a la fuerza del resorte:

$$\begin{aligned} F_x &= -kx; \\ ma &= -kx; \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx; \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x. \end{aligned}$$

Al sustituir las ecuaciones de movimiento para x y a nos da

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m}A\cos(\omega t + \phi).$$

Al anular los términos similares y resolver la frecuencia angular se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad 15.9$$

La frecuencia angular solo depende de la constante de fuerza y de la masa, y no de la amplitud. La frecuencia angular se define como $\omega = 2\pi/T$, que da una ecuación para el periodo del movimiento:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad 15.10$$

El periodo también depende solo de la masa y de la constante de fuerza. Cuanto mayor sea la masa, mayor será el periodo. Cuanto más rígido sea el resorte, más corto será el periodo. La frecuencia es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad 15.11$$

Movimiento vertical y resorte horizontal

Cuando se cuelga un resorte en vertical y se coloca un bloque y se pone en movimiento, el bloque oscila en SHM. En este caso, no hay fuerza normal, y el efecto neto de la fuerza de gravedad es cambiar la posición de equilibrio. Considere la Figura 15.9. Sobre el bloque actúan dos fuerzas: el peso y la fuerza del resorte. El peso es constante y la fuerza del resorte cambia al variar su longitud.

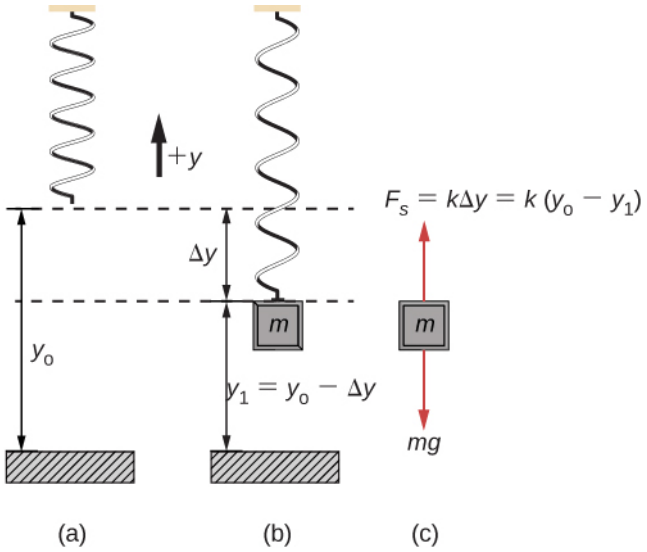


FIGURA 15.9 Un resorte está colgado del techo. Cuando se fija un bloque, este se encuentra en la posición de equilibrio en la que el peso del bloque es igual a la fuerza del resorte. (a) El resorte se cuelga del techo y la posición de equilibrio se marca como y_o. (b) Se fija una masa al resorte y se alcanza una nueva posición de equilibrio ($y_1 = y_o - \Delta y$) cuando la fuerza proporcionada por el resorte es igual al peso de la masa. (c) El diagrama de cuerpo-libre de la masa muestra las dos fuerzas que actúan sobre la masa: el peso y la fuerza del resorte.

Cuando el bloque alcanza la posición de equilibrio, como se ve en la Figura 15.9, la fuerza del resorte es igual al peso del bloque, $F_{\text{neta}} = F_s - mg = 0$, donde

$$-k\,(-\Delta y) = mg.$$

Según la figura, el cambio de posición es $\Delta y = y_0 - y_1$ y dado que $-k\,(-\Delta y) = mg$, tenemos

$$k\,(y_0 - y_1) - mg = 0.$$

Si el bloque se desplaza y se suelta, oscilará alrededor de la nueva posición de equilibrio. Como se muestra en la Figura 15.10, si la posición del bloque se registra como una función de tiempo, el registro es una función periódica.

Si el bloque se desplaza a una posición y, la fuerza neta se convierte en $F_{\text{neta}} = k\,(y - y_0) - mg = 0$. Pero encontramos que en la posición de equilibrio, $mg = k\Delta y = ky_0 - ky_1$. Al sustituir el peso en la ecuación se obtiene

$$F_{\text{neta}} = ky - ky_0 - (ky_0 - ky_1) = -k\,(y - y_1)\,.$$

Recordemos que y_1 es solo la posición de equilibrio y cualquier posición puede ser el punto $y = 0{,}00\text{m}$. Así que vamos a establecer y_1 hasta $y = 0{,}00$ m. La fuerza neta se convierte entonces en

$$F_{\text{neta}} = -ky;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky.$$

Esto es justo lo que encontramos anteriormente para una masa que se desliza horizontalmente sobre un resorte. La fuerza de gravedad constante solo sirvió para desplazar el lugar de equilibrio de la masa. Por lo tanto, la solución debe tener la misma forma que para un bloque sobre un resorte horizontal, $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Las ecuaciones para la velocidad y la aceleración también tienen la misma forma que para el caso horizontal. Obsérvese que la inclusión del deslizamiento de fase significa que el movimiento se puede modelar usando una función coseno o seno, ya que estas dos funciones solo se diferencian por un desplazamiento de fase.

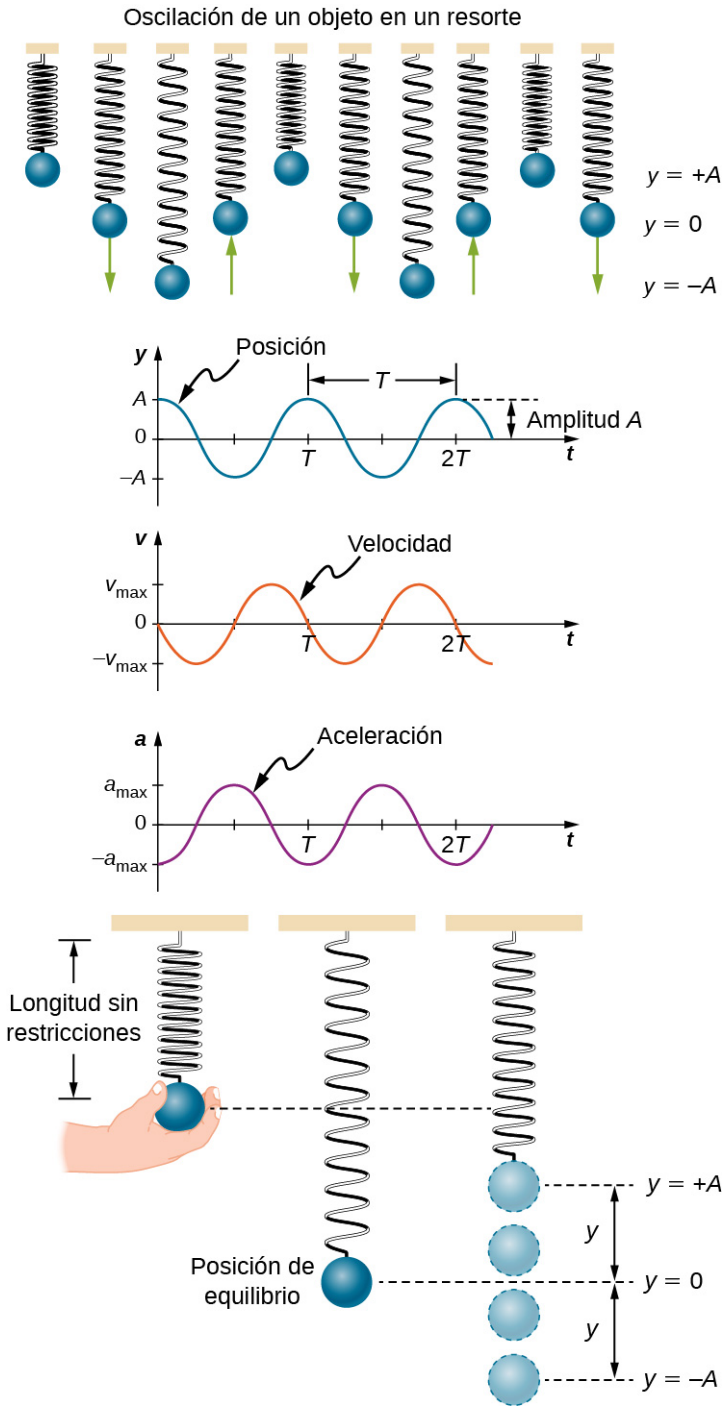


FIGURA 15.10 Gráficos de $y(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ versus t para el movimiento de un objeto sobre un resorte vertical. La fuerza neta sobre el objeto puede ser descrita por la ley de Hooke, por lo que el objeto experimenta SHM. Nótese que la posición inicial tiene el desplazamiento vertical en su valor máximo A; v es inicialmente cero y luego negativo a medida que el objeto se desplaza hacia abajo; la aceleración inicial es negativa, hacia la posición de equilibrio y se vuelve cero en ese punto.

15.2 Energía en el movimiento armónico simple

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la conservación de energía del sistema de una masa y un resorte.
- Explicar los conceptos de puntos de equilibrio estables e inestables.

Para producir una deformación en un objeto, debemos realizar un trabajo. Es decir, tanto si se puntea una cuerda de guitarra como si se comprime el sistema de suspensión de un automóvil, hay que ejercer una fuerza a través de una distancia. Si el único resultado es la deformación, y ningún trabajo se convierte en energía térmica, sonora o cinética, entonces todo el trabajo se almacena inicialmente en el objeto deformado como alguna forma de energía potencial.

Considere el ejemplo de un bloque unido a un resorte en una mesa sin fricción, que oscila en SHM. La fuerza del resorte es una fuerza conservativa (que estudió en el capítulo sobre energía potencial y conservación de la energía), y podemos definir una energía potencial para ella. Esta energía potencial es la energía almacenada en el resorte cuando este se extiende o se comprime. En este caso, el bloque oscila en una dimensión con la fuerza del resorte actuando en paralelo al movimiento:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} -kxdx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_i}^{x_f} = -\left[\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right] = -\left[U_f - U_i\right] = -\Delta U.$$

Al considerar la energía almacenada en un resorte, la posición de equilibrio, marcada como $x_i = 0{,}00$ m, es la posición en la que la energía almacenada en el resorte es igual a cero. Cuando el resorte se estira o se comprime una distancia x, la energía potencial almacenada en el resorte es

$$U = \frac{1}{2}kx^2.$$

La energía y el oscilador armónico simple

Para estudiar la energía de un oscilador armónico simple, debemos considerar todas las formas de energía. Considere el ejemplo de un bloque unido a un resorte, colocado sobre una superficie sin fricción, que oscila en SHM. La energía potencial almacenada en la deformación del resorte es

$$U = \frac{1}{2}kx^2.$$

En un oscilador armónico simple la energía oscila entre la energía cinética de la masa $K = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ almacenado en el resorte. En el SHM del sistema de masa y resorte no hay fuerzas disipativas, por lo que la energía total es la suma de la energía potencial y la energía cinética. En esta sección consideramos la conservación de la energía del sistema. Los conceptos examinados son válidos para todos los osciladores armónicos simples, incluidos aquellos en los que interviene la fuerza gravitacional.

Considere la Figura 15.11, que muestra un bloque oscilante unido a un resorte. En el caso del SHM no amortiguado, la energía oscila de un lado a otro entre la cinética y la potencial, pasando completamente de una forma de energía a la otra a medida que el sistema oscila. Así, para el sencillo ejemplo de un objeto sobre una superficie sin fricción unido a un resorte, el movimiento comienza con toda la energía almacenada en el resorte como **energía potencial elástica**. Cuando el objeto comienza a moverse, la energía potencial elástica se convierte en energía cinética, y pasa a ser totalmente cinética en la posición de equilibrio. A continuación, el resorte convierte la energía en energía potencial elástica al estirarse o comprimirse. La velocidad se convierte en cero cuando la energía cinética se convierte completamente, y este ciclo se repite. La comprensión de la conservación de la energía en estos ciclos proporcionará una visión adicional aquí y en aplicaciones posteriores de SHM, como circuitos alternos.

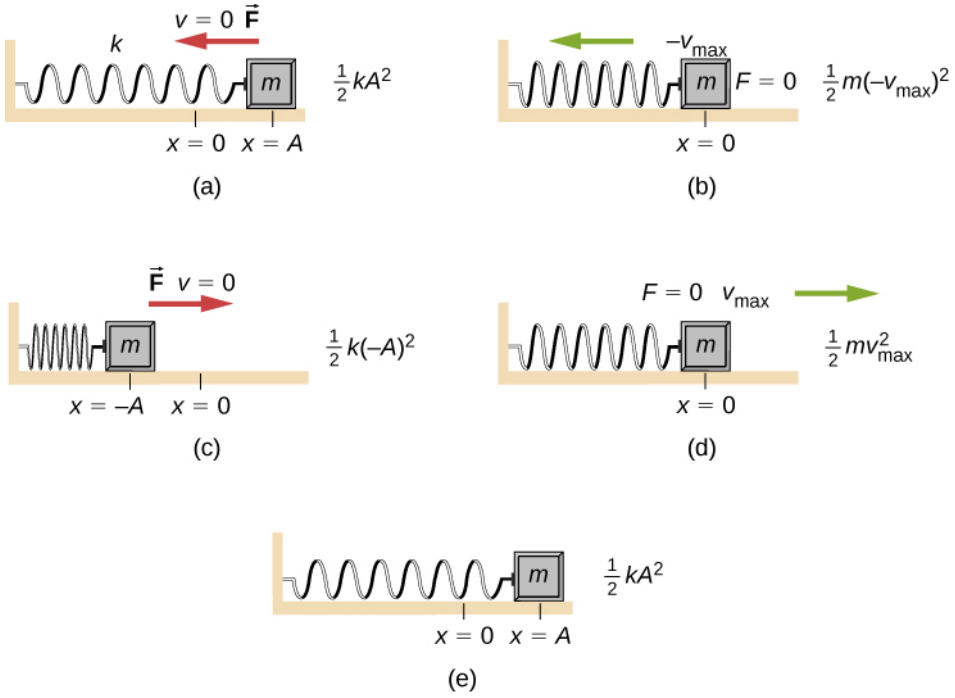


FIGURA 15.11 La transformación de la energía en SHM para un objeto unido a un resorte sobre una superficie sin fricción. (a) Cuando la masa está en la posición $x = +A$, toda la energía se almacena como energía potencial en el resorte $U = \frac{1}{2}kA^2$. La energía cinética es igual a cero porque la velocidad de la masa es cero. (b) A medida que la masa se mueve hacia $x = -A$, la masa cruza la posición $x = 0$. En este punto, el resorte no está ni extendido ni comprimido, por lo que la energía potencial almacenada en el resorte es cero. En $x = 0$, la energía total es toda la energía cinética donde $K = \frac{1}{2}m(-v_{\text{máx.}})^2$. (c) La masa continúa moviéndose hasta alcanzar $x = -A$ donde la masa se detiene y comienza a moverse hacia $x = +A$. En la posición $x = -A$, la energía total se almacena como energía potencial en el $U = \frac{1}{2}k(-A)^2$ comprimido y la energía cinética es cero. (d) Al pasar la masa por la posición $x = 0$, la energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv_{\text{máx.}}^2$ y la energía potencial almacenada en el resorte es cero. (e) La masa vuelve a la posición $x = +A$, donde $K = 0$ y $U = \frac{1}{2}kA^2$.

Considere la Figura 15.11, que muestra la energía en puntos específicos del movimiento periódico. Mientras se mantiene constante, la energía oscila entre la energía cinética del bloque y la energía potencial almacenada en el resorte:

$$E_{\text{Total}} = U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

El movimiento del bloque sobre un resorte en SHM está definido por la posición $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ con una velocidad de $v(t) = -A\omega\text{sen}(\omega t + \phi)$. Mediante estas ecuaciones, la identidad trigonométrica $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ y $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, podemos calcular la energía total del sistema:

$$\begin{aligned} E_{\text{Total}} &= \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2\text{sen}^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}mA^2\left(\tfrac{k}{m}\right)\text{sen}^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kA^2\text{sen}^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kA^2\left(\cos^2(\omega t + \phi) + \text{sen}^2(\omega t + \phi)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}kA^2. \end{aligned}$$

La energía total del sistema de un bloque y un resorte es igual a la suma de la energía potencial almacenada en el resorte más la energía cinética del bloque y es proporcional al cuadrado de la amplitud $E_{\text{Total}} = (1/2)kA^2$. La energía total del sistema es constante.

Un examen más detallado de la energía del sistema muestra que la energía cinética oscila como una función seno-cuadrada, mientras que la energía potencial oscila como una función coseno-cuadrada. Sin embargo, la energía total del sistema es constante y es proporcional a la amplitud al cuadrado. La Figura 15.12 muestra un trazado de las energías potencial, cinética y total del sistema de bloques y resortes como una función de tiempo. También se representan la posición y la velocidad como una función de tiempo. Antes del tiempo $t = 0{,}0$ s, el bloque está unido al resorte y colocado en la posición de equilibrio. El trabajo se realiza sobre el bloque aplicando una fuerza externa, halándolo hasta una posición de $x = +A$. El sistema tiene ahora energía potencial almacenada en el resorte. En el tiempo $t = 0{,}00$ s, la posición del bloque es igual a la amplitud, la energía potencial almacenada en el resorte es igual a $U = \frac{1}{2}kA^2$ y la fuerza sobre el bloque es máxima y apunta en la dirección x negativa ($F_S = -kA$). La velocidad y la energía cinética del bloque son cero en el tiempo $t = 0{,}00$ s. En el tiempo $t = 0{,}00$ s, el bloque se libera del reposo.

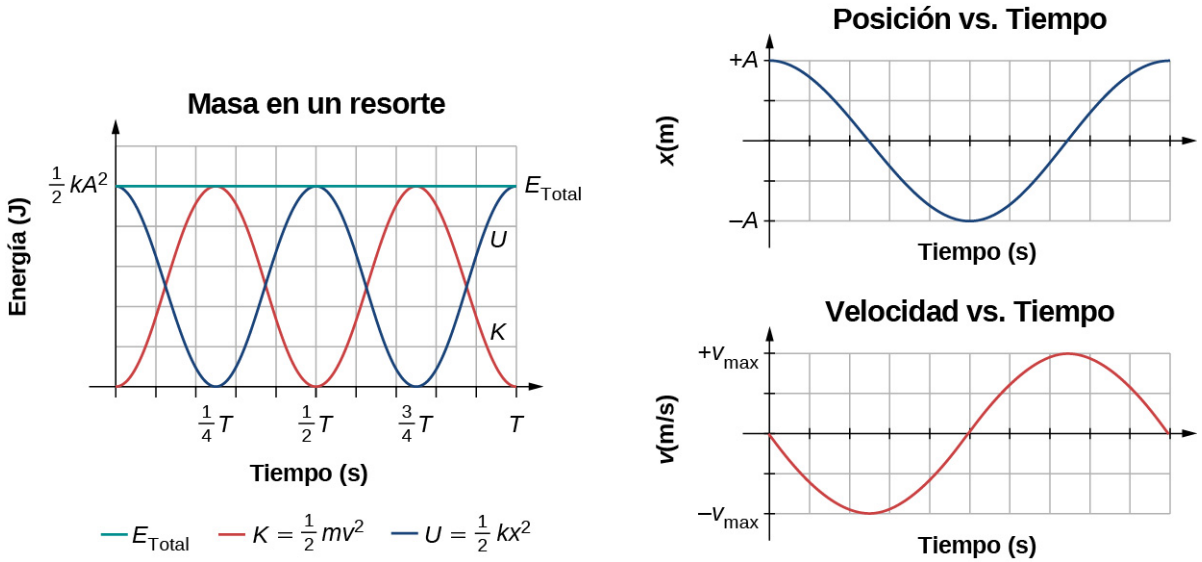


FIGURA 15.12 Gráfico de las energías cinética, potencial y total de un bloque que oscila sobre un resorte en SHM. También se muestran los gráficos de posición versus tiempo y de velocidad versus tiempo. La energía total permanece constante, pero la energía oscila entre la energía cinética y la potencial. Cuando la energía cinética es máxima, la energía potencial es cero. Esto ocurre cuando la velocidad es máxima y la masa está en la posición de equilibrio. La energía potencial es máxima cuando la velocidad es cero. La energía total es la suma de la energía cinética más la energía potencial y es constante.

Oscilaciones en torno a una posición de equilibrio

Acabamos de considerar la energía del SHM como una función de tiempo. Otra visión interesante del oscilador armónico simple es considerar la energía como una función de posición. La Figura 15.13 muestra un gráfico de la energía versus posición de un sistema que experimenta SHM.

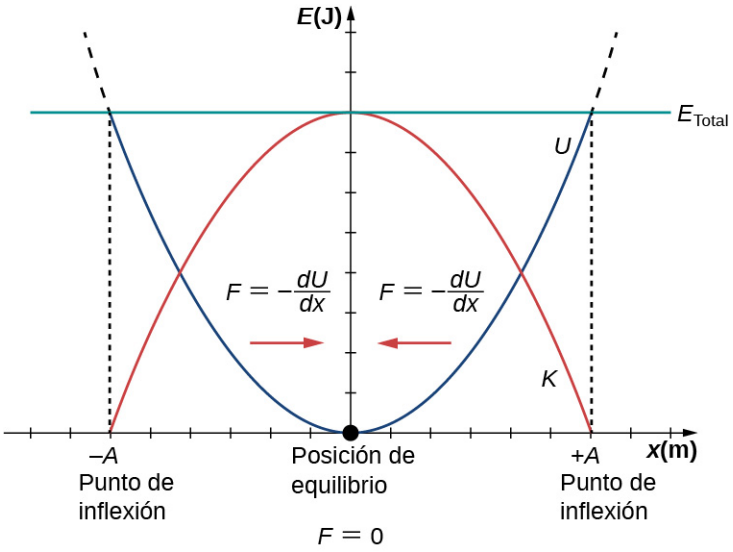


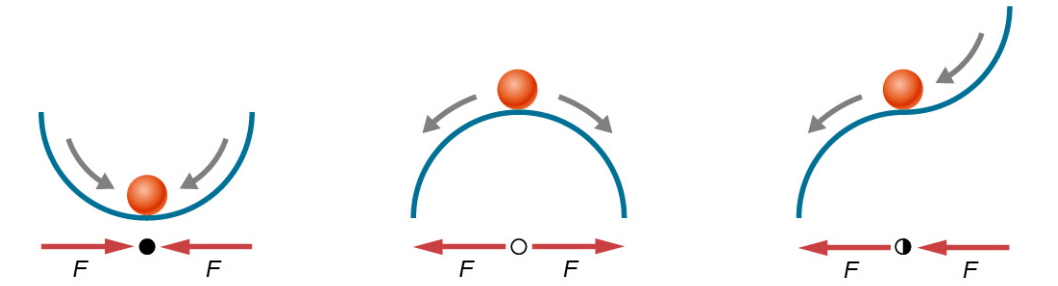
FIGURA 15.13 Gráfico de la energía cinética (rojo), la energía potencial (azul) y la energía total (verde) de un oscilador armónico simple. La fuerza es igual a $F = -\frac{dU}{dx}$. La posición de equilibrio se muestra como un punto negro y es el punto donde la fuerza es igual a cero. La fuerza es positiva cuando $x < 0$, negativa cuando $x > 0$ e igual a cero cuando $x = 0$.

La curva de energía potencial en la Figura 15.13 se asemeja a un bol. Cuando se coloca una canica en un bol, se asienta en la posición de equilibrio en el punto más bajo del bol ($x = 0$). Esto ocurre porque una **fuerza restauradora** se dirige hacia el punto de equilibrio. Este punto de equilibrio se denomina, a veces, *punto fijo*. Cuando la canica se altera hacia una posición diferente ($x = +A$), la canica oscila alrededor de la posición de equilibrio. Volviendo al gráfico de la energía potencial, la fuerza se puede calcular mirando la pendiente del gráfico de la energía potencial $\left(F = -\frac{dU}{dx}\right)$. Dado que la fuerza a ambos lados del punto fijo señala hacia el punto de equilibrio, este se denomina **punto de equilibrio estable**. Los puntos $x = A$ y $x = -A$ se llaman los puntos de inflexión (ver Energía potencial y conservación de la energía).

La estabilidad es un concepto importante. Si un punto de equilibrio es estable, una ligera alteración de un objeto que se encuentra inicialmente en el punto de equilibrio estable hará que el objeto oscile alrededor de ese punto. El punto de equilibrio estable se produce porque la fuerza de cada lado se dirige hacia él. En el caso de un punto de equilibrio inestable si el objeto se altera ligeramente, no vuelve al punto de equilibrio.

Considere el ejemplo de la canica en el bol. Si el bol está boca arriba, la canica oscilará alrededor del punto de equilibrio estable si la alteración es ligera. Si el bol se pone boca abajo, la canica se puede equilibrar en la parte superior, en el punto de equilibrio donde la fuerza neta es cero. Sin embargo, si la alteración de la canica es ligera, no volverá al punto de equilibrio, sino que rodará fuera del bol. La razón es que la fuerza a ambos lados del punto de equilibrio se aleja de ese punto. Este punto es un punto de equilibrio inestable.

La Figura 15.14 muestra tres condiciones. El primero es un punto de equilibrio estable (a); el segundo es un punto de equilibrio inestable (b); y el último es también un punto de equilibrio inestable (c), ya que la fuerza en un solo lado señala hacia el punto de equilibrio.



(a) Punto de equilibrio estable (b) Punto de equilibrio inestable (c) Punto de equilibrio inestable

FIGURA 15.14 Ejemplos de puntos de equilibrio: (a) punto de equilibrio estable; (b) punto de equilibrio inestable; (c) punto de equilibrio inestable (a veces denominado punto de equilibrio medio estable).

El proceso para determinar si un punto de equilibrio es estable o inestable se puede formalizar. Considere las curvas de energía potencial mostradas en la Figura 15.15. La fuerza se puede calcular al analizar la pendiente del gráfico. La fuerza es $F = -\frac{dU}{dx}$. En (a), el punto fijo está en $x = 0{,}00$ m. Cuando $x < 0{,}00$ m, la fuerza es positiva. Cuando $x > 0{,}00$ m, la fuerza es negativa. Este es un punto estable. En (b), el punto fijo está en $x = 0{,}00$ m. Cuando $x < 0{,}00$ m, la fuerza es negativa. Cuando $x > 0{,}00$ m, la fuerza también es negativa. Este es un punto inestable.

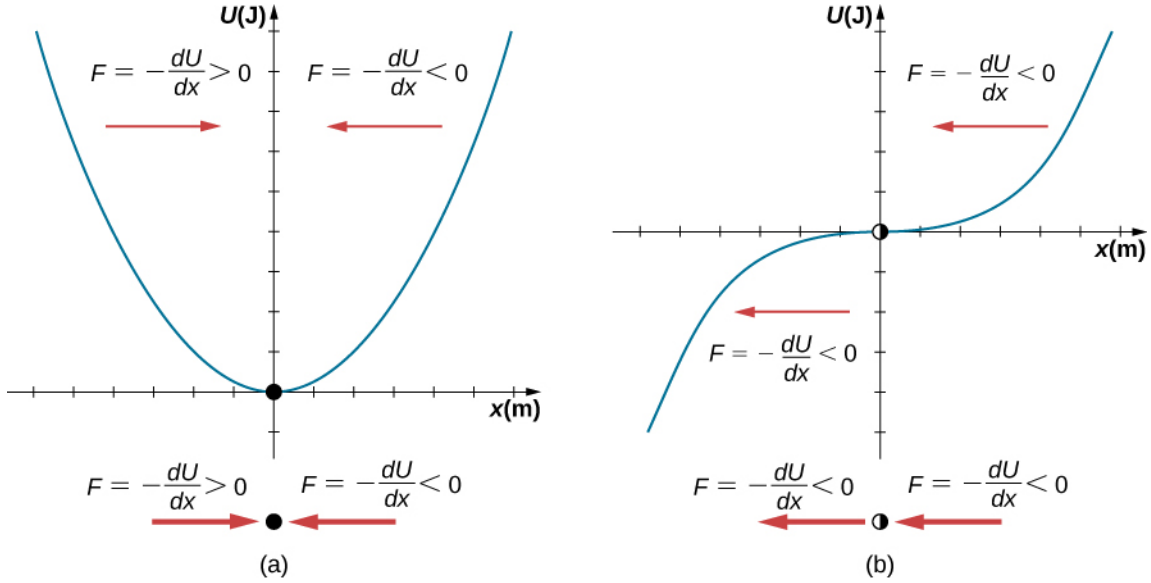


FIGURA 15.15 Dos ejemplos de función de energía potencial. La fuerza en una posición es igual al negativo de la pendiente del gráfico en esa posición. (a) Una función de energía potencial con un punto de equilibrio estable. (b) Una función de energía potencial con un punto de equilibrio inestable. Este punto se llama a veces medio estable porque la fuerza de un lado señala hacia el punto fijo.

Una aplicación práctica del concepto de puntos de equilibrio estables es la fuerza entre dos átomos neutros de una molécula. Si dos moléculas están muy cerca, separadas por unos pocos diámetros atómicos, pueden experimentar una fuerza de atracción. Si las moléculas se acercan lo suficiente como para que las capas electrónicas de los otros electrones se superpongan, la fuerza entre las moléculas se vuelve repulsiva. La fuerza de atracción entre los dos átomos puede hacer que estos formen una molécula. La fuerza entre las dos moléculas no es una fuerza lineal y no se puede modelar simplemente como dos masas separadas por un resorte, sino que los átomos de la molécula pueden oscilar alrededor de un punto de equilibrio cuando se desplazan una pequeña cantidad de la posición de equilibrio. Los átomos oscilan debido a la fuerza de atracción y a la fuerza de repulsión entre los dos átomos.

Considere un ejemplo de la interacción entre dos átomos conocida como la interacción de van Der Waals. Está fuera del alcance de este capítulo discutir en profundidad las interacciones de los dos átomos, pero las

oscilaciones de los átomos pueden ser examinadas considerando un ejemplo de un modelo de la energía potencial del sistema. Una sugerencia para modelar la energía potencial de esta molécula es con el potencial de Lennard-Jones 6-12:

$$U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right].$$

Un gráfico de esta función se muestra en la Figura 15.16. Los dos parámetros ε y σ se hallan experimentalmente.

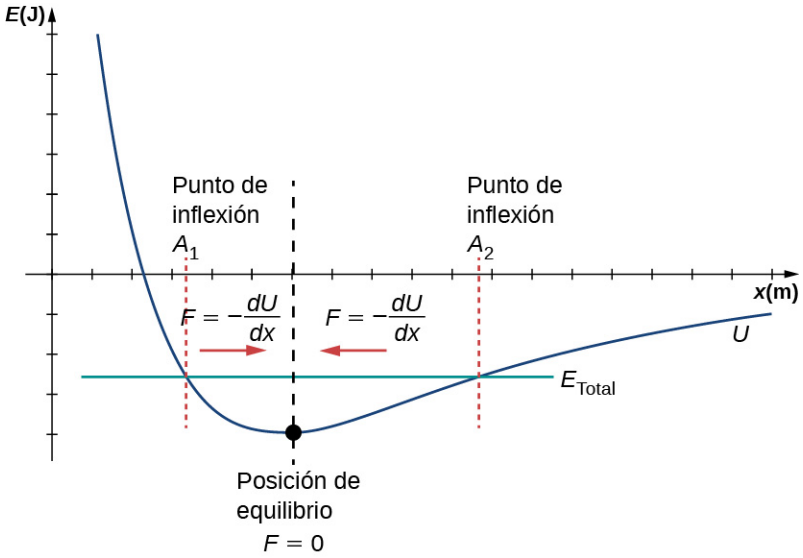


FIGURA 15.16 La función de energía potencial de Lennard-Jones para un sistema de dos átomos neutros. Si la energía está por debajo de cierta energía máxima, el sistema oscila cerca de la posición de equilibrio entre los dos puntos de inflexión.

A partir del gráfico, podrá ver que hay un pozo de energía potencial, que tiene algunas similitudes con el pozo de energía potencial de la función de energía potencial del oscilador armónico simple analizado en la Figura 15.13. El potencial de Lennard-Jones tiene un punto de equilibrio estable donde la energía potencial es mínima y la fuerza a ambos lados del punto de equilibrio señala hacia el punto de equilibrio. Note que, a diferencia del oscilador armónico simple, el pozo de potencial del potencial de Lennard-Jones no es simétrico. Esto se debe a que la fuerza entre los átomos no es una fuerza de la ley de Hooke y no es lineal. Los átomos pueden seguir oscilando alrededor de la posición de equilibrio x_{min} porque cuando $x < x_{\text{min}}$, la fuerza es positiva; cuando $x > x_{\text{min}}$, la fuerza es negativa. Note que a medida que x se acerca a cero, la pendiente es bastante pronunciada y negativa, lo que significa que la fuerza es grande y positiva. Esto sugiere que se necesita una gran fuerza para intentar acercar los átomos. A medida que x se hace más grande, la pendiente se hace menos pronunciada y la fuerza es más pequeña y negativa. Esto sugiere que si se da una energía lo suficientemente grande, los átomos pueden separarse.

Si le interesa esta interacción, calcule la fuerza entre las moléculas tomando la derivada de la función de energía potencial. Verá inmediatamente que la fuerza no se asemeja a una fuerza de la ley de Hooke ($F = -kx$), pero si está familiarizado con el teorema del binomio:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots,$$

la fuerza puede ser aproximada por una fuerza de la ley de Hooke.

Velocidad y conservación de energía

Volviendo al sistema de un bloque y un resorte en la Figura 15.11, una vez que el bloque se libera del reposo, comienza a moverse en la dirección negativa hacia la posición de equilibrio. La energía potencial disminuye y la magnitud de la velocidad y la energía cinética aumentan. En el tiempo $t = T/4$, el bloque alcanza la posición

de equilibrio $x = 0{,}00$ m, donde la fuerza sobre el bloque y la energía potencial son cero. En la posición de equilibrio, el bloque alcanza una velocidad negativa con una magnitud igual a la velocidad máxima $v = -A\omega$. La energía cinética es máxima e igual a $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$. En este punto, la fuerza sobre el bloque es cero, pero el momento arrastra al bloque y este continúa en dirección negativa hacia $x = -A$. A medida que el bloque continúa moviéndose, la fuerza sobre él actúa en la dirección positiva y la magnitud de la velocidad y la energía cinética disminuyen. La energía potencial aumenta a medida que el resorte se comprime. En el tiempo $t = T/2$, el bloque alcanza $x = -A$. Aquí la velocidad y la energía cinética son iguales a cero. La fuerza sobre el bloque es $F = +kA$ y la energía potencial almacenada en el resorte es $U = \frac{1}{2}kA^2$. Durante las oscilaciones, la energía total es constante e igual a la suma de la energía potencial y la energía cinética del sistema,

$$E_{\text{Total}} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad \textbf{15.12}$$

La ecuación de la energía asociada al SHM puede resolverse para calcular la magnitud de la velocidad en cualquier posición:

$$|v| = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}. \quad \textbf{15.13}$$

La energía en un oscilador armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud. Cuando se consideran muchas formas de oscilación, verá que la energía es proporcional a la amplitud al cuadrado.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 15.1

¿Por qué le dolería más si se rompiera la mano con una regla que con un resorte flojo, aunque el desplazamiento de cada sistema sea igual?

COMPRUEBE LO APRENDIDO 15.2

Identifique una forma en la que podría disminuir la velocidad máxima de un oscilador armónico simple.

15.3 Comparación de movimiento armónico simple y movimiento circular

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir cómo se relacionan las funciones seno y coseno con los conceptos de movimiento circular.
- Describir la conexión entre movimiento armónico simple y movimiento circular.

Una forma fácil de modelar el SHM es considerando un movimiento circular uniforme. La Figura 15.17 muestra una forma de utilizar este método. Una clavija (un cilindro de madera) está unida a un disco vertical que gira con una frecuencia angular constante. La Figura 15.18 muestra una vista lateral del disco y la clavija. Si se coloca una lámpara sobre el disco y la clavija, la clavija produce una sombra. Supongamos que el disco tenga un radio de $r = A$ y define la posición de la sombra que coincide con la línea central del disco para ser $x = 0{,}00\,m$. Como el disco gira a una velocidad constante, la sombra oscila entre $x = +A$ y $x = -A$. Ahora, imagine un bloque sobre un resorte debajo del suelo como se muestra en la Figura 15.18.

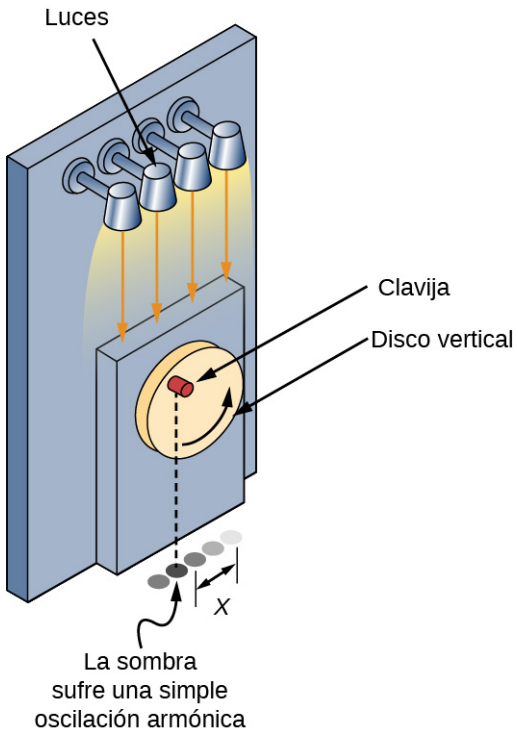


FIGURA 15.17 El SHM se puede modelar como un movimiento de rotación al mirar la sombra de una clavija en una rueda que gira a una frecuencia angular constante.

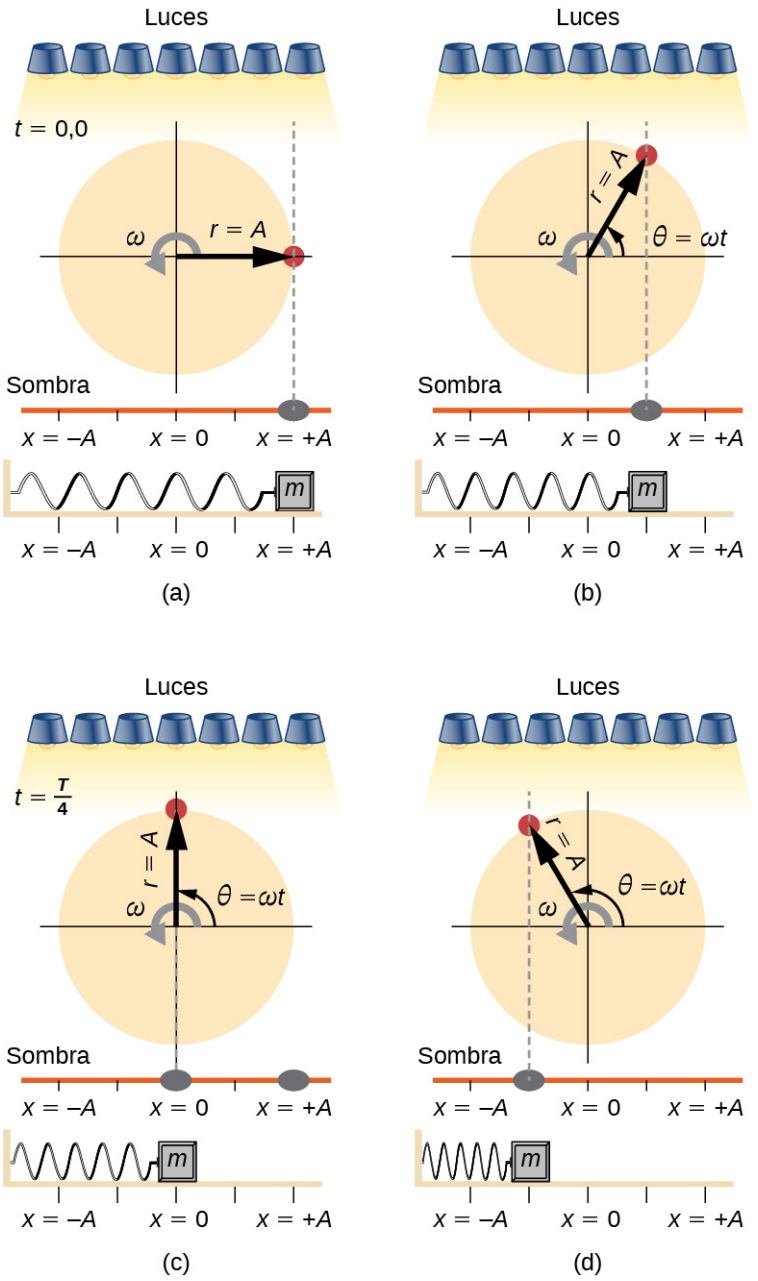


FIGURA 15.18 La luz brilla sobre el disco, por lo que la clavija hace una sombra. Si el disco gira a la frecuencia angular adecuada, la sombra sigue el movimiento del bloque sobre un resorte. Si no hay energía disipada debido a fuerzas no conservativas, el bloque y la sombra oscilarán de un lado a otro al unísono. En esta figura, se toman cuatro representaciones en cuatro momentos diferentes. (a) La rueda comienza en $\theta = 0^o$ y la sombra de la clavija está en $x = +A$, y representa la masa en la posición $x = +A$. (b) Como el disco gira a través de un ángulo $\theta = \omega t$, la sombra de la clavija está entre $x = +A$ y $x = 0$. (c) El disco sigue girando hasta $\theta = 90^0$, en la cual la sombra sigue a la masa hasta $x = 0$. (d) El disco sigue girando, la sombra sigue la posición de la masa.

Si el disco gira a la frecuencia angular adecuada, la sombra sigue al bloque. La posición de la sombra se puede modelar con la ecuación

$$x(t) = A\cos(\omega t). \tag{15.14}$$

Recuerde que el bloque unido al resorte no se mueve a velocidad constante. ¿Cuántas veces tiene que girar la rueda para que la sombra de la clavija esté siempre en el bloque? El disco debe girar a una frecuencia angular

constante igual a 2π veces la frecuencia de oscilación ($\omega = 2\pi f$).

La Figura 15.19 muestra la relación básica entre el movimiento circular uniforme y el SHM. La clavija se encuentra en la punta del radio, a una distancia A del centro del disco. El eje x está definido por una línea trazada en paralelo al suelo que corta el disco por la mitad. El eje y (no mostrado) está definido por una línea perpendicular al suelo que corta el disco en una mitad izquierda y otra derecha. El centro del disco es el punto $(x = 0, y = 0)$. La proyección de la posición de la clavija sobre el eje x fijo da la posición de la sombra, que experimenta un SHM análogo al del sistema del bloque y el resorte. En el tiempo indicado en la figura, la proyección tiene la posición x y se mueve hacia la izquierda con velocidad v. La velocidad tangencial de la clavija alrededor del círculo es igual a $\overline{v}_{\text{máx.}}$ del bloque en el resorte. El componente x de la velocidad es igual a la velocidad del bloque sobre el resorte.

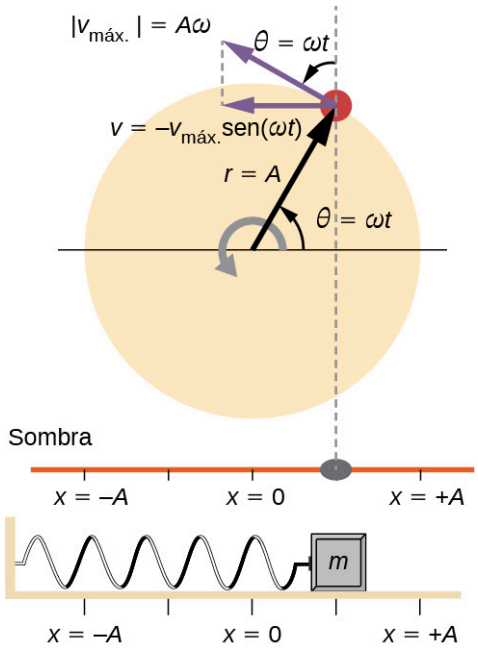


FIGURA 15.19 Una clavija que se mueve en una trayectoria circular con una velocidad angular constante ω está experimentando un movimiento circular uniforme. Su proyección en el eje x experimenta SHM. También se muestra la velocidad de la clavija alrededor del círculo, $v_{\text{máx.}}$, y su proyección, la cual es v. Observe que estas velocidades forman un triángulo similar al del desplazamiento.

Podemos usar la Figura 15.19 para analizar la velocidad de la sombra a medida que el disco gira. La clavija se mueve en un círculo con una velocidad de $v_{\text{máx.}} = A\omega$. La sombra se mueve con una velocidad igual al componente de la velocidad de la clavija que es paralela a la superficie donde se produce la sombra:

$$v = -v_{\text{máx.}} \operatorname{sen}(\omega t). \qquad \textbf{15.15}$$

De ello se deduce que la aceleración es

$$a = -a_{\text{máx.}} \cos(\omega t). \qquad \textbf{15.16}$$

COMPRUEBE LO APRENDIDO 15.3

Identifique un objeto que experimenta movimiento circular uniforme. Describa cómo podría trazar el SHM de este objeto.

15.4 Péndulos

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Indicar las fuerzas que actúan sobre un péndulo simple.
- Determinar la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo de un péndulo simple en términos de la longitud del péndulo y de la aceleración debido a la gravedad.
- Definir el periodo de un péndulo físico.
- Definir el periodo de un péndulo de torsión.

Los péndulos son de uso común. Los relojes de pie utilizan un péndulo para dar la hora, y un péndulo se puede usar para medir la aceleración debido a la gravedad. Para desplazamientos cortos, un péndulo es un oscilador armónico simple.

El péndulo simple

Un **péndulo simple** se define por tener una masa puntual, también conocida como masa pendular, la cual está suspendida de una cuerda de longitud L con masa insignificante (Figura 15.20). En este caso, las únicas fuerzas que actúan sobre la pesa son la fuerza de gravedad (es decir, el peso de la pesa) y la tensión de la cuerda. Se supone que la masa de la cuerda es insignificante en comparación con la masa de la pesa.

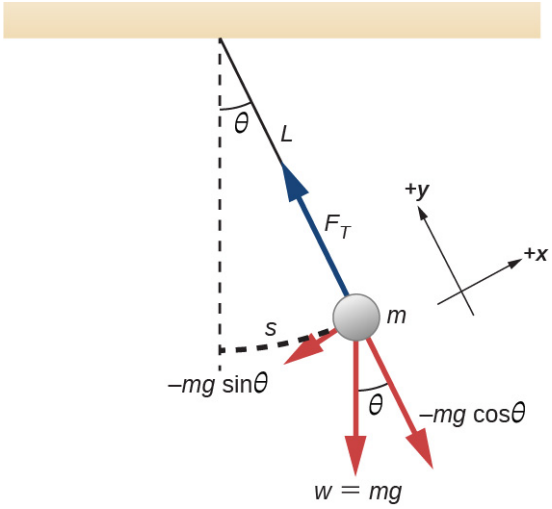


FIGURA 15.20 Un péndulo simple tiene una pesa de pequeño diámetro y una cuerda que tiene una masa muy pequeña pero es lo suficientemente fuerte como para no estirarse de forma apreciable. El desplazamiento lineal desde el equilibrio es s, la longitud del arco. También se muestran las fuerzas sobre la pesa, lo que resulta en una fuerza neta de $-mg\operatorname{sen}\theta$ hacia la posición de equilibrio, es decir, una fuerza restauradora.

Considere el torque en el péndulo. La fuerza que proporciona el torque restaurador es el componente del peso de la masa pendular que actúa a lo largo de la longitud del arco. El torque es la longitud de la cuerda L por el componente de la fuerza neta perpendicular al radio del arco. El signo menos indica que el torque actúa en dirección opuesta al desplazamiento angular:

$$\begin{aligned} \tau &= -L\,(mg\operatorname{sen}\theta)\,; \\ I\alpha &= -L\,(mg\operatorname{sen}\theta)\,; \\ I\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -L\,(mg\operatorname{sen}\theta)\,; \\ mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -L\,(mg\operatorname{sen}\theta)\,; \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación diferencial implica un cálculo avanzado, y está fuera del alcance de este texto.

Pero tenga en cuenta que para ángulos pequeños (menos de 15 grados), sen θ y θ difieren en menos de un 1 %, por lo que podemos utilizar la aproximación de ángulo pequeño sen $\theta \approx \theta$. El ángulo θ describe la posición del péndulo. El uso de la aproximación de ángulo pequeño da una solución aproximada para ángulos pequeños,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta. \tag{15.17}$$

Dado que esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de SHM, la solución es fácil de calcular. La frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{15.18}$$

y el periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{15.19}$$

El periodo de un péndulo simple depende de su longitud y de la aceleración debido a la gravedad. El periodo es completamente independiente de otros factores, como masa y desplazamiento máximo. Como en el caso de los osciladores armónicos simples, el periodo *(T)* de un péndulo es casi independiente de la amplitud, especialmente si θ es inferior a unos 15°. Incluso relojes de péndulo simple se pueden ajustar con precisión y seguir siendo exactos.

Note la dependencia de T con respecto a g. Si se conoce con precisión la longitud de un péndulo, se puede utilizar para medir la aceleración debido a la gravedad, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 15.3

Medición de la aceleración debido a la gravedad mediante el periodo de un péndulo

¿Cuál es la aceleración debido a la gravedad en una región donde un péndulo simple de 75,000 cm de longitud tiene un periodo de 1,7357 s?

Estrategia

Se nos pide calcular g dado el periodo *(T)* y la longitud L de un péndulo. Podemos resolver $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ para g, suponiendo únicamente que el ángulo de desviación es menor de 15°.

Solución

1. Cuadrado $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ y resuelva para g:
$$g = 4\pi^2\frac{L}{T^2}.$$
2. Sustituya los valores conocidos en la nueva ecuación:
$$g = 4\pi^2\frac{0{,}75000\text{ m}}{(1{,}7357\text{ s})^2}.$$
3. Calcule para hallar g:
$$g = 9{,}8281\text{ m/s}^2.$$

Importancia

Este método para determinar g puede ser muy preciso, por lo que la longitud y el periodo se dan con cinco dígitos en este ejemplo. Para la precisión de la aproximación sen $\theta \approx \theta$ para ser mejor que la precisión de la

longitud y el periodo del péndulo, el ángulo máximo de desplazamiento debe mantenerse por debajo de 0,5° aproximadamente.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 15.4

Un ingeniero construye dos péndulos simples. Ambos están suspendidos de pequeños cables fijados al techo de una habitación. Cada péndulo se sitúa a 2 cm del suelo. El péndulo 1 tiene una pesa con una masa de 10 kg. El péndulo 2 tiene una pesa con una masa de 100 kg. Describa cómo diferirá el movimiento de los péndulos si ambas pesas están desplazadas por 12°.

Péndulo físico

Cualquier objeto puede oscilar como un péndulo. Piense en una taza de café colgada en un gancho en la despensa. Si la taza recibe un golpe, oscila de un lado a otro como un péndulo hasta que las oscilaciones se detienen. Hemos descrito un péndulo simple como una masa puntual y una cuerda. Un **péndulo físico** es cualquier objeto cuyas oscilaciones son similares a las del péndulo simple, pero no se puede modelar como una masa puntual en una cuerda, y la distribución de la masa se debe incluir en la ecuación de movimiento.

En cuanto al péndulo simple, la fuerza restauradora del péndulo físico es la fuerza de la gravedad. En el péndulo simple la fuerza de gravedad actúa sobre el centro de la masa pendular. En el caso del péndulo físico, la fuerza de gravedad actúa sobre el centro de masa (CM) de un objeto. El objeto oscila alrededor de un punto O. Considere un objeto de forma genérica como el que se muestra en la Figura 15.21.

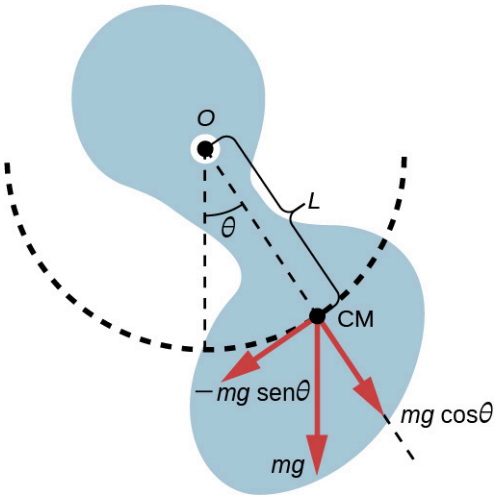


FIGURA 15.21 Un péndulo físico es cualquier objeto que oscila como un péndulo, pero que no se puede modelar como una masa puntual en una cuerda. La fuerza de gravedad actúa sobre el centro de masa (CM) y proporciona la fuerza restauradora que hace que el objeto oscile. El signo menos en el componente del peso que proporciona la fuerza restauradora está presente porque la fuerza actúa en la dirección opuesta al ángulo creciente θ.

Cuando un péndulo físico está colgado de un punto pero es libre de girar, lo hace debido al torque aplicado en el CM, producido por el componente del peso del objeto que actúa tangente al movimiento del CM. Tomando la dirección contraria a las agujas del reloj como positiva, el componente de la fuerza gravitacional que actúa tangente al movimiento es $-mg$ sen θ. El signo menos es el resultado de la fuerza restauradora que actúa en la dirección opuesta al ángulo creciente. Recuerde que el torque es igual a $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$. La magnitud del torque es igual a la longitud del brazo del radio por el componente tangencial de la fuerza aplicada, $|\tau| = rF\text{sen}\,\theta$. Aquí, la longitud L del brazo del radio es la distancia entre el punto de rotación y el CM. Para analizar el movimiento, empiece con el torque neto. Al igual que el péndulo simple, considere solo los ángulos pequeños para que sen $\theta \approx \theta$. Recuerde del capítulo Rotación de eje fijo sobre rotación que el torque neto es igual al momento de inercia $I = \int r^2\, dm$ por la aceleración angular α, donde $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$:

$$I\alpha = \tau_{\text{neto}} = L\,(-mg)\,\text{sen}\,\theta.$$

Al usar la aproximación de ángulo pequeño y reordenar:

$$\begin{aligned} I\alpha &= -L\,(mg)\,\theta; \\ I\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -L\,(mg)\,\theta; \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\left(\frac{mgL}{I}\right)\theta. \end{aligned}$$

Una vez más, la ecuación dice que la segunda derivada temporal de la posición (en este caso, el ángulo) es igual a menos una constante $\left(-\frac{mgL}{I}\right)$ por la posición. La solución es

$$\theta\,(t) = \Theta\cos\,(\omega t + \phi)\,,$$

donde Θ es el desplazamiento angular máximo. La frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}. \qquad \textbf{15.20}$$

Por lo tanto, el periodo es

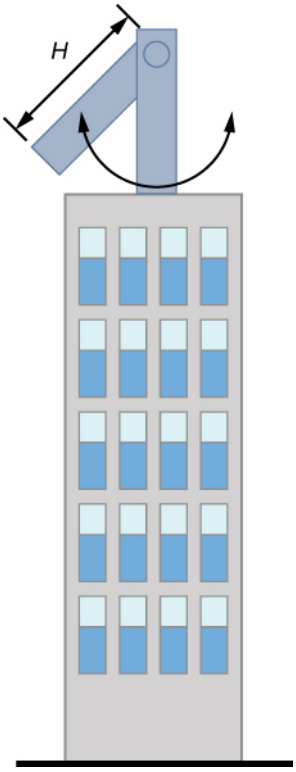
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}. \qquad \textbf{15.21}$$

Observe que para un péndulo simple, el momento de inercia es $I = \int r^2\,dm = mL^2$ y el periodo se reduce a $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

EJEMPLO 15.4

Cómo reducir el vaivén de un rascacielos

En condiciones extremas, los rascacielos pueden tener un vaivén de hasta dos metros con una frecuencia de hasta 20,00 Hz debido a vientos fuertes o a actividad sísmica. Varias compañías han desarrollado péndulos físicos que se colocan en lo alto de los rascacielos. Cuando el rascacielos se inclina hacia la derecha, el péndulo lo hace hacia la izquierda, lo que reduce el vaivén. Suponiendo que las oscilaciones tienen una frecuencia de 0,50 Hz, diseñe un péndulo que consista en una viga larga, de densidad constante, con una masa de 100 toneladas métricas y un punto de apoyo en un extremo de la viga. ¿Cuál debería ser la longitud de la viga?



Estrategia

Se nos pide que hallemos la longitud del péndulo físico con una masa conocida. Primero tenemos que hallar el momento de inercia de la viga. A continuación, podemos utilizar la ecuación del periodo de un péndulo físico para calcular la longitud.

Solución

1. Calcule el momento de inercia del CM:
2. Use el teorema del eje paralelo para hallar el momento de inercia en torno al punto de rotación
$$I = I_{\text{CM}} + \frac{L}{4}^2 M = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2.$$
3. El periodo de un péndulo físico tiene un periodo de $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$. Use el momento de inercia para resolver la longitud L:
$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}; \\ L &= 3g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 3\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{2\,\text{s}}{2\pi}\right)^2 = 2{,}98\,\text{m}. \end{aligned}$$
4. Esta longitud L es desde el centro de masa hasta el eje de rotación, que es la mitad de la longitud del péndulo. Por lo tanto, la longitud H del péndulo es:
$$H = 2L = 5{,}96\,\text{m}$$

Importancia

Hay muchas formas de reducir las oscilaciones, entre las que se encuentran modificar la forma de los rascacielos, utilizar varios péndulos físicos y emplear amortiguadores de masa sintonizada.

Péndulo de torsión

Un **péndulo de torsión** consiste en un cuerpo rígido suspendido por un cable o resorte ligero (Figura 15.22). Cuando el cuerpo se retuerce un poco en un pequeño ángulo máximo (Θ) y liberado del reposo, el cuerpo oscila entre ($\theta = +\Theta$) y ($\theta = -\Theta$). El torque restaurador es suministrado por el corte de la cuerda o el cable.

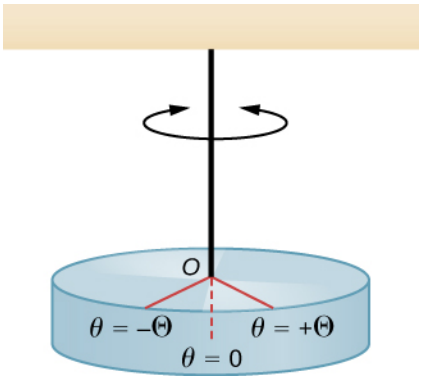


FIGURA 15.22 Un péndulo de torsión consiste en un cuerpo rígido suspendido mediante una cuerda o un cable. El cuerpo rígido oscila entre $\theta = +\Theta$ y $\theta = -\Theta$.

El torque restaurador se puede modelar como proporcional al ángulo:

$$\tau = -\kappa\theta.$$

La variable kappa (κ) se conoce como la constante de torsión del cable o cuerda. El signo menos indica que el torque restaurador actúa en dirección opuesta al aumento del desplazamiento angular. El torque neto es igual al momento de inercia por la aceleración angular:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta;$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta.$$

Esta ecuación dice que la segunda derivada temporal de la posición (en este caso, el ángulo) es igual a una constante negativa por la posición. Esto se parece mucho a la ecuación de movimiento del SHM $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$, donde se halló que el periodo era $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Por lo tanto, el periodo del péndulo de torsión se puede calcular mediante

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \qquad 15.22$$

Las unidades de la constante de torsión son $[\kappa] = \text{N} - \text{m} = \left(\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\text{m} = \text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ y las unidades para el momento de inercia son $[I] = \text{kg} - \text{m}^2$, que muestran que la unidad del periodo es el segundo.

EJEMPLO 15.5

Medición de la constante de torsión de una cuerda

Una varilla tiene una longitud de $l = 0{,}30$ m y una masa de 4,00 kg. Se fija una cuerda al CM de la varilla y el sistema se cuelga del techo (Figura 15.23). La varilla se desplaza 10 grados desde la posición de equilibrio y se libera del reposo. La varilla oscila con un periodo de 0,5 s. ¿Cuál es la constante de torsión κ?

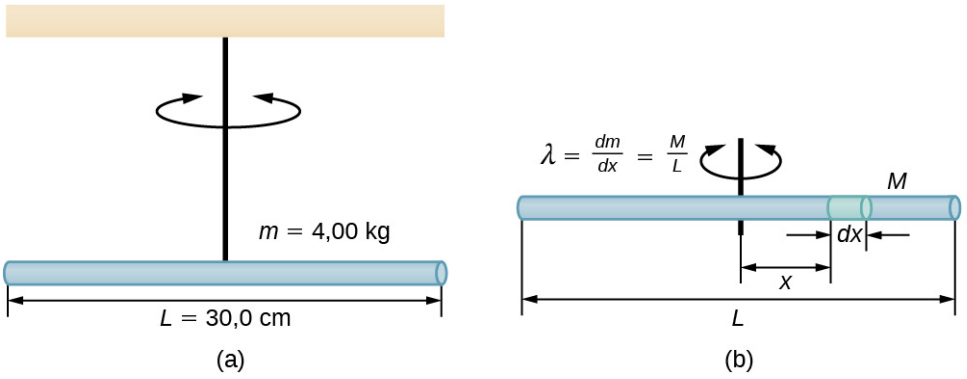


FIGURA 15.23 (a) Una varilla suspendida del techo mediante una cuerda. (b) Halle el momento de inercia de la varilla.

Estrategia

Se nos pide que hallemos la constante de torsión de la cuerda. Primero tenemos que hallar el momento de inercia.

Solución

1. Calcule el momento de inercia del CM:

$$I_{\text{CM}} = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \lambda dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{+L/2} = \lambda \frac{2L^3}{24} = \left(\frac{M}{L} \right) \frac{2L^3}{24} = \frac{1}{12} ML^2.$$

2. Calcule la constante de torsión mediante la ecuación del periodo:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\tfrac{I}{\kappa}}; \\ \kappa &= I \left(\tfrac{2\pi}{T} \right)^2 = \left(\tfrac{1}{12} ML^2 \right) \left(\tfrac{2\pi}{T} \right)^2; \\ &= \left(\tfrac{1}{12} (4{,}00 \text{ kg}) \, (0{,}30 \text{ m})^2 \right) \left(\frac{2\pi}{0{,}50 \text{ s}} \right)^2 = 4{,}73 \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Importancia

Al igual que la constante de fuerza del sistema de un bloque y un resorte, cuanto mayor sea la constante de torsión, más corto será el periodo.

15.5 Oscilaciones amortiguadas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir el movimiento armónico amortiguado
- Escribir las ecuaciones de movimiento para oscilaciones armónicas amortiguadas
- Describir el movimiento impulsado, o forzado, movimiento armónico amortiguado
- Escribir las ecuaciones de movimiento por fuerza, movimiento armónico amortiguado

En el mundo real, las oscilaciones pocas veces siguen un verdadero SHM. Algún tipo de fricción suele amortiguar el movimiento, por lo que desaparece o necesita más fuerza para continuar. En esta sección examinamos algunos ejemplos de movimiento armónico amortiguado y vemos cómo modificar las ecuaciones de movimiento para describir este caso más general.

Una cuerda de guitarra deja de oscilar unos segundos después de que la puntean. Para seguir balanceándose en un columpio de parque infantil, usted deberá seguir empujando (Figura 15.24). Aunque, a menudo, podemos hacer que la fricción y otras fuerzas no conservativas sean pequeñas o insignificantes, el movimiento completamente sin amortiguación es poco frecuente. De hecho, es posible que incluso queramos amortiguar las oscilaciones, como ocurre con el sistema de suspensión de los automóviles.



FIGURA 15.24 Para contrarrestar las fuerzas de amortiguación, usted debe seguir empujando un columpio (créditos: Bob Mical).

La Figura 15.25 muestra una masa m unida a un resorte con una constante de fuerza k. La masa se eleva a una posición A_0, la amplitud inicial, y luego se libera. La masa oscila alrededor de la posición de equilibrio en un fluido con viscosidad, pero la amplitud disminuye en cada oscilación. Para un sistema que tiene una pequeña cantidad de amortiguación, el periodo y la frecuencia son constantes y son casi los mismos que para SHM, pero la amplitud disminuye gradualmente como se muestra. Esto ocurre porque la fuerza de amortiguación no conservativa elimina energía del sistema, normalmente en forma de energía térmica.

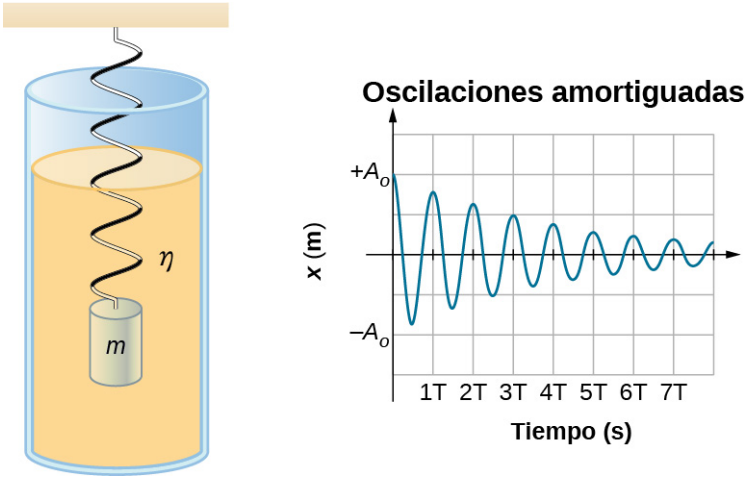


FIGURA 15.25 Para una masa sobre un resorte que oscila en un fluido viscoso, el periodo permanece constante, pero las amplitudes de las oscilaciones disminuyen debido al amortiguamiento que causa el fluido.

Considere las fuerzas que actúan sobre la masa. Note que la única contribución del peso es cambiar la posición de equilibrio, como se ha comentado anteriormente en el capítulo. Por lo tanto, la fuerza neta es igual a la fuerza del resorte y la fuerza de amortiguación (F_D). Si la magnitud de la velocidad es pequeña, es decir, la masa oscila lentamente, la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad y actúa contra la dirección del movimiento ($F_D = -bv$). Por lo tanto, la fuerza neta sobre la masa es

$$ma = -bv - kx.$$

Al escribir esto como una ecuación diferencial en x, obtenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad 15.23$$

Para determinar la solución de esta ecuación, considere el trazado de posición versus tiempo que se muestra en la Figura 15.26. La curva se asemeja a una curva coseno que oscila en una envoltura de una función exponencial $A_0e^{-\alpha t}$ donde $\alpha = \frac{b}{2m}$. La solución es

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi). \quad 15.24$$

Queda como ejercicio demostrar que esta es, de hecho, la solución. Para demostrar que es la solución correcta, se toman la primera y la segunda derivada con respecto al tiempo y se sustituyen en la Ecuación 15.23. Se halla que la Ecuación 15.24 es la solución si

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

Recuerde que la frecuencia angular de una masa que experimenta un SHM es igual a la raíz cuadrada de la constante de fuerza dividida entre la masa. A menudo se denomina **frecuencia angular natural**, que se representa como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad 15.25$$

La frecuencia angular del movimiento armónico amortiguado se transforma en

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad 15.26$$

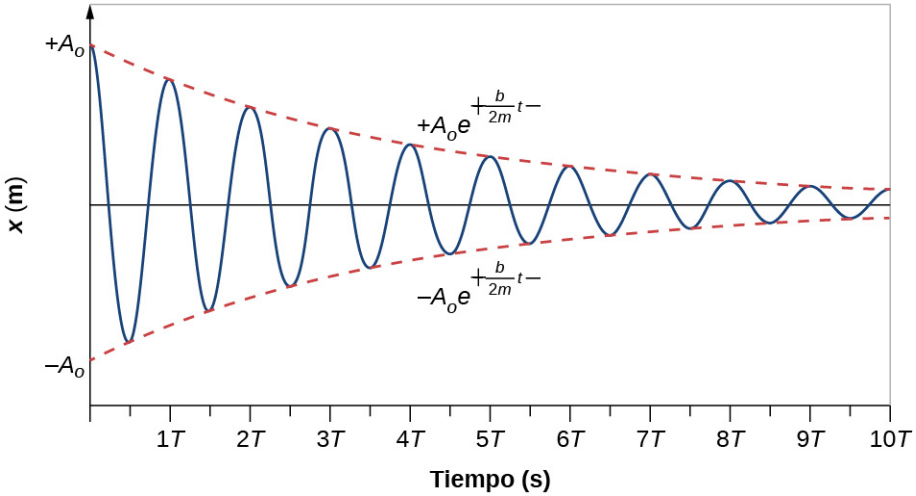


FIGURA 15.26 Posición versus tiempo para la masa que oscila sobre un resorte en un fluido viscoso. Observe que la curva parece ser una función coseno dentro de una envoltura exponencial.

Recuerde que cuando comenzamos esta descripción de movimiento armónico amortiguado afirmamos que la amortiguación debe ser pequeña. Se me ocurren dos preguntas. ¿Por qué la amortiguación debe ser pequeña? ¿Y cuán pequeño es lo pequeño? Si usted *aumenta* gradualmente la cantidad de amortiguación en un sistema, el periodo y la frecuencia empiezan a verse afectados, ya que la amortiguación se opone y, por tanto, ralentiza el movimiento de un lado a otro (la fuerza neta es más pequeña en ambas direcciones). Si la amortiguación es muy grande, el sistema ni siquiera oscila, sino que se mueve lentamente hacia el equilibrio. La frecuencia angular es igual a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

A medida que b aumenta, $\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$ se hace más pequeña y finalmente llega a cero cuando $b = \sqrt{4mk}$. Si b se

hace más grande, $\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$ se convierte en un número negativo y $\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ es un número complejo.

La Figura 15.27 muestra el desplazamiento de un oscilador armónico para diferentes cantidades de amortiguación. Cuando la constante de amortiguación es pequeña, $b < \sqrt{4mk}$, el sistema oscila mientras la amplitud del movimiento decae exponencialmente. Se dice que este sistema está **subamortiguado**, como en la curva (a). Muchos sistemas están subamortiguados y oscilan mientras la amplitud disminuye exponencialmente, como la masa que oscila sobre un resorte. La amortiguación puede ser muy pequeña, pero finalmente la masa llega a estar en reposo. Si la constante de amortiguación es $b = \sqrt{4mk}$, se dice que el sistema está **amortiguado críticamente**, como en la curva (b). Un ejemplo de sistema amortiguado críticamente es el sistema de suspensión de un automóvil. Es ventajoso que las oscilaciones decaigan lo más rápido posible. En este caso, el sistema no oscila, sino que se aproxima asintóticamente a la condición de equilibrio lo más rápidamente posible. La curva (c) en la Figura 15.27 representa un sistema **sobreamortiguado** donde $b > \sqrt{4mk}$. Un sistema sobreamortiguado se acercará al equilibrio durante un periodo más largo.

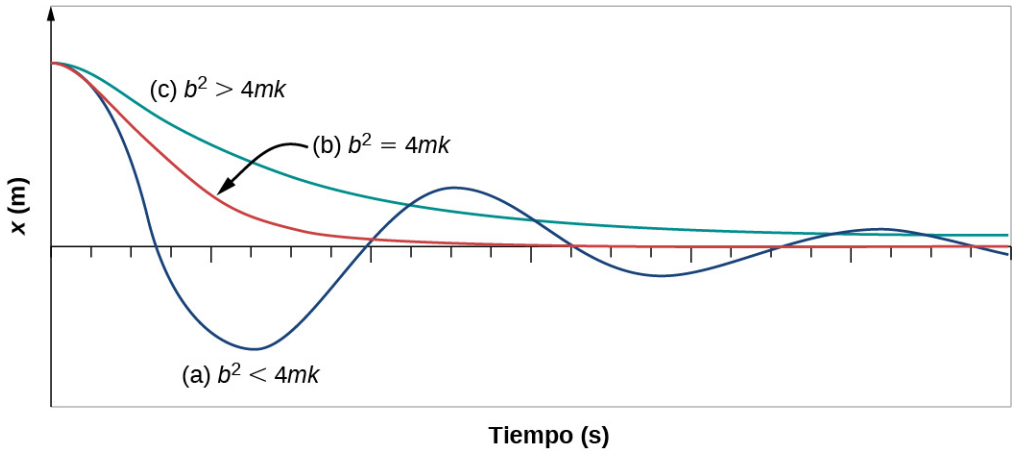


FIGURA 15.27 La posición versus el tiempo para tres sistemas formados por una masa y un resorte en un fluido viscoso. (a) Si la amortiguación es pequeña $\left(b < \sqrt{4mk}\right)$, la masa oscila, y pierde lentamente la amplitud a medida que la energía es disipada por las fuerzas no conservativas. El caso límite es (b) donde la amortiguación es $\left(b = \sqrt{4mk}\right)$. (c) Si la amortiguación es muy grande $\left(b > \sqrt{4mk}\right)$, la masa no oscila cuando se desplaza, sino que intenta volver a la posición de equilibrio.

A menudo se desea una amortiguación crítica, ya que un sistema de este tipo vuelve al equilibrio rápidamente y se mantiene allí. Además, una fuerza constante aplicada a un sistema amortiguado críticamente mueve el sistema a una nueva posición de equilibrio en el menor tiempo posible sin sobrepasar ni oscilar sobre la nueva posición.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 15.5

¿Por qué son tan poco comunes los osciladores armónicos completamente no amortiguados?

15.6 Oscilaciones forzadas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Definir oscilaciones forzadas.
- Enumerar las ecuaciones de movimiento asociadas a oscilaciones forzadas.
- Explicar el concepto de resonancia y su efecto en la amplitud de un oscilador.
- Enumerar las características de un sistema que oscila en resonancia.

Siéntese alguna vez delante de un piano y cante una breve nota fuerte con los apagadores fuera de sus cuerdas (Figura 15.28). Le devolverá la misma nota: las cuerdas, que tienen las mismas frecuencias que su voz, están resonando en respuesta a las fuerzas de las ondas sonoras que les envió. Este es un buen ejemplo del hecho de que los objetos —en este caso, las cuerdas del piano— se pueden forzar a oscilar, y oscilan más fácilmente en su frecuencia natural. En esta sección exploramos brevemente la aplicación de una fuerza impulsora periódica que actúa sobre un oscilador armónico simple. La fuerza impulsora introduce energía en el sistema a una determinada frecuencia, que no es necesariamente la misma que la frecuencia natural del sistema. Recuerde que la frecuencia natural es la frecuencia a la que oscilaría un sistema si no hubiera ninguna fuerza impulsora ni amortiguadora.

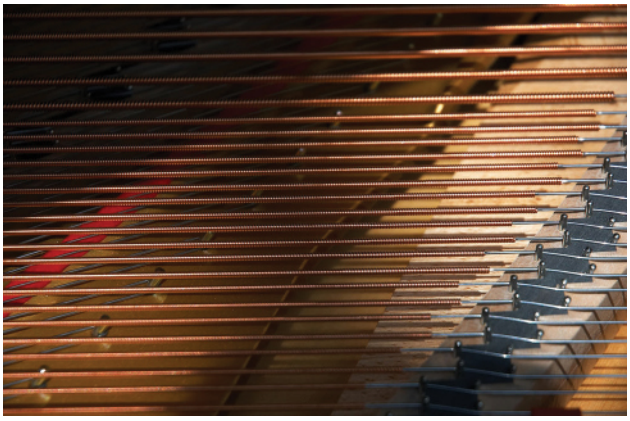


FIGURA 15.28 Puede hacer vibrar las cuerdas de un piano simplemente produciendo ondas sonoras con su voz (créditos: Matt Billings).

La mayoría de nosotros se ha entretenido con juguetes que implican un objeto apoyado en una banda elástica, algo así como la pelota de pádel suspendida de un dedo en la Figura 15.29. Imagine que el dedo de la figura es su dedo. Al principio, mantiene el dedo firme y la pelota rebota hacia arriba y hacia abajo con una pequeña amortiguación. Si mueve el dedo hacia arriba y hacia abajo lentamente, la pelota sigue sin rebotar mucho por sí sola. A medida que se aumenta la frecuencia con la que mueva el dedo hacia arriba y hacia abajo, la pelota responde oscilando con una amplitud cada vez mayor. Cuando impulsa la pelota a su frecuencia natural, las oscilaciones de la pelota aumentan en amplitud con cada oscilación durante el tiempo que usted la impulsa. El fenómeno de impulsar un sistema con una frecuencia igual a su frecuencia natural se llama **resonancia**. Se dice que un sistema que se mueve a su frecuencia natural *resuena*. A medida que la frecuencia de impulso es progresivamente más alta que la frecuencia de resonancia o natural, la amplitud de las oscilaciones se hace más pequeña hasta que las oscilaciones casi desaparecen, y su dedo, simplemente, se mueve hacia arriba y hacia abajo con poco efecto sobre la pelota.

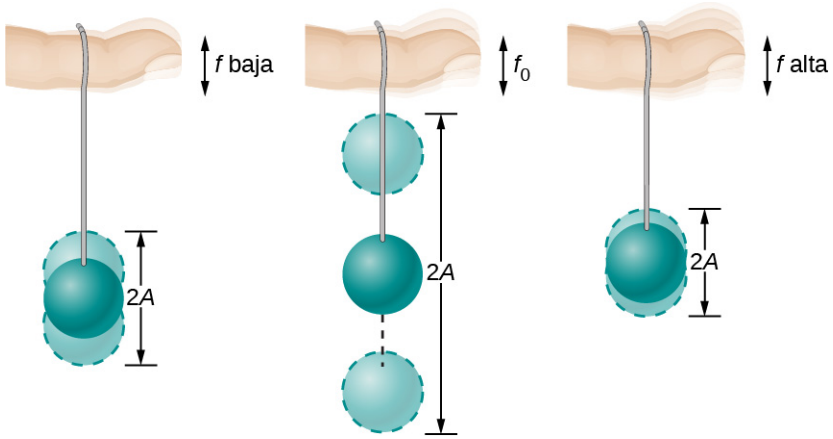


FIGURA 15.29 La pelota de pádel en su banda elástica se mueve en respuesta al dedo que la sostiene. Si el dedo se mueve con la frecuencia natural f_0 de la pelota en la banda elástica, entonces se alcanza una resonancia, y la amplitud de las oscilaciones de la pelota aumenta drásticamente. A frecuencias de impulso más altas y más bajas,

la energía se transfiere a la pelota con menos eficacia, y esta responde con oscilaciones de menor amplitud.

Considere un simple experimento. Sujete una masa m a un resorte en un fluido viscoso, de forma similar al aparato comentado en el oscilador armónico amortiguado. Esta vez, en vez de fijar el extremo libre del resorte, sujete el extremo libre a un disco impulsado por un motor de velocidad variable. El motor gira con una frecuencia de impulso angular de ω. El disco giratorio proporciona energía al sistema por el trabajo hecho por la fuerza impulsora ($F_{\mathrm{d}} = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$). El aparato experimental se muestra en la Figura 15.30.

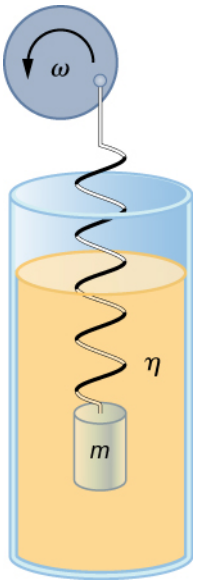


FIGURA 15.30 Movimiento armónico amortiguado y forzado producido por el impulso de un resorte y una masa con un disco impulsado por un motor de velocidad variable.

Al usar la segunda ley de Newton ($\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{neta}} = m\vec{\mathbf{a}}$), podemos analizar el movimiento de la masa. La ecuación resultante es similar a la ecuación de fuerza para el oscilador armónico amortiguado, con la adición de la fuerza impulsora:

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \operatorname{sen}(\omega t) = m\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad 15.27$$

Cuando se fuerza un oscilador con una fuerza impulsora periódica, el movimiento puede parecer caótico. Los movimientos del oscilador se conocen como transitorios. Una vez que los transitorios desaparecen, el oscilador alcanza un estado estable, en el que el movimiento es periódico. Después de algún tiempo, la solución en estado estable de esta ecuación diferencial es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \qquad 15.28$$

Una vez más, se deja como ejercicio demostrar que esta ecuación es una solución. Tomando la primera y la segunda derivada temporal de $x(t)$ y sustituyéndolas en la ecuación de fuerza se observa que $x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ es una solución siempre que la amplitud sea igual a

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + b^2\omega^2}} \qquad 15.29$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia angular de la fuerza impulsora. Recuerde que la frecuencia angular, y por tanto la frecuencia, del motor se puede ajustar. Al observar el denominador de la ecuación de la amplitud, cuando la frecuencia de impulso es mucho menor, o mucho mayor, que la frecuencia natural, el cuadrado de la

diferencia de las dos frecuencias angulares $\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2$ es positivo y grande, lo que hace que el denominador sea grande, y el resultado es una pequeña amplitud para las oscilaciones de la masa. A medida que la frecuencia de la fuerza impulsora se acerca a la frecuencia natural del sistema, el denominador se hace pequeño y la amplitud de las oscilaciones se hace grande. La amplitud máxima se genera cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural del sistema $\left(A_{\text{máx.}} = \frac{F_0}{b\omega}\right)$.

La Figura 15.31 muestra un gráfico de la amplitud de un oscilador armónico amortiguado como función de la frecuencia de la fuerza periódica que lo impulsa. Cada una de las tres curvas del gráfico representa una cantidad diferente de amortiguación. Las tres curvas alcanzan su pico en el punto en el que la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural del oscilador armónico. El pico más alto, o la mayor respuesta, es para la menor cantidad de amortiguación, ya que se elimina menos energía por la fuerza de amortiguación. Observe que, dado que la amplitud crece a medida que disminuye la amortiguación, y al llevar esto al límite en el que no hay amortiguación $(b = 0)$, la amplitud se vuelve infinita.

Tenga en cuenta que una fuerza impulsora de pequeña amplitud puede producir una respuesta de gran amplitud. Este fenómeno se conoce como resonancia. Un ejemplo común de resonancia es el de un padre que empuja a un niño pequeño en un columpio. Cuando el niño quiere ir más alto, el padre no retrocede y entonces, tomando carrerilla, se abalanza sobre el niño y aplica una gran fuerza en un corto intervalo. En cambio, el padre aplica pequeños empujones al niño con la frecuencia adecuada, y la amplitud de los balanceos del niño aumenta.

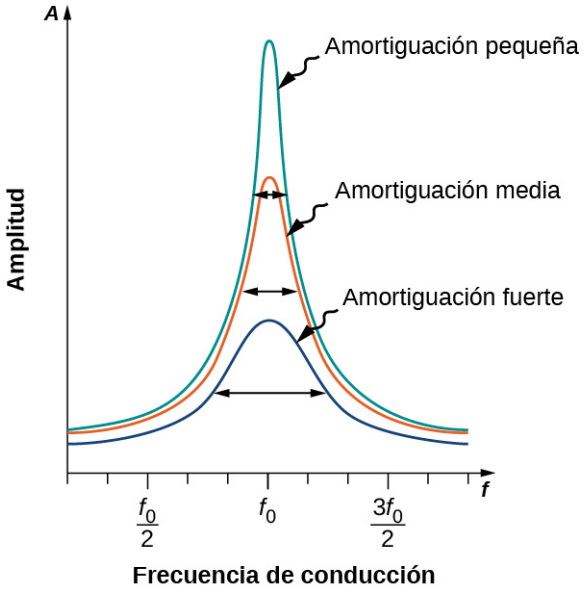


FIGURA 15.31 Amplitud de un oscilador armónico como una función de la frecuencia de la fuerza impulsora. Las curvas representan el mismo oscilador con la misma frecuencia natural, pero con diferentes cantidades de amortiguación. La resonancia se produce cuando la frecuencia de impulso es igual a la frecuencia natural, y la mayor respuesta es para la menor cantidad de amortiguación. La respuesta más estrecha es también para la menor amortiguación.

Es interesante observar que las anchuras de las curvas de resonancia mostradas en la Figura 15.31 dependen de la amortiguación: cuanto menos amortiguación, más estrecha es la resonancia. La consecuencia es que si quiere que un oscilador impulsado resuene a una frecuencia muy específica, necesitará la menor amortiguación posible. Por ejemplo, una radio tiene un circuito que se utiliza para elegir una determinada emisora de radio. En este caso, el oscilador amortiguado forzado consiste en un resistor, un condensador y un inductor, lo cual se analizará más adelante en este curso. El circuito se "sintoniza" para elegir una emisora de radio específica. Aquí es deseable que la curva de resonancia sea muy estrecha, para captar la frecuencia exacta de la emisora elegida. La estrechez del gráfico, y la capacidad de elegir una determinada frecuencia, se conoce como la calidad del sistema. La calidad se define como la dispersión de la frecuencia angular, o lo que

es lo mismo, la dispersión en la frecuencia, a la mitad de la amplitud máxima, dividida entre la frecuencia natural $\left(Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\right)$ como se muestra en la Figura 15.32. Para una pequeña amortiguación, la calidad es, aproximadamente, igual a $Q \approx \frac{2b}{m}$.

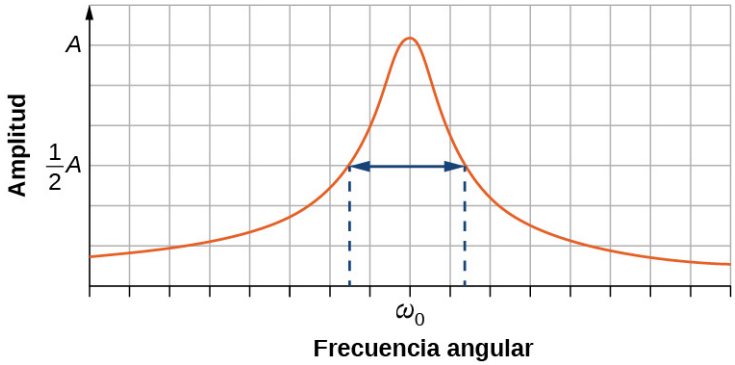


FIGURA 15.32 La calidad de un sistema se define como la dispersión de las frecuencias a la mitad de la amplitud dividida entre la frecuencia natural.

Estas características de los osciladores armónicos impulsados se aplican a una enorme variedad de sistemas. Por ejemplo, la imagen de resonancia magnética (IRM) es una herramienta de diagnóstico médico muy utilizada en la que se hace resonar núcleos atómicos (principalmente núcleos de hidrógeno o protones) mediante ondas de radio entrantes (en el orden de 100 MHz). En todos estos casos, la eficacia de la transferencia de energía de la fuerza impulsora al oscilador es mejor en la resonancia. En la Figura 15.33 se muestra la pasarela London Millennium que permite a los peatones cruzar el río Támesis en Londres. Este puente recibió el apodo de "wobbly bridge" (puente tambaleante) cuando los peatones experimentaban movimientos de vaivén al cruzarlo. El puente estuvo cerrado durante unos dos años para eliminar este movimiento.



FIGURA 15.33 Al principio, cuando la gente cruzaba la pasarela London Millennium experimentaba un movimiento de vaivén. El hecho de que las personas sigan cruzando reforzó la amplitud de la oscilación, lo que aumentó el problemático vaivén (créditos: Adrian Pingstone/Wikimedia Commons).

COMPRUEBE LO APRENDIDO 15.6

Un famoso truco de magia consiste en que un artista canta una nota hacia una copa de cristal hasta que esta se rompe. Explique por qué el truco funciona en términos de resonancia y frecuencia natural.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

amortiguado críticamente condición en la que la amortiguación de un oscilador hace que vuelva lo más rápidamente posible a su posición de equilibrio sin oscilar hacia adelante y hacia atrás en torno a esta posición

amplitud (*A*) desplazamiento máximo desde la posición de equilibrio de un objeto que oscila alrededor de la posición de equilibrio

constante de fuerza (*k*) característica de un resorte que se define como la relación entre la fuerza aplicada al resorte y el desplazamiento causado por la fuerza

deslizamiento de fase ángulo, en radianes, que se usa en una función coseno o seno para desplazar la función a la izquierda o a la derecha que se usa para hacer coincidir la función con las condiciones iniciales de los datos

energía potencial elástica energía potencial almacenada a consecuencia de la deformación de un objeto elástico, como el estiramiento de un resorte

frecuencia (*f*) número de eventos por unidad de tiempo

frecuencia angular natural frecuencia angular de un sistema que oscila en SHM

fuerza restauradora fuerza que actúa en oposición a la fuerza causada por una deformación

movimiento armónico simple (SHM) movimiento oscilatorio en un sistema en el que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento, el cual actúa en la dirección opuesta al desplazamiento

movimiento periódico movimiento que se repite a intervalos regulares de tiempo

oscilación fluctuación única de una cantidad, o fluctuaciones repetidas y regulares de una cantidad, entre dos valores extremos en torno a un equilibrio o valor medio

oscilador armónico simple un dispositivo que oscila en SHM donde la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento y actúa en la dirección opuesta al desplazamiento

péndulo de torsión cualquier objeto suspendido que oscile mediante la torsión de su suspensión

péndulo físico cualquier objeto extendido que se balancee como un péndulo

péndulo simple una masa puntual, llamada masa pendular, unida a una cuerda casi sin masa

periodo (*T*) tiempo que se tarda en completar una oscilación

posición de equilibrio posición en la que el resorte no se estira ni se comprime

punto de equilibrio estable punto en el que la fuerza neta sobre un sistema es cero, pero un pequeño desplazamiento de la masa provocará una fuerza restauradora que señala hacia el punto de equilibrio

resonancia oscilaciones de gran amplitud en un sistema producidas por una fuerza impulsora de pequeña amplitud, la cual tiene una frecuencia igual a la frecuencia natural

sobreamortiguado condición en la que la amortiguación de un oscilador hace que vuelva al equilibrio sin oscilar; el oscilador se mueve más lentamente hacia el equilibrio que en el sistema amortiguado críticamente

subamortiguado condición en la que la amortiguación de un oscilador hace que la amplitud de las oscilaciones de un oscilador armónico amortiguado disminuya con el tiempo, acercándose finalmente a cero

Ecuaciones Clave

Relación entre frecuencia y periodo	$f = \frac{1}{T}$
Posición en SHM con $\phi = 0{,}00$	$x(t) = A\cos(\omega t)$
Posición general en SHM	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
Velocidad general en SHM	$v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$
Aceleración general en SHM	$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Desplazamiento máximo (amplitud) del SHM	$x_{\text{máx.}} = A$
Velocidad máxima de SHM	$\lvert v_{\text{máx.}} \rvert = A\omega$
Aceleración máxima de SHM	$\lvert a_{\text{máx.}} \rvert = A\omega^2$
Frecuencia angular de un sistema masa-resorte en SHM	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Periodo de un sistema masa-resorte en SHM	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
Frecuencia de un sistema masa-resorte en SHM	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$
Energía en un sistema masa-resorte en SHM	$E_{\text{Total}} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$
La velocidad de la masa en un sistema resorte-masa en SHM	$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$
El componente x del radio de un disco giratorio	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
El componente x de la velocidad del borde de un disco giratorio	$v(t) = -v_{\text{máx.}}\,\text{sen}(\omega t + \phi)$
El componente x de la aceleración del borde de un disco giratorio	$a(t) = -a_{\text{máx.}}\cos(\omega t + \phi)$
Ecuación de fuerza para un péndulo simple	$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$
Frecuencia angular de un péndulo simple	$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$
Periodo de un péndulo simple	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
Frecuencia angular de un péndulo físico	$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$
Periodo de un péndulo físico	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$
Periodo de un péndulo de torsión	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$
Segunda ley de Newton para el movimiento armónico	$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
Solución para un movimiento armónico subamortiguado	$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$
Frecuencia angular natural de un sistema masa-resorte	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Frecuencia angular del movimiento armónico subamortiguado	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$
Segunda ley de Newton para una oscilación forzada y amortiguada	$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_o \operatorname{sen}(\omega t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$
Solución de la segunda ley de Newton para oscilaciones forzadas y amortiguadas	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
Amplitud del sistema que experimenta oscilaciones forzadas y amortiguadas	$A = \frac{F_o}{\sqrt{m^2\left(\omega^2 - \omega_o^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$

Resumen

15.1 Movimiento armónico simple

- El movimiento periódico es una oscilación que se repite. El tiempo de una oscilación es el periodo T y el número de oscilaciones por unidad de tiempo es la frecuencia f. Estas cantidades están relacionadas por $f = \frac{1}{T}$.
- El movimiento armónico simple (SHM) es un movimiento oscilatorio para un sistema en el que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento y actúa en la dirección opuesta al desplazamiento.
- El desplazamiento máximo es la amplitud A. La frecuencia angular ω, el periodo T y la frecuencia f de un oscilador armónico simple vienen dados por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, y $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, donde m es la masa del sistema y k es la constante de fuerza.
- El desplazamiento como una función de tiempo en SHM viene dado por $x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) = A\cos(\omega t + \phi)$.
- La velocidad viene dada por $v(t) = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -v_{\text{máx.}}\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, donde $v_{\text{máx.}} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$.
- La aceleración es $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -a_{\text{máx.}}\cos(\omega t + \phi)$, donde $a_{\text{máx.}} = A\omega^2 = A\frac{k}{m}$.

15.2 Energía en el movimiento armónico simple

- El tipo más sencillo de oscilaciones está relacionado con los sistemas que pueden describirse mediante la ley de Hooke, $F = -kx$, donde F es la fuerza restauradora, x es el desplazamiento desde el equilibrio o la deformación y k es la constante de fuerza del sistema.
- La energía potencial elástica U almacenada en la deformación de un sistema que se puede describir por la ley de Hooke viene dada por $U = \frac{1}{2}kx^2$.
- La energía en el oscilador armónico simple se reparte entre la energía potencial elástica y la energía cinética, siendo el total constante:
$$E_{\text{Total}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante}.$$
- La magnitud de la velocidad como una función de posición para el oscilador armónico simple se puede calcular mediante
$$|v| = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}.$$

15.3 Comparación de movimiento armónico simple y movimiento circular

- Una proyección de movimiento circular uniforme experimenta una oscilación armónica simple.
- Considere un círculo de radio A que se mueve con una velocidad angular constante ω. Un punto en el borde del círculo se mueve con una velocidad tangencial constante de $v_{\text{máx.}} = A\omega$. La proyección del radio sobre el eje x es $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, donde (ϕ) es el deslizamiento de fase. El componente x de la velocidad tangencial es $v(t) = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$.

15.4 Péndulos

- Una masa m suspendida por un cable de longitud L y masa insignificante es un péndulo simple y experimenta SHM para amplitudes inferiores a 15°. El periodo de un péndulo simple es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde L es la longitud de

la cuerda y g es la aceleración debido a la gravedad.

- El periodo de un péndulo físico $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$ se puede calcular si se conoce el momento de inercia. La longitud entre el punto de rotación y el centro de masa es L.
- El periodo de un péndulo de torsión $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$ se puede calcular si se conoce el momento de inercia y la constante de torsión.

15.5 Oscilaciones amortiguadas

- Los osciladores armónicos amortiguados tienen fuerzas no conservativas que disipan su energía.
- La amortiguación crítica devuelve el sistema al equilibrio lo más rápido posible sin sobrepasarlo.
- Un sistema subamortiguado oscilará a través de la posición de equilibrio.
- Un sistema sobreamortiguado se mueve más lentamente hacia el equilibrio que uno amortiguado críticamente.

15.6 Oscilaciones forzadas

- La frecuencia natural de un sistema es la frecuencia a la que el sistema oscila si no se ve afectado por fuerzas impulsoras o amortiguadoras.
- Una fuerza periódica que impulsa un oscilador armónico a su frecuencia natural produce resonancia. Se dice que el sistema resuena.
- Cuanto menos amortiguación tenga un sistema, mayor será la amplitud de las oscilaciones forzadas cerca de la resonancia. Cuanto más amortiguación tenga un sistema, más amplia será su respuesta a las distintas frecuencias de impulso.

Preguntas Conceptuales

15.1 Movimiento armónico simple

1. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que se produzca SHM?

2. (a) Si la frecuencia no es constante para alguna oscilación, ¿la oscilación puede ser SHM? (b) ¿Se le ocurre algún ejemplo de movimiento armónico en el que la frecuencia pueda depender de la amplitud?

3. Dé un ejemplo de un oscilador armónico simple, y señale específicamente cómo su frecuencia es independiente de la amplitud.

4. Explique por qué espera que un objeto hecho de un material rígido vibre a una frecuencia más alta que un objeto similar hecho de un material más flexible.

5. Cuando pasa por delante de un camión de carga con remolque en una autopista, observa que su remolque rebota lentamente hacia arriba y hacia abajo. ¿Es más probable que el remolque esté muy cargado o casi vacío? Explique su respuesta.

6. Algunas personas modifican los automóviles para que estén mucho más cerca del suelo que cuando se fabrican. ¿Deben instalar resortes más rígidos? Explique su respuesta.

15.2 Energía en el movimiento armónico simple

7. Describa un sistema en el que se almacena energía potencial elástica.

8. Explique en términos de energía cómo fuerzas disipativas, como la fricción, reducen la amplitud de un oscilador armónico. Explique también cómo puede compensar un mecanismo de conducción (un reloj de péndulo es un sistema de este tipo).

9. La temperatura de la atmósfera oscila entre un máximo cerca del mediodía y un mínimo cerca del amanecer. ¿Consideraría que la atmósfera está en equilibrio estable o inestable?

15.3 Comparación de movimiento armónico simple y movimiento circular

10. ¿Se puede llevar a cabo esta analogía de SHM con el movimiento circular de un objeto que oscile sobre un resorte colgado verticalmente del techo? ¿Por qué sí o por qué no? Si pudiera elegir, ¿preferiría utilizar una función seno o una función coseno para modelar el movimiento?

11. Si se aumenta la velocidad máxima de la masa unida a un resorte que oscila sobre una mesa sin fricción, ¿qué características del disco giratorio habría que modificar?

15.4 Péndulos

12. Los relojes de péndulo se hacen funcionar a la velocidad correcta al ajustar la longitud del péndulo. Suponga que usted se traslada de una ciudad a otra donde la aceleración debido a la gravedad es ligeramente mayor y lleva consigo su reloj de péndulo, ¿tendrá que alargar o

acortar el péndulo para mantener la hora correcta mientras los demás factores permanecen constantes? Explique su respuesta.

13. Un reloj de péndulo funciona al medir el periodo de un péndulo. En primavera, el reloj funciona con un tiempo perfecto, pero en verano e invierno la longitud del péndulo cambia. Cuando la mayoría de los materiales se calientan, se expanden. ¿El reloj va demasiado rápido o demasiado lento en verano? ¿Y en el invierno?

14. Mediante un deslizamiento de fase, la posición de un objeto se puede modelar como una función coseno o seno. Si le dieran la opción, ¿qué función elegiría? Suponiendo que el deslizamiento de fase es cero, ¿cuáles son las condiciones iniciales de la función, es decir, la posición, la velocidad y la aceleración iniciales, cuando se utiliza una función senoidal? ¿Y cuándo se utiliza una función coseno?

15.5 Oscilaciones amortiguadas

15. Dé un ejemplo de un oscilador armónico amortiguado (son más comunes que los osciladores no amortiguados o los osciladores armónicos simples).

16. ¿Cómo rebotaría un automóvil tras un golpe en cada una de estas condiciones?

(a) sobreamortiguación
(b) subamortiguación
c) amortiguación crítica

17. La mayoría de los osciladores armónicos están amortiguados y, si no son accionados, acaban por detenerse. ¿Por qué?

15.6 Oscilaciones forzadas

18. ¿Por qué se ordena a los soldados, en general, que den un "paso en ruta" (que se salgan del paso) al cruzar un puente?

19. ¿Cree que hay algún movimiento armónico en el mundo físico que no sea un movimiento armónico amortiguado? Intente hacer una lista de cinco ejemplos de movimiento armónico no amortiguado y de movimiento armónico amortiguado. ¿Qué lista fue más fácil de hacer?

20. Algunos ingenieros utilizan el sonido para diagnosticar problemas de desempeño de motores de automóviles. En ocasiones, se diseña una pieza del motor que resuena a la frecuencia de este. Las oscilaciones no deseadas pueden provocar ruidos que irriten al conductor o pueden hacer que la pieza falle prematuramente. En un caso, se localizó una pieza que tenía una longitud L hecha de un material con una masa M. ¿Qué se puede hacer para corregir este problema?

Problemas

15.1 Movimiento armónico simple

21. Demostrar que usando $x(t) = A\text{sen}(\omega t + \phi)$ dará los mismos resultados para el periodo de las oscilaciones de una masa y un resorte. ¿Por qué cree que se ha elegido la función coseno?

22. ¿Cuál es el periodo de 60,0 Hz de la potencia eléctrica?

23. Si su ritmo cardíaco es de 150 latidos por minuto durante un ejercicio extenuante, ¿cuál es el tiempo por latido en unidades de segundos?

24. Encuentre la frecuencia de un diapasón que toma $2{,}50 \times 10^{-3}$ s para completar una oscilación.

25. Un estroboscopio está configurado para parpadear cada $8{,}00 \times 10^{-5}$ s. ¿Cuál es la frecuencia de los destellos?

26. Un neumático tiene un dibujo de la banda de rodadura con una hendidura cada 2,00 cm. Cada hendidura hace una sola vibración cuando el neumático se mueve. ¿Cuál es la frecuencia de estas vibraciones si el vehículo se mueve a 30,0 m/s?

27. Cada pistón de un motor emite un sonido agudo cada dos revoluciones del motor. (a) ¿A qué velocidad va un auto de carreras si su motor de ocho cilindros emite un sonido de frecuencia 750 Hz, dado que el motor hace 2.000 revoluciones por kilómetro? (b) ¿A cuántas revoluciones por minuto gira el motor?

28. Un tipo de reloj cucú mantiene la hora gracias a una masa que rebota en un resorte, normalmente algo bonito como un querubín en una silla. ¿Qué constante de fuerza se necesita para producir un periodo de 0,500 s para una masa de 0,0150 kg?

29. Una masa m_0 se sujeta a un resorte y cuelga verticalmente. La masa se eleva una corta distancia en la dirección vertical y se suelta. La masa oscila con una frecuencia f_0. Si se sustituye la masa por otra nueve veces mayor y se repite el experimento, ¿cuál sería la frecuencia de las oscilaciones en términos de

f_0?

30. Una masa de 0,500 kg suspendida de un resorte oscila con un periodo de 1,50 s. ¿Qué masa hay que añadir al objeto para que el periodo pase a ser de 2,00 s?

31. ¿Qué margen de maniobra (tanto en porcentaje como en masa) tendría en la selección de la masa del objeto en el problema anterior si no quisiera que el nuevo periodo fuera mayor de 2,01 s ni menor de 1,99 s?

15.2 Energía en el movimiento armónico simple

32. Se cuelgan peces en un dinamómetro para determinar su masa. (a) ¿Cuál es la constante de fuerza del resorte en dicha balanza si este se estira 8,00 cm para una carga de 10,0 kg? (b) ¿Cuál es la masa de un pez que estira el resorte 5,50 cm? (c) ¿Qué distancia hay entre las marcas de medio kilogramo en la balanza?

33. Es la hora del pesaje del equipo local de rugby de menos de 85 kilos. La balanza de baño utilizada para evaluar la elegibilidad se puede describir mediante la ley de Hooke y baja 0,75 cm con su carga máxima de 120 kg. (a) ¿Cuál es la constante de fuerza efectiva del resorte? (b) Un jugador se coloca sobre la balanza y la baja 0,48 cm, ¿es elegible para jugar en este equipo de menos de 85 kilos?

34. Un tipo de pistola de balines utiliza un émbolo accionado por un resorte para expulsar los balines de su cañón. (a) Calcule la constante de fuerza del resorte de su émbolo si debe comprimirlo 0,150 m para que el émbolo de 0,0500 kg alcance una velocidad máxima de 20,0 m/s. (b) ¿Qué fuerza hay que ejercer para comprimir el resorte?

35. Cuando un hombre de 80,0 kg se sube a un palo saltarín, el resorte se comprime 0,120 m. (a) ¿Cuál es la constante de fuerza del resorte? (b) ¿Se comprimirá más el resorte cuando salte por la carretera?

36. Un resorte tiene una longitud de 0,200 m cuando cuelga de él una masa de 0,300 kg, y una longitud de 0,750 m cuando cuelga de él una masa de 1,95 kg. (a) ¿Cuál es la constante de fuerza del resorte? (b) ¿Cuál es la longitud sin carga del resorte?

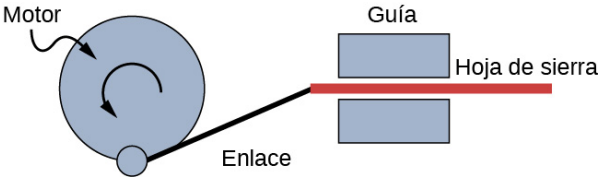
37. La longitud de la cuerda de nailon de la que está suspendido un alpinista tiene una constante de fuerza efectiva de $1{,}40 \times 10^4$ N/m. (a) ¿Cuál es la frecuencia con la que rebota, dado que su masa y la masa de su equipo suman 90,0 kg? (b) ¿Cuánto se estiraría esta cuerda para frenar la caída del escalador si cae en caída libre 2,00 m antes de que la cuerda se estire? *(Pista:* Utilice conservación de energía). (c) Repita las dos partes de este problema en la situación en la que se utiliza el doble de esta longitud de cuerda de nailon.

15.3 Comparación de movimiento armónico simple y movimiento circular

38. El movimiento de una masa sobre un resorte colgado verticalmente, en el que la masa oscila hacia arriba y hacia abajo, también se puede modelar con el disco giratorio. En vez de ubicar las luces horizontalmente a lo largo de la parte superior y apuntando hacia abajo, ubíquelas verticalmente y haga que brillen en el lado del disco giratorio. Se producirá una sombra en una pared cercana y se moverá hacia arriba y hacia abajo. Escriba las ecuaciones del movimiento de la sombra que toma la posición en $t = 0{,}0$ s para ser $y = 0{,}0$ m con la masa moviéndose en la dirección y positiva.

39. (a) Un reloj novedoso tiene un objeto de 0,0100 kg de masa que rebota sobre un resorte que tiene una constante de fuerza de 1,25 N/m. ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto si este rebota 3,00 cm por encima y por debajo de su posición de equilibrio? b) ¿Cuántos julios de energía cinética tiene el objeto a su velocidad máxima?

40. El movimiento basculante utiliza la rotación de un motor para producir un movimiento lineal hacia arriba y hacia abajo o hacia adelante y hacia atrás. Así es como funciona una sierra basculante, como se muestra a continuación.



Si el motor gira a 60 Hz y tiene un radio de 3,0 cm, calcule la velocidad máxima de la cuchilla de sierra cuando se mueve a la izquierda y a la derecha. Este diseño se conoce como yugo escocés.

41. Un estudiante se sitúa en el borde de un tiovivo que gira cinco veces por minuto y tiene un radio de dos metros una tarde mientras se pone el sol. El estudiante produce una sombra en el edificio cercano. (a) Escriba una ecuación para la posición de la sombra. (b) Escriba una ecuación para la velocidad de la sombra.

15.4 Péndulos

42. ¿Cuál es la longitud de un péndulo que tiene un periodo de 0,500 s?

43. Algunas personas piensan que un péndulo con un periodo de 1,00 s se puede impulsar con "energía mental" o psicocinética, ya que su periodo es el mismo que el de un latido de corazón promedio. Cierto o no, ¿cuál es la longitud de dicho péndulo?

44. ¿Cuál es el periodo de un péndulo de 1,00 m de longitud?

45. ¿Cuánto tiempo tarda un niño en un columpio en hacer un balanceo si su centro de gravedad está a 4,00 m por debajo del apoyo?

46. El péndulo de un reloj cucú mide 5,00 cm de largo. ¿Cuál es su frecuencia?

47. Dos periquitos se sientan en un columpio con sus CM combinados a 10,0 cm por debajo del apoyo. ¿A qué frecuencia se balancean?

48. a) Un péndulo que tiene un periodo de 3,00000 s y que está situado donde la aceleración debido a la gravedad es $9{,}79\ \text{m/s}^2$ se traslada a un lugar donde la aceleración debido a la gravedad es $9{,}82\ \text{m/s}^2$. ¿Cuál es su nuevo periodo? (b) Explique por qué se necesitan tantos dígitos en el valor del periodo, basándose en la relación entre el periodo y la aceleración debido a la gravedad.

49. Un péndulo con un periodo de 2,00000 s en un lugar ($g = 9{,}80\text{m/s}^2$) se traslada a una nueva ubicación donde el periodo es ahora de 1,99796 s. ¿Cuál es la aceleración debido a la gravedad en su nueva ubicación?

50. (a) ¿Cuál es el efecto en el periodo de un péndulo si duplicara su longitud? (b) ¿Cuál es el efecto en el periodo de un péndulo si disminuyera su longitud en un 5,00 %?

15.5 Oscilaciones amortiguadas

51. La amplitud de un oscilador ligeramente amortiguado disminuye en $3{,}0\%$ durante cada ciclo. ¿Qué porcentaje de la energía mecánica del oscilador se pierde en cada ciclo?

15.6 Oscilaciones forzadas

52. ¿Cuánta energía debe disipar el sistema de suspensión de un automóvil de 1.200 kg para amortiguar un rebote que inicialmente tiene una velocidad de 0,800 m/s en la posición de equilibrio? Suponga que el automóvil vuelve a su posición vertical original.

53. Si un automóvil tiene un sistema de suspensión con una constante de fuerza de $5{,}00 \times 10^4\ \text{N/m}$, ¿cuánta energía debe eliminar el sistema de suspensión del automóvil para amortiguar una oscilación que comienza con un desplazamiento máximo de 0,0750 m?

54. (a) ¿Cuánto se estirará un resorte que tiene una constante de fuerza de 40,0 N/m por un objeto con una masa de 0,500 kg cuando se cuelga inmóvil del resorte? (b) Calcule la disminución de la energía potencial gravitacional del objeto de 0,500 kg cuando desciende esta distancia. (c) Parte de esta energía gravitacional va al resorte. Calcule la energía almacenada en el resorte por este estiramiento y compárela con la energía potencial gravitacional. Explique a dónde puede ir el resto de la energía.

55. Suponga que tiene un objeto de 0,750 kg en una superficie horizontal conectado a un resorte que tiene una constante de fuerza de 150 N/m. Hay una fricción simple entre el objeto y la superficie con un coeficiente de fricción estática $\mu_\text{s} = 0{,}100$. (a) ¿Hasta dónde puede estirarse el resorte sin que se mueva la masa? (b) Si el objeto se pone en oscilación con una amplitud dos veces superior a la distancia hallada en la parte (a), y el coeficiente cinético de fricción es $\mu_\text{k} = 0{,}0850$, ¿qué distancia total recorre antes de detenerse? Suponga que comienza en la máxima amplitud.

Problemas Adicionales

56. Suponga que fijara un objeto de masa m a un resorte vertical originalmente en reposo y lo deja rebotar hacia arriba y hacia abajo. Usted suelta el objeto desde el reposo hasta la longitud de reposo original del resorte, la longitud del resorte en equilibrio, sin la masa unida. La amplitud del movimiento es la distancia entre la posición de equilibrio del resorte sin la masa unida y la posición de equilibrio del resorte con la masa unida. (a) Demuestre que el resorte ejerce una fuerza ascendente de $2{,}00mg$ sobre el objeto en su punto más bajo. (b) Si el resorte tiene una constante de fuerza de 10,0 N/m, está colgado horizontalmente y la posición del extremo libre del resorte está marcada como $y = 0{,}00\ \text{m}$, ¿dónde está la nueva posición de

equilibrio si se cuelga del resorte un objeto de 0,25 kg de masa? (c) Si el resorte tiene una constante de fuerza de 10,0 N/m y se pone en movimiento un objeto de 0,25 kg de masa como se ha descrito, calcule la amplitud de las oscilaciones. (d) Calcule la velocidad máxima.

57. Un buceador en un trampolín experimenta un SHM. Su masa es de 55,0 kg y el periodo de su movimiento es de 0,800 s. El siguiente buceador es un hombre cuyo periodo de oscilación armónica simple es de 1,05 s. ¿Cuál es su masa si la masa de la tabla es insignificante?

58. Suponga que un trampolín sin nadie encima rebota en un SHM con una frecuencia de 4,00 Hz. El trampolín tiene una masa efectiva de 10,0 kg. ¿Cuál es la frecuencia del SHM de un buceador de 75,0 kg en el trampolín?

59. El dispositivo que se muestra en la siguiente figura entretiene a los bebés al tiempo que evita que deambulen. El niño rebota en un arnés suspendido del marco de una puerta por un resorte. (a) Si el resorte se estira 0,250 m mientras soporta a un niño de 8,0 kg, ¿cuál es su constante de fuerza? (b) ¿Cuál es el tiempo para un rebote completo de este niño? (c) ¿Cuál es la velocidad máxima del niño si la amplitud de su rebote es de 0,200 m?



FIGURA 15.34 (créditos: Lisa Doehnert).

60. Se coloca una masa en una mesa horizontal sin fricción. Un resorte ($k = 100$ N/m), el cual se puede estirar o comprimir, se coloca en la mesa. Una masa de 5,00 kg está unida a un extremo del resorte y el otro extremo se ancla a la pared. La posición de equilibrio está marcada en cero. Un estudiante mueve la masa hacia afuera para $x = 4{,}00$cm y lo libera del reposo. La masa oscila en SHM. (a) Determine las ecuaciones del movimiento. (b) Calcule la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el tiempo $t = 3{,}00$ s.

61. Calcule la relación entre los periodos nuevo y viejo de un péndulo si este fuera transportado desde la Tierra hasta la Luna, donde la aceleración debido a la gravedad es $1{,}63\ \text{m/s}^2$.

62. ¿A qué velocidad funcionará un reloj de péndulo en la Luna, donde la aceleración debido a la gravedad es $1{,}63\ \text{m/s}^2$, si mantiene la hora con precisión en la Tierra? Es decir, hallar el tiempo (en horas) que tarda la aguja horaria del reloj en dar una vuelta a la Luna.

63. Si un reloj de péndulo gana 5,00 s/día, ¿qué cambio fraccionario en la longitud del péndulo se debe hacer para que mantenga la hora perfecta?

64. Un objeto de 2,00 kg cuelga, en reposo, de una cuerda de 1,00 m de longitud sujeta al techo. Una masa de 100 g se dispara con una velocidad de 20 m/s contra la masa de 2,00 kg, y la masa de 100,00 g colisiona perfectamente de forma elástica con la masa de 2,00 kg. Escriba una ecuación para el movimiento de la masa colgante después de la colisión. Suponga que la resistencia del aire es insignificante.

65. Un objeto de 2,00 kg cuelga, en reposo, de una cuerda de 1,00 m de longitud sujeta al techo. Un objeto de 100 g se dispara con una velocidad de 20 m/s contra el objeto de 2,00 kg, y los dos objetos chocan y se pegan en una colisión totalmente inelástica. Escriba una ecuación para el movimiento del sistema después de la colisión. Suponga que la resistencia del aire es insignificante.

66. Suponga que un péndulo utilizado para accionar un reloj de pie tiene una longitud $L_0 = 1{,}00$ m y una masa M a la temperatura $T = 20{,}00°\text{C}$. Se puede modelar como un péndulo físico, como una varilla que oscila alrededor de un extremo. ¿En qué porcentaje cambiará el periodo si la temperatura aumenta en 10°C? Suponga que la longitud de la varilla cambia linealmente con la temperatura, donde $L = L_0\,(1 + \alpha \Delta T)$ y la varilla es de latón $\left(\alpha = 18 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}\right)$.

67. Un bloque de 2,00 kg está en reposo sobre una mesa sin fricción. Un resorte, con una constante de resorte de 100 N/m, se fija a la pared y al bloque. Un segundo bloque de 0,50 kg se coloca encima del primer bloque. El bloque de 2,00 kg se hala suavemente hasta una posición $x = +A$ y se libera del reposo. Hay un coeficiente de

fricción de 0,45 entre los dos bloques. (a) ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones? (b) ¿Cuál es la mayor amplitud de movimiento que permitirá que los bloques oscilen sin que el bloque de 0,50 kg se deslice?

Problemas De Desafío

68. Un puente colgante oscila con una constante de fuerza efectiva de $1{,}00 \times 10^8$ N/m. (a) ¿Cuánta energía se necesita para hacerlo oscilar con una amplitud de 0,100 m? (b) Si los soldados marchan por el puente con una cadencia igual a la frecuencia natural del puente e imparten $1{,}00 \times 10^4$ J de energía cada segundo, ¿cuánto tiempo tardan las oscilaciones del puente en pasar de 0,100 m a 0,500 m de amplitud?

69. Cerca de la cima del edificio Citigroup Center en la ciudad de Nueva York hay un objeto con masa de $4{,}00 \times 10^5$ kg en resortes que tienen constantes de fuerza ajustables. Su función es amortiguar las oscilaciones del edificio provocadas por el viento mediante la oscilación a la misma frecuencia con la que se impulsa el edificio: la fuerza impulsora se transfiere al objeto, el cual oscila en vez de que lo haga todo el edificio. (a) ¿Qué constante de fuerza efectiva deben tener los resortes para que el objeto oscile con un periodo de 2,00 s? (b) ¿Qué energía se almacena en los resortes para un desplazamiento de 2,00 m desde el equilibrio?

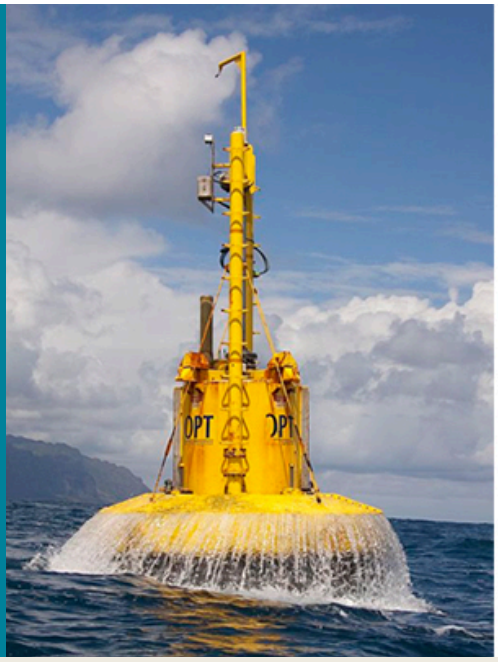
70. Las parcelas de aire (pequeños volúmenes de aire) en una atmósfera estable (en la que la temperatura aumenta con la altura) pueden oscilar hacia arriba y hacia abajo debido a la fuerza restauradora proporcionada por la flotabilidad de la parcela de aire. La frecuencia de las oscilaciones es una medida de la estabilidad de la atmósfera. Al asumir que la aceleración de una parcela de aire se puede modelar como $\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = \frac{g}{\rho_o}\frac{\partial \rho(z)}{\partial z} z'$, demuestre que $z' = z_0{}' e^{t\sqrt{-N^2}}$ es una solución, donde N se conoce como la frecuencia de Brunt-Väisälä. Observe que en una atmósfera estable la densidad disminuye con la altura y la parcela oscila hacia arriba y hacia abajo.

71. Considere el potencial de van der Waals $U(r) = U_o\left[\left(\frac{R_o}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_o}{r}\right)^6\right]$, utilizado para modelar la función de energía potencial de dos moléculas, donde el potencial mínimo está en $r = R_o$. Calcule la fuerza como una función de r. Considere un pequeño desplazamiento $r = R_o + r'$ y use el teorema del binomio: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$, para demostrar que la fuerza se aproxima a la ley de Hooke.

72. Suponga que la longitud del péndulo de un reloj se modifica en un 1,000 %, exactamente al mediodía de un día. ¿Qué hora marcará el reloj 24,00 horas más tarde, suponiendo que el péndulo haya mantenido la hora perfecta antes del cambio? Tenga en cuenta que hay dos respuestas, y haga el cálculo con una precisión de cuatro dígitos.

73. (a) Los resortes de una camioneta actúan como un solo resorte con una constante de fuerza de $1{,}30 \times 10^5$ N/m. ¿Cuánto bajará la camioneta con su carga máxima de 1.000 kg? (b) Si la camioneta tiene cuatro resortes idénticos, ¿cuál es la constante de fuerza de cada uno?

CAPÍTULO 16
Ondas



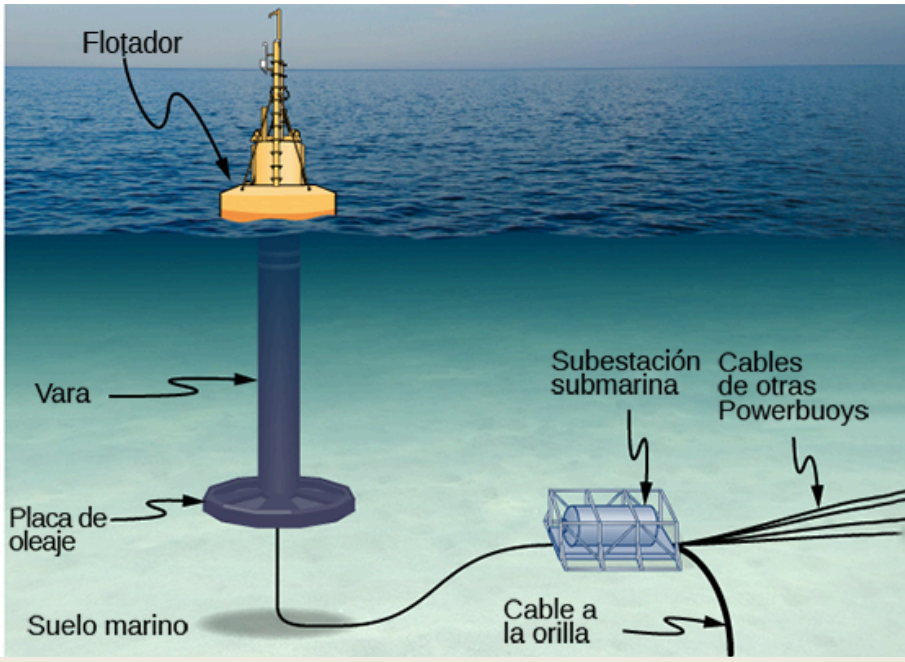


Figura 16.1 Del mundo de las energías renovables surge la boya generadora de potencia eléctrica. Aunque hay muchas versiones, esta convierte el movimiento hacia arriba y hacia abajo, así como el movimiento de un lado a otro, de la boya en movimiento de rotación para hacer girar un generador eléctrico, el cual almacena la energía en baterías.

ESQUEMA DEL CAPITULO

16.1 Ondas en desplazamiento
16.2 Matemáticas de las ondas
16.3 Rapidez de onda en una cuerda estirada
16.4 La energía y la potencia de una onda
16.5 Interferencia de ondas
16.6 Ondas estacionarias y resonancia

INTRODUCCIÓN En este capítulo estudiamos la física del movimiento de onda. Nos centramos en ondas mecánicas, las cuales son alteraciones que se desplazan por un medio como el aire o el agua. Al igual que el movimiento armónico simple estudiado en el capítulo anterior, la energía transferida a través del medio es proporcional a la amplitud al cuadrado. Las ondas superficiales en el océano son ondas transversales en las que la energía de la onda se desplaza horizontalmente mientras el agua oscila hacia arriba y hacia abajo debido a alguna fuerza restauradora. En la imagen de arriba, se utiliza una boya para convertir la impresionante potencia de las ondas del mar en electricidad. El movimiento hacia arriba y hacia abajo de la boya que se genera al paso de las ondas se convierte en un movimiento de rotación que hace girar un rotor en un generador eléctrico. El generador carga baterías, que a su vez se utilizan para proporcionar una fuente de energía constante al usuario final. Este modelo fue probado con éxito por la Armada de EE. UU. en un proyecto para suministrar energía a las redes de seguridad costera y fue capaz de proporcionar una potencia media de 350 W. La boya sobrevivió al difícil ambiente oceánico, incluida la operación frente a la costa de Nueva Jersey durante el huracán Irene en 2011.

Los conceptos presentados en este capítulo serán la base de muchos temas interesantes, desde la transmisión de información hasta los conceptos de mecánica cuántica.

16.1 Ondas en desplazamiento

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir las características básicas del movimiento ondulatorio.
- Definir los términos longitud de onda, amplitud, periodo, frecuencia y rapidez de onda.
- Explicar la diferencia entre las ondas longitudinales y transversales y dar ejemplos de cada tipo.
- Enumerar los diferentes tipos de ondas.

En la sección Oscilaciones vimos que el movimiento oscilatorio es un tipo importante de comportamiento que se puede usar para modelar un amplio rango de fenómenos físicos. El movimiento oscilatorio también es importante porque las oscilaciones pueden generar ondas, que tienen una importancia fundamental en la física. Muchos de los términos y ecuaciones que estudiamos en el capítulo sobre las oscilaciones se aplican igualmente al movimiento ondulatorio (Figura 16.2).



FIGURA 16.2 Una onda del océano es probablemente la primera imagen que le viene a la mente cuando escucha la palabra “onda”. Aunque esta onda rompiente, y las ondas oceánicas en general, tienen aparentes similitudes con las características básicas de las ondas que analizaremos, los mecanismos que impulsan las ondas oceánicas son muy complejos y están fuera del alcance de este capítulo. Puede parecer natural, e incluso ventajoso, aplicar los conceptos de este capítulo a las ondas del océano, pero las ondas del océano no son lineales y los modelos simples presentados en este capítulo no las explican completamente (créditos: Steve Jurvetson).

Tipos de ondas

Una **onda** es una alteración que se propaga o se mueve desde el lugar en que se creó. Hay tres tipos básicos de ondas: mecánicas, electromagnéticas y de materia.

Las **ondas mecánicas** básicas se rigen por las leyes de Newton y requieren un medio. Un medio es la sustancia por la que se propagan las ondas mecánicas, y el medio produce una fuerza restauradora elástica cuando se deforma. Las ondas mecánicas transfieren energía y momento, sin transferir masa. Algunos ejemplos de ondas mecánicas son las ondas acuáticas, las sonoras y las sísmicas. El medio para las ondas acuáticas es el agua; para las ondas sonoras, el medio suele ser el aire (las ondas sonoras también se pueden desplazar en otros medios; lo veremos con más detalle en la sección Sonido). En el caso de las ondas acuáticas superficiales,

la alteración se produce en la superficie del agua, quizás creada por una roca arrojada a un estanque o por un nadador que salpica la superficie repetidamente. En el caso de las ondas sonoras, la alteración es un cambio en la presión del aire, tal vez creado por el cono oscilante dentro de un altavoz o un diapasón que vibra. En ambos casos, la alteración es la oscilación de las moléculas del fluido. En las ondas mecánicas, la energía y el momento se transfieren con el movimiento de la onda, mientras que la masa oscila alrededor de un punto de equilibrio (hablamos de ello en la sección La energía y la potencia de una onda). Los terremotos generan ondas sísmicas a partir de varios tipos de alteraciones, como la de la superficie terrestre y las de presión que están debajo de la superficie. Las ondas sísmicas se desplazan a través de los sólidos y los líquidos que forman la Tierra. En este capítulo nos centramos en ondas mecánicas.

Las *ondas electromagnéticas* están asociadas a las oscilaciones de los campos eléctricos y magnéticos y no requieren un medio. Algunos ejemplos son rayos gama, rayos X, ondas ultravioletas, luz visible, ondas infrarrojas, microondas y ondas de radio. Las ondas electromagnéticas se pueden desplazar por el vacío a la velocidad de la luz, $v = c = 2{,}99792458 \times 10^8$ m/s. Por ejemplo, la luz de las estrellas lejanas se desplaza a través del vacío del espacio y llega a la Tierra. Las ondas electromagnéticas tienen algunas características similares a las ondas mecánicas; se tratan con más detalle en la sección Ondas electromagnéticas (http://openstax.org/books/university-physics-volume-2/pages/16-introduction).

Las ondas de materia son una parte central de la rama de la física conocida como mecánica cuántica. Estas ondas están asociadas a protones, electrones, neutrones y otras partículas fundamentales que se encuentran en la naturaleza. La teoría de que todos los tipos de materia tienen propiedades ondulatorias fue propuesta por primera vez por Louis de Broglie en 1924. Las ondas de materia se tratan en la sección Fotones y ondas de materia (http://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/6-introduction).

Ondas mecánicas

Las ondas mecánicas presentan características comunes a todas las ondas, como amplitud, longitud de onda, periodo, frecuencia y energía. Todas las características de las ondas se pueden describir mediante un pequeño conjunto de principios subyacentes.

Las ondas mecánicas más sencillas se repiten durante varios ciclos y están asociadas al movimiento armónico simple. Estas ondas armónicas simples se pueden modelar mediante alguna combinación de funciones seno y coseno. Por ejemplo, consideremos la onda acuática superficial simplificada que se mueve a través de la superficie del agua como se ilustra en la Figura 16.3. A diferencia de las ondas oceánicas complejas, en las ondas acuáticas superficiales el medio, en este caso el agua, se mueve verticalmente y oscila hacia arriba y hacia abajo, mientras que la alteración de la onda se mueve horizontalmente a través del medio. En la Figura 16.3, las ondas hacen que una gaviota se mueva hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple cuando las crestas y las depresiones de las ondas (picos y valles) pasan por debajo del ave. La cresta es el punto más alto de la onda y la depresión es la parte más baja. El tiempo de una oscilación completa del movimiento hacia arriba y hacia abajo es el periodo *(T)* de la onda. La frecuencia de la onda es el número de ondas que pasan por un punto por unidad de tiempo y es igual a $f = 1/T$. El periodo se puede expresar mediante cualquier unidad de tiempo conveniente, pero suele medirse en segundos; la frecuencia suele medirse en hercios (Hz), donde $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

La extensión de la onda se denomina **longitud de onda** y se representa con la letra griega lambda (λ), la cual se mide en cualquier unidad de longitud conveniente, como el centímetro o el metro. La longitud de onda se puede medir entre dos puntos similares cualesquiera a lo largo del medio que tengan la misma altura y la misma pendiente. En la Figura 16.3, se muestra la longitud de onda medida entre dos crestas. Como ya se ha dicho, el periodo de la onda es igual al tiempo de una oscilación, pero también es igual al tiempo de paso de una longitud de onda por un punto de la trayectoria de la onda.

La amplitud de la onda*(A)* es una medida del desplazamiento máximo del medio desde su posición de equilibrio. En la figura, la posición de equilibrio está indicada por la línea punteada, que es la altura del agua si no hubiera ondas en movimiento. En este caso, la onda es simétrica, la cresta de la onda está a una distancia $+A$ por encima de la posición de equilibrio, y la depresión es una distancia $-A$ por debajo de la posición de equilibrio. Las unidades de la amplitud pueden ser centímetros o metros, o cualquier unidad de distancia conveniente.

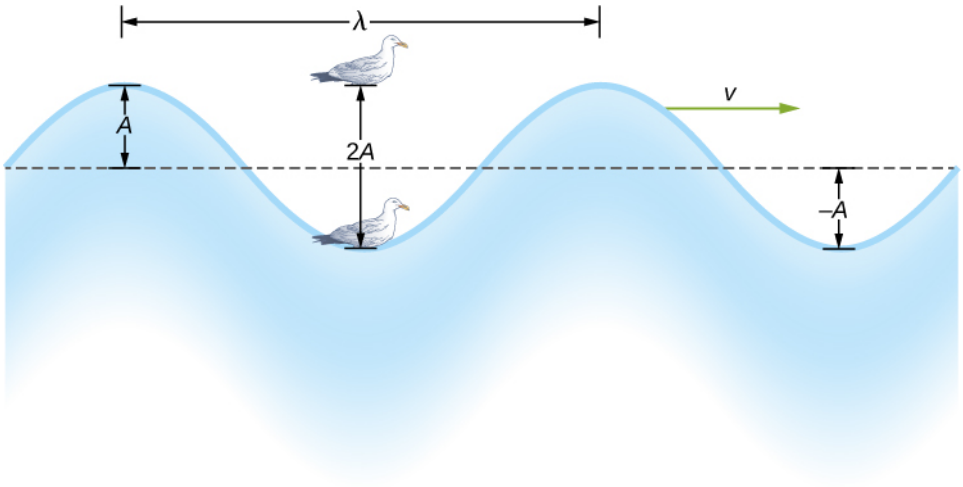


FIGURA 16.3 Una onda acuática superficial idealizada pasa por debajo de una gaviota que se balancea hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. La onda tiene una longitud de onda λ, lo cual es la distancia entre partes idénticas adyacentes de la onda. La amplitud *(A)* de la onda es el máximo desplazamiento de la onda desde la posición de equilibrio, lo cual se indica con la línea punteada. En este ejemplo, el medio se mueve hacia arriba y hacia abajo, mientras que la alteración de la superficie se propaga paralelamente a la superficie con una velocidad *v*.

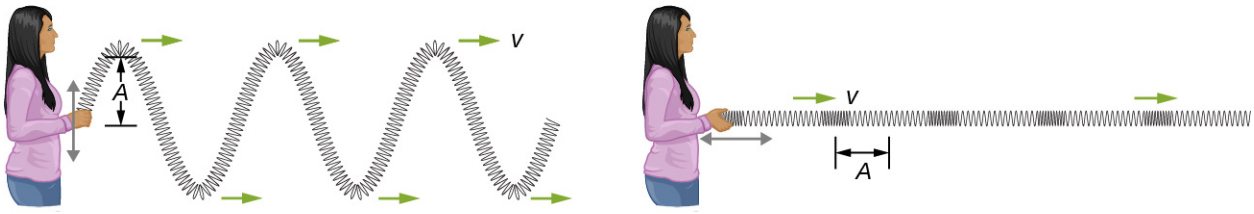
La onda acuática de la figura se mueve a través del medio con una velocidad de propagación $\vec{\mathbf{v}}$. La magnitud de la **velocidad de la onda** es la distancia que recorre la onda en un tiempo determinado, lo cual es una longitud de onda en el tiempo de un periodo, y la **rapidez de onda** es la magnitud de la velocidad de la onda. En forma de ecuación, esto es

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \qquad 16.1$$

Esta relación fundamental es válida para todos los tipos de ondas. Para las ondas acuáticas, *v* es la rapidez de una onda superficial; para el sonido, *v* es la velocidad del sonido; y para la luz visible, *v* es la velocidad de la luz.

Ondas transversales y longitudinales

Hemos visto que una onda mecánica simple consiste en una alteración periódica que se propaga de un lugar a otro a través de un medio. En la Figura 16.4(a), la onda se propaga en la dirección horizontal, mientras que el medio está alterado en la dirección vertical. Una onda de este tipo se denomina **onda transversal**. En una onda transversal, la onda puede propagarse en cualquier dirección, pero la alteración del medio es perpendicular a la dirección de propagación. En cambio, en una **onda longitudinal** o de compresión, la alteración es paralela a la dirección de propagación. La Figura 16.4(b) muestra un ejemplo de onda longitudinal. El tamaño de la alteración es su amplitud *(A)* y es completamente independiente de la velocidad de propagación *v*.



(a) Onda transversal (b) Onda longitudinal

FIGURA 16.4 (a) En una onda transversal, el medio oscila perpendicularmente a la velocidad de la onda. Aquí, el resorte se mueve verticalmente hacia arriba y hacia abajo, mientras que la onda se propaga horizontalmente hacia la derecha. (b) En una onda longitudinal, el medio oscila paralelamente a la propagación de la onda. En este caso, el

resorte oscila de un lado a otro, mientras que la onda se propaga hacia la derecha.

Una representación gráfica simple de una sección del resorte mostrado en la Figura 16.4 (b) se muestra en la Figura 16.5. La Figura 16.5(a) muestra la posición de equilibrio del resorte antes de que cualquier onda se mueva hacia abajo. Un punto del resorte está marcado con un punto azul. En la Figura 16.5 de la (b) a la (g) se muestran representaciones del resorte tomadas con un cuarto de periodo de diferencia, en algún momento después del final del resorte oscila de un lado a otro en la dirección x a una frecuencia constante. La alteración de la onda se ve como las compresiones y las expansiones del resorte. Note que el punto azul oscila alrededor de su posición de equilibrio una distancia A, ya que la onda longitudinal se mueve en la dirección x positiva con una velocidad constante. La distancia A es la amplitud de la onda. La posición y del punto no cambia a medida que la onda se desplaza por el resorte. Su longitud de onda se mide en la parte (d). La longitud de onda depende de la velocidad de la onda y de la frecuencia de la fuerza impulsora.

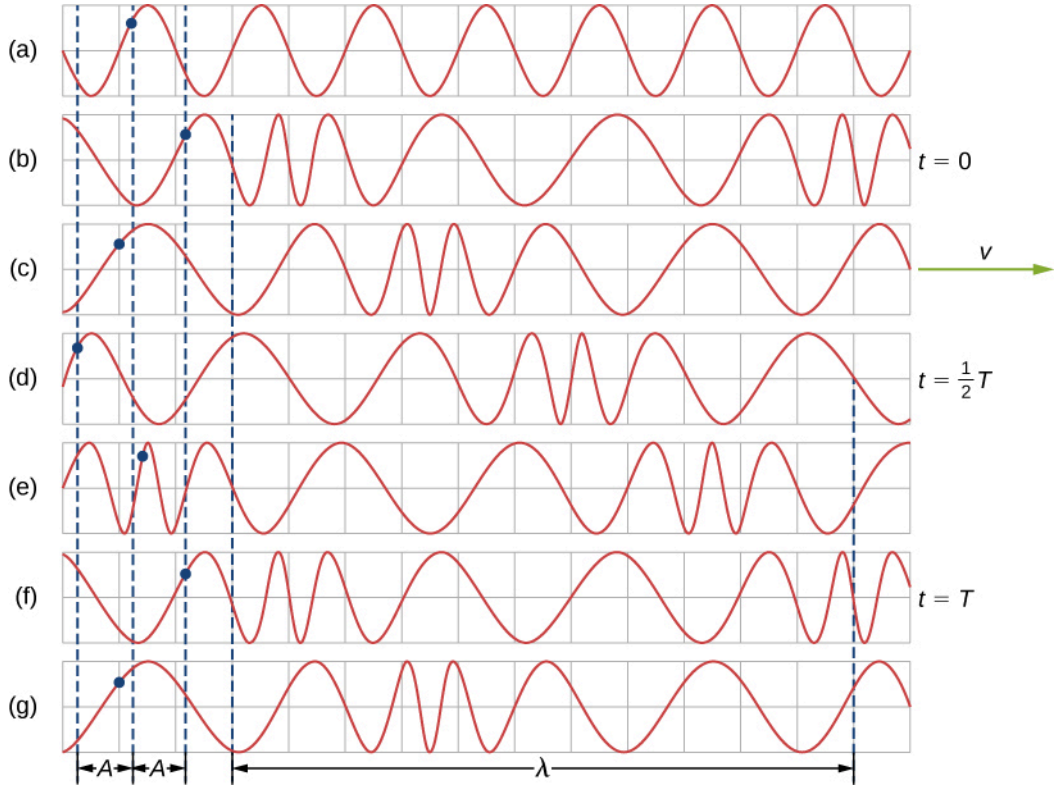


FIGURA 16.5 (a) Esta es una representación gráfica simple de una sección del resorte estirado que se muestra en la Figura 16.4 (b), que representa la posición de equilibrio del resorte antes de que se le induzcan ondas. Un punto del resorte está marcado con un punto azul (de la b a la g). Las ondas longitudinales se crean haciendo oscilar el extremo del resorte (no mostrado) de un lado a otro a lo largo del eje x. La onda longitudinal con una longitud de onda λ se mueve a lo largo del resorte en la dirección $+x$ con una rapidez de onda v. Por conveniencia, la longitud de onda se mide en (d). Observe que el punto del resorte marcado con el punto azul se mueve de un lado a otro a una distancia A desde la posición de equilibrio y oscila alrededor de la posición de equilibrio del punto.

Las ondas pueden ser transversales, longitudinales o una combinación de ambas. Ejemplos de ondas transversales son las ondas de los instrumentos de cuerda o las ondas superficiales del agua, como las ondulaciones que se mueven en un estanque. Las ondas sonoras en el aire y en el agua son longitudinales. En el caso de las ondas sonoras, las alteraciones son variaciones periódicas de presión que se transmiten en fluidos. Los fluidos no tienen una resistencia al corte apreciable, y por esto, las ondas sonoras en ellos son ondas longitudinales. El sonido en los sólidos puede tener componentes longitudinales y transversales, como los de una onda sísmica. Los terremotos generan ondas sísmicas debajo de la superficie terrestre con componentes longitudinales y transversales (denominadas ondas de compresión o P y ondas de corte o S, respectivamente). Los componentes de las ondas sísmicas tienen importantes características individuales: se propagan a diferentes velocidades, por ejemplo. Los terremotos también tienen ondas superficiales que son

similares a las ondas superficiales del agua. Las ondas oceánicas también tienen componentes transversales y longitudinales.

EJEMPLO 16.1

Onda en una cuerda

Un estudiante toma una cuerda de 30,00 m de longitud y fija un extremo a la pared del laboratorio de física. A continuación, el estudiante sujeta el extremo libre de la cuerda y la mantiene a tensión constante. A continuación, el estudiante comienza a enviar ondas por la cuerda moviendo el extremo hacia arriba y hacia abajo con una frecuencia de 2,00 Hz. El desplazamiento máximo del extremo de la cuerda es de 20,00 cm. La primera onda golpea la pared del laboratorio 6,00 s después de haberse creado. (a) ¿Cuál es la rapidez de la onda? (b) ¿Cuál es el periodo de la onda? (c) ¿Cuál es su longitud de onda?

Estrategia

a. La rapidez de la onda se puede obtener al dividir la distancia recorrida entre el tiempo.
b. El periodo de la onda es el inverso de la frecuencia de la fuerza impulsora.
c. La longitud de onda se puede calcular a partir de la velocidad y el periodo $v = \lambda/T$.

Solución

a. La primera onda recorrió 30,00 m en 6,00 s:

$$v = \frac{30{,}00\text{ m}}{6{,}00\text{ s}} = 5{,}00\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b. El periodo es igual al inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}00\text{ s}^{-1}} = 0{,}50\text{ s}.$$

c. La longitud de onda es igual a la velocidad por el periodo:

$$\lambda = vT = 5{,}00\frac{\text{m}}{\text{s}}(0{,}50\text{ s}) = 2{,}50\text{ m}.$$

Importancia

La frecuencia de la onda producida por una fuerza impulsora oscilante es igual a la frecuencia de la fuerza impulsora.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 16.1

Cuando se puntea una cuerda de guitarra, esta oscila como consecuencia de las ondas que se mueven a través de la cuerda. Las vibraciones de la cuerda hacen oscilar las moléculas de aire y forman ondas sonoras. La frecuencia de las ondas sonoras es igual a la frecuencia de la cuerda que vibra. ¿La longitud de onda de la onda sonora es siempre igual a la de las ondas de la cuerda?

EJEMPLO 16.2

Características de una onda

Una onda mecánica transversal se propaga en la dirección x positiva a través de un resorte (como se muestra en la Figura 16.4 (a)) con una rapidez de onda constante, y el medio oscila entre $+A$ y $-A$ en torno a una posición de equilibrio. El gráfico en la Figura 16.6 muestra la altura del resorte (y) versus la posición (x), donde el eje x señala la dirección de propagación. La figura muestra la altura del resorte versus la x en $t = 0{,}00$ s como una línea punteada y la onda en $t = 3{,}00$ s como una línea sólida. Suponga que la onda no ha recorrido más de 1 longitud de onda en este tiempo. (a) Determine la longitud de onda y la amplitud de la onda. (b) Calcule la velocidad de propagación de la onda. (c) Calcule el periodo y la frecuencia de la onda.

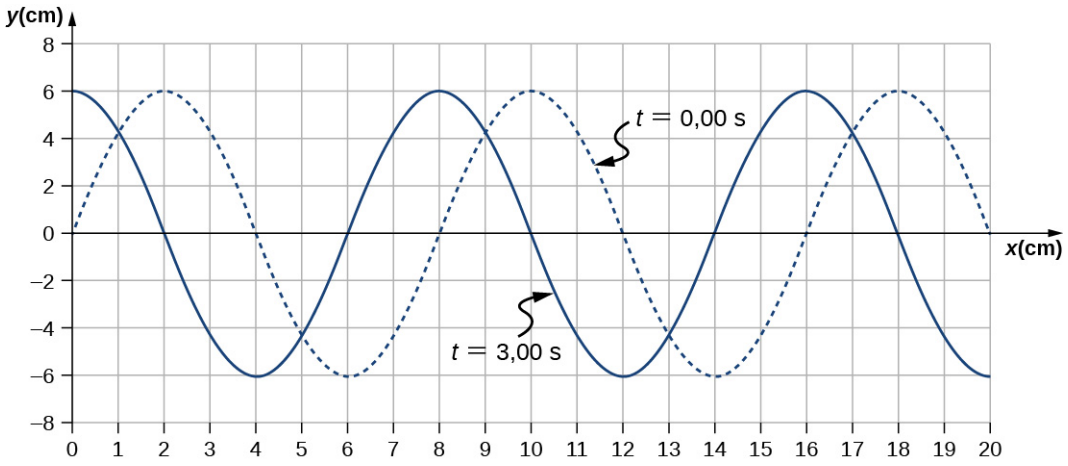


FIGURA 16.6 Una onda transversal mostrada en dos instantes distintos.

Estrategia

a. La amplitud y la longitud de onda se pueden determinar a partir del gráfico.
b. Dado que la velocidad es constante, la velocidad de la onda se puede hallar al dividir la distancia recorrida por la onda entre el tiempo que tardó la onda en recorrer la distancia.
c. El periodo se puede calcular a partir de $v = \frac{\lambda}{T}$ y la frecuencia de $f = \frac{1}{T}$.

Solución

a. Lea la longitud de onda del gráfico y mire la flecha púrpura en la Figura 16.7. Lea la amplitud y mire la flecha verde. La longitud de onda es $\lambda = 8{,}00$ cm y la amplitud es $A = 6{,}00$ cm.

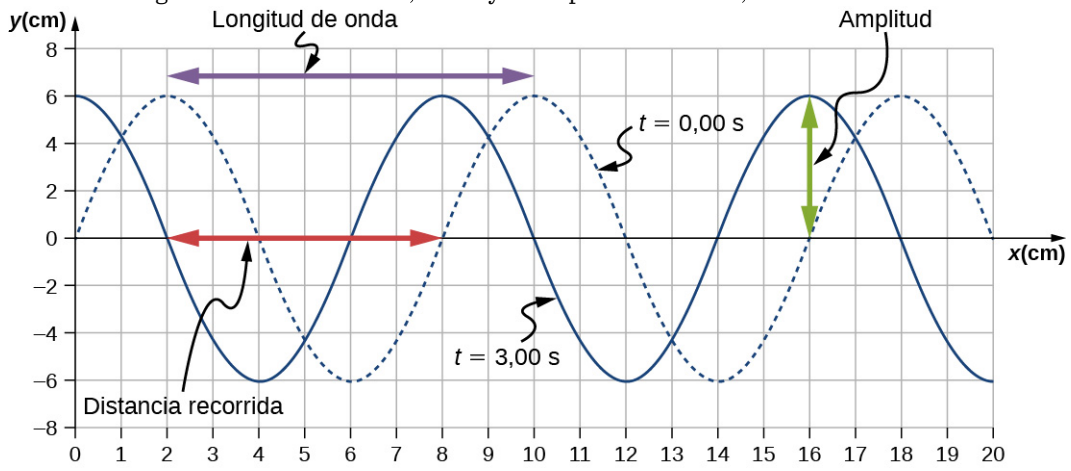


FIGURA 16.7 Características de la onda marcada en un gráfico de su desplazamiento.

b. La distancia que la onda se desplazó desde el tiempo $t = 0{,}00$ s hasta el tiempo $t = 3{,}00$ s que puede verse en el gráfico. Considere la flecha roja, la cual muestra la distancia que la cresta se ha movido en 3 s. La distancia es $8{,}00\text{ cm} - 2{,}00\text{ cm} = 6{,}00$ cm. La velocidad es

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8{,}00\text{ cm} - 2{,}00\text{ cm}}{3{,}00\text{ s} - 0{,}00\text{ s}} = 2{,}00\text{ cm/s}.$$

c. El periodo es $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{8{,}00\text{ cm}}{2{,}00\text{ cm/s}} = 4{,}00$ s y la frecuencia es $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4{,}00\text{ s}} = 0{,}25$ Hz.

Importancia

Observe que la longitud de onda se puede hallar mediante dos puntos sucesivos idénticos que se repitan, teniendo la misma altura y pendiente. Debe elegir dos puntos que sean los más convenientes. El desplazamiento también se puede calcular mediante cualquier punto conveniente.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 16.2

La velocidad de propagación de una onda mecánica transversal o longitudinal puede ser constante a medida que la alteración ondulatoria se desplaza a través del medio. Considere una onda mecánica transversal: ¿La velocidad del medio también es constante?

16.2 Matemáticas de las ondas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Modelar una onda, que se mueve con una velocidad de onda constante, con una expresión matemática.
- Calcular la velocidad y la aceleración del medio.
- Mostrar cómo la velocidad del medio difiere de la velocidad de la onda (velocidad de propagación).

En la sección anterior describimos ondas periódicas por sus características de longitud de onda, periodo, amplitud y rapidez de onda. Las ondas también se pueden describir mediante el movimiento de las partículas del medio por el que se mueven. La posición de las partículas del medio se puede modelar matemáticamente como **funciones de onda**, las cuales se pueden usar para calcular la posición, la velocidad y la aceleración de las partículas del medio de la onda en cualquier momento.

Pulsos

Un **pulso** se puede describir como una onda que consiste en una única alteración que se desplaza por el medio con una amplitud constante. El pulso se mueve como un patrón que mantiene su forma mientras se propaga con una rapidez de onda constante. Dado que la rapidez de onda es constante, la distancia que recorre el pulso en un tiempo Δt es igual a $\Delta x = v\Delta t$ (Figura 16.8).

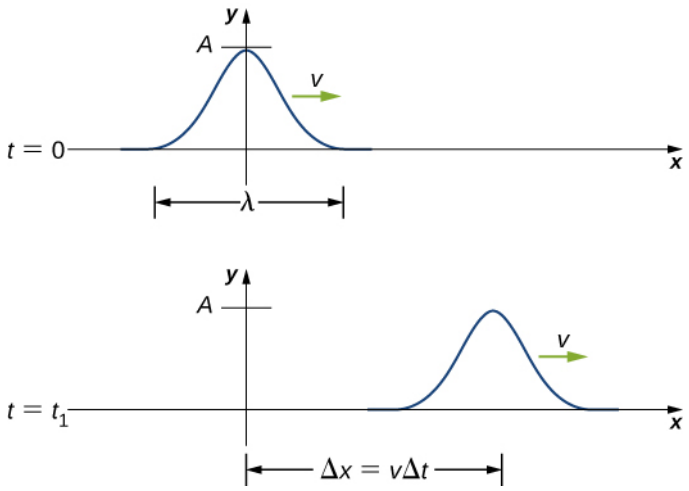


FIGURA 16.8 El pulso en el tiempo $t = 0$ que se centra en $x = 0$ con amplitud *(A)*. El pulso se mueve como un patrón con una forma constante, con un valor máximo constante *A*. La velocidad es constante y el pulso se mueve a una distancia $\Delta x = v\Delta t$ en un tiempo Δt. La distancia recorrida se mide con cualquier punto conveniente del pulso. En esta figura se usa la cresta.

Modelado de una onda sinusoidal unidimensional mediante una función de onda

Considere una cuerda que se mantiene a una tensión constante F_T donde un extremo está fijo y el extremo libre oscila entre $y = +A$ y $y = -A$ a través de un dispositivo mecánico a una frecuencia constante. La Figura 16.9 muestra representaciones de la onda a un intervalo de un octavo de periodo que comienza después de un periodo $(t = T)$.

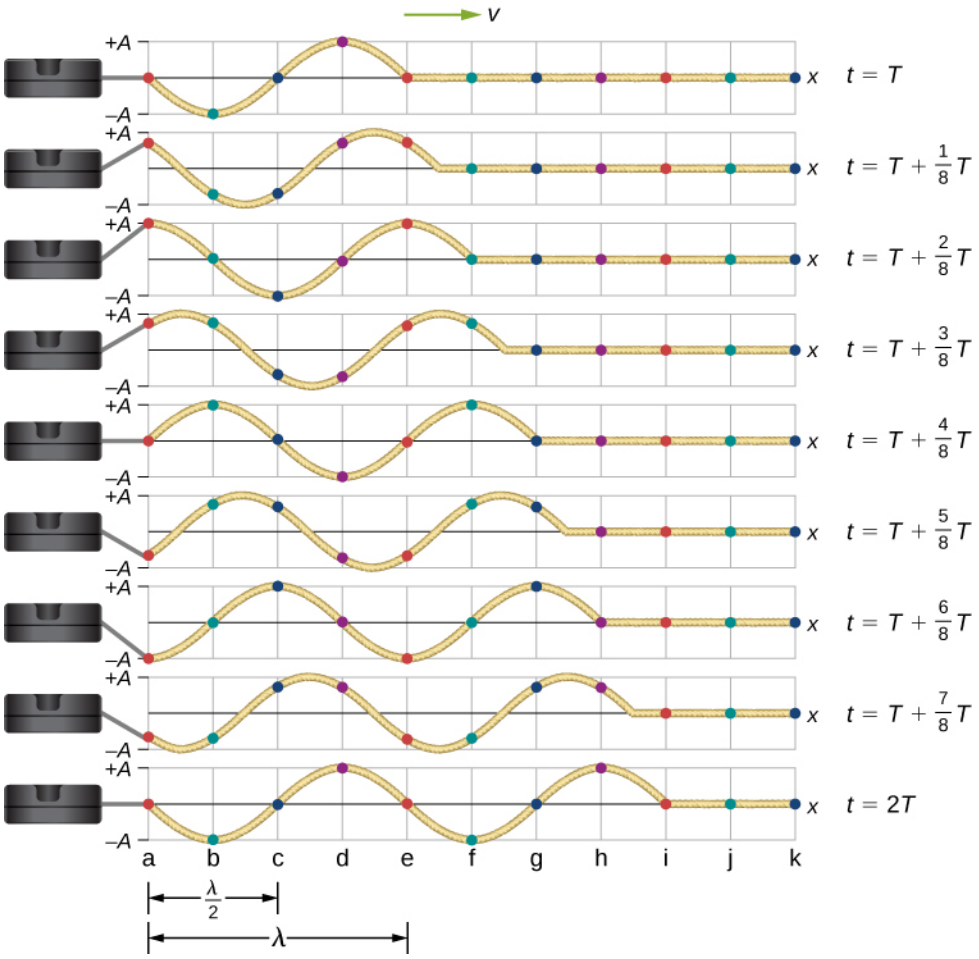


FIGURA 16.9 Representaciones de una onda transversal moviéndose a través de una cuerda bajo tensión, que comienza en el tiempo $t = T$ y se toma a intervalos de $\frac{1}{8}T$. Los puntos de color se utilizan para resaltar puntos en la cuerda. Los puntos que están a una longitud de onda de distancia en la dirección x se resaltan con puntos del mismo color.

Observe que cada punto seleccionado en la cuerda (marcado con puntos de color) oscila hacia arriba y hacia abajo en movimiento armónico simple, entre $y = +A$ y $y = -A$, con un periodo (T). La onda en la cuerda es sinusoidal y se traslada en la dirección x positiva a medida que avanza el tiempo.

En este punto, es útil que recuerde su estudio algebraico al indicar que si $f(x)$ es alguna función, entonces $f(x-d)$ es la misma función trasladada en la dirección x positiva una distancia d. La función $f(x+d)$ es la misma función trasladada en la dirección x negativa una distancia d. Queremos definir una función de onda que dé la posición y de cada segmento de la cuerda para cada posición x a lo largo de la cuerda para cada tiempo t.

Al observar la primera representación en la Figura 16.9, la posición y de la cuerda entre $x = 0$ y $x = \lambda$ se puede modelar como una función seno. Esta onda se propaga por la cuerda una longitud de onda en un periodo, como se ve en la última representación. Por lo tanto, la onda se mueve con una rapidez de onda constante de $v = \lambda/T$.

Recuerde que una función seno es una función del ángulo θ, que oscila entre $+1$ y -1, y se repite cada 2π radianes (Figura 16.10). Sin embargo, la posición y del medio, o la función de onda, oscila entre $+A$ y $-A$ y se repite cada longitud de onda λ.

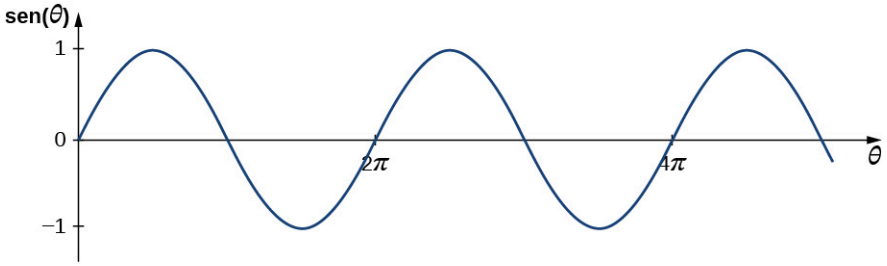


FIGURA 16.10 Una función seno oscila entre $+1$ y -1 cada 2π radianes.

Para construir nuestro modelo de la onda mediante una función periódica, consideremos la relación entre el ángulo y la posición,

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{x} &= \frac{2\pi}{\lambda}, \\ \theta &= \frac{2\pi}{\lambda}x. \end{aligned}$$

Al usar $\theta = \frac{2\pi}{\lambda}x$ y multiplicar la función seno por la amplitud *(A)*, ahora podemos modelar la posición y de la cuerda como una función de la posición x:

$$y(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

La onda en la cuerda se desplaza en la dirección x positiva con una velocidad constante v, y se mueve una distancia vt en un tiempo t. La función de onda puede definirse ahora mediante

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right).$$

A menudo, es conveniente reescribir esta función de onda de una forma más compacta. Al multiplicar mediante la relación $\frac{2\pi}{\lambda}$ conduce a la ecuación

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{\lambda}vt\right).$$

El valor $\frac{2\pi}{\lambda}$ se define como el **número de onda**. El símbolo del número de onda es k y tiene unidades de metros inversos, m^{-1} :

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \qquad 16.2$$

Recuerde que en la sección Oscilaciones vimos que la frecuencia angular se define como $\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$. El segundo término de la función de onda se convierte en

$$\frac{2\pi}{\lambda}vt = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{T}\right)t = \frac{2\pi}{T}t = \omega t.$$

La función de onda para una onda armónica simple en una cuerda se reduce a

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx \mp \omega t),$$

donde A es la amplitud, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular, el signo menos es para las ondas que se mueven en la dirección x positiva y el signo más es para las ondas que se mueven en la dirección x negativa. La velocidad de la onda es igual a

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{T}\left(\frac{2\pi}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k}. \qquad 16.3$$

Piense en nuestra discusión sobre una masa en un resorte, cuando la posición de la masa se modeló como

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. El ángulo ϕ es un deslizamiento de fase, añadido para tener en cuenta que la masa puede tener condiciones iniciales distintas de $x = +A$ y $v = 0$. Por motivos similares, la fase inicial se añade a la función de onda. La función de onda que modela una onda sinusoidal y permite un deslizamiento de fase inicial ϕ, es

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx \mp \omega t + \phi) \qquad \textbf{16.4}$$

El valor

$$(kx \mp \omega t + \phi) \qquad \textbf{16.5}$$

se conoce como la fase de la onda, donde ϕ es la fase inicial de la función de onda. Si el término temporal ωt es negativo o positivo depende de la dirección de la onda. En primer lugar, considere el signo menos para una onda con una fase inicial igual a cero ($\phi = 0$). La fase de la onda sería $(kx - \omega t)$. Considere la posibilidad de seguir un punto de una onda, como una cresta. Se producirá una cresta cuando sen $(kx - \omega t) = 1{,}00$, es decir, cuando $kx - \omega t = n\pi + \frac{\pi}{2}$, para cualquier valor integral de n. Por ejemplo, una cresta particular se produce en $kx - \omega t = \frac{\pi}{2}$. A medida que la onda se mueve, el tiempo aumenta y x también debe aumentar para mantener la fase igual a $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, el signo menos es para una onda que se mueve en la dirección x positiva. Al usar el signo más, $kx + \omega t = \frac{\pi}{2}$. Al aumentar el tiempo, x debe disminuir para mantener la fase igual a $\frac{\pi}{2}$. El signo más se utiliza para ondas que se mueven en la dirección x negativa. En resumen, $y(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$ modela una onda que se mueve en la dirección x positiva y $y(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx + \omega t + \phi)$ modela una onda que se mueve en la dirección x negativa.

La Ecuación 16.4 se conoce como función de onda armónica simple. Una función de onda es cualquier función tal que $f(x,t) = f(x - vt)$. Más adelante en este capítulo veremos que es una solución a la ecuación lineal de onda. Tenga en cuenta que $y(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \phi')$ funciona igualmente bien porque corresponde a un deslizamiento de fase diferente $\phi' = \phi - \frac{\pi}{2}$.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

calcular las características de una onda sinusoidal

1. Para calcular la amplitud, la longitud de onda, el periodo y la frecuencia de una onda sinusoidal, escriba la función de onda en la forma $y(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$.
2. La amplitud se puede leer directamente en la ecuación y es igual a A.
3. El periodo de la onda se puede derivar de la frecuencia angular $\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$.
4. La frecuencia se puede calcular mediante $f = \frac{1}{T}$.
5. La longitud de onda se puede calcular mediante el número de onda $\left(\lambda = \frac{2\pi}{k}\right)$.

EJEMPLO 16.3

Características de una onda que se desplaza en una cuerda

Una onda transversal en una cuerda estirada se modela con la función de onda

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t) = 0{,}2\text{ m}\,\text{sen}\left(6{,}28\text{ m}^{-1}x - 1{,}57\text{ s}^{-1}t\right).$$

Calcule la amplitud, la longitud de onda, el periodo y la velocidad de la onda.

Estrategia

Todas estas características de la onda se pueden calcular a partir de las constantes incluidas en la ecuación o de combinaciones simples de estas constantes.

Solución

1. La amplitud, el número de onda y la frecuencia angular se pueden leer directamente a partir de la ecuación de onda:

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t) = 0{,}2\ \text{m}\ \text{sen}\left(6{,}28\ \text{m}^{-1}x - 1{,}57\ \text{s}^{-1}t\right).$$

$$(A = 0{,}2\ \text{m};\ k = 6{,}28\ \text{m}^{-1};\ \omega = 1{,}57\ \text{s}^{-1})$$

2. El número de onda se puede usar para calcular la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6{,}28\ \text{m}^{-1}} = 1{,}0\ \text{m}.$$

3. El periodo de la onda se puede calcular mediante la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}57\ \text{s}^{-1}} = 4\ \text{s}.$$

4. La velocidad de la onda se puede calcular mediante el número de onda y la frecuencia angular. La dirección de la onda se puede determinar considerando el signo de $kx \mp \omega t$: Un signo negativo sugiere que la onda se mueve en la dirección x positiva:

$$|v| = \frac{\omega}{k} = \frac{1{,}57\ \text{s}^{-1}}{6{,}28\ \text{m}^{-1}} = 0{,}25\ \text{m/s}.$$

Importancia

Todas las características de la onda están contenidas en la función de onda. Observe que la rapidez de onda es la velocidad de la onda en la dirección paralela al movimiento de la onda. Trazado de la altura del medio y versus la posición x para dos tiempos $t = 0{,}00$ s y $t = 0{,}80$ s puede proporcionar una visualización gráfica de la onda (Figura 16.11).

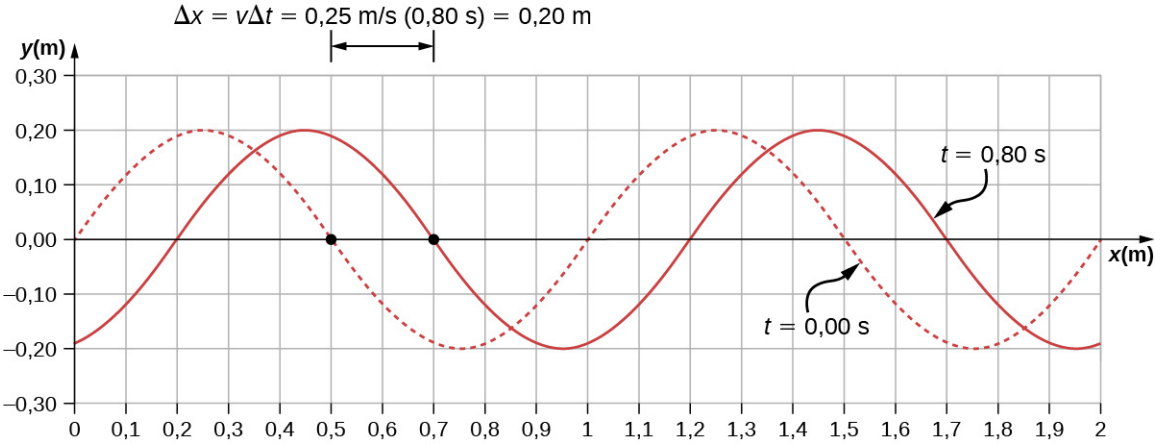


FIGURA 16.11 Gráfico de la altura de la onda y como función de posición x para representaciones de la onda en dos tiempos. La línea punteada representa la onda en el tiempo $t = 0{,}00$ s y la línea continua representa la onda en $t = 0{,}80$ s. Como la velocidad de la onda es constante, la distancia que recorre la onda es la velocidad de la onda por el intervalo de tiempo. Los puntos negros indican los puntos utilizados para medir el desplazamiento de la onda. El medio se mueve hacia arriba y hacia abajo, mientras que la onda se mueve hacia la derecha.

Hay una segunda velocidad en el movimiento. En este ejemplo, la onda es transversal, se mueve horizontalmente mientras el medio oscila hacia arriba y hacia abajo perpendicularmente a la dirección del movimiento. El gráfico en la Figura 16.12 muestra el movimiento del medio en el punto $x = 0{,}60$ m como una

función de tiempo. Observe que el medio de la onda oscila hacia arriba y hacia abajo entre $y = +0{,}20$ m y $y = -0{,}20$ m cada periodo de 4,0 segundos.

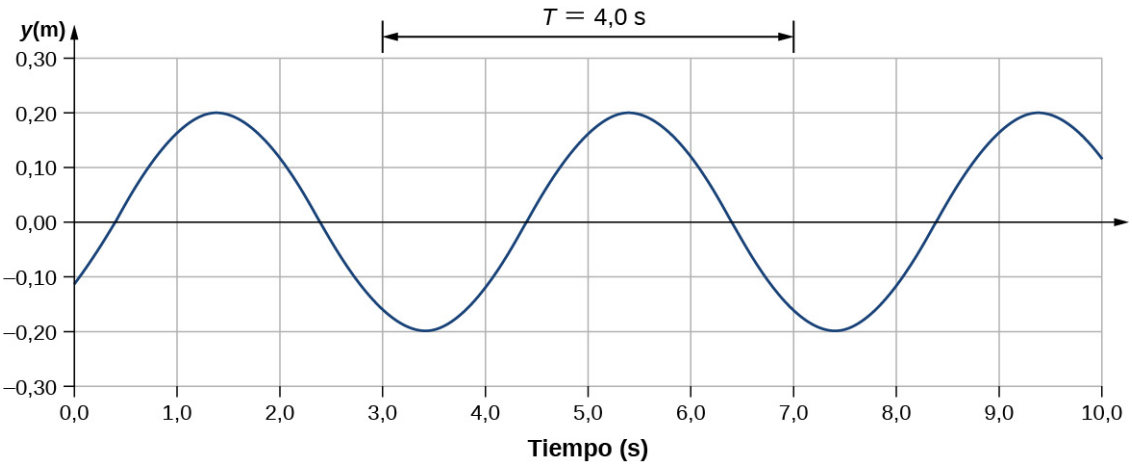


FIGURA 16.12 Un gráfico de la altura de la onda *y* como una función de tiempo *t* para la posición $x = 0{,}6$ m. El medio oscila entre $y = +0{,}20$ m y $y = -0{,}20$ m cada periodo. El periodo representado escoge dos puntos convenientes en las oscilaciones para medir el periodo. El periodo se puede medir entre dos puntos adyacentes cualesquiera con la misma amplitud y la misma velocidad, $(\partial y/\partial t)$. La velocidad se puede calcular al mirar la pendiente tangente al punto en un trazado *y* versus *t*. Observe que, a veces, $t = 3{,}00\ s$ y $t = 7{,}00s$, las alturas y las velocidades son las mismas y el periodo de la oscilación es de 4,00 s.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 16.3

La función de onda anterior se deriva mediante una función seno. ¿Se puede usar una función coseno en su lugar?

Velocidad y aceleración del medio

Como se ve en el Ejemplo 16.4, la rapidez de onda es constante y representa la velocidad de la onda al propagarse por el medio, no la velocidad de las partículas que lo componen. Las partículas del medio oscilan en torno a una posición de equilibrio a medida que la onda se propaga por el medio. En el caso de la onda transversal que se propaga en la dirección *x*, las partículas oscilan hacia arriba y hacia abajo en la dirección *y*, perpendicular al movimiento de la onda. La velocidad de las partículas del medio no es constante, lo que significa que hay una aceleración. La velocidad del medio, la cual es perpendicular a la velocidad de la onda en una onda transversal, se puede calcular mediante la derivada parcial de la ecuación de posición con respecto al tiempo. La derivada parcial se calcula con la derivada de la función, y se tratan todas las variables como constantes, excepto la variable en cuestión. En el caso de la derivada parcial con respecto al tiempo *t*, la posición *x* se trata como una constante. Aunque esto puede sonar extraño si no lo ha visto antes, el objetivo de este ejercicio es calcular la velocidad transversal en un punto, así que en este sentido la posición *x* no está cambiando. Tenemos

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\,\text{sen}(kx - \omega t + \phi) \\ v_y(x,t) &= \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\,\text{sen}(kx - \omega t + \phi)\right) \\ &= -A\omega\cos(kx - \omega t + \phi) \\ &= -v_{y\,\text{máx.}}\cos(kx - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

La magnitud de la velocidad máxima del medio es $\left|v_{y_{\text{máx.}}}\right| = A\omega$. Esto puede parecer familiar por lo visto en la sección Oscilaciones y el ejemplo de una masa sobre un resorte.

Podemos calcular la aceleración del medio al tomar la derivada parcial de la ecuación de la velocidad con

respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} a_y(x,t) &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-A\omega\cos\left(kx-\omega t+\phi\right)\right) \\ &= -A\omega^2\,\text{sen}\left(kx-\omega t+\phi\right) \\ &= -a_{y\,\text{máx.}}\,\text{sen}\left(kx-\omega t+\phi\right). \end{aligned}$$

La magnitud de la aceleración máxima es $\left|a_{y_{\text{máx.}}}\right| = A\omega^2$. Las partículas del medio, o los elementos de masa, oscilan en movimiento armónico simple para una onda mecánica.

Ecuación lineal de onda

Acabamos de determinar la velocidad del medio en una posición x tomando la derivada parcial, con respecto al tiempo, de la posición y. Para una onda transversal, esta velocidad es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Calculamos la aceleración tomando la derivada parcial, con respecto al tiempo, de la velocidad, la cual es la segunda derivada temporal de la posición:

$$a_y(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\,\text{sen}\left(kx-\omega t+\phi\right)\right) = -A\omega^2\,\text{sen}\left(kx-\omega t+\phi\right).$$

Considere ahora las derivadas parciales con respecto a la otra variable, la posición x, y mantenga el tiempo constante. La primera derivada es la pendiente de la onda en un punto x en un tiempo t,

$$\text{pendiente} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\,\text{sen}\left(kx-\omega t+\phi\right)\right) = Ak\cos\left(kx-\omega t+\phi\right).$$

La segunda derivada parcial expresa cómo cambia la pendiente de la onda con respecto a la posición, es decir, la curvatura de la onda, donde

$$\text{curvatura} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\,\text{sen}\left(kx-\omega t+\phi\right)\right) = -Ak^2\,\text{sen}\left(kx-\omega t+\phi\right).$$

La relación entre la aceleración y la curvatura conduce a una relación muy importante en física conocida como **ecuación lineal de onda**. Al tomar el cociente y mediante la ecuación $v = \omega/k$ se obtiene la ecuación lineal de onda (también conocida, simplemente, como ecuación de onda o ecuación de una cuerda vibrante),

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}} &= \frac{-A\omega^2\,\text{sen}(kx-\omega t+\phi)}{-Ak^2\,\text{sen}(kx-\omega t+\phi)} \\ &= \frac{\omega^2}{k^2} = v^2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}. \qquad 16.6$$

La Ecuación 16.6 es la ecuación lineal de onda, que es una de las ecuaciones más importantes de la física y la ingeniería. Lo derivamos aquí para una onda transversal, pero es igualmente importante cuando se investigan ondas longitudinales. Esta relación también se derivó mediante una onda sinusoidal, pero describe con éxito cualquier onda o pulso que tenga la forma $y(x,t) = f(x \mp vt)$. Estas ondas resultan debido a una fuerza restauradora lineal del medio, de ahí el nombre de ecuación lineal de onda. Cualquier función de onda que satisfaga esta ecuación es una función de onda lineal.

Un aspecto interesante de la ecuación lineal de onda es que si dos funciones de onda son soluciones individuales de la ecuación lineal de onda, entonces la suma de las dos funciones de onda lineal es también una solución de la ecuación de onda. Considere dos ondas transversales que se propagan a lo largo del eje x, y ocupan el mismo medio. Suponga que las ondas individuales se pueden modelar con las funciones de onda $y_1(x,t) = f(x \mp vt)$ y $y_2(x,t) = g(x \mp vt)$, que son soluciones a las ecuaciones lineales de onda y, por tanto, son funciones de onda lineales. La suma de las funciones de onda es la función de onda

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = f(x \mp vt) + g(x \mp vt).$$

Considere la ecuación lineal de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (f+g)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (f+g)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right]. \end{aligned}$$

Esto ha demostrado que si se suman algebraicamente dos funciones de onda lineales, la función de onda resultante también es lineal. Esta función de onda modela el desplazamiento del medio de la onda resultante en cada posición a lo largo del eje x. Si dos ondas lineales ocupan el mismo medio, se dice que interfieren. Si estas ondas se pueden modelar con una función de onda lineal, estas funciones de onda se suman para formar la ecuación de onda de la onda resultante de la interferencia de las ondas individuales. El desplazamiento del medio en cada punto de la onda resultante es la suma algebraica de los desplazamientos debido a las ondas individuales.

Al llevar este análisis un paso más allá si las funciones de onda $y_1(x,t) = f(x \mp vt)$ y $y_2(x,t) = g(x \mp vt)$ son soluciones de la ecuación lineal de onda, entonces $Ay_1(x,t) + By_2(x,t)$, donde A y B son constantes, es también una solución a la ecuación lineal de onda. Esta propiedad se conoce como el principio de superposición. La interferencia y la superposición se tratan con más detalle en la sección Interferencia de ondas.

EJEMPLO 16.4

Interferencia de ondas en una cuerda

Considere que hay dos estudiantes que sostienen una cuerda muy larga estirada; cada uno sostiene un extremo. El estudiante A hace oscilar el extremo de la cuerda y se produce una onda modelada con la función de onda $y_1(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$ y el estudiante B hace oscilar la cuerda y se produce el doble de la frecuencia, lo que hace que se mueva en dirección opuesta. Ambas ondas se mueven a la misma velocidad $v = \frac{\omega}{k}$. Las dos ondas interfieren para formar una onda resultante cuya función de onda es $y_R(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$. Calcule la velocidad de la onda resultante mediante la ecuación lineal de onda $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$.

Estrategia

Primero, escriba la función de onda para la onda creada por el segundo estudiante. Observe que la frecuencia angular de la segunda onda es el doble de la frecuencia de la primera onda (2ω), y como la velocidad de las dos ondas es la misma, el número de onda de la segunda onda es el doble que el de la primera $(2k)$. A continuación, escriba la ecuación de onda para la función de onda resultante, que es la suma de las dos funciones de onda individuales. A continuación, calcule la segunda derivada parcial con respecto a la posición y la segunda derivada parcial con respecto al tiempo. Use la ecuación lineal de onda para calcular la velocidad de la onda resultante.

Solución

1. Escriba la función de onda de la segunda onda: $y_2(x,t) = A\,\text{sen}(2kx + 2\omega t)$.
2. Escriba la función de onda resultante:
$$y_R(x,t) = y_1(x,t) + y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t) + A\,\text{sen}(2kx + 2\omega t).$$
3. Calcule las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_R(x,t)}{\partial x} &= -Ak\cos(kx-\omega t)+2Ak\cos(2kx+2\omega t),\\
\frac{\partial^2 y_R(x,t)}{\partial x^2} &= -Ak^2\,\text{sen}\,(kx-\omega t)-4Ak^2\,\text{sen}\,(2kx+2\omega t),\\
\frac{\partial y_R(x,t)}{\partial t} &= -A\omega\cos(kx-\omega t)+2A\omega\cos(2kx+2\omega t),\\
\frac{\partial^2 y_R(x,t)}{\partial t^2} &= -A\omega^2\,\text{sen}\,(kx-\omega t)-4A\omega^2\,\text{sen}\,(2kx+2\omega t).
\end{aligned}$$

4. Use la ecuación de onda para calcular la velocidad de la onda resultante:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},\\
-Ak^2\,\text{sen}\,(kx-\omega t)-4Ak^2\,\text{sen}\,(2kx+2\omega t) &= \frac{1}{v^2}\left(-A\omega^2\,\text{sen}\,(kx-\omega t)-4A\omega^2\,\text{sen}\,(2kx+2\omega t)\right),\\
k^2\left(-A\,\text{sen}\,(kx-\omega t)-4A\,\text{sen}\,(2kx+2\omega t)\right) &= \frac{\omega^2}{v^2}\left(-A\,\text{sen}\,(kx-\omega t)-4A\,\text{sen}\,(2kx+2\omega t)\right),\\
k^2 &= \frac{\omega^2}{v^2},\ |v|=\frac{\omega}{k}.
\end{aligned}$$

Importancia

La velocidad de la onda resultante es igual a la velocidad de las ondas originales $\left(v=\frac{\omega}{k}\right)$. En la siguiente sección mostraremos que la velocidad de una onda armónica simple en una cuerda depende de la tensión en la cuerda y de la masa por longitud de la cuerda. Por ello, no es de extrañar que tanto las ondas componentes como la resultante se desplacen a la misma velocidad.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 16.4

La ecuación de onda $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ funciona para cualquier onda de la forma $y(x,t)=f(x\mp vt)$. En la sección anterior afirmamos que una función coseno también se podría usar para modelar una onda mecánica armónica simple. Compruebe si la onda

$$y(x,t)=0{,}50\text{ m}\cos\left(0{,}20\pi\text{ m}^{-1}x-4{,}00\pi\text{ s}^{-1}t+\frac{\pi}{10}\right)$$

es una solución de la ecuación de onda.

Cualquier alteración que cumpla con la ecuación de onda se puede propagar como una onda que se mueve a lo largo del eje x con una rapidez de onda v. Funciona igualmente bien para ondas en una cuerda, ondas sonoras y ondas electromagnéticas. Esta ecuación es extremadamente útil. Por ejemplo, se puede usar para demostrar que las ondas electromagnéticas se mueven a la velocidad de la luz.

16.3 Rapidez de onda en una cuerda estirada

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Determinar los factores que afectan la velocidad de una onda en una cuerda.
- Escribir una expresión matemática para la velocidad de una onda en una cuerda y generalizar estos conceptos para otros medios.

La velocidad de una onda depende de las características del medio. Por ejemplo, en el caso de una guitarra, las cuerdas vibran para producir el sonido. La velocidad de las ondas en las cuerdas y la longitud de onda determinan la frecuencia del sonido producido. Las cuerdas de una guitarra tienen un grosor diferente pero pueden estar hechas de un material similar. Tienen diferentes *densidades lineales*, donde la densidad lineal se define como la masa por longitud,

$$\mu = \frac{\text{masa de la cuerda}}{\text{longitud de la cuerda}} = \frac{m}{l}. \qquad 16.7$$

En este capítulo solo consideramos la cuerda con una densidad lineal constante. Si la densidad lineal es constante, entonces la masa (Δm) de un pequeño trozo de cuerda (Δx) es $\Delta m = \mu \Delta x$. Por ejemplo, si la cuerda tiene una longitud de 2,00 m y una masa de 0,06 kg, entonces la densidad lineal es $\mu = \frac{0{,}06\ \text{kg}}{2{,}00\ \text{m}} = 0{,}03 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$. Si se corta una sección de 1,00 mm de la cuerda, la masa de la longitud de 1,00 mm es $\Delta m = \mu \Delta x = \left(0{,}03 \frac{\text{kg}}{\text{m}}\right) 0{,}001\ \text{m} = 3{,}00 \times 10^{-5}\ \text{kg}$. La guitarra también tiene un método para cambiar la tensión de las cuerdas. La tensión de las cuerdas se ajusta girando unos husillos, llamados clavijas de afinación, alrededor de los cuales se enrollan las cuerdas. En el caso de la guitarra, la densidad lineal de la cuerda y su tensión determinan la velocidad de las ondas en la cuerda, y la frecuencia del sonido producido es proporcional a la rapidez de onda.

Rapidez de onda en una cuerda bajo tensión

Para ver cómo la velocidad de una onda en una cuerda depende de la tensión y a la densidad lineal, considere un pulso enviado por una cuerda estirada (Figura 16.13). Cuando la cuerda estirada está en reposo en la posición de equilibrio, la tensión de la cuerda F_T es constante. Considere un pequeño elemento de la cuerda con una masa igual a $\Delta m = \mu \Delta x$. El elemento de masa está en reposo y en equilibrio y la fuerza de tensión de cada lado del elemento de masa es igual y opuesta.

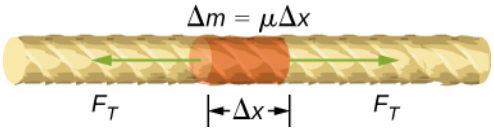


FIGURA 16.13 Elemento de masa de una cuerda que se mantiene estirada con una tensión F_T. El elemento de masa está en equilibrio estático, y la fuerza de tensión que actúa en cada lado del elemento de masa es igual en magnitud y opuesta en dirección.

Si se puntea una cuerda bajo tensión, una onda transversal se mueve en la dirección *x* positiva, como se muestra en la Figura 16.14. El elemento de masa es pequeño, pero se ha ampliado en la figura para hacerlo visible. El elemento de masa pequeño oscila perpendicularmente al movimiento de la onda como consecuencia de la fuerza restauradora proporcionada por la cuerda y no se mueve en la dirección *x*. La tensión F_T en la cuerda, que actúa en la dirección *x* positiva y negativa, es aproximadamente constante y es independiente de la posición y el tiempo.

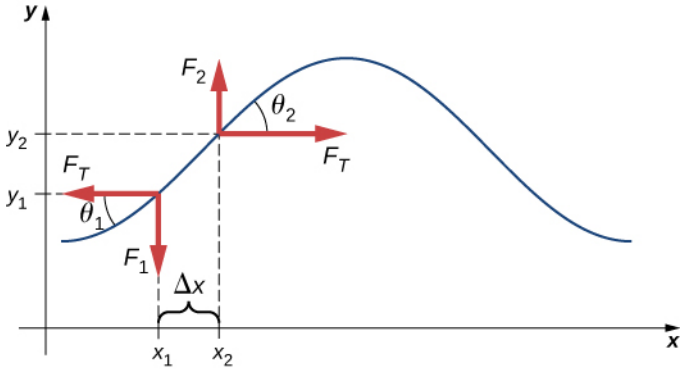


FIGURA 16.14 Una cuerda bajo tensión se puntea, y provoca un pulso que se desplaza a lo largo de la cuerda en la dirección *x* positiva.

Suponga que la inclinación de la cuerda desplazada con respecto al eje horizontal es pequeña. La fuerza neta sobre el elemento de la cuerda, que actúa en paralelo a esta, es la suma de la tensión en la cuerda y la fuerza restauradora. Los componentes *x* de la fuerza de tensión se cancelan, por lo que la fuerza neta es igual a la suma de los componentes *y* de la fuerza. La magnitud del componente *x* de la fuerza es igual a la fuerza

horizontal de tensión de la cuerda F_T como se muestra en la Figura 16.14. Para obtener el componente y de la fuerza, hay que tener en cuenta que $\tan\theta_1 = \frac{-F_1}{F_T}$ y $\tan\theta_2 = \frac{F_2}{F_T}$. La tan θ es igual a la pendiente de una función en un punto, lo cual es igual a la derivada parcial de y con respecto a x en ese punto. Por lo tanto, $\frac{F_1}{F_T}$ es igual a la pendiente negativa de la cuerda en x_1 y $\frac{F_2}{F_T}$ es igual a la pendiente de la cuerda en x_2 :

$$\frac{F_1}{F_T} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1} \text{ y } \frac{F_2}{F_T} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2}.$$

La fuerza neta sobre el elemento de masa pequeño se puede escribir como

$$F_{\text{neta}} = F_1 + F_2 = F_T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right].$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza neta es igual a la masa por la aceleración. La densidad lineal de la cuerda μ es la masa por longitud de la cuerda, y la masa de la porción de cuerda es $\mu\Delta x$,

$$F_T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right] = \Delta ma,$$
$$F_T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right] = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Al dividir entre $F_T\Delta x$ y tomar el límite como Δx se acerca a cero,

$$\frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right]}{\Delta x} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right]}{\Delta x} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Recuerde que la ecuación lineal de onda es

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{F_T}.$$

Al resolver para v, vemos que la velocidad de la onda en una cuerda depende de la tensión y de la densidad lineal.

Velocidad de una onda en una cuerda bajo tensión

La velocidad de un pulso u onda en una cuerda bajo tensión se puede calcular con la ecuación

$$|v| = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \qquad 16.8$$

donde F_T es la tensión de la cuerda y μ es la masa por longitud de la cuerda.

EJEMPLO 16.5

Rapidez de onda de un resorte de guitarra

En una guitarra de seis cuerdas, la cuerda mi aguda tiene una densidad lineal de $\mu_{\text{mi aguda}} = 3{,}09 \times 10^{-4}$ kg/m y la cuerda mi grave tiene una densidad lineal de $\mu_{\text{mi grave}} = 5{,}78 \times 10^{-3}$ kg/m. (a) Si se puntea la cuerda mi aguda, lo que produce una onda en la cuerda, ¿cuál es la rapidez de la onda si la tensión de la cuerda es de 56,40 N? (b) La densidad lineal de la cuerda mi grave es, aproximadamente, 20 veces mayor que la de la cuerda mi aguda. Para que las ondas se desplacen a través de la cuerda de la mi grave a la misma rapidez de onda que la de la mi aguda, ¿la tensión tendría que ser mayor o menor que la de la cuerda de la mi aguda? ¿Cuál sería la tensión aproximada? (c) Calcule la tensión de la cuerda mi grave necesaria para la misma rapidez de onda.

Estrategia

a. La rapidez de la onda se puede calcular a partir de la densidad lineal y la tensión $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$.
b. A partir de la ecuación $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$, si la densidad lineal se incrementa en un factor de casi 20, la tensión tendría que incrementarse en un factor de 20.
c. Conociendo la velocidad y la densidad lineal, se puede resolver la ecuación de velocidad para la fuerza de tensión $F_T = \mu v^2$.

Solución

a. Use la ecuación de velocidad para calcular la rapidez:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{56{,}40 \text{ N}}{3{,}09 \times 10^{-4} \text{ kg/m}}} = 427{,}23 \text{ m/s}.$$

b. La tensión tendría que ser aumentada por un factor de 20 aproximadamente. La tensión sería ligeramente inferior a 1.128 N.
c. Use la ecuación de velocidad para calcular la tensión real:

$$F_T = \mu v^2 = 5{,}78 \times 10^{-3} \text{kg/m}(427{,}23 \text{ m/s})^2 = 1055{,}00 \text{ N}.$$

Esta solución está dentro del 7% de la aproximación.

Importancia

Las notas estándar de las seis cuerdas (mi aguda, si, sol, se, la, mi grave) están afinadas para vibrar en las frecuencias fundamentales (329,63 Hz, 246,94 Hz, 196,00 Hz, 146,83 Hz, 110,00 Hz y 82,41 Hz) cuando se puntean. Las frecuencias dependen de la rapidez de las ondas en la cuerda y de la longitud de onda de las ondas. Las seis cuerdas tienen diferentes densidades lineales y se “afinan” mediante el cambio de tensiones de las cuerdas. En la sección Interferencia de ondas veremos que la longitud de onda depende de la longitud de las cuerdas y de las condiciones de frontera. Para tocar otras notas que no sean las fundamentales, las longitudes de las cuerdas se cambian cuando se presionan las cuerdas.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 16.5

La rapidez de onda de una onda en una cuerda depende de la tensión y de la densidad lineal de masa. Si se duplica la tensión, ¿qué ocurre con la rapidez de las ondas en la cuerda?

Rapidez de las ondas de compresión en un fluido

La rapidez de una onda en una cuerda depende de la raíz cuadrada de la tensión dividida entre la masa por longitud, la densidad lineal. En general, la rapidez de una onda a través de un medio depende de las propiedades elásticas y de la propiedad inercial del medio.

$$|v| = \sqrt{\frac{\text{propiedades elásticas}}{\text{propiedad inercial}}}$$

Las propiedades elásticas describen la tendencia de las partículas del medio a volver a su posición inicial cuando se alteran. La propiedad inercial describe la tendencia de la partícula a resistir cambios de velocidad.

La rapidez de una onda longitudinal a través de un líquido o un gas depende de la densidad del fluido y de su módulo de compresibilidad,

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \qquad 16.9$$

Aquí el módulo de compresibilidad se define como $B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V_0}$, donde ΔP es el cambio de presión, el denominador es la relación entre el cambio de volumen y el volumen inicial y $\rho \equiv \frac{m}{V}$ es la masa por unidad de volumen. Por ejemplo, el sonido es una onda mecánica que se desplaza a través de un fluido o de un sólido. La velocidad del sonido en el aire con una presión atmosférica de $1{,}013 \times 10^5$ Pa y una temperatura de 20°C es $v_s \approx 343{,}00$ m/s. Como la densidad depende de la temperatura, la velocidad del sonido en el aire depende de la temperatura del aire. Esto se analizará en detalle en la sección Sonido.

16.4 La energía y la potencia de una onda

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar cómo se desplaza la energía con un pulso o una onda.
- Describir mediante una expresión matemática cómo la energía de una onda depende de su amplitud.

Todas las ondas transportan energía y, a veces, esto se puede observar directamente. Los terremotos pueden hacer temblar ciudades enteras y hacen el trabajo de miles de bolas de demolición (Figura 16.15). Los sonidos fuertes pueden pulverizar células nerviosas del oído interno y provocar una pérdida de audición permanente. Los ultrasonidos se utilizan para el tratamiento con calor profundo de tensiones musculares. Un rayo láser puede quemar un tumor maligno. Ondas acuáticas hacen que se formen playas.



FIGURA 16.15 El efecto destructivo de un terremoto es una prueba observable de la energía que transportan estas ondas. La clasificación de los terremotos en la escala de Richter es una serie logarítmica relacionada tanto con

su amplitud como con la energía que transportan.

En esta sección examinamos la expresión cuantitativa de la energía en las ondas. Esto tendrá una importancia fundamental en las discusiones posteriores sobre las ondas, desde el sonido hasta la luz y la mecánica cuántica.

La energía en las ondas

La cantidad de energía de una onda está relacionada con su amplitud y su frecuencia. Los terremotos de gran amplitud producen grandes desplazamientos del suelo. Los sonidos fuertes tienen amplitudes de alta presión y provienen de vibraciones de fuentes de mayor amplitud que los sonidos suaves. Las olas grandes del mar revientan en la orilla más que las pequeñas. Considere el ejemplo de la gaviota y la onda acuática que vimos anteriormente en este capítulo (Figura 16.3). La onda hace un trabajo sobre la gaviota a medida que esta se desplaza hacia arriba, lo que cambia su energía potencial. Cuanto mayor sea la amplitud, mayor será la elevación de la gaviota por la onda y mayor será el cambio de energía potencial.

La energía de la onda depende tanto de la amplitud como de la frecuencia. Si se considera que la energía de cada longitud de onda es un paquete discreto de energía, una onda de alta frecuencia emitirá más de estos paquetes por unidad de tiempo que una onda de baja frecuencia. Veremos que la tasa media de transferencia de energía en ondas mecánicas es proporcional tanto al cuadrado de la amplitud como al cuadrado de la frecuencia. Si dos ondas mecánicas tienen amplitudes iguales, pero una de ellas tiene una frecuencia que es el doble de la frecuencia de la otra, la onda de mayor frecuencia tendrá una tasa de transferencia de energía cuatro veces mayor que la tasa de transferencia de energía de la onda de menor frecuencia. Hay que tener en cuenta que, si bien en las ondas mecánicas la tasa de transporte de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia, en las ondas electromagnéticas la tasa de transferencia de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, pero independiente de la frecuencia.

Potencia de las ondas

Considere una onda sinusoidal en una cuerda que se produce por un vibrador de cuerda, como se muestra en la Figura 16.16. El vibrador de cuerda es un dispositivo que hace vibrar una varilla hacia arriba y hacia abajo. Una cuerda de densidad lineal de masa uniforme está atada a la varilla, y esta hace oscilar la cuerda y produce una onda sinusoidal. La varilla hace un trabajo sobre la cuerda que produce energía que se propaga a lo largo de ella. Considere un elemento de masa de la cuerda con una masa Δm, como se ve en la Figura 16.16. A medida que la energía se propaga a lo largo de la cuerda, cada elemento de masa de la cuerda es impulsado hacia arriba y hacia abajo a la misma frecuencia que la onda. Cada elemento de masa de la cuerda se puede modelar como un oscilador armónico simple. Como la cuerda tiene una densidad lineal constante $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}$, cada elemento de masa de la cuerda tiene la masa $\Delta m = \mu \Delta x$.

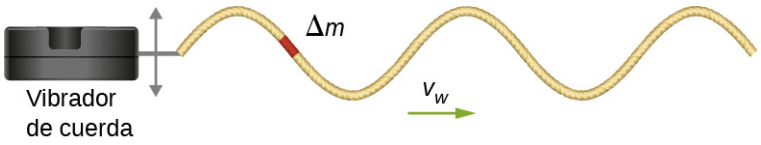


FIGURA 16.16 Un vibrador de cuerda es un dispositivo que hace vibrar una varilla. Una cuerda está atada a la varilla, y la varilla hace el trabajo en la cuerda, lo que impulsa la cuerda hacia arriba y hacia abajo. Esto produce una onda sinusoidal en la cuerda, que se mueve con una velocidad de la onda *v*. La rapidez de onda depende de la tensión en la cuerda y de la densidad lineal de masa de la cuerda. Una sección de la cuerda con masa Δm oscila a la misma frecuencia que la onda.

La energía mecánica total de la onda es la suma de su energía cinética y su energía potencial. La energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ de cada elemento de masa de la cuerda de longitud Δx es $\Delta K = \frac{1}{2}(\Delta m)\, v_y^2$, ya que el elemento de masa oscila perpendicularmente a la dirección del movimiento de la onda. Al usar la densidad lineal de masa constante, la energía cinética de cada elemento de masa de la cuerda con longitud Δx es

$$\Delta K = \frac{1}{2}(\mu \Delta x)\, v_y^2.$$

Se puede formar una ecuación diferencial al dejar que la longitud del elemento de masa de la cuerda se acerque a cero,

$$dK = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2}(\mu \Delta x)\, v_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)\, v_y^2.$$

Dado que la onda es una onda sinusoidal con una frecuencia angular ω, la posición de cada elemento de masa se puede modelar como $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$. Cada elemento de masa de la cuerda oscila con una velocidad $v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$. La energía cinética de cada elemento de masa de la cuerda se convierte en

$$\begin{aligned} dK &= \tfrac{1}{2}(\mu dx)\left(-A\omega \cos(kx - \omega t)\right)^2, \\ &= \tfrac{1}{2}(\mu dx)\, A^2\omega^2 \cos^2(kx - \omega t). \end{aligned}$$

La onda puede ser muy larga y estar compuesta por muchas longitudes de onda. Para normalizar la energía, considere la energía cinética asociada a una longitud de onda de la onda. Esta energía cinética se puede integrar sobre la longitud de onda para calcular la energía asociada a cada longitud de onda de la onda:

$$\begin{aligned} dK &= \tfrac{1}{2}(\mu dx)\, A^2\omega^2 \cos^2(kx), \\ \int_0^{K_\lambda} dK &= \int_0^{\lambda} \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \cos^2(kx)\, dx = \tfrac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \int_0^{\lambda} \cos^2(kx)\, dx, \\ K_\lambda &= \tfrac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \left[\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4k}\operatorname{sen}(2kx)\right]_0^{\lambda} = \tfrac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \left[\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{4k}\operatorname{sen}(2k\lambda) - \tfrac{1}{4k}\operatorname{sen}(0)\right], \\ K_\lambda &= \tfrac{1}{4}\mu A^2\omega^2 \lambda. \end{aligned}$$

También hay energía potencial asociada a la onda. Al igual que la masa que oscila sobre un resorte, existe una fuerza restauradora conservadora que, cuando el elemento de masa se desplaza de la posición de equilibrio, lo devuelve a la posición de equilibrio. La energía potencial del elemento de masa se puede calcular considerando la fuerza restauradora lineal de la cuerda. En la sección Oscilaciones vimos que la energía potencial almacenada en un resorte con una fuerza lineal de restauración es igual a $U = \frac{1}{2}k_s x^2$, donde la posición de equilibrio se define como $x = 0{,}00$ m. Cuando una masa unida al resorte oscila en movimiento armónico simple, la frecuencia angular es igual a $\omega = \sqrt{\frac{k_s}{m}}$. Como cada elemento de masa oscila en movimiento armónico simple, la constante del resorte es igual a $k_s = \Delta m\omega^2$. La energía potencial del elemento de masa es igual a

$$\Delta U = \frac{1}{2}k_s x^2 = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2 x^2.$$

Tenga en cuenta que k_s es la constante del resorte y no el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Esta ecuación se puede usar para calcular la energía en una longitud de onda. Al integrar sobre la longitud de onda podemos calcular la energía potencial sobre una longitud de onda:

$$\begin{aligned} dU &= \tfrac{1}{2}k_s x^2 = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 x^2\, dx, \\ U_\lambda &= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^{\lambda} \operatorname{sen}^2(kx)\, dx = \tfrac{1}{4}\mu A^2\omega^2 \lambda. \end{aligned}$$

La energía potencial asociada a una longitud de onda de la onda es igual a la energía cinética asociada a una longitud de onda.

La energía total asociada a una longitud de onda es la suma de la energía potencial y la energía cinética:

$$\begin{aligned} E_\lambda &= U_\lambda + K_\lambda, \\ E_\lambda &= \tfrac{1}{4}\mu A^2\omega^2 \lambda + \tfrac{1}{4}\mu A^2\omega^2 \lambda = \tfrac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \lambda. \end{aligned}$$

La potencia promediada en el tiempo de una onda mecánica sinusoidal, que es la tasa media de transferencia de energía asociada a una onda cuando pasa por un punto, se puede hallar al tomar la energía total asociada a la onda dividida entre el tiempo que tarda en transferirse la energía. Si la velocidad de la onda sinusoidal es constante, el tiempo de paso de una longitud de onda por un punto es igual al periodo de la onda, el cual también es constante. Para una onda mecánica sinusoidal, la potencia promediada en el tiempo es, por tanto, la energía asociada a una longitud de onda dividida entre el periodo de la onda. La longitud de onda de la onda dividida entre el periodo es igual a la velocidad de la onda,

$$P_{\text{ave}} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v. \qquad \textbf{16.10}$$

Note que esta ecuación para la potencia promediada en el tiempo de una onda mecánica sinusoidal muestra que la potencia es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y al cuadrado de su frecuencia angular. Recuerde que la frecuencia angular es igual a $\omega = 2\pi f$, por lo que la potencia de una onda mecánica es igual al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia de la onda.

EJEMPLO 16.6

Potencia suministrada por un vibrador de cuerda

Considere una cuerda de dos metros de longitud con una masa de 70,00 g unida a un vibrador de cuerda como se ilustra en la Figura 16.16. La tensión de la cuerda es de 90,0 N. Cuando el vibrador de cuerda se enciende, oscila con una frecuencia de 60 Hz y produce una onda sinusoidal en la cuerda con una amplitud de 4,00 cm y una rapidez de onda constante. ¿Cuál es la potencia promediada en el tiempo suministrada a la onda por el vibrador de cuerda?

Estrategia

La potencia suministrada a la onda debe ser igual a la potencia promediada en el tiempo de la onda en la cuerda. Conocemos la masa de la cuerda (m_s), la longitud de la cuerda (L_s) y la tensión (F_T) en la cuerda. La rapidez de la onda en la cuerda se puede derivar de la densidad lineal de masa y de la tensión. La cuerda oscila con la misma frecuencia que el vibrador de la cuerda, a partir de lo cual podemos calcular la frecuencia angular.

Solución

1. Comience con la ecuación de la potencia promediada en el tiempo de una onda sinusoidal en una cuerda:
$$P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v.$$
La amplitud está dada, así que tenemos que calcular la densidad lineal de masa de la cuerda, la frecuencia angular de la onda en la cuerda y la rapidez de la onda en la cuerda.
2. Tenemos que calcular la densidad lineal para calcular la rapidez de onda:
$$\mu = \frac{m_s}{L_s} = \frac{0{,}070\text{ kg}}{2{,}00\text{ m}} = 0{,}035\text{ kg/m}.$$
3. La rapidez de onda se puede calcular mediante la densidad lineal de masa y la tensión de la cuerda:
$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{90{,}00\text{ N}}{0{,}035\text{ kg/m}}} = 50{,}71\text{ m/s}.$$
4. La frecuencia angular se puede calcular a partir de la frecuencia:
$$\omega = 2\pi f = 2\pi\left(60\text{ s}^{-1}\right) = 376{,}80\text{ s}^{-1}.$$
5. Calcule la potencia promediada en el tiempo:
$$P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v = \frac{1}{2}\left(0{,}035\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)(0{,}040\text{ m})^2\left(376{,}80\text{ s}^{-1}\right)^2\left(50{,}71\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 201{,}59\text{ W}.$$

Importancia

La potencia promediada en el tiempo de una onda sinusoidal es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y al cuadrado de su frecuencia angular. Esto es cierto para la mayoría de las ondas mecánicas. Si se duplicara la frecuencia angular o la amplitud de la onda, la potencia se multiplicaría por cuatro. La potencia promediada en el tiempo de la onda en una cuerda es también proporcional a la velocidad de la onda sinusoidal en la cuerda. Si la velocidad se duplicara, al aumentar la tensión por un factor de cuatro, la potencia también se duplicaría.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 16.6

¿La potencia promediada en el tiempo de una onda sinusoidal en una cuerda es proporcional a la densidad lineal de la cuerda?

Las ecuaciones para la energía de la onda y la potencia promediada en el tiempo se derivaron para una onda sinusoidal en una cuerda. En general, la energía de una onda mecánica y la potencia son proporcionales a la amplitud al cuadrado y a la frecuencia angular al cuadrado (y por tanto a la frecuencia al cuadrado).

Otra característica importante de las ondas es su intensidad. Las ondas también se pueden concentrar o propagar. Las ondas de un terremoto, por ejemplo, se propagan por un área mayor a medida que se alejan de la fuente, por lo que causan menos daño cuanto más se alejan de ella. La modificación del área que cubren las ondas tiene efectos importantes. Todos estos factores pertinentes se incluyen en la definición de **intensidad** (I) como potencia por unidad de área:

$$I = \frac{P}{A}, \tag{16.11}$$

donde P es la potencia transportada por la onda a través del área A. La definición de intensidad es válida para cualquier energía en tránsito, incluida la transportada por las ondas. La unidad del SI para la intensidad es el vatio por metro cuadrado (W/m^2). Muchas ondas son ondas esféricas que se desplazan desde una fuente como una esfera. Por ejemplo, un altavoz montado en un poste sobre el suelo puede producir ondas sonoras que se alejan de la fuente como una onda esférica. Las ondas sonoras se analizan con más detalle en el siguiente capítulo pero, en general, cuanto más lejos esté del altavoz menos intenso será el sonido que escuche. A medida que una onda esférica se desplaza desde una fuente, la superficie de la onda aumenta a medida que aumenta el radio $\left(A = 4\pi r^2\right)$. La intensidad para una onda esférica es, por tanto,

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}. \tag{16.12}$$

Si no hay fuerzas de disipación, la energía permanecerá constante a medida que la onda esférica se aleja de la fuente, pero la intensidad disminuirá a medida que aumente la superficie.

En el caso de la onda circular bidimensional, la onda se desplaza hacia afuera, y aumenta la circunferencia de la onda a medida que aumenta el radio del círculo. Si usted lanza un guijarro en un estanque, la ondulación de la superficie se desplaza como una onda circular. A medida que la ondulación se aleja de la fuente, la amplitud disminuye. La energía de la onda se propaga por una circunferencia mayor y la amplitud disminuye proporcionalmente a $\frac{1}{r}$, que también es el mismo en el caso de una onda esférica, ya que la intensidad es proporcional a la amplitud al cuadrado.

16.5 Interferencia de ondas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar cómo se reflejan y transmiten las ondas mecánicas en las fronteras de un medio.
- Definir los términos interferencia y superposición.
- Hallar la onda resultante de dos ondas sinusoidales idénticas que solo se diferencian por un deslizamiento de fase.

Hasta ahora hemos estudiado las ondas mecánicas que se propagan continuamente a través de un medio, pero no hemos hablado de lo que ocurre cuando las ondas se encuentran con la frontera del medio ni de lo que ocurre cuando una onda se encuentra con otra que se propaga por el mismo medio. Las ondas interactúan con las fronteras del medio y toda o parte de la onda se puede reflejar. Por ejemplo, cuando usted se sitúa a cierta distancia de la parte rígida de un acantilado y grita, puede oír las ondas sonoras reflejadas en la superficie rígida en forma de eco. Las ondas también pueden interactuar con otras ondas que se propagan en el mismo medio. Si lanzara dos piedras a un estanque a cierta distancia una de la otra, las ondulaciones circulares que se forman de las dos piedras parecen pasar una a través de la otra al propagarse desde donde las piedras entraron en el agua. Este fenómeno se conoce como interferencia. En esta sección examinamos lo que ocurre con ondas que se encuentran con una frontera de un medio o con otra onda que se propaga en el mismo medio. Veremos que su comportamiento es muy diferente al de las partículas y cuerpos rígidos. Más adelante, cuando estudiemos física moderna, veremos que solo a la escala de los átomos vemos similitudes en las propiedades de ondas y partículas.

Reflexión y transmisión

Cuando una onda se propaga a través de un medio se refleja cuando encuentra la frontera del medio. La onda antes de chocar con la frontera se conoce como la onda incidente. La onda después de encontrarse con la frontera se conoce como la onda reflejada. La forma en que la onda se refleja en la frontera del medio depende de las condiciones de frontera; las ondas reaccionarán de forma diferente si la frontera del medio está fija en su lugar o es libre de moverse (Figura 16.17). Existe una **condición de frontera fija** cuando el medio en una frontera está fijado en su lugar para que no pueda moverse. Existe una **condición de frontera libre** cuando el medio en la frontera es libre de moverse.

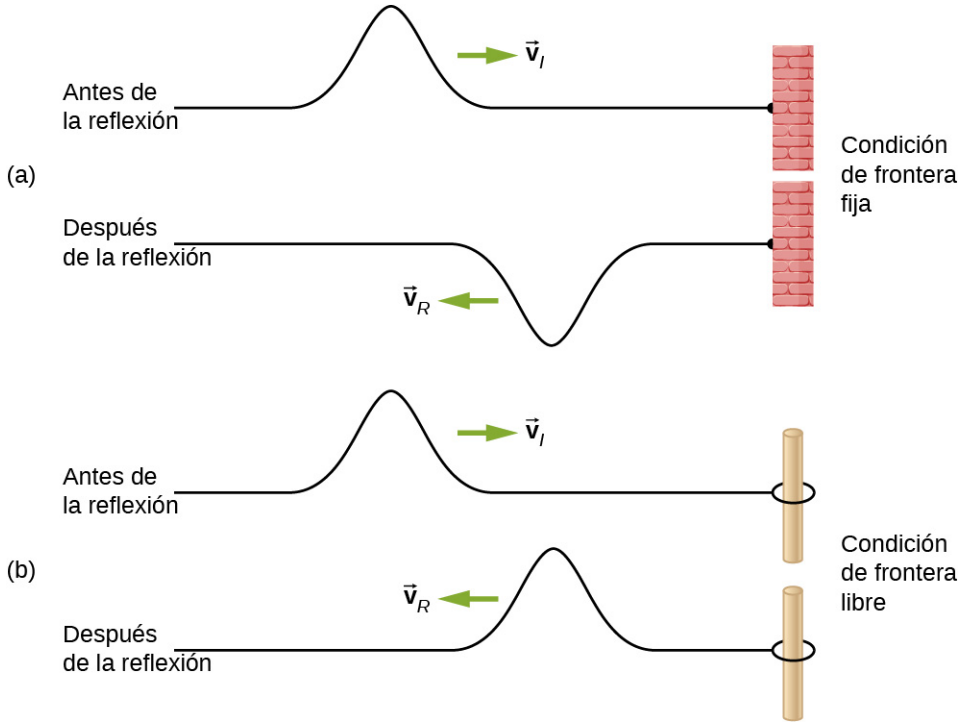


FIGURA 16.17 (a) Uno de los extremos de una cuerda está fijado de manera que no puede moverse. Una onda que se propaga por la cuerda y que encuentra esta *condición de frontera fija* se refleja $180°(\pi \text{ rad})$ fuera de fase con respecto a la onda incidente. (b) Un extremo de una cuerda está atado a un anillo sólido de masa insignificante en un poste de laboratorio sin fricción, donde el anillo es libre de moverse. Una onda que se propaga en la cuerda, al calcular esta *condición de frontera libre*, se refleja en fase $0°(0 \text{ rad})$ con respecto a la onda.

La parte (a) de la Figura 16.17 muestra una condición de frontera fija. En este caso, un extremo de la cuerda está fijado a una pared, de modo que el extremo de la cuerda está fijo en su lugar y el medio (la cuerda) en la frontera que no se mueve. Cuando la onda se refleja, la amplitud de la forma reflejada es exactamente la misma que la amplitud de la onda incidente, pero la onda reflejada lo hace a $180°$ (π rad) fuera de fase con respecto a la onda incidente. El cambio de fase se puede explicar mediante la tercera ley de Newton: Recuerde que la tercera ley de Newton establece que cuando el objeto *A* ejerce una fuerza sobre el objeto *B*, entonces el objeto *B* ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el objeto *A*. Cuando la onda incidente se encuentra con la pared, la cuerda ejerce una fuerza ascendente sobre la pared y esta reacciona ejerciendo una fuerza igual y opuesta sobre la cuerda. La reflexión en una frontera fija se invierte. Observe que la figura muestra una cresta de la onda incidente reflejada como una depresión. Si la onda incidente fuera una depresión, la onda reflejada sería una cresta.

La parte (b) de la figura muestra una condición de frontera libre. Aquí, un extremo de la cuerda está atado a un anillo sólido de masa insignificante en un poste sin fricción, por lo que el extremo de la cuerda es libre de moverse hacia arriba y hacia abajo. Cuando la onda incidente se encuentra con la frontera del medio, también se refleja. En el caso de una condición de frontera libre, la onda reflejada está en fase con respecto a la onda incidente. En este caso, la onda se encuentra con la frontera libre y aplica una fuerza hacia arriba en el anillo, lo que acelera el anillo hacia arriba. El anillo se desplaza hasta una altura máxima igual a la amplitud de la onda y luego se acelera hacia la posición de equilibrio debido a la tensión de la cuerda. La figura muestra la cresta de una onda incidente que se refleja en fase con respecto a la onda incidente como una cresta. Si la onda incidente fuera una depresión, la onda reflejada también sería una depresión. La amplitud de la onda reflejada sería igual a la amplitud de la onda incidente.

En algunas situaciones, la frontera del medio no es fija ni está libre. Considere la Figura 16.18(a), donde una cuerda de baja densidad lineal de masa está atada a una cuerda de mayor densidad lineal de masa. En este caso, la onda reflejada está desfasada con respecto a la onda incidente. También hay una onda transmitida que está en fase con respecto a la onda incidente. Tanto las ondas transmitidas como las reflejadas tienen

amplitudes menores que la amplitud de la onda incidente. Si la tensión es la misma en ambas cuerdas, la rapidez de onda es mayor en la cuerda con menor densidad lineal de masa.

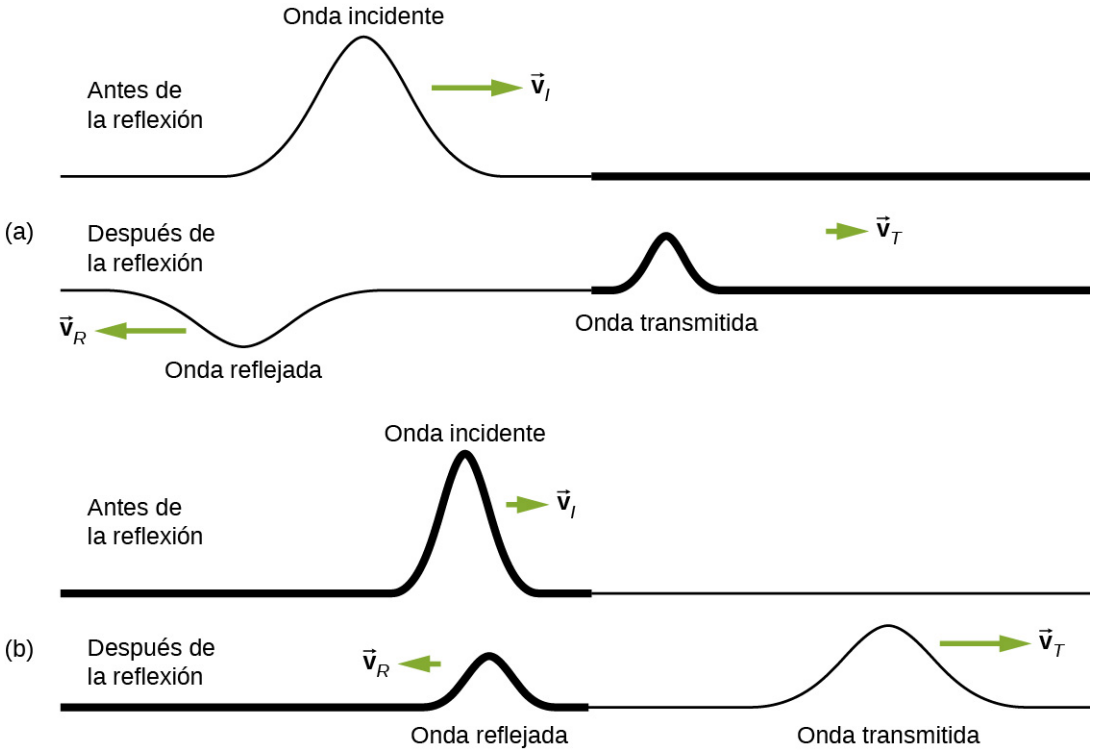


FIGURA 16.18 Las ondas en desplazamiento a lo largo de dos tipos de cuerdas: una cuerda gruesa con una densidad lineal alta y una cuerda fina con una densidad lineal baja. Ambas cuerdas tienen la misma tensión, por lo que una onda se mueve más rápido en la cuerda de baja densidad que en la cuerda de alta densidad. (a) Una onda que se mueve de un medio de baja densidad a uno de alta densidad ocasiona una onda reflejada que es $180°(\pi \text{ rad})$ desfasada con respecto al pulso (u onda) incidente y una onda transmitida que está en fase con la onda incidente. (b) Cuando una onda se desplaza de un medio de alta densidad a un medio de baja densidad, tanto la onda reflejada como la transmitida están en fase con respecto a la onda incidente.

La parte (b) de la figura muestra que una cuerda de alta densidad lineal de masa está atada a una cuerda de menor densidad lineal. En este caso, la onda reflejada está en fase con respecto a la onda incidente. También hay una onda transmitida que está en fase con respecto a la onda incidente. Tanto la onda incidente como la reflejada tienen amplitudes menores que la amplitud de la onda incidente. Aquí puede observar que si la tensión es la misma en ambas cuerdas, la rapidez de onda es mayor en la cuerda con menor densidad lineal de masa.

Superposición e interferencia

La mayoría de las ondas no parecen muy simples. Las ondas complejas son más interesantes, incluso hermosas, y tienen un aspecto formidable. La mayoría de las ondas mecánicas interesantes consisten en una combinación de dos o más ondas en desplazamiento que se propagan en el mismo medio. El principio de superposición se puede usar para analizar la combinación de ondas.

Considere dos pulsos simples de la misma amplitud que se mueven el uno hacia el otro en el mismo medio, como se muestra en la Figura 16.19. Finalmente, las ondas se superponen, lo que produce una onda que tiene el doble de amplitud, y luego continúan sin que el encuentro las haya afectado. Se dice que los pulsos interfieren, y este fenómeno se conoce como **interferencia**.

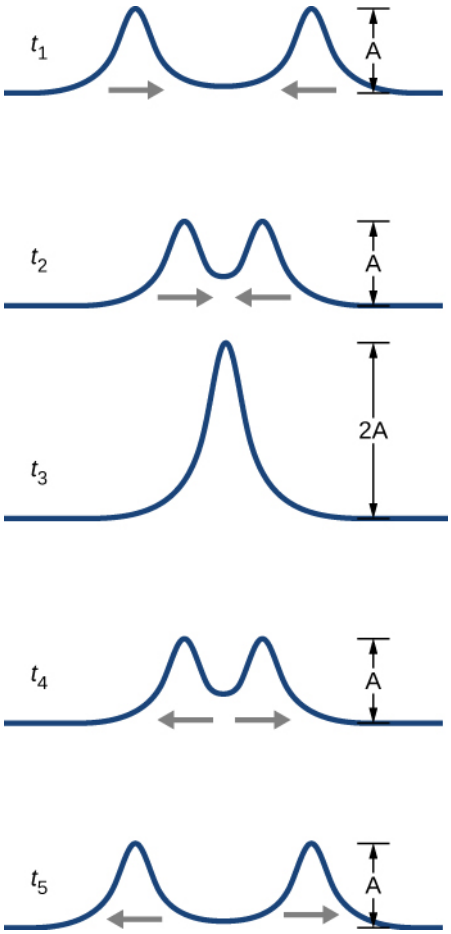


FIGURA 16.19 Dos pulsos que se mueven el uno hacia el otro experimentan interferencia. El término interferencia se refiere a lo que ocurre cuando dos ondas se superponen.

Para analizar la interferencia de dos o más ondas usamos el principio de superposición. Para ondas mecánicas, el principio de **superposición** establece que si dos o más ondas en desplazamiento se combinan en el mismo punto, la posición resultante del elemento de masa del medio, en ese punto, es la suma algebraica de la posición debido a las ondas individuales. Esta propiedad la presentan muchas ondas observadas, como las ondas en una cuerda, las ondas sonoras y las ondas superficiales del agua. Las ondas electromagnéticas también obedecen al principio de superposición, pero se suman los campos eléctrico y magnético de la onda combinada en vez del desplazamiento del medio. Las ondas que obedecen al principio de superposición son ondas lineales; las ondas que no obedecen al principio de superposición se llaman ondas no lineales. En este capítulo nos ocupamos de ondas lineales, en particular, ondas sinusoidales.

El principio de superposición se puede entender mediante la consideración de la ecuación lineal de onda. En la sección Matemáticas de las ondas, definimos una onda lineal como una onda cuya representación matemática obedece a la ecuación lineal de onda. Para una onda transversal en una cuerda con una fuerza restauradora elástica, la ecuación lineal de onda es

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.$$

Cualquier función de onda $y(x,t) = y(x \mp vt)$, donde el argumento de la función es lineal $(x \mp vt)$ es una solución de la ecuación lineal de onda y es una función de onda lineal. Si las funciones de onda $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ son soluciones a la ecuación lineal de onda, la suma de las dos funciones $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ es también una solución a la ecuación lineal de onda. Las ondas mecánicas que obedecen a superposición se limitan normalmente a ondas con amplitudes pequeñas con respecto a sus longitudes de onda. Si la amplitud es demasiado grande, el medio se distorsiona más allá de la región donde la fuerza restauradora del medio es

lineal.

Las ondas pueden interferir de forma constructiva o destructiva. La Figura 16.20 muestra dos ondas sinusoidales idénticas que llegan al mismo punto exactamente en fase. La Figura 16.20(a) y (b) muestran las dos ondas individuales, la Figura 16.20(c) muestra la onda resultante de la suma algebraica de las dos ondas lineales. Las crestas de las dos ondas están alineadas con precisión, al igual que las depresiones. Esta superposición produce una **interferencia constructiva**. Como las alteraciones se suman, la interferencia constructiva produce una onda que tiene el doble de amplitud que las ondas individuales, pero tiene la misma longitud de onda.

La Figura 16.21 muestra dos ondas idénticas que llegan exactamente a $180°$ fuera de fase, lo que produce **interferencia destructiva**. La Figura 16.21(a) y (b) muestra las ondas individuales y la Figura 16.21(c) muestra la superposición de las dos ondas. Como las depresiones de una onda se suman a la cresta de la otra, la amplitud resultante es cero para interferencia destructiva: las ondas se anulan por completo.

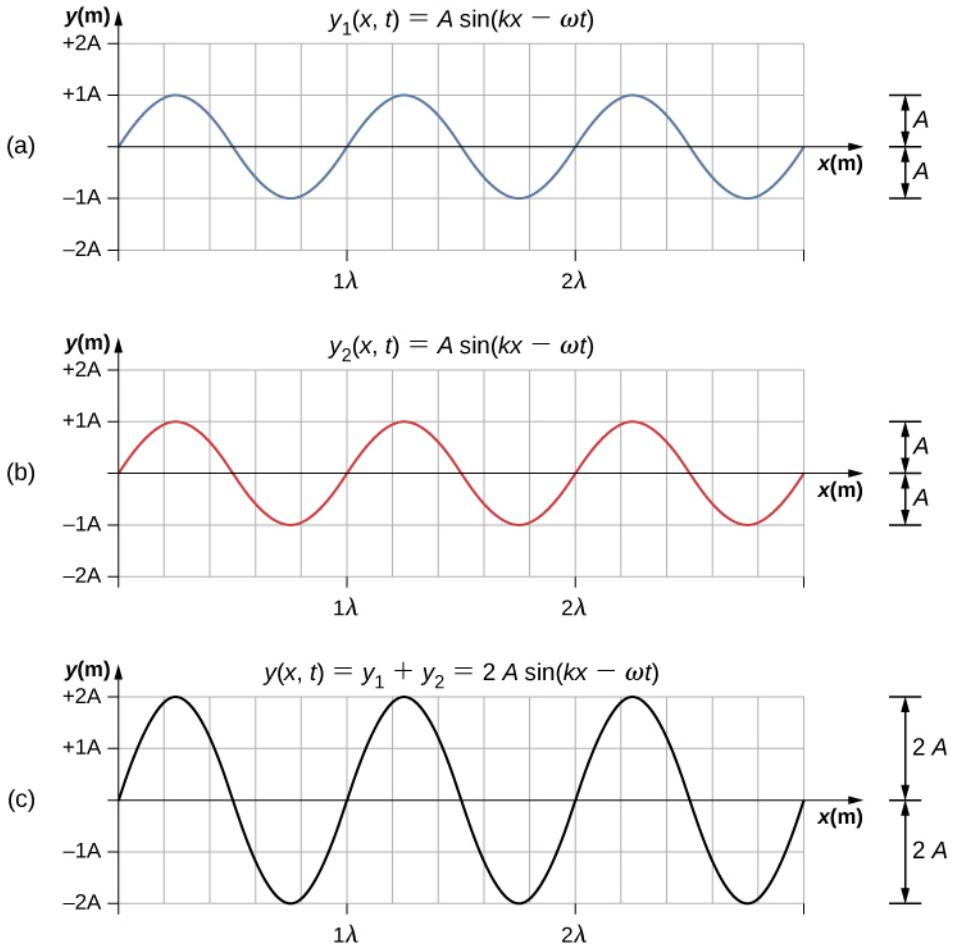


FIGURA 16.20 La interferencia constructiva de dos ondas idénticas produce una onda con el doble de amplitud, pero con la misma longitud de onda.

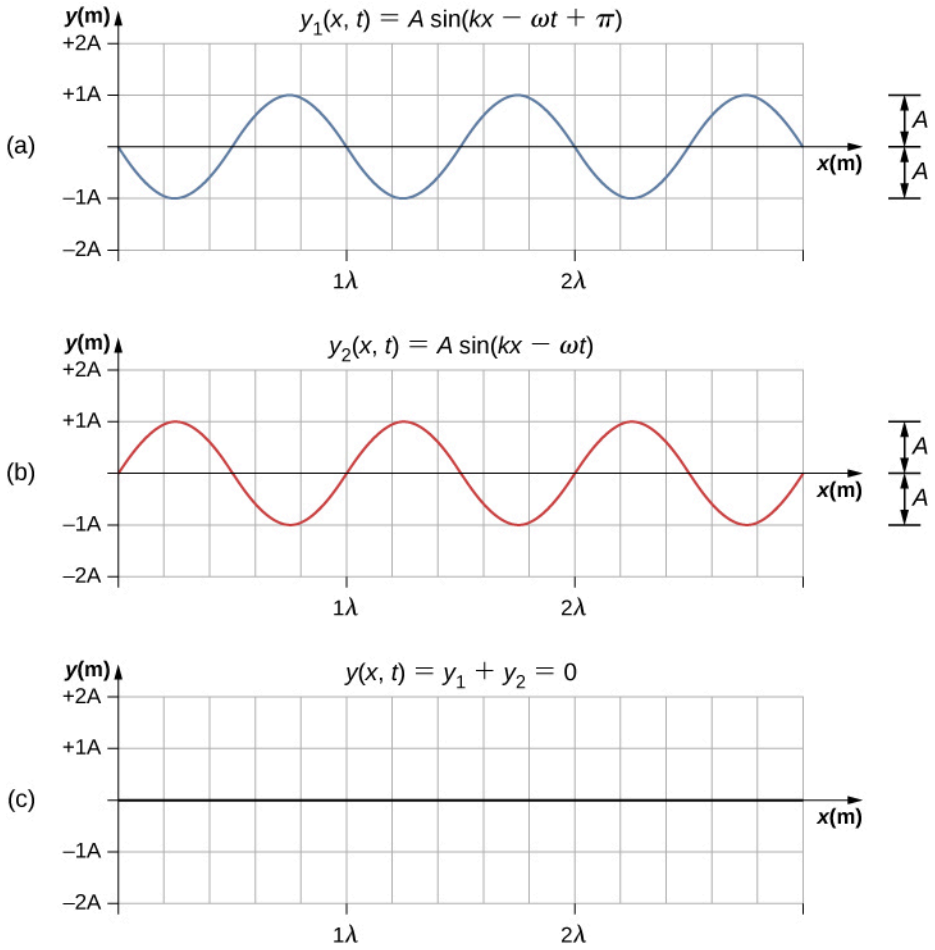


FIGURA 16.21 Interferencia destructiva de dos ondas idénticas, una con un deslizamiento de fase de $180°$ (π rad), produce una amplitud cero, o una cancelación completa.

Cuando las ondas lineales interfieren, la onda resultante no es más que la suma algebraica de las ondas individuales, tal como establece el principio de superposición. La Figura 16.22 muestra dos ondas (roja y azul) y la onda resultante (negra). La onda resultante es la suma algebraica de las dos ondas individuales.

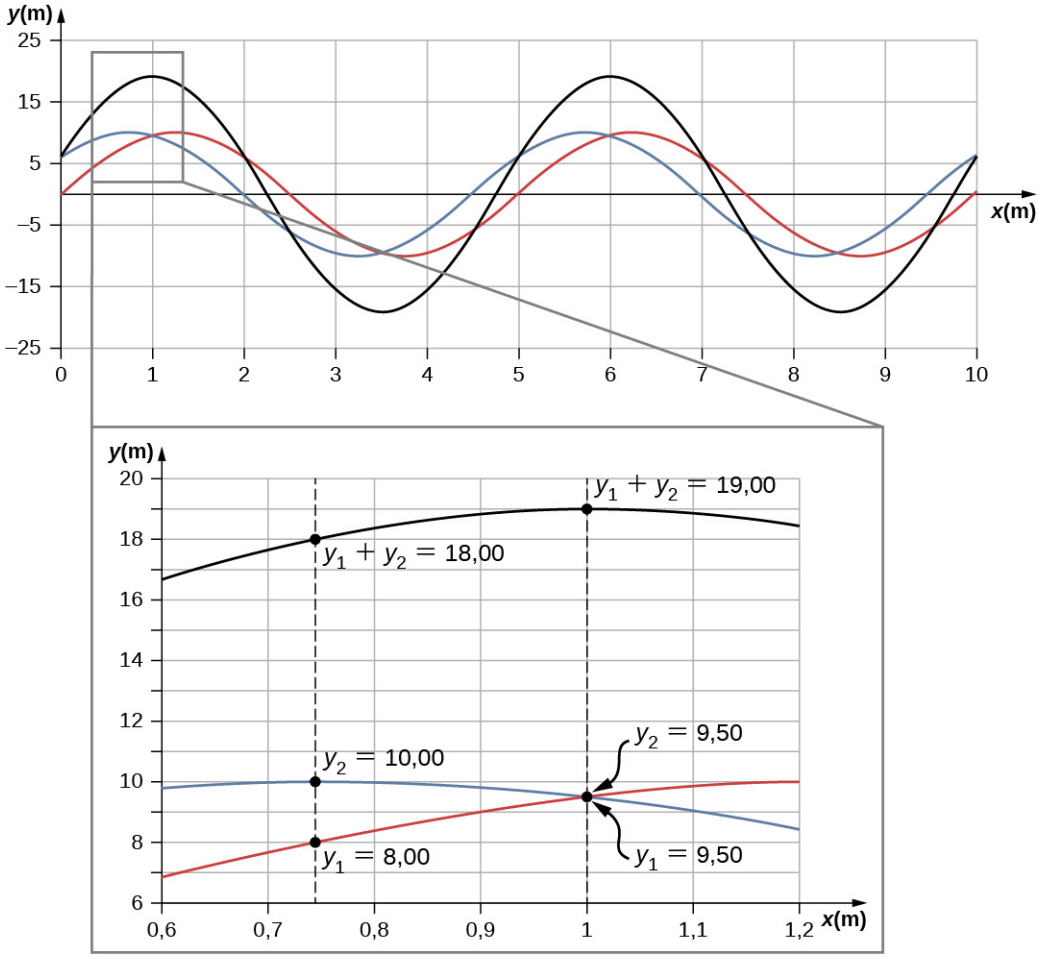


FIGURA 16.22 Cuando dos ondas lineales en el mismo medio interfieren, la altura de la onda resultante es la suma de las alturas de las ondas individuales tomadas punto por punto. En este gráfico se muestran dos ondas (roja y azul) sumadas, junto con la onda resultante (negra). Estos gráficos representan la altura de la onda en cada punto. Las ondas pueden ser cualquier onda lineal, lo que incluye ondulaciones en un estanque, alteraciones de una cuerda, sonido u ondas electromagnéticas.

La superposición de la mayoría de las ondas produce una combinación de interferencias constructiva y destructiva, y puede variar de un lugar a otro y de un momento a otro. El sonido de un equipo de música, por ejemplo, puede ser alto en un punto y bajo en otro. La variación del volumen significa que las ondas sonoras se suman de forma parcialmente constructiva y parcialmente destructiva en diferentes lugares. Un equipo de música tiene, al menos, dos altavoces que crean ondas sonoras, y las ondas se pueden reflejar en las paredes. Todas estas ondas interfieren, y la onda resultante es la superposición de las ondas.

Hemos mostrado varios ejemplos de superposición de ondas que son similares. La Figura 16.23 ilustra un ejemplo de superposición de dos ondas disímiles. También en este caso las alteraciones se suman y producen una onda resultante.

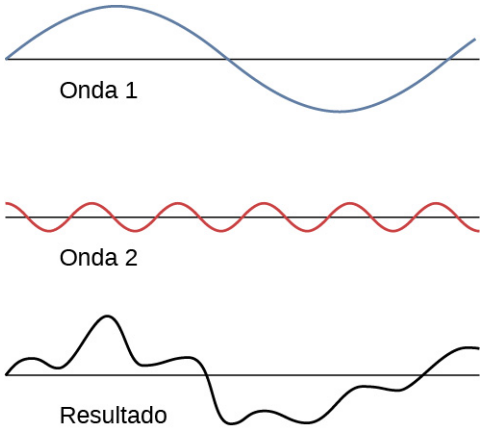


FIGURA 16.23 La superposición de ondas no idénticas presenta interferencias tanto constructiva como destructiva.

A veces, cuando dos o más ondas mecánicas interfieren el patrón producido por la onda resultante puede ser rico en complejidad, algunas sin patrones fácilmente discernibles. Por ejemplo, el trazado de la onda sonora de su música favorita puede parecer bastante complejo y es la superposición de las ondas sonoras individuales de muchos instrumentos; es la complejidad lo que hace que la música sea interesante y merezca la pena escucharla. En otras ocasiones, las ondas pueden interferir y producir fenómenos interesantes, complejos en su apariencia y, sin embargo, bellos en la simplicidad del principio de superposición físico que formó la onda resultante. Un ejemplo es el fenómeno conocido como ondas estacionarias, el cual se produce por dos ondas idénticas que se mueven en direcciones diferentes. En la próxima sección analizaremos más detenidamente este fenómeno.

INTERACTIVO

Pruebe esta simulación (https://openstax.org/l/21waveinterfer_es) para hacer ondas con un grifo que gotea, un altavoz o un láser. Añada una segunda fuente o un par de rendijas para crear un patrón de interferencia. Puede observar una fuente o dos fuentes. Al usar dos fuentes, puede observar los patrones de interferencia que resultan de variar las frecuencias y las amplitudes de las fuentes.

Superposición de ondas sinusoidales que se diferencian por un deslizamiento de fase

Muchos ejemplos en física consisten en dos ondas sinusoidales que son idénticas en amplitud, número de onda y frecuencia angular, pero que difieren por un deslizamiento de fase:

$$y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx-\omega t+\phi),$$
$$y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx-\omega t).$$

Cuando estas dos ondas existen en el mismo medio, la onda resultante de la superposición de las dos ondas individuales es la suma de las dos ondas individuales:

$$y_R(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx-\omega t+\phi) + A\,\text{sen}\,(kx-\omega t).$$

La onda resultante se puede entender mejor mediante la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}\,u + \text{sen}\,v = 2\,\text{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right),$$

donde $u = kx-\omega t+\phi$ y $v = kx-\omega t$. La onda resultante se convierte en

$$\begin{aligned} y_R(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx-\omega t+\phi) + A\,\text{sen}\,(kx-\omega t) \\ &= 2A\,\text{sen}\left(\frac{(kx-\omega t+\phi)+(kx-\omega t)}{2}\right)\cos\left(\frac{(kx-\omega t+\phi)-(kx-\omega t)}{2}\right) \\ &= 2A\,\text{sen}\left(kx-\omega t+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right). \end{aligned}$$

Esta ecuación se suele escribir como

$$y_R(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\operatorname{sen}\left(kx-\omega t+\frac{\phi}{2}\right). \qquad 16.13$$

La onda resultante tiene el mismo número de onda y la misma frecuencia angular, una amplitud de $A_R = \left[2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]$, y un deslizamiento de fase igual a la mitad del deslizamiento de fase original. En la Figura 16.24 se muestran ejemplos de ondas que solo se diferencian por un deslizamiento de fase. Las ondas rojas y azules tienen cada una la misma amplitud, el mismo número de onda y la misma frecuencia angular, y solo se diferencian en un deslizamiento de fase. Por lo tanto, tienen el mismo periodo, la misma longitud de onda y la misma frecuencia. La onda verde es el resultado de la superposición de las dos ondas. Cuando las dos ondas tienen una diferencia de fase cero, las ondas están en fase, y la onda resultante tiene el mismo número de onda y la misma frecuencia angular y una amplitud igual al doble de las amplitudes individuales (parte (a)). Esto es una interferencia constructiva. Si la diferencia de fase es $180°$, las ondas se atraviesan en la interferencia destructiva (parte (c)). La onda resultante tiene una amplitud de cero. Cualquier otra diferencia de fase ocasiona una onda con el mismo número de onda y la misma frecuencia angular que las dos ondas incidentes, pero con un deslizamiento de fase de $\phi/2$ y una amplitud igual a $2A\cos(\phi/2)$. Los ejemplos se muestran en las partes (b) y (d).

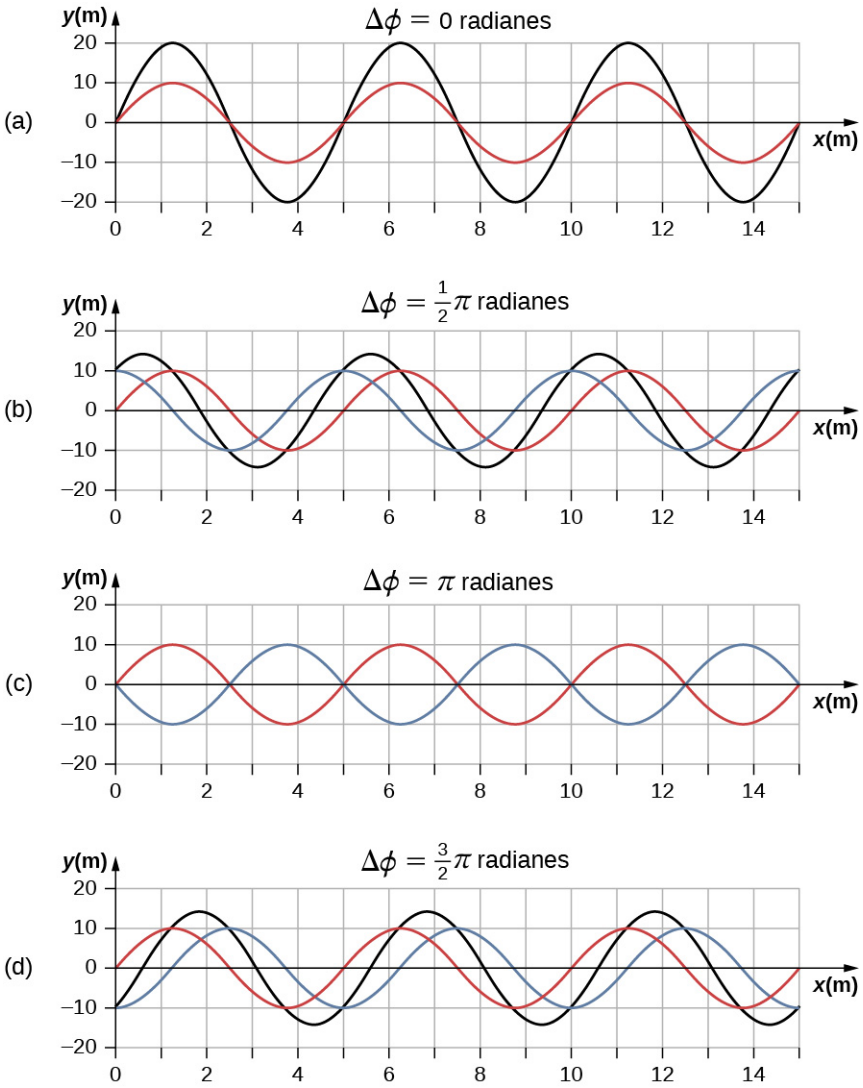


FIGURA 16.24 Superposición de dos ondas con amplitudes, longitudes de onda y frecuencia idénticas, pero que

difieren en un deslizamiento de fase. La onda roja está definida por la función de onda $y_1\ (x,t) = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t)$ y la onda azul está definida por la función de onda $y_2\ (x,t) = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \phi)$. La línea negra muestra el resultado de la suma de las dos ondas. La diferencia de fase entre las dos ondas es (a) $0{,}00$ rad, (b) $\pi/2$ rad, (c) π rad y (d) $3\pi/2$ rad.

16.6 Ondas estacionarias y resonancia

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir ondas estacionarias y explicar cómo se producen.
- Describir los modos de una onda estacionaria en una cuerda.
- Dar ejemplos de ondas estacionarias más allá de las ondas en una cuerda.

A lo largo de este capítulo hemos estado estudiando las ondas en desplazamiento u ondas que transportan energía de un lugar a otro. En determinadas condiciones, las ondas pueden rebotar de un lado a otro en una región determinada, y terminan convirtiéndose en fijas. Estas son llamadas **ondas estacionarias**.

Otro efecto relacionado se conoce como resonancia. En la sección Oscilaciones definimos la resonancia como un fenómeno en el que una fuerza impulsora de pequeña amplitud podía producir un movimiento de gran amplitud. Piense en un niño en un columpio, lo que se puede modelar como un péndulo físico. Los empujes de magnitudes relativamente pequeñas de un padre pueden producir balanceos de gran amplitud. A veces, esta resonancia es buena, por ejemplo, cuando se produce música con un instrumento de cuerda. En otras ocasiones, los efectos pueden ser devastadores, como el derrumbe de un edificio durante un terremoto. En el caso de las ondas estacionarias, las de amplitud relativamente grande se producen por la superposición de ondas componentes de menor amplitud.

Ondas estacionarias

A veces, parece que las ondas no se mueven, sino que simplemente vibran en el lugar. Puede observar ondas inmóviles en la superficie de un vaso de leche en un refrigerador, por ejemplo. Las vibraciones del motor del refrigerador crean ondas en la leche que oscilan hacia arriba y hacia abajo, pero no parecen moverse por la superficie. La Figura 16.25 muestra un experimento que puede probar en casa. Tome un bol de leche y póngalo sobre el marco de un ventilador cuadrado común. Las vibraciones del ventilador producirán ondas estacionarias circulares en la leche. Las ondas son visibles en la foto debido al reflejo de una lámpara. Estas ondas se forman por la superposición de dos o más ondas en desplazamiento, como se ilustra en la Figura 16.26 para dos ondas idénticas que se mueven en direcciones opuestas. Las ondas se mueven unas a través de otras con sus alteraciones añadiéndose a su paso. Si las dos ondas tienen la misma amplitud y la misma longitud de onda, entonces alternan entre la interferencia constructiva y la destructiva. La resultante tiene el aspecto de una onda detenida y, por tanto, se denomina onda estacionaria.



FIGURA 16.25 Las ondas estacionarias se forman en la superficie de un bol de leche ubicado en el marco de un ventilador cuadrado. Las vibraciones del ventilador hacen oscilar la superficie de la leche. Las ondas son visibles debido a la reflexión de la luz de una lámpara (créditos: David Chelton).

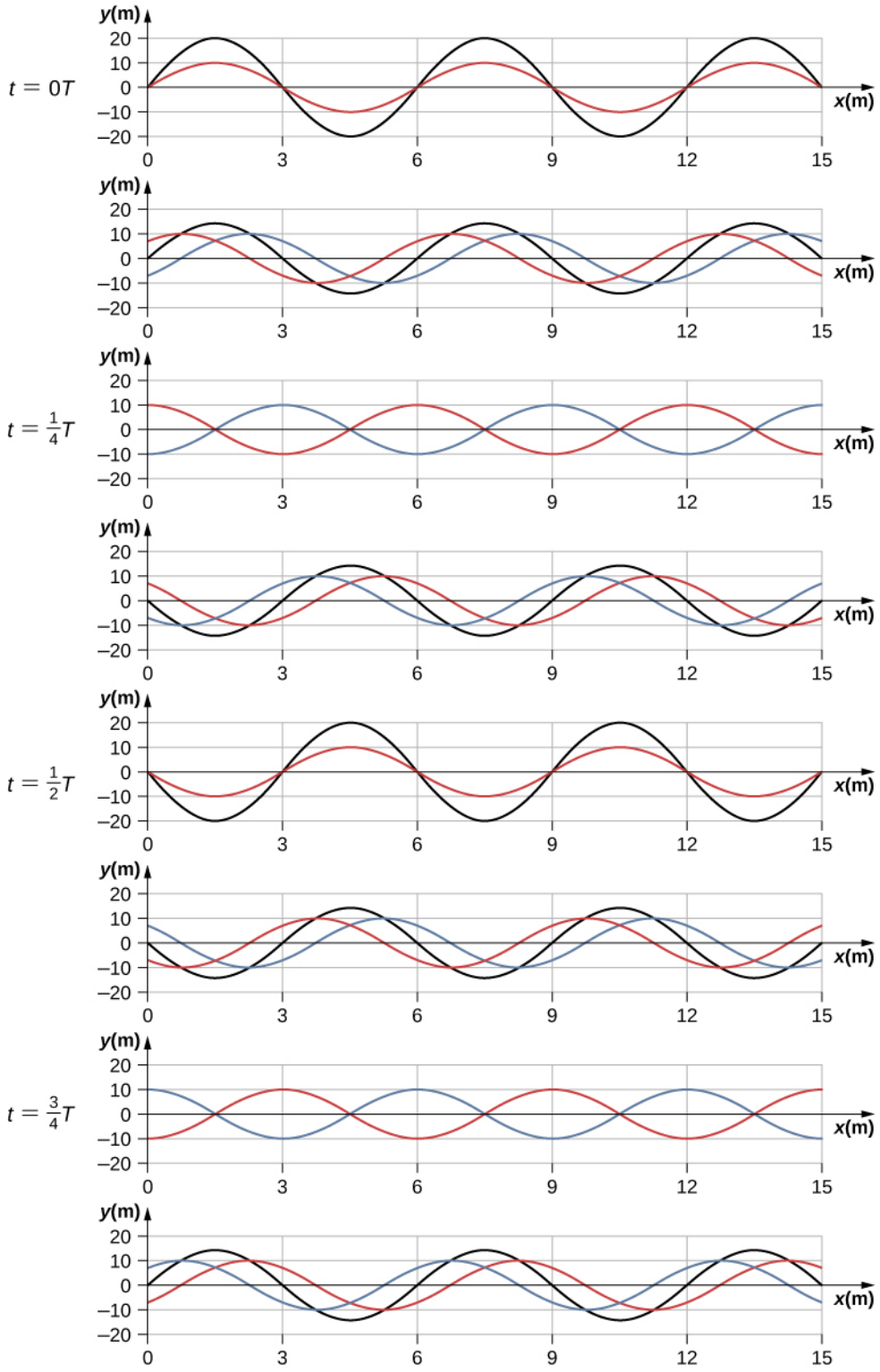


FIGURA 16.26 Representaciones temporales de dos ondas sinusoidales. La onda roja se mueve en la dirección $-x$y la azul en la dirección $+x$. La onda resultante se muestra en negro. Considere la onda resultante en los puntos $x = 0\text{ m}, 3\text{ m}, 6\text{ m}, 9\text{ m}, 12\text{ m}, 15\text{ m}$ y observe que la onda resultante siempre es igual a cero en estos puntos, sea cual sea el tiempo. Estos puntos se conocen como puntos fijos (nodos). Entre cada dos nodos hay un antinodo, un lugar donde el medio oscila con una amplitud igual a la suma de las amplitudes de las ondas individuales.

Considere dos ondas idénticas que se mueven en direcciones opuestas. La primera onda tiene una función de onda de $y_1\ (x, t) = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t)$ y la segunda onda tiene una función de onda $y_2\ (x, t) = A\ \text{sen}\ (kx + \omega t)$. Las

ondas interfieren y forman una onda resultante

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t),$$
$$y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t) + A\,\text{sen}(kx + \omega t).$$

Esto se puede simplificar mediante la identidad trigonométrica

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta,$$

donde $\alpha = kx$ y $\beta = \omega t$, dándonos

$$y(x,t) = A[\text{sen}(kx)\cos(\omega t) - \cos(kx)\,\text{sen}(\omega t) + \text{sen}(kx)\cos(\omega t) + \cos(kx)\,\text{sen}(\omega t)],$$

que se simplifica a

$$y(x,t) = [2A\,\text{sen}(kx)]\cos(\omega t). \qquad \textbf{16.14}$$

Observe que la onda resultante es una onda sinusoidal que es una función solo de posición, multiplicada por una función coseno que es una función solo de tiempo. Los gráficos de *y(x,t)* como una función de *x* para varios tiempos se muestran en la Figura 16.26. La onda roja se mueve en la dirección *x* negativa, la onda azul se mueve en la dirección *x* positiva y la onda negra es la suma de las dos ondas. A medida que las ondas rojas y azules se mueven entre sí, entran y salen de la interferencia constructiva y de la interferencia destructiva.

Inicialmente, en el tiempo $t = 0$, las dos ondas están en fase, y el resultado es una onda que es el doble de la amplitud de las ondas individuales. Las ondas también están en fase en el tiempo $t = \frac{T}{2}$. De hecho, las ondas están en fase en cualquier múltiplo entero de la mitad de un periodo:

$$t = n\frac{T}{2} \text{ donde } n = 0, 1, 2, 3.... \text{ (en fase).}$$

En otras ocasiones, las dos ondas son 180°(π radianes) fuera de fase y la onda resultante es igual a cero. Esto ocurre en

$$t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, ..., \frac{n}{4}T \text{ donde } n = 1, 3, 5.... \text{ (fuera de fase).}$$

Observe que algunas posiciones *x* de la onda resultante son siempre cero sin importar la relación de fase. Estas posiciones se denominan **nodos**. ¿Dónde se encuentran los nodos? Considere la solución de la suma de las dos ondas

$$y(x,t) = [2A\,\text{sen}(kx)]\cos(\omega t).$$

Calcular las posiciones en las que la función seno es igual a cero proporciona las posiciones de los nodos.

$$\begin{aligned} \text{sen}(kx) &= 0 \\ kx &= 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ... \\ \frac{2\pi}{\lambda}x &= 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ... \\ x &= 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, ... = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

También hay posiciones en las que *y* oscila entre $y = \pm A$. Estos son los **antinodos**. Podemos calcularlos considerando qué valores de *x* dan como resultado $\text{sen}(kx) = \pm 1$.

$$\begin{aligned} \text{sen}(kx) &= \pm 1 \\ kx &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ... \\ \frac{2\pi}{\lambda}x &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ... \\ x &= \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, ... = n\frac{\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, ... \end{aligned}$$

Lo que resulta es una onda estacionaria como la que se muestra en la Figura 16.27, que muestra representaciones de la onda resultante de dos ondas idénticas que se mueven en direcciones opuestas. La onda resultante parece ser una onda sinusoidal con nodos en múltiplos enteros de media longitud de onda.

Los antinodos oscilan entre $y = \pm 2A$ debido al término del coseno, $\cos(\omega t)$, que oscila entre ± 1.

La onda resultante parece estar quieta, sin movimiento aparente en la dirección x, aunque está compuesta por una función de onda que se mueve en positivo, mientras que la segunda onda se mueve en la dirección x negativa. La Figura 16.27 muestra varias representaciones de la onda resultante. Los nodos están marcados con puntos rojos mientras que los antinodos están marcados con puntos azules.

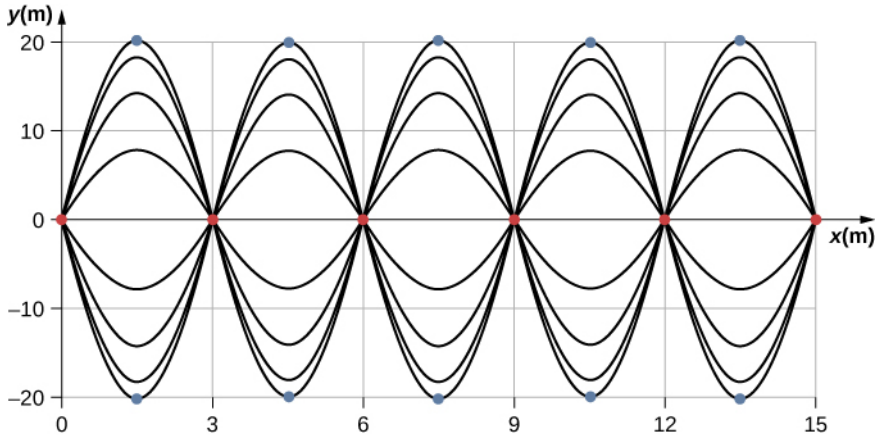


FIGURA 16.27 Cuando dos ondas idénticas se mueven en direcciones opuestas, la onda resultante es una onda estacionaria. Los nodos aparecen en múltiplos enteros de las medias longitudes de onda. Los antinodos aparecen en los múltiplos impares de los cuartos de longitud de onda, donde oscilan entre $y = \pm A$. Los nodos están marcados con puntos rojos y los antinodos con puntos azules.

Un ejemplo común de ondas estacionarias son las ondas producidas por los instrumentos musicales de cuerda. Cuando se puntea la cuerda, los pulsos se desplazan a lo largo de esta en direcciones opuestas. Los extremos de las cuerdas están fijados en su lugar, por lo que aparecen nodos en los extremos de las cuerdas; las condiciones de frontera del sistema, que regulan las frecuencias de resonancia en las cuerdas. La resonancia producida en un instrumento de cuerda se puede modelar en un laboratorio de física con el aparato que se muestra en la Figura 16.28.

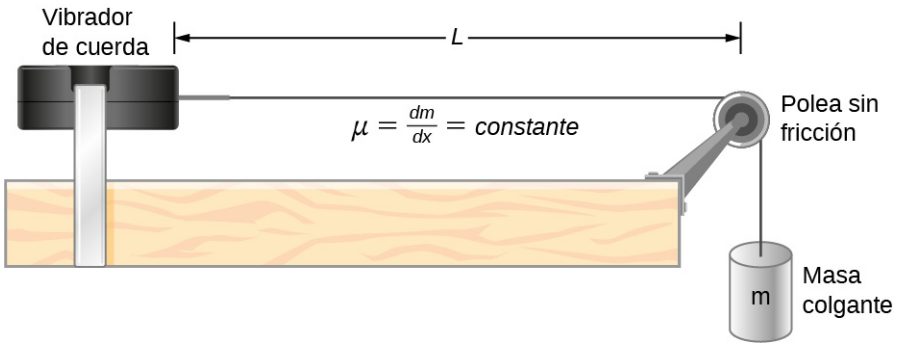


FIGURA 16.28 Un montaje de laboratorio para crear ondas estacionarias en una cuerda. La cuerda tiene un nodo en cada extremo y una densidad lineal constante. La longitud entre las condiciones de frontera fija es *L*. La masa colgante proporciona la tensión en la cuerda, y la rapidez de onda en la cuerda es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión dividida entre la densidad lineal de masa.

El montaje de laboratorio muestra una cuerda atada a un vibrador de cuerda, que hace oscilar la cuerda con una frecuencia ajustable *f*. El otro extremo de la cuerda pasa por una polea sin fricción y se ata a una masa colgante. La magnitud de la tensión en la cuerda es igual al peso de la masa colgante. La cuerda tiene una densidad lineal constante (masa por longitud) μ y la velocidad a la que una onda se desplaza por la cuerda es igual a $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu,}}$ Ecuación 16.7. Las condiciones de frontera simétricas (un nodo en cada extremo) dictan las posibles frecuencias que pueden estimular las ondas estacionarias. Partiendo de una frecuencia cero y aumentando lentamente la frecuencia, el primer modo $n = 1$ aparece como se muestra en la Figura

16.29. El primer modo, también llamado modo fundamental o primer armónico, muestra que se ha formado la mitad de una longitud de onda, por lo que la longitud de onda es igual al doble de la longitud entre los nodos $\lambda_1 = 2L$. La **frecuencia fundamental**, o primera frecuencia armónica, que impulsa este modo es

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L},$$

donde la velocidad de la onda es $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu,}}$. AL mantener la tensión constante y aumentar la frecuencia se obtiene el segundo armónico o el $n = 2$. Este modo es una longitud de onda completa $\lambda_2 = L$ y la frecuencia es el doble de la frecuencia fundamental:

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2f_1.$$

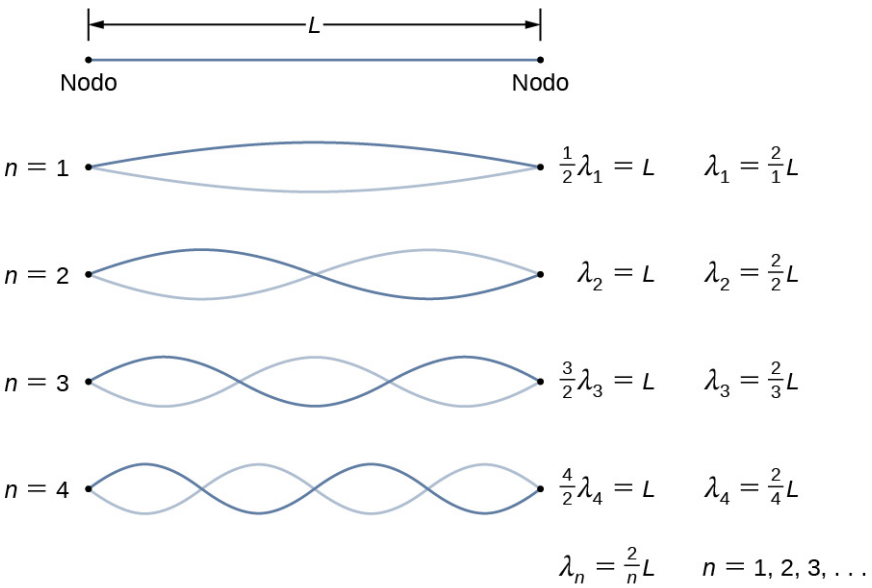


FIGURA 16.29 Ondas estacionarias creadas en una cuerda de longitud *L*. Se produce un nodo en cada extremo de la cuerda. Los nodos son condiciones de frontera que limitan las posibles frecuencias que estimulan las ondas estacionarias (note que las amplitudes de las oscilaciones se han mantenido constantes para su visualización. Los patrones de ondas estacionarias posibles en la cuerda se conocen como modos normales. Si se realiza este experimento en el laboratorio, la amplitud disminuirá al aumentar la frecuencia).

Los dos siguientes modos, o el tercer y cuarto armónicos, tienen longitudes de onda de $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$ y $\lambda_4 = \frac{2}{4}L$, impulsado por frecuencias de $f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$ y $f_4 = \frac{4v}{2L} = 4f_1$. Todas las frecuencias por encima de la frecuencia f_1 se conocen como los **sobretonos**. Las ecuaciones para la longitud de onda y la frecuencia se pueden resumir como

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L \quad n = 1, 2, 3, 4, 5... \tag{16.15}$$

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad n = 1, 2, 3, 4, 5... \tag{16.16}$$

Los patrones de ondas estacionarias que son posibles para una cuerda, los cuatro primeros de los cuales se muestran en la Figura 16.29, se conocen como los **modos normales**, con frecuencias conocidas como las frecuencias normales. En resumen, la primera frecuencia que produce un modo normal se llama frecuencia fundamental (o primer armónico). Todas las frecuencias por encima de la frecuencia fundamental son sobretonos. La segunda frecuencia del $n = 2$ modo normal de la cuerda es el primer sobretono (o segundo armónico). La frecuencia del $n = 3$ modo normal es el segundo sobretono (o tercer armónico) y así

sucesivamente.

Las soluciones mostradas en la Ecuación 16.15 y la Ecuación 16.16 son para una cuerda con la condición de contorno de un nodo en cada extremo. Cuando la condición de contorno en ambos lados es la misma, se dice que el sistema tiene condiciones de frontera simétricas. La Ecuación 16.15 y la Ecuación 16.16 sirven para cualquier condición de contorno simétrica, es decir, nodos en ambos extremos o antinodos en ambos extremos.

EJEMPLO 16.7

Ondas estacionarias en una cuerda

Considere una cuerda de $L = 2{,}00$ m. atada a un vibrador de cuerda de frecuencia ajustable como se muestra en la Figura 16.30. Las ondas producidas por el vibrador se desplazan por la cuerda y son reflejadas por la condición de frontera fija en la polea. La cuerda, que tiene una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}006$ kg/m se hace pasar por una polea sin fricción de masa insignificante, y la tensión la proporciona una masa colgante de 2,00 kg. (a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas en la cuerda? (b) Dibuje un esquema de los tres primeros modos normales de las ondas estacionarias que se pueden producir en la cuerda e identifique cada uno con la longitud de onda. (c) Enumere las frecuencias a las que debe estar sintonizado el vibrador de la cuerda para producir los tres primeros modos normales de las ondas estacionarias.

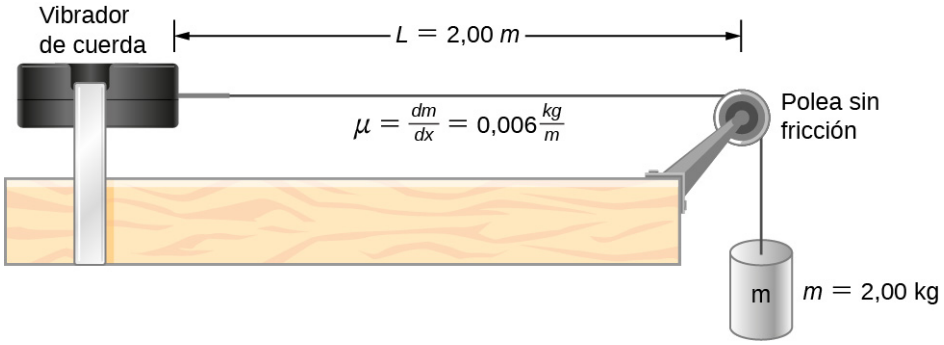


FIGURA 16.30 Una cuerda atada a un vibrador de cuerda de frecuencia ajustable.

Estrategia

a. La velocidad de la onda se puede calcular mediante $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$. La tensión es proporcionada por el peso de la masa colgante.
b. Las ondas estacionarias dependerán de las condiciones de frontera. Debe haber un nodo en cada extremo. El primer modo será la mitad de una onda. La segunda se puede calcular añadiendo una media longitud de onda. Es la longitud más corta que ocasionará a un nodo en las fronteras. Por ejemplo, si se añade un cuarto de longitud de onda, se obtendrá un antinodo en la frontera y no es un modo que satisfaga las condiciones de frontera. Esto se muestra en la Figura 16.31.
c. Como la rapidez de onda es la longitud de onda por la frecuencia, la frecuencia es la velocidad de la onda dividida entre la longitud de onda



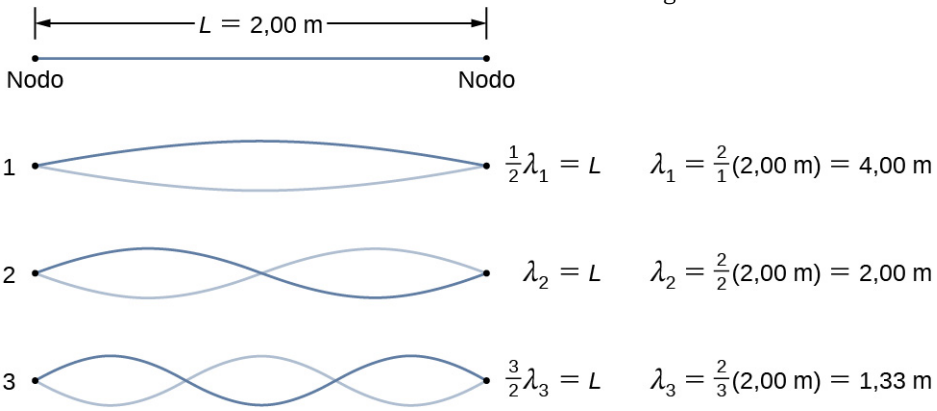
FIGURA 16.31 (a) La figura representa el segundo modo de la cuerda que satisface las condiciones de frontera de un nodo en cada extremo de la cuerda. (b) Esta figura no podría ser un modo normal en la cuerda porque no satisface las condiciones de frontera. Hay un nodo en un extremo, pero un antinodo en el otro.

Solución

a. Comienza con la velocidad de una onda en una cuerda. La tensión es igual al peso de la masa colgante. La densidad lineal de masa y la masa de la masa colgante están dadas:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\,\text{kg}\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{0{,}006\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}}} = 57{,}15\,\text{m/s}.$$

b. El primer modo normal que tiene un nodo en cada extremo es una media longitud de onda. Los dos siguientes modos se encuentran añadiendo la mitad de una longitud de onda.



c. Las frecuencias de los tres primeros modos se calculan mediante $f = \frac{v_w}{\lambda}$.

$$f_1 = \frac{v_w}{\lambda_1} = \frac{57{,}15\ \text{m/s}}{4{,}00\ \text{m}} = 14{,}29\ \text{Hz}$$
$$f_2 = \frac{v_w}{\lambda_2} = \frac{57{,}15\ \text{m/s}}{2{,}00\ \text{m}} = 28{,}58\ \text{Hz}$$
$$f_3 = \frac{v_w}{\lambda_3} = \frac{57{,}15\ \text{m/s}}{1{,}333\ \text{m}} = 42{,}87\ \text{Hz}$$

Importancia

Los tres modos estables de este ejemplo se produjeron al mantener la tensión en la cuerda y ajustar la frecuencia de impulso. Si se mantiene constante la tensión de la cuerda, se obtiene una velocidad constante. Los mismos modos se podrían haber producido al mantener la frecuencia constante y ajustar la velocidad de la onda en la cuerda (al cambiar la masa colgante).

INTERACTIVO

Visite esta simulación (https://openstax.org/l/21normalmodes) para jugar con un sistema 1D o 2D de osciladores masa-resorte acoplados. Varíe el número de masas, establezca las condiciones iniciales y observe cómo evoluciona el sistema. Vea el espectro de los modos normales para el movimiento arbitrario. Vea modos longitudinales o transversales en el sistema 1D.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 16.7

Las ecuaciones de las longitudes de onda y las frecuencias de los modos de una onda producida en una cuerda:

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L \quad n = 1, 2, 3, 4, 5\ldots \text{ y}$$
$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad n = 1, 2, 3, 4, 5\ldots$$

se derivaron al considerar una onda en una cuerda en la que había condiciones de frontera simétricas de un nodo en cada extremo. Estos modos son el resultado de dos ondas sinusoidales con características idénticas,

excepto que se mueven en direcciones opuestas, confinadas en una región L con nodos necesarios en ambos extremos. ¿Funcionarán las mismas ecuaciones si hubiera condiciones de frontera simétricas con antinodos en cada extremo? ¿Qué aspecto tendrían los modos normales de un medio que fuera libre de oscilar en cada extremo? Pierda cuidado si por ahora no puede imaginar un medio así, solo considere dos funciones de onda sinusoidales en una región de longitud L, con antinodos en cada extremo.

Las condiciones de frontera libre mostradas en el último Compruebe lo aprendido pueden parecer difíciles de visualizar. ¿Cómo puede haber un sistema que sea libre de oscilar en cada extremo? En la Figura 16.32 se muestran dos posibles configuraciones de una varilla metálica (en rojo) unida a dos soportes (en azul). En la parte (a), la varilla está apoyada en los extremos, y hay condiciones de frontera fija en ambos extremos. Dada la frecuencia adecuada, la varilla puede entrar en resonancia con una longitud de onda igual a la longitud de la varilla, con nodos en cada extremo. En la parte (b), la varilla está apoyada en posiciones a un cuarto de la longitud de cada extremo de la varilla, y hay condiciones de frontera libre en ambos extremos. Dada la frecuencia adecuada, esta varilla también puede entrar en resonancia con una longitud de onda igual a la longitud de la varilla, pero hay antinodos en cada extremo. Si tiene problemas para visualizar la longitud de onda en esta figura, recuerde que la longitud de onda se puede medir entre dos puntos idénticos cualesquiera y considere la Figura 16.33.

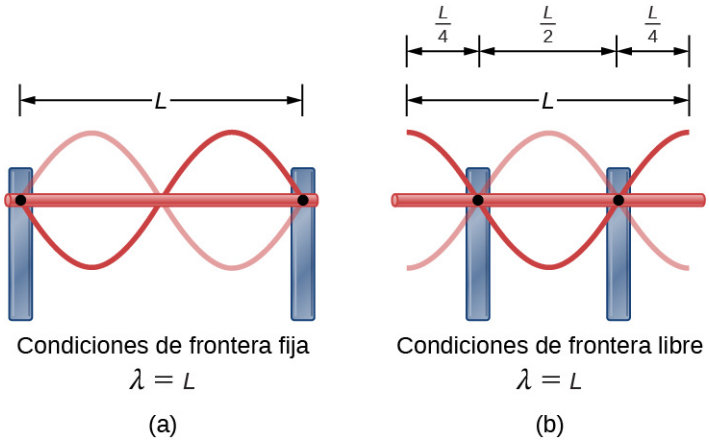


FIGURA 16.32 (a) Una varilla metálica de longitud L (rojo) apoyada en dos soportes (azul) en cada extremo. Cuando se impulsa a la frecuencia adecuada, la varilla puede resonar con una longitud de onda igual a la longitud de la varilla con un nodo en cada extremo. (b) La misma varilla metálica de longitud L (rojo) apoyada en dos soportes (azul) en una posición a un cuarto de la longitud de la varilla desde cada extremo. Cuando se impulsa a la frecuencia adecuada, la varilla puede resonar con una longitud de onda igual a la longitud de la varilla con un antinodo en cada extremo.

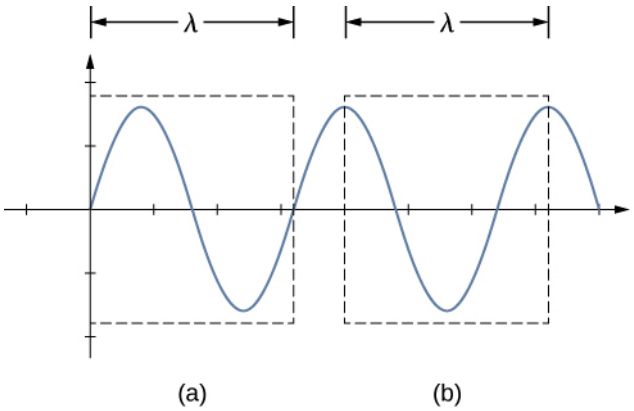


FIGURA 16.33 La longitud de onda se puede medir entre los dos puntos de repetición más cercanos. En la onda sobre una cuerda, esto significa la misma altura y pendiente. (a) La longitud de onda se mide entre los dos puntos más cercanos donde la altura es cero y la pendiente es máxima y positiva. (b) La longitud de onda se mide entre dos

puntos idénticos donde la altura es máxima y la pendiente es cero.

Tenga en cuenta que el estudio de las ondas estacionarias puede llegar a ser bastante complejo. En la Figura 16.32(a), el modo $n = 2$ de la onda estacionaria se muestra y resulta en una longitud de onda igual a L. En esta configuración, el modo $n = 1$ también habría sido posible con una onda estacionaria igual a $2L$. ¿Es posible obtener el modo $n = 1$ para la configuración mostrada en la parte (b)? La respuesta es no. En esta configuración hay condiciones adicionales establecidas más allá de las condiciones de frontera. Dado que la varilla está montada en un punto a un cuarto de la longitud de cada lado, debe existir allí un nodo, y esto limita los posibles modos de ondas estacionarias que se pueden crear. Dejamos como ejercicio para el lector considerar si son posibles otros modos de ondas estacionarias. Hay que tener en cuenta que cuando un sistema se impulsa a una frecuencia que no hace que el sistema resuene, pueden seguir produciéndose vibraciones, pero la amplitud de las vibraciones será mucho menor que la amplitud en la resonancia.

Un campo de la ingeniería mecánica utiliza el sonido producido por las piezas que vibran en sistemas mecánicos complejos para solucionar problemas de los sistemas. Suponga que una pieza de un automóvil resuena a la frecuencia del motor del automóvil y provoca vibraciones no deseadas. Esto puede hacer que el motor falle prematuramente. Los ingenieros utilizan micrófonos para grabar el sonido producido por el motor, luego utilizan una técnica llamada análisis de Fourier para hallar las frecuencias de sonido producidas con grandes amplitudes y luego buscan en la lista de piezas del automóvil para hallar una pieza que resuene a esa frecuencia. La solución puede ser tan sencilla como cambiar la composición del material utilizado o modificar la longitud de la pieza en cuestión.

Existen otros numerosos ejemplos de resonancia en ondas estacionarias en el mundo físico. El aire en un tubo, como el que se encuentra en un instrumento musical como la flauta, puede ser forzado a entrar en resonancia y producir un sonido agradable, como comentamos en la sección Sonido.

En otras ocasiones, la resonancia puede causar graves problemas. Un examen más detallado de los terremotos proporciona pruebas de las condiciones adecuadas para resonancia, ondas estacionarias e interferencias constructiva y destructiva. Un edificio puede vibrar durante varios segundos con una frecuencia de impulso que coincida con la frecuencia natural de vibración del edificio, lo que produce una resonancia que hace que un edificio se derrumbe mientras los edificios vecinos no lo hacen. A menudo, los edificios de cierta altura son devastados mientras que otros más altos permanecen intactos. La altura del edificio coincide con la condición para establecer una onda estacionaria para esa altura concreta. También es importante la extensión del techo. A menudo, se observa que gimnasios, supermercados e iglesias sufren daños mientras las viviendas individuales sufren muchos menos daños. Los techos con grandes superficies apoyadas solo en los bordes resuenan a las frecuencias de los terremotos, lo que provoca su colapso. Cuando las ondas sísmicas recorren la superficie de la Tierra y se reflejan en las rocas más densas, se produce interferencia constructiva en determinados puntos. A menudo, las áreas más cercanas al epicentro no sufren daños, mientras que las más alejadas sí.

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

antinodo localización de la máxima amplitud en las ondas estacionarias
condición de frontera fija cuando el medio en una frontera se fija en su lugar para que no pueda moverse
condición de frontera libre existe cuando el medio en la frontera es libre de moverse
ecuación lineal de onda ecuación que describe las ondas que se generan de una fuerza lineal restauradora del medio; cualquier función que sea una solución de la ecuación de onda describe una onda que se mueve en la dirección x positiva o en la dirección x negativa con una rapidez de onda constante v
frecuencia fundamental la frecuencia más baja que producirá una onda estacionaria
función de onda modelo matemático de la posición de las partículas del medio
intensidad(*I*) potencia por unidad de área
interferencia superposición de dos o más ondas en el mismo punto y tiempo
interferencia constructiva cuando dos ondas llegan al mismo punto exactamente en fase; es decir, las crestas de las dos ondas están precisamente alineadas al igual que las depresiones
interferencia destructiva cuando dos ondas idénticas llegan al mismo punto exactamente desfasadas; es decir, alineadas con precisión de cresta a depresión
longitud de onda distancia entre partes idénticas adyacentes de una onda
modo normal posible patrón de onda estacionaria para una onda estacionaria en una cuerda
nodo punto en el que la cuerda no se mueve; de forma más general, los nodos están donde la alteración de la onda es cero en una onda estacionaria
número de onda $\frac{2\pi}{\lambda}$
onda alteración que se desplaza desde su origen y lleva energía
onda estacionaria onda que puede rebotar hacia arriba y hacia abajo en una región determinada y que termina convirtiéndose en estacionaria
onda longitudinal onda en la que la alteración es paralela a la dirección de propagación
onda mecánica onda que se rige por las leyes de Newton y requiere un medio
onda transversal onda en la que la alteración es perpendicular a la dirección de propagación
pulso alteración única que se mueve a través de un medio y transfiere energía pero no masa
rapidez de onda magnitud de la velocidad de la onda
sobretono frecuencia que produce ondas estacionarias y es mayor que la frecuencia fundamental
superposición fenómeno que se produce cuando dos o más ondas llegan al mismo punto
velocidad de la onda velocidad a la que se mueve la alteración; también llamada velocidad de propagación

Ecuaciones Clave

Rapidez de onda
$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Densidad lineal de masa
$$\mu = \frac{\text{masa de la cuerda}}{\text{longitud de la cuerda}}$$

Velocidad de una onda o pulso en una cuerda en tensión
$$|v| = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Velocidad de una onda de compresión en un fluido
$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Onda resultante de la superposición de dos ondas sinusoidales
que son idénticas excepto por un deslizamiento de fase
$$y_R(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Número de onda	$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$
Rapidez de onda	$v = \frac{\omega}{k}$
Una onda periódica	$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx \mp \omega t + \phi)$
Fase de una onda	$kx \mp \omega t + \phi$
La ecuación lineal de onda	$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v_w^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$
Potencia promediada en una longitud de onda	$P_{\text{ave}} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 v$
Intensidad	$I = \frac{P}{A}$
Intensidad de una onda esférica	$I = \frac{P}{4\pi r^2}$
Ecuación de una onda estacionaria	$y(x,t) = [2A \operatorname{sen}(kx)] \cos(\omega t)$
Longitud de onda para condiciones de frontera simétricas	$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5...$
Frecuencia para condiciones de frontera simétricas	$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5...$

Resumen

16.1 Ondas en desplazamiento

- Una onda es una alteración que se desplaza desde el punto de origen con una velocidad de la onda v.
- Una onda tiene una longitud de onda λ, lo cual es la distancia entre partes idénticas adyacentes de la onda. La velocidad y la longitud de onda se relacionan con la frecuencia y el periodo de la onda mediante $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$.
- Las ondas mecánicas son alteraciones que se desplazan a través de un medio y se rigen por las leyes de Newton.
- Las ondas electromagnéticas son alteraciones de los campos eléctricos y magnéticos, y no necesitan un medio.
- Las ondas de materia son una parte central de la mecánica cuántica y están asociadas a protones, electrones, neutrones y otras partículas fundamentales que se encuentran en la naturaleza.
- Una onda transversal tiene una alteración perpendicular a la dirección de propagación de la onda, mientras que una onda longitudinal tiene una alteración paralela a su dirección de propagación.

16.2 Matemáticas de las ondas

- Una onda es una oscilación (de una cantidad física) que se desplaza a través de un medio, acompañada de una transferencia de energía. La energía se transfiere de un punto a otro en la dirección del movimiento de la onda. Las partículas del medio oscilan hacia arriba y hacia abajo, hacia adelante y hacia atrás, o ambas hacia arriba y hacia abajo y hacia adelante y hacia atrás, alrededor de una posición de equilibrio.
- Una representación de una onda sinusoidal en el tiempo $t = 0{,}00$ s se puede modelar como una función de posición. Dos ejemplos de estas funciones son $y(x) = A \operatorname{sen}(kx + \phi)$ y $y(x) = A \cos(kx + \phi)$.
- Dada una función de una onda que es una representación de esta, y que solo es una función de la posición x, el movimiento del pulso o de la onda que se mueve a velocidad constante se puede modelar con la función, al

sustituir x por $x \mp vt$. El signo menos es para el movimiento en dirección positiva y el signo más para la dirección negativa.
- La función de onda viene dada por $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$ donde $k = 2\pi/\lambda$ se define como el número de onda, $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular y ϕ es el deslizamiento de fase.
- La onda se mueve con una velocidad constante v_w, donde las partículas del medio oscilan alrededor de una posición de equilibrio. La velocidad constante de una onda se puede calcular mediante $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$.

16.3 Rapidez de onda en una cuerda estirada

- La velocidad de una onda en una cuerda depende de la densidad lineal de la cuerda y de su a tensión. La densidad lineal es la masa por unidad de longitud de la cuerda.
- En general, la velocidad de una onda depende de la raíz cuadrada de la relación entre las propiedades elásticas y la propiedad inercial del medio.
- La rapidez de una onda a través de un fluido es igual a la raíz cuadrada de la relación entre el módulo de compresibilidad del fluido y su densidad.
- La velocidad del sonido a través del aire en $T = 20°\text{C}$ es, aproximadamente, $v_s = 343{,}00\ \text{m/s}$.

16.4 La energía y la potencia de una onda

- La energía y la potencia de una onda son proporcionales al cuadrado de la amplitud de la onda y al cuadrado de su frecuencia angular.
- La potencia promediada en el tiempo de una onda sinusoidal en una cuerda se calcula mediante $P_{\text{ave}} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v$, donde μ es la densidad lineal de masa de la cuerda, A es la amplitud de la onda, ω es la frecuencia angular de la onda y v es la velocidad de la onda.
- La intensidad se define como la potencia dividida entre el área. En una onda esférica el área es $A = 4\pi r^2$ y la intensidad es $I = \frac{P}{4\pi r^2}$. A medida que la onda se aleja de una fuente, la energía se conserva, pero la intensidad disminuye a medida que aumenta el área.

16.5 Interferencia de ondas

- La superposición es la combinación de dos ondas en el mismo lugar.
- La interferencia constructiva se produce por la superposición de dos ondas idénticas que están en fase.
- La interferencia destructiva se produce por la superposición de dos ondas idénticas que están a $180°$ (π radianes) fuera de fase.
- La onda que resulta de la superposición de dos ondas sinusoidales que solo se diferencian por un deslizamiento de fase es una onda con una amplitud que depende del valor de la diferencia de fase.

16.6 Ondas estacionarias y resonancia

- Una onda estacionaria es la superposición de dos ondas que produce una onda que varía en amplitud pero no se propaga.
- Los nodos son puntos sin movimiento en las ondas estacionarias.
- Un antinodo es el lugar de máxima amplitud de una onda estacionaria.
- Los modos normales de una onda en una cuerda son los posibles patrones de ondas estacionarias. La frecuencia más baja que producirá una onda estacionaria se conoce como frecuencia fundamental. Las frecuencias más altas que producen ondas estacionarias se denominan sobretonos.

Preguntas Conceptuales

16.1 Ondas en desplazamiento

1. Dé un ejemplo de onda transversal y otro de onda longitudinal, teniendo en cuenta las direcciones relativas de la alteración y de la propagación de la onda en cada uno de ellos.

2. Una onda transversal sinusoidal tiene una longitud de onda de 2,80 m. Una parte de la cuerda en una posición x tarda 0,10 s en pasar de una posición máxima de $y = 0{,}03$ m a la posición de equilibrio $y = 0$. ¿Cuáles son el periodo, la frecuencia y la rapidez de onda?

3. ¿Cuál es la diferencia entre la velocidad de propagación y la frecuencia de una onda mecánica? ¿Uno afecta la longitud de onda o lo hacen ambos? Si es así, ¿cómo?

4. Considera un resorte estirado, como un Slinky®. El resorte estirado puede soportar ondas longitudinales y transversales. ¿Cómo podría producir ondas transversales en el resorte? ¿Cómo podría producir ondas longitudinales en el resorte?

5. Considere una onda producida en un resorte

estirado al sujetar un extremo y agitarlo hacia arriba y hacia abajo. ¿La longitud de onda depende de la distancia a la que mueva la mano hacia arriba y hacia abajo?

6. Se produce una onda transversal sinusoidal en un resorte estirado, que tiene un periodo *(T)*. Cada sección del resorte se mueve perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda, en movimiento armónico simple con una amplitud *(A)*. ¿Cada sección oscila con el mismo periodo que la onda o con un periodo diferente? Si la amplitud de la onda transversal se duplicara pero el periodo se mantuviera igual, ¿su respuesta sería la misma?

7. Una onda electromagnética, como la luz, no necesita un medio. ¿Se le ocurre algún ejemplo que apoye esta afirmación?

16.2 Matemáticas de las ondas

8. Si usted agita el extremo de un resorte estirado hacia arriba y hacia abajo 10 veces por segundo, ¿cuáles serían la frecuencia y el periodo de la onda sinusoidal producida en el resorte?

9. Si usted agita el extremo de un resorte estirado hacia arriba y hacia abajo con una frecuencia *f*, podría producir una onda transversal sinusoidal que se propaga por el resorte. ¿El número de onda depende de la frecuencia con la que se agita el resorte?

10. ¿La velocidad vertical de un segmento de una cuerda horizontal estirada por la que se propaga una onda transversal sinusoidal depende de la rapidez de onda de la onda transversal?

11. En esta sección hemos considerado las ondas que se mueven a una rapidez de onda constante. ¿El medio se acelera?

12. Si deja caer un guijarro en un estanque puede observar que se producen varias ondulaciones concéntricas, no una sola ondulación. ¿Por qué cree que es así?

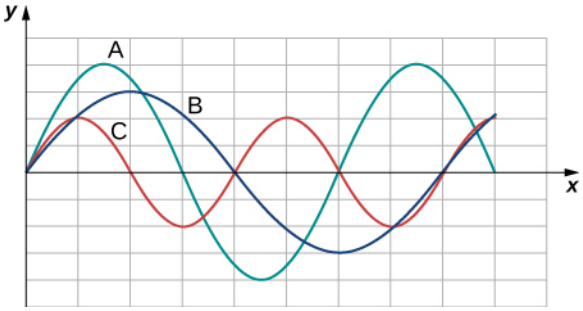
16.3 Rapidez de onda en una cuerda estirada

13. Si la tensión de una cuerda se multiplicara por cuatro, ¿en qué factor aumentaría la rapidez de onda de una onda en la cuerda?

14. ¿Se mueve más rápido una onda sonora en agua de mar o en agua dulce si tanto el agua de mar como el agua dulce están a la misma temperatura y la onda sonora se mueve cerca de la superficie? $\left(\rho_{\text{w}} \approx 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \rho_{\text{s}} \approx 1.030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, B_{\text{w}} = 2{,}15 \times 10^9 \text{ Pa}, B_{\text{s}} = 2{,}34 \times 10^9 \text{ Pa}\right)$

15. Las guitarras tienen cuerdas de diferente densidad lineal de masa. Si la cuerda de menor densidad y la de mayor densidad están a la misma tensión, ¿qué cuerda soportaría ondas con mayor rapidez de onda?

16. A continuación se muestran tres ondas que se enviaron por una cuerda en diferentes tiempos. La tensión de la cuerda permanece constante. (a) Ordene las ondas de menor a mayor longitud de onda. (b) Ordene las ondas de menor a mayor frecuencia.



17. A veces, se oye el zumbido de las líneas eléctricas conectadas por dos postes cuando el viento las hace oscilar. La rapidez de las ondas en las líneas eléctricas depende de la tensión. ¿Qué proporciona la tensión en las líneas eléctricas?

18. Se empalman dos cuerdas, una con baja densidad de masa y otra con alta densidad lineal. El extremo de mayor densidad se ata a un poste de laboratorio y un estudiante sostiene el extremo libre de la cuerda de baja densidad de masa. El estudiante da una vuelta a la cuerda y envía un pulso por las cuerdas. Si la tensión es la misma en ambas cuerdas, ¿el pulso se desplaza a la misma velocidad de la onda en ambas cuerdas? Si no es así, ¿dónde se desplaza más rápido, en la cuerda de baja densidad o en la de alta densidad?

16.4 La energía y la potencia de una onda

19. Considere una cuerda en tensión con una densidad lineal de masa constante. Una onda sinusoidal con una frecuencia angular y una amplitud producidas por alguna fuerza impulsora externa. Si la frecuencia de la fuerza impulsora se reduce a la mitad de la frecuencia original, ¿cómo se ve afectada la potencia promediada en el tiempo de la onda? Si la amplitud de la fuerza impulsora se reduce a la mitad, ¿cómo se ve afectada la potencia promediada en el tiempo? Explique su

respuesta.

20. Las ondas acuáticas circulares disminuyen su amplitud a medida que se alejan del lugar donde se deja caer una roca. Explique por qué.

21. En una onda transversal en una cuerda, el movimiento de la cuerda es perpendicular al movimiento de la onda. Si esto es así, ¿cómo es posible mover la energía a lo largo de la cuerda?

22. La energía del sol calienta la parte de la Tierra orientada al sol durante las horas de luz. ¿Por qué los polos norte y sur son fríos mientras que el ecuador es bastante cálido?

23. La intensidad de una onda esférica disminuye a medida que la onda se aleja de la fuente. Si la intensidad de la onda en la fuente es I_0, ¿a qué distancia de la fuente disminuirá la intensidad en un factor de nueve?

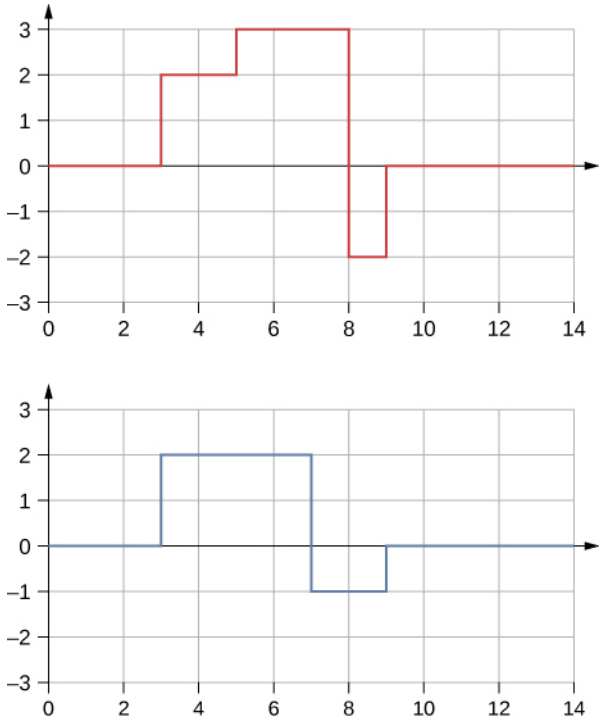
16.5 Interferencia de ondas

24. Una onda sinusoidal incidente se envía a lo largo de una cuerda que está fijada a la pared con una rapidez de onda *v*. La onda se refleja en el extremo de la cuerda. Describa la onda reflejada.

25. Una cuerda de una longitud de 2,00 m con una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}006$ kg/m está unida al extremo de una cuerda de 2,00 m de longitud con una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}012$ kg/m. El extremo libre de la cuerda de mayor densidad se fija a la pared, y un estudiante sujeta el extremo libre de la cuerda de menor densidad manteniendo la tensión constante en ambas cuerdas. El estudiante envía un pulso por la cuerda. Describa lo que ocurre en la interfase entre las dos cuerdas.

26. Dos estudiantes sostienen un resorte largo y apretado; cada uno sostiene un extremo. Cada estudiante da una vuelta al extremo y envía una longitud de onda de una onda sinusoidal por el resorte en direcciones opuestas. Cuando las ondas se juntan en el centro, ¿qué aspecto tiene la onda?

27. Muchos de los temas tratados en este capítulo son útiles más allá de los temas de ondas mecánicas. Es difícil concebir una onda mecánica con ángulos agudos, pero podría calcular una forma de onda de este tipo en su clase de electrónica digital, como se muestra a continuación. Puede tratarse de una señal procedente de un dispositivo conocido como convertidor analógico-digital, en el que una señal de voltaje continuo se convierte en una señal discreta o de una grabación digital de sonido. ¿Cuál es el resultado de la superposición de las dos señales?



28. Dos estudiantes sostienen una cuerda de densidad lineal de masa constante estirada; cada uno sostiene un extremo. La tensión de la cuerda es constante. Los agitan la cuerda y envían ondas a través de esta. (a) ¿Es posible que las ondas tengan diferentes velocidades de onda? (b) ¿Es posible que las ondas tengan diferentes frecuencias? (c) ¿Es posible que las ondas tengan diferentes longitudes de onda?

16.6 Ondas estacionarias y resonancia

29. Un fabricante de camiones descubre que un puntal del motor está fallando prematuramente. Un ingeniero de sonido determina que el puntal resuena a la frecuencia del motor y sospecha que este podría ser el problema. ¿Cuáles son las dos posibles características del puntal que se pueden modificar para corregir el problema?

30. ¿Por qué los techos de gimnasios e iglesias parecen fallar más que los de las viviendas familiares cuando se produce un terremoto?

31. Puede poner las copas de vino en resonancia al humedecer y frotar el dedo alrededor del borde de la copa. ¿Por qué?

32. Los aparatos de aire acondicionado se colocan, a veces, en el techo de las casas de la ciudad. En ocasiones, los aparatos de aire acondicionado provocan un zumbido indeseable en los pisos superiores de las viviendas. ¿Por qué ocurre esto? ¿Qué se puede hacer para reducir el zumbido?

33. Considere una onda estacionaria modelada como $y(x,t) = 4{,}00\ \text{cm}\ \text{sen}\left(3\ \text{m}^{-1}x\right)\cos\left(4\ \text{s}^{-1}t\right)$. ¿Hay un nodo o un antinodo en $x = 0{,}00$ m? ¿Qué pasa con una onda estacionaria modelada como $y(x,t) = 4{,}00\ \text{cm}\ \text{sen}\left(3\ \text{m}^{-1}x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(4\ \text{s}^{-1}t\right)$? ¿Hay un nodo o un antinodo en la posición $x = 0{,}00$ m?

Problemas

16.1 Ondas en desplazamiento

34. Las tormentas en el Pacífico Sur pueden crear ondas que llegan hasta la costa de California, a 12.000 km de distancia. ¿Cuánto tiempo tardan en recorrer esta distancia si se desplazan a 15,0 m/s?

35. Las ondas en una piscina se propagan a 0,75 m/s. Usted chapotea en el agua en un extremo de la piscina y observa cómo la onda va al extremo opuesto, se refleja y vuelve en 30,00 s. ¿A qué distancia está el otro extremo de la piscina?

36. Las ráfagas de viento crean ondas en el océano que tienen una longitud de onda de 5,00 cm y se propagan a 2,00 m/s. ¿Cuál es su frecuencia?

37. ¿Cuántas veces por minuto se balancea un barco sobre las ondas del mar que tienen una longitud de onda de 40,0 m y una velocidad de propagación de 5,00 m/s?

38. Los exploradores de un campamento sacuden el puente de cuerda que acaban de cruzar y observan que las crestas de las ondas están a 8,00 m de distancia. Si agitan el puente dos veces por segundo, ¿cuál es la velocidad de propagación de las ondas?

39. ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas que se crean en una piscina si chapotea con la mano a una frecuencia de 2,00 Hz y las ondas se propagan a una rapidez de onda de 0,800 m/s?

40. ¿Cuál es la longitud de onda de un terremoto que lo sacude con una frecuencia de 10,0 Hz y llega a otra ciudad a 84,0 km de distancia en 12,0 s?

41. Las ondas de radio se transmiten a través del espacio vacío a la velocidad de la luz $\left(v = c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}\right)$ por la nave espacial *Voyager* tienen una longitud de onda de 0,120 m. ¿Cuál es su frecuencia?

42. Sus oídos son capaces de diferenciar los sonidos que llegan a cada uno con una diferencia de 0,34 ms, lo que resulta útil para determinar de dónde procede el sonido de baja frecuencia. (a) Suponga que una fuente de sonido de baja frecuencia se sitúa a la derecha de una persona, cuyos oídos están separados 18 cm aproximadamente, y que la velocidad del sonido generado es de 340 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurre entre la llegada del sonido al oído derecho y la llegada del sonido al oído izquierdo? (b) Suponga que la misma persona está buceando y que una fuente de sonido de baja frecuencia está a la derecha del buceador. ¿Cuánto tiempo transcurre entre la llegada del sonido al oído derecho y la llegada del sonido al oído izquierdo si la velocidad del sonido en el agua es de 1.500 m/s? (c) ¿Qué es lo significativo del intervalo de tiempo de las dos situaciones?

43. (a) Los sismógrafos miden los tiempos de llegada de los terremotos con una precisión de 0,100 s. Para obtener la distancia al epicentro del terremoto, los geólogos comparan los tiempos de llegada de las ondas S y P, las cuales se desplazan a diferentes velocidades. Si las ondas S y P llegan a 4,00 y 7,20 km/s, respectivamente, en la región considerada, ¿con qué precisión puede determinarse la distancia a la fuente del terremoto? (b) Las ondas sísmicas procedentes de las detonaciones subterráneas de bombas nucleares se pueden usar para localizar el lugar de las pruebas y detectar violaciones de sus prohibiciones. Discuta si su respuesta a (a) implica un límite serio para dicha detección (note también que la incertidumbre es mayor si existe una incertidumbre en las velocidades de propagación de las ondas S y P).

44. Una niña exploradora está haciendo una caminata de 10,00 km para ganar una insignia de mérito. Durante la caminata, ve un acantilado a cierta distancia. Desea calcular el tiempo necesario para llegar al acantilado. Sabe que la velocidad del sonido es de 343 metros por segundo aproximadamente. Grita y comprueba que el eco vuelve después de 2,00 segundos aproximadamente. Si puede recorrer 1,00 km en 10 minutos, ¿cuánto tardaría en llegar al acantilado?

45. A un ingeniero de control de calidad de una compañía de sartenes se le pide que califique una nueva línea de sartenes con revestimiento antiadherente. El revestimiento debe tener un grosor de 1,00 mm. Un método para comprobar el grosor es que el ingeniero elija un porcentaje

de las sartenes fabricadas, retire el revestimiento y mida el grosor con un micrómetro. Este método es un método de ensayo destructivo. En vez de eso, el ingeniero decide que cada sartén se someta a una prueba con un método no destructivo. Se utiliza un transductor ultrasónico que produce ondas sonoras con una frecuencia de $f = 25\ \text{kHz}$. Las ondas sonoras se envían a través del revestimiento y se reflejan en la interfase entre el revestimiento y la sartén metálica, y se registra el tiempo. La longitud de onda de las ondas ultrasónicas en el revestimiento es de 0,076 m. ¿Cuál debe ser el tiempo registrado si el revestimiento tiene el grosor correcto (1,00 mm)?

16.2 Matemáticas de las ondas

46. Un pulso se puede describir como una alteración de onda única que se desplaza por un medio. Considere un pulso que se define en el tiempo $t = 0{,}00\ \text{s}$ por la ecuación $y(x) = \frac{6{,}00\ \text{m}^3}{x^2 + 2{,}00\ \text{m}^2}$ centrado alrededor de $x = 0{,}00\ \text{m}$. El pulso se mueve con una velocidad de $v = 3{,}00\ \text{m/s}$ en la dirección x positiva. (a) ¿Cuál es la amplitud del pulso? (b) ¿Cuál es la ecuación del pulso como una función de posición y de tiempo? (c) ¿Dónde está el pulso centrado en el tiempo $t = 5{,}00\ \text{s}$?

47. Una onda transversal en una cuerda se modela con la función de onda $y(x,t) = (0{,}20\ \text{cm})\text{sen}\left(2{,}00\ \text{m}^{-1}x - 3{,}00\ \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{16}\right)$. ¿Cuál es la altura de la cuerda con respecto a la posición de equilibrio en una posición $x = 4{,}00\ \text{m}$ y un tiempo $t = 10{,}00\ \text{s}$?

48. Considere la función de onda $y(x,t) = (3{,}00\ \text{cm})\text{sen}\left(0{,}4\ \text{m}^{-1}x + 2{,}00\ \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{10}\right)$. ¿Cuáles son el periodo, la longitud de onda, la velocidad y el deslizamiento de fase inicial de la onda modelada por la función de onda?

49. Un pulso se define como $y(x,t) = e^{-2{,}77\left(\frac{2{,}00(x - 2{,}00\ \text{m/s}(t))}{5{,}00\ \text{m}}\right)^2}$. Use una hoja de cálculo, u otro programa informático, para trazar el pulso como la altura del medio y como una función de posición x. Trazar el pulso en los tiempos $t = 0{,}00\ \text{s}$ y $t = 3{,}00\ \text{s}$ en el mismo gráfico. ¿Dónde está centrado el pulso en el tiempo $t = 3{,}00\ \text{s}$? Use su hoja de cálculo para comprobar su respuesta.

50. Se modela una onda en el tiempo $t = 0{,}00\ \text{s}$ con una función de onda que depende de la posición. La ecuación es $y(x) = (0{,}30\ \text{m})\text{sen}\left(6{,}28\ \text{m}^{-1}x\right)$. La onda recorre una distancia de 4,00 metros en 0,50 s en la dirección x positiva. Escriba una ecuación para la onda como función de posición y tiempo.

51. Una onda se modela con la función $y(x,t) = (0{,}25\ \text{m})\cos\left(0{,}30\ \text{m}^{-1}x - 0{,}90\ \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{3}\right)$. Calcule (a) amplitud, (b) número de onda, (c) frecuencia angular, (d) rapidez de onda, (e) deslizamiento de fase inicial, (f) longitud de onda y (g) periodo de la onda.

52. Una onda oceánica superficial tiene una amplitud de 0,60 m y la distancia de depresión a depresión es de 8,00 m. Se mueve a una rapidez de onda constante de 1,50 m/s propagándose en la dirección x positiva. En $t = 0$, el desplazamiento del agua en $x = 0$ es cero y v_y es positivo. (a) Suponiendo que la onda se puede modelar como una onda sinusoidal, escriba una función de onda para modelarla. (b) Use una hoja de cálculo para trazar la función de onda en los tiempos $t = 0{,}00\ \text{s}$ y $t = 2{,}00\ \text{s}$ en el mismo gráfico. Comprueba que la onda se mueve 3,00 m en esos 2,00 s.

53. Una onda se modela por la función de onda $y(x,t) = (0{,}30\ \text{m})\text{sen}\left[\frac{2\pi}{4{,}50\ \text{m}}\left(x - 18{,}00\frac{\text{m}}{\text{s}}t\right)\right]$. ¿Cuáles son la amplitud, la longitud de onda, la rapidez de onda, el periodo y la frecuencia de la onda?

54. Una onda transversal en una cuerda se describe con la función de onda $y(x,t) = (0{,}50\ \text{cm})\text{sen}\left(1{,}57\ \text{m}^{-1}x - 6{,}28\ \text{s}^{-1}t\right)$. (a) ¿Cuál es la velocidad de la onda? (b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad máxima de la cuerda perpendicular a la dirección del movimiento?

55. Un nadador en el océano observa un día que las ondas de la superficie del océano son periódicas y se asemejan a una onda sinusoidal. El nadador estima que la distancia vertical entre la cresta y la depresión de cada onda es de 0,45 m aproximadamente, y la distancia entre cada cresta es de 1,8 m aproximadamente. El nadador cuenta que pasan 12 ondas cada dos minutos. Determine la función de onda armónica simple que describiría estas ondas.

56. Considere una onda descrita por la función de onda $y(x,t) = 0{,}3\ \text{m}\ \text{sen}\left(2{,}00\ \text{m}^{-1}x - 628{,}00\ \text{s}^{-1}t\right)$. (a) ¿Cuántas crestas pasan por un observador

en un lugar fijo durante 2,00 minutos? (b) ¿Qué distancia ha recorrido la onda durante ese tiempo?

57. Considere dos ondas definidas por las funciones de onda

$$y_1(x,t) = 0{,}50\text{ m sen}\left(\frac{2\pi}{3{,}00\text{ m}}x + \frac{2\pi}{4{,}00\text{ s}}t\right)\text{ y}$$

$$y_2(x,t) = 0{,}50\text{ m sen}\left(\frac{2\pi}{6{,}00\text{ m}}x - \frac{2\pi}{4{,}00\text{ s}}t\right).$$

¿Cuáles son las similitudes y las diferencias entre las dos ondas?

58. Considere dos ondas definidas por las funciones de onda

$$y_1(x,t) = 0{,}20\text{ m sen}\left(\frac{2\pi}{6{,}00\text{ m}}x - \frac{2\pi}{4{,}00\text{ s}}t\right)\text{ y}$$

$$y_2(x,t) = 0{,}20\text{ m cos}\left(\frac{2\pi}{6{,}00\text{ m}}x - \frac{2\pi}{4{,}00\text{ s}}t\right).$$

¿Cuáles son las similitudes y las diferencias entre las dos ondas?

59. La velocidad de una onda transversal en una cuerda es de 300,00 m/s, su longitud de onda es de 0,50 m y la amplitud es de 20,00 cm. ¿Cuánto tiempo necesita una partícula en la cuerda para recorrer una distancia de 5,00 km?

16.3 Rapidez de onda en una cuerda estirada

60. Las ondas transversales se envían a lo largo de una cuerda de 5,00 m de longitud con una velocidad de 30,00 m/s. La cuerda está bajo una tensión de 10,00 N. ¿Cuál es la masa de la cuerda?

61. Un cable de cobre tiene una densidad de $\rho = 8.920\text{ kg/m}^3$, un radio de 1,20 mm y una longitud L. El cable se mantiene con una tensión de 10,00 N. Se envían ondas transversales a través del cable. (a) ¿Cuál es la densidad lineal de masa del cable? (b) ¿Cuál es la rapidez de las ondas a través del cable?

62. Una cuerda de piano tiene una densidad lineal de masa de $\mu = 4{,}95 \times 10^{-3}$ kg/m. ¿A qué tensión se debe someter la cuerda para producir ondas con una rapidez de onda de 500,00 m/s?

63. Una cuerda con una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}0060$ kg/m está atada al techo. Se ata una masa de 20 kg al extremo libre de la cuerda. La cuerda se puntea, lo que envía un pulso a través de esta. Estime la velocidad del pulso a medida que se desplaza por la cuerda.

64. Una cuerda tiene una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}0075$ kg/m y una longitud de tres metros. La cuerda se puntea y el pulso tarda 0,20 s en llegar hasta el final. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

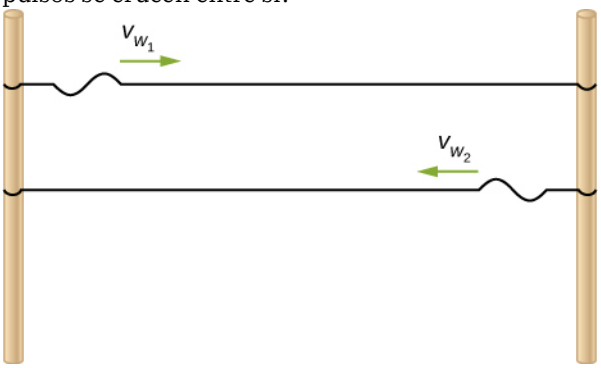
65. Una cuerda tiene una longitud de 3,00 m y una masa de 5,00 g. La cuerda se mantiene estirada con una tensión de 500,00 N aplicada a la cuerda. Se envía un pulso por la cuerda. ¿Cuánto tarda el pulso en recorrer los 3,00 m de la cuerda?

66. Dos cuerdas están atadas a postes, pero la primera cuerda es el doble de larga que la segunda. Si ambas cuerdas tienen las mismas tensión y mu, ¿cuál es la relación entre la velocidad del pulso de la onda de la primera cuerda y de la segunda?

67. Dos cuerdas están atadas a postes, pero la primera cuerda tiene el doble de densidad lineal de masa mu que la segunda. Si ambas cuerdas tienen la misma tensión, ¿cuál es la relación entre la velocidad del pulso de la onda de la primera cuerda y de la segunda?

68. Las ondas transversales recorren una cuerda cuya tensión es igual a 7,00 N con una velocidad de 20,00 m/s. ¿Qué tensión sería necesaria para una rapidez de onda de 25,00 m/s?

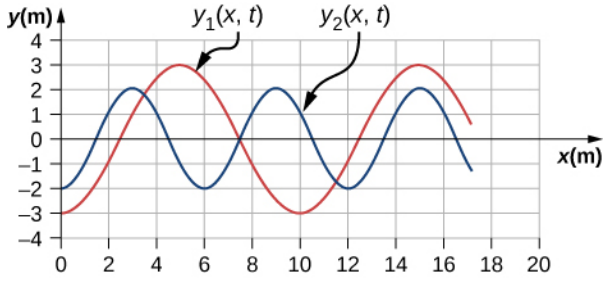
69. Dos cuerdas están atadas entre dos postes separados por una distancia de 2,00 m como se muestra a continuación, ambas con la misma tensión de 600,00 N. La cuerda 1 tiene una densidad lineal de $\mu_1 = 0{,}0025$ kg/m y la cuerda 2 tiene una densidad lineal de masa de $\mu_2 = 0{,}0035$ kg/m. Los pulsos de ondas transversales se generan simultáneamente en los extremos opuestos de las cuerdas. ¿Cuánto tiempo pasa antes de que los pulsos se crucen entre sí?



70. Dos cuerdas están atadas entre dos postes separados por una distancia de 2,00 metros como se muestra en la figura anterior, ambas cuerdas tienen una densidad lineal de $\mu_1 = 0{,}0025$ kg/m, la tensión en la cuerda 1 es de 600,00 N y en la cuerda 2 es de 700,00 N. Los pulsos de onda transversal se generan simultáneamente en los extremos opuestos de las cuerdas. ¿Cuánto tiempo pasa antes de que los pulsos se crucen entre sí?

71. La nota mi_4 se toca en un piano y tiene una frecuencia de $f = 393{,}88$. Si la densidad lineal de masa de esta cuerda del piano es $\mu = 0{,}012\ \text{kg/m}$ y la cuerda está sometida a una tensión de 1.000,00 N, ¿cuál es la velocidad de la onda en la cuerda y su longitud de onda?

72. Dos ondas transversales se desplazan a través de una cuerda estirada. La velocidad de cada onda es $v = 30{,}00\ \text{m/s}$. A continuación se muestra un trazado de la posición vertical como una función de la posición horizontal para el tiempo $t = 0{,}00\ \text{s}$. (a) ¿Cuál es la longitud de onda de cada una de las ondas? (b) ¿Cuál es la frecuencia de cada una de las ondas? (c) ¿Cuál es la velocidad vertical máxima de cada cuerda?



73. Una onda sinusoidal se desplaza por una cuerda estirada y horizontal con una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}060\ \text{kg/m}$. La velocidad vertical máxima de la onda es $v_{y\ \text{máx.}} = 0{,}30\ \text{cm/s}$. La onda se modela con la ecuación de onda $y(x,t) = A\ \text{sen}\left(6{,}00\ \text{m}^{-1}x - 24{,}00\ \text{s}^{-1}t\right)$. (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

74. La rapidez de una onda transversal en una cuerda es $v = 60{,}00\ \text{m/s}$ y la tensión en la cuerda es $F_T = 100{,}00\ \text{N}$. ¿Cuál debe ser la tensión para aumentar la rapidez de la onda a $v = 120{,}00\ \text{m/s}$?

16.4 La energía y la potencia de una onda

75. Una cuerda de 5 m de longitud y una masa de 90 g se mantienen con una tensión de 100 N. Una onda se desplaza por la cuerda que se modela como $y(x,t) = 0{,}01\ \text{m}\ \text{sen}\left(15{,}7\ \text{m}^{-1}x - 1170{,}12\ \text{s}^{-1}\right)$. ¿Cuál es la potencia en una longitud de onda?

76. Un ultrasonido de intensidad $1{,}50 \times 10^2\ \text{W/m}^2$ es producido por la cabeza rectangular de un dispositivo de imagen médico que mide 3,00 cm por 5,00 cm. ¿Cuál es su potencia de salida?

77. El altavoz de baja frecuencia de un equipo de música tiene una superficie de $A = 0{,}05\ \text{m}^2$ y produce 1 W de potencia acústica. (a) ¿Cuál es la intensidad en el altavoz? (b) Si el altavoz proyecta el sonido uniformemente en todas las direcciones, ¿a qué distancia del altavoz se encuentra la intensidad $0{,}1\ \text{W/m}^2$?

78. Para aumentar la intensidad de una onda en un factor de 50, ¿en qué factor debe aumentar la amplitud?

79. Para medir la intensidad de la luz solar se utiliza un dispositivo llamado medidor de insolación. Tiene un área de $100\ \text{cm}^2$ y registra 6,50 W. ¿Cuál es la intensidad en W/m^2?

80. La energía del sol llega a la parte superior de la atmósfera terrestre con una intensidad de $1.400\ \text{W/m}^2$. ¿Cuánto tiempo se tarda $1{,}80 \times 10^9\ \text{J}$ para llegar a un área de $1{,}00\ \text{m}^2$?

81. Suponga que usted dispone de un dispositivo que extrae energía de las ondas grandes del mar en proporción directa a su intensidad. Si el dispositivo produce 10,0 kW de potencia un día en que las olas grandes están a 1,20 m de altura, ¿cuánto producirá cuando estén a 0,600 m de altura?

82. Un conjunto fotovoltaico de (celda solar) es $10{,}0\%$ eficiente en la recogida de energía solar y su conversión en electricidad. Si la intensidad media de la luz solar un día es $70{,}00\ \text{W/m}^2$, ¿qué área debería tener su conjunto para recoger energía a razón de 100 W? b) ¿Cuál es el costo máximo del conjunto si debe amortizarse en dos años de funcionamiento con un promedio de 10,0 horas al día? Suponga que gana dinero a razón de 9,00 céntimos por kilovatio-hora.

83. Un micrófono que recibe un tono de sonido puro alimenta un osciloscopio, lo que produce una onda en su pantalla. Si la intensidad del sonido es originalmente $2{,}00 \times 10^{-5}\ \text{W/m}^2$, pero se sube hasta que la amplitud aumenta en $30{,}0\%$, ¿cuál es la nueva intensidad?

84. Una cuerda con una masa de 0,30 kg tiene una longitud de 4,00 m. Si la tensión en la cuerda es de 50,00 N y se induce en la cuerda una onda sinusoidal con una amplitud de 2,00 cm, ¿cuál debe ser la frecuencia para una potencia media de 100,00 W?

85. La potencia versus el tiempo para un punto de una cuerda ($\mu = 0{,}05\ \text{kg/m}$) en el que se induce una onda en desplazamiento sinusoidal se muestra en la figura anterior. La onda se modela con la ecuación de onda $y(x,t) = A\ \text{sen}\left(20{,}93\ \text{m}^{-1}x - \omega t\right)$. ¿Cuál es la frecuencia y la amplitud de la onda?

86. Una cuerda tiene una tensión de F_{T1}. La energía se transmite mediante una onda en la

cuerda a una tasa de P_1 mediante una onda de frecuencia f_1. ¿Cuál es la relación entre la nueva tasa de transmisión de energía P_2 a P_1 si se duplica la tensión?

87. Se golpea un diapasón de 250 Hz y la intensidad en la fuente es I_1 a una distancia de un metro de la fuente. (a) ¿Cuál es la intensidad a una distancia de 4,00 m de la fuente? (b) ¿A qué distancia del diapasón la intensidad es una décima parte de la intensidad en la fuente?

88. Un altavoz de sonido tiene un voltaje de $P = 120{,}00$ V y una corriente de $I = 10{,}00$ A. El consumo de potencia eléctrica es $P = IV$. Para probar el altavoz, se le aplica una señal de onda sinusoidal. Suponiendo que la onda sonora se mueve como una onda esférica y que toda la energía aplicada al altavoz se convierte en energía sonora, ¿a qué distancia del altavoz la intensidad es igual a $3{,}82\ \text{W/m}^2$?

89. La energía de una ondulación en un estanque es proporcional a la amplitud al cuadrado. Si la amplitud de la ondulación es de 0,1 cm a una distancia de la fuente de 6,00 metros, ¿cuál era la amplitud a una distancia de 2,00 metros de la fuente?

16.5 Interferencia de ondas

90. Considere dos ondas sinusoidales que se desplazan a lo largo de una cuerda, modeladas como $y_1(x,t) = 0{,}3\ \text{m}\ \text{sen}\left(4\ \text{m}^{-1}x + 3\ \text{s}^{-1}t\right)$ y $y_2(x,t) = 0{,}6\ \text{m}\ \text{sen}\left(8\ \text{m}^{-1}x - 6\ \text{s}^{-1}t\right)$. ¿Cuál es la altura de la onda resultante formada por la interferencia de las dos ondas en la posición $x = 0{,}5$ m en el tiempo $t = 0{,}2$ s?

91. Considere dos ondas sinusoidales que se desplazan a lo largo de una cuerda, modeladas como $y_1(x,t) = 0{,}3\ \text{m}\ \text{sen}\left(4\ \text{m}^{-1}x + 3\ \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{3}\right)$ y $y_2(x,t) = 0{,}6\ \text{m}\ \text{sen}\left(8\ \text{m}^{-1}x - 6\ \text{s}^{-1}t\right)$. ¿Cuál es la altura de la onda resultante formada por la interferencia de las dos ondas en la posición $x = 1{,}0$ m en el tiempo $t = 3{,}0$ s?

92. Considere dos ondas sinusoidales que se desplazan a lo largo de una cuerda, modeladas como $y_1(x,t) = 0{,}3\ \text{m}\ \text{sen}\left(4\ \text{m}^{-1}x - 3\ \text{s}^{-1}t\right)$ y $y_2(x,t) = 0{,}3\ \text{m}\ \text{sen}\left(4\ \text{m}^{-1}x + 3\ \text{s}^{-1}t\right)$. ¿Cuál es la función de onda de la onda resultante? [*Pista:* Use la identidad trigonométrica $\text{sen}(u \pm v) = \text{sen}\,u\cos v \pm \cos u\,\text{sen v}$].

93. Dos ondas sinusoidales se mueven a través de un medio en la misma dirección, ambas tienen amplitudes de 3,00 cm, una longitud de onda de 5,20 m y un periodo de 6,52 s, pero una tiene un deslizamiento de fase de un ángulo ϕ. ¿Cuál es el deslizamiento de fase si la onda resultante tiene una amplitud de 5,00 cm? *[Pista:* Use la identidad trigonométrica $\text{sen}\,u + \text{sen}\,v = 2\ \text{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$

94. Dos ondas sinusoidales se mueven a través de un medio en la dirección x positiva, ambas tienen amplitudes de 6,00 cm, una longitud de onda de 4,3 m y un periodo de 6,00 s, pero una tiene un deslizamiento de fase de un ángulo $\phi = 0{,}50$ rad. ¿Cuál es la altura de la onda resultante en un tiempo $t = 3{,}15$ s y una posición $x = 0{,}45$ m?

95. Dos ondas sinusoidales se mueven a través de un medio en la dirección x positiva, ambas con amplitudes de 7,00 cm, un número de onda de $k = 3{,}00\ \text{m}^{-1}$, una frecuencia angular de $\omega = 2{,}50\ \text{s}^{-1}$, y un periodo de 6,00 s, pero uno tiene un deslizamiento de fase de un ángulo $\phi = \frac{\pi}{12}$ rad. ¿Cuál es la altura de la onda resultante en un tiempo $t = 2{,}00$ s y una posición $x = 0{,}53$ m?

96. Considere dos ondas $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ que son idénticas excepto por un deslizamiento de fase que se propaga en el mismo medio. (a)¿Cuál es el deslizamiento de fase en radianes si la amplitud de la onda resultante es 1,75 veces la amplitud de las ondas individuales? (b) ¿Cuál es el deslizamiento de fase en grados? (c) ¿Cuál es el deslizamiento de fase como porcentaje de la longitud de onda individual?

97. Dos ondas sinusoidales, que son idénticas excepto por un deslizamiento de fase, se desplazan en la misma dirección. La ecuación de onda de la onda resultante es $y_R(x,t) = 0{,}70\ \text{m}\ \text{sen}\left(3{,}00\ \text{m}^{-1}x - 6{,}28\ \text{s}^{-1}t + \pi/16\ \text{rad}\right)$. ¿Cuáles son la frecuencia angular, el número de onda, la amplitud y el deslizamiento de fase de cada una de las ondas?

98. Dos ondas sinusoidales, que son idénticas excepto por un deslizamiento de fase, se desplazan en la misma dirección. La ecuación de onda de la onda resultante es $y_R(x,t) = 0{,}35\ \text{cm}\ \text{sen}\left(6{,}28\ \text{m}^{-1}x - 1{,}57\ \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{4}\right)$. ¿Cuáles son el periodo, la longitud de onda, la amplitud y el deslizamiento de fase de las ondas individuales?

99. Considere dos funciones de onda, $y_1(x,t) = 4{,}00\ \text{m}\ \text{sen}\left(\pi\ \text{m}^{-1}x - \pi\ \text{s}^{-1}t\right)$ y $y_2(x,t) = 4{,}00\ \text{m}\ \text{sen}\left(\pi\ \text{m}^{-1}x - \pi\ \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{3}\right)$. (a) En una hoja de cálculo trace las dos funciones de onda y la onda que resulta de la

superposición de las dos funciones de onda como una función de posición $(0{,}00 \leq x \leq 6{,}00\ \text{m})$ para el tiempo $t = 0{,}00\ \text{s}$. (b) ¿Cuáles son la longitud de onda y la amplitud de las dos ondas originales? (c) ¿Cuáles son la longitud de onda y la amplitud de la onda resultante?

100. Considere dos funciones de onda, $y_2\,(x,t) = 2{,}00\ \text{m}\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\text{m}^{-1}x - \frac{\pi}{3}\text{s}^{-1}t\right)$ y $y_2\,(x,t) = 2{,}00\ \text{m}\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\text{m}^{-1}x - \frac{\pi}{3}\text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{6}\right)$. (a) Verifique que $y_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$ es la solución de la onda que resulta de la superposición de las dos ondas. Haga una columna para x, y_1, y_2, $y_1 + y_2$ y $y_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$. Trace cuatro ondas como una función de posición, donde el rango de x es de 0 a 12 m.

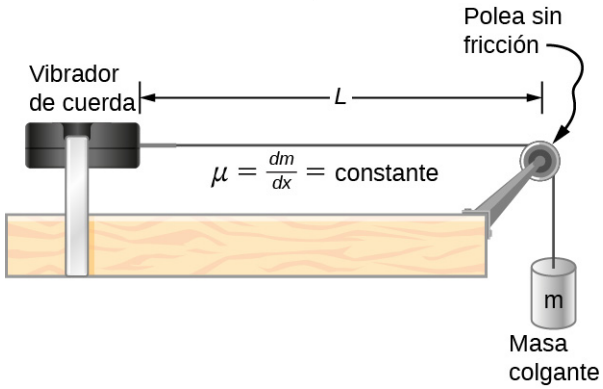
101. Considere dos funciones de onda que solo se diferencian por un deslizamiento de fase, $y_1\,(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ y $y_2\,(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$. Use las identidades trigonométricas $\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)$ y $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ para calcular una ecuación de onda para la onda resultante de la superposición de las dos ondas. ¿Le sorprende la función de onda resultante?

16.6 Ondas estacionarias y resonancia

102. Una onda que se desplaza por un Slinky® estirado a 4 m tarda 2,4 s en recorrer la longitud del Slinky y volver a recorrerla. (a) ¿Cuál es la rapidez de la onda? (b) Al usar el mismo Slinky estirado a la misma longitud se crea una onda estacionaria que consta de tres antinodos y cuatro nodos. ¿A qué frecuencia debe oscilar el Slinky?

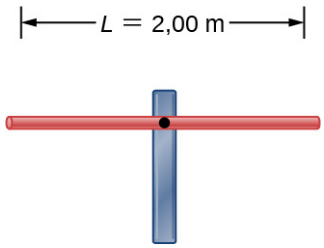
103. Una cuerda de 2 m de longitud se estira entre dos soportes con una tensión que produce una rapidez de onda igual a $v_w = 50{,}00\ \text{m/s}$. ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de los tres primeros modos que resuenan en la cuerda?

104. Considere el montaje experimental que se muestra a continuación. La longitud de la cuerda entre el vibrador de cuerda y la polea es $L = 1{,}00\ \text{m}$. La densidad lineal de la cuerda es $\mu = 0{,}006\ \text{kg/m}$. El vibrador de cuerda puede oscilar a cualquier frecuencia. La masa colgante es de 2,00 kg. (a)¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia del modo $n = 6$? (b) La cuerda hace oscilar el aire a su alrededor. ¿Cuál es la longitud de onda del sonido si la velocidad del sonido es $v_s = 343{,}00\ \text{m/s}$?



105. Un cable con una densidad lineal de $\mu = 0{,}2\ \text{kg/m}$ se cuelga de los postes telefónicos. La tensión del cable es de 500,00 N. La distancia entre postes es de 20 metros. El viento sopla a través de la línea, lo que hace que el cable resuene. Se produce un patrón de ondas estacionarias que tiene 4,5 longitudes de onda entre los dos postes. La velocidad del sonido a la temperatura actual $T = 20°\text{C}$ es 343,00 m/s. ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del zumbido?

106. Considere una varilla de longitud L montada en el centro a un soporte. Debe existir un nodo donde la varilla esté montada en un soporte, como se muestra a continuación. Dibuje los dos primeros modos normales de la varilla cuando es impulsada hacia la resonancia. Identifique la longitud de onda y la frecuencia necesaria para que la varilla entre en resonancia.



107. Considere dos funciones de onda $y\,(x,t) = 0{,}30\ \text{cm}\ \text{sen}\left(3\ \text{m}^{-1}x - 4\ \text{s}^{-1}t\right)$ y $y\,(x,t) = 0{,}30\ \text{cm}\ \text{sen}\left(3\ \text{m}^{-1}x + 4\ \text{s}^{-1}t\right)$. Escriba una función de onda para la onda estacionaria resultante.

108. Un cable de 2,40 m tiene una masa de 7,50 g y tiene una tensión de 160 N. El cable se sujeta rígidamente en ambos extremos y se pone a oscilar. (a) ¿Cuál es la rapidez de las ondas en el cable? La cuerda entra en resonancia con una frecuencia que produce una onda

estacionaria con una longitud de onda igual a 1,20 m. (b) ¿Cuál es la frecuencia utilizada para hacer entrar la cuerda en resonancia?

109. Una cuerda con una densidad lineal de masa de 0,0062 kg/m y una longitud de 3,00 m se coloca en el modo de resonancia $n = 100$. La tensión de la cuerda es de 20,00 N. ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia de la onda?

110. Una cuerda con una densidad lineal de masa de 0,0075 kg/m y una longitud de 6,00 m se coloca en el modo de resonancia $n = 4$ y se impulsa con una frecuencia de 100,00 Hz. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

111. Dos ondas sinusoidales con longitudes de onda y amplitudes idénticas se desplazan en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda y producen una onda estacionaria. La densidad lineal de masa de la cuerda es $\mu = 0{,}075$ kg/m y la tensión en la cuerda es $F_T = 5{,}00$ N. El intervalo de tiempo entre los casos de interferencia destructiva total es $\Delta t = 0{,}13$ s. ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas?

112. Una cuerda, fijada en ambos extremos, tiene una longitud de 5,00 m y una masa de 0,15 kg. La tensión de la cuerda es de 90 N. La cuerda está vibrando para producir una onda estacionaria a la frecuencia fundamental de la cuerda. (a) ¿Cuál es la rapidez de onda en la cuerda? (b) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria producida? (c) ¿Cuál es el periodo de la onda estacionaria?

113. Se fija una cuerda en ambos extremos. La masa de la cuerda es de 0,0090 kg y la longitud es de 3,00 m. La cuerda está sometida a una tensión de 200,00 N. La cuerda es impulsada por una fuente de frecuencia variable para producir ondas estacionarias en la cuerda. Calcule las longitudes de onda y la frecuencia de los cuatro primeros modos de las ondas estacionarias.

114. Las frecuencias de dos modos sucesivos de ondas estacionarias en una cuerda son 258,36 Hz y 301,42 Hz. ¿Cuál es la siguiente frecuencia por encima de 100,00 Hz que produciría una onda estacionaria?

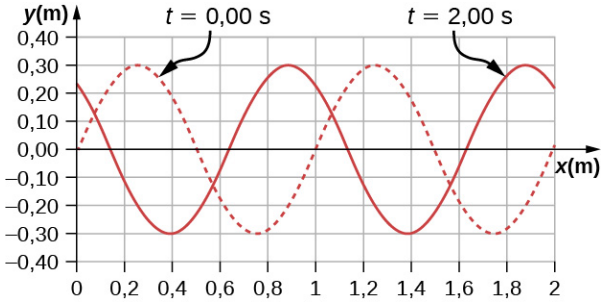
115. Una cuerda está fijada en ambos extremos a unos soportes separados por 3,50 m y tiene una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}005$ kg/m. La cuerda está sometida a una tensión de 90,00 N. Se produce una onda estacionaria en la cuerda con seis nodos y cinco antinodos. ¿Cuáles son la rapidez de onda, la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de la onda estacionaria?

116. Las ondas sinusoidales se envían por una cuerda de 1,5 m de longitud fijada en ambos extremos. Las ondas se reflejan en la dirección opuesta. La amplitud de la onda es de 4,00 cm. La velocidad de propagación de las ondas es de 175 m/s. El $n = 6$ modo de resonancia de la cuerda se produce. Escriba una ecuación para la onda estacionaria resultante.

Problemas Adicionales

117. Los equipos de ultrasonidos utilizados en la profesión médica usan ondas sonoras de una frecuencia superior al rango de la audición humana. Si la frecuencia del sonido producido por el ecógrafo es $f = 30$ kHz, ¿cuál es la longitud de onda de los ultrasonidos en el hueso si la velocidad del sonido en el hueso es $v = 3.000$ m/s?

118. A continuación se muestra el gráfico de una función de onda que modela una onda en el tiempo $t = 0{,}00$ s y $t = 2{,}00$ s. La línea punteada es la función de onda en el tiempo $t = 0{,}00$ s y la línea continua es la función en el tiempo $t = 2{,}00$ s. Estime la amplitud, la longitud de onda, la velocidad y el periodo de la onda.



119. La velocidad de la luz en el aire es $v = 3{,}00 \times 10^8$ m/s aproximadamente y la velocidad de la luz en el vidrio es $v = 2{,}00 \times 10^8$ m/s. Un láser rojo con una longitud de onda de $\lambda = 633{,}00$ nm hace incidir la luz en el vidrio, y parte de la luz roja se transmite a este. La frecuencia de la luz es la misma para el aire y el vidrio. (a) ¿Cuál es la frecuencia de la luz? (b) ¿Cuál es la longitud de

onda de la luz en el vidrio?

120. Una emisora de radio emite ondas de radio a una frecuencia de 101,7 MHz. Las ondas de radio se mueven por el aire a una velocidad aproximada a la de la luz en el vacío. ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas de radio?

121. Un bañista se encuentra a la altura de la cintura en el océano y observa que cada minuto pasan seis crestas de ondas superficiales periódicas. Las crestas tienen una separación de 16,00 metros. ¿Cuál es la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la rapidez de las ondas?

122. Un diapasón vibra y produce un sonido a una frecuencia de 512 Hz. La velocidad del sonido en el aire es $v = 343{,}00$ m/s si el aire está a una temperatura de 20,00°C. ¿Cuál es la longitud de onda del sonido?

123. Una lancha a motor se desplaza por un lago a una velocidad de $v_b = 15{,}00$ m/s. El barco rebota cada 0,50 s mientras se desplaza en la misma dirección que una onda. Rebota hacia arriba y hacia abajo cada 0,30 s mientras se desplaza en dirección opuesta a las ondas. ¿Cuál es la velocidad y la longitud de onda de la onda?

124. Use la ecuación lineal de onda para demostrar que la rapidez de onda de una onda modelada con la función de onda $y(x,t) = 0{,}20 \text{ m sen}\left(3{,}00 \text{ m}^{-1}x + 6{,}00 \text{ s}^{-1}t\right)$ es $v = 2{,}00$ m/s. ¿Cuáles son la longitud de onda y la rapidez de la onda?

125. Dadas las funciones de onda $y_1(x,t) = A \text{ sen}(kx - \omega t)$ y $y_2(x,t) = A \text{ sen}(kx - \omega t + \phi)$ con $\phi \neq \frac{\pi}{2}$, demuestre que $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ es una solución de la ecuación lineal de onda con una velocidad de la onda de $v = \frac{\omega}{k}$.

126. Una onda transversal en una cuerda se modela con la función de onda $y(x,t) = 0{,}10 \text{ m sen}\left(0{,}15 \text{ m}^{-1}x + 1{,}50 \text{ s}^{-1}t + 0{,}20\right)$. (a) Calcule la velocidad de la onda. (b) Calcule la posición en la dirección *y*, la velocidad perpendicular al movimiento de la onda y la aceleración perpendicular al movimiento de la onda de un pequeño segmento de la cuerda centrado en $x = 0{,}40$ m en el tiempo $t = 5{,}00$ s.

127. Una onda sinusoidal se desplaza por una cuerda estirada y horizontal con una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}060$ kg/m. La magnitud de la aceleración vertical máxima de la onda es $a_{y\,\text{máx.}} = 0{,}90 \text{ cm/s}^2$ y la amplitud de la onda es de 0,40 m. La cuerda está bajo una tensión de $F_T = 600{,}00$ N. La onda se mueve en la dirección *x* negativa. Escriba una ecuación para modelar la onda.

128. Una onda transversal en una cuerda ($\mu = 0{,}0030$ kg/m) se describe con la ecuación $y(x,t) = 0{,}30 \text{ m sen}\left(\frac{2\pi}{4{,}00 \text{ m}}\left(x - 16{,}00\frac{\text{m}}{\text{s}}t\right)\right)$. ¿Cuál es la tensión con la que se mantiene estirada la cuerda?

129. Una onda transversal en una cuerda horizontal ($\mu = 0{,}0060$ kg/m) se describe con la ecuación $y(x,t) = 0{,}30 \text{ m sen}\left(\frac{2\pi}{4{,}00 \text{ m}}(x - v_w t)\right)$. La cuerda está bajo una tensión de 300,00 N. ¿Cuáles son la rapidez de onda, el número de onda y la frecuencia angular de la onda?

130. Un estudiante sostiene un telémetro sónico barato y lo usa para hallar la distancia a la pared. El telémetro sónico emite una onda sonora. La onda sonora se refleja en la pared y vuelve al telémetro. El desplazamiento de ida y vuelta dura 0,012 s. El telémetro fue calibrado para su uso a temperatura ambiente $T = 20°\text{C}$, pero la temperatura de la habitación es en realidad $T = 23°\text{C}$. Suponiendo que el mecanismo de cronometraje sea perfecto, ¿qué porcentaje de error puede esperar el estudiante debido a la calibración?

131. Una onda en una cuerda es impulsada por un vibrador de cuerda, que oscila con una frecuencia de 100,00 Hz y una amplitud de 1,00 cm. El vibrador de cuerda funciona con un voltaje de 12,00 V y una corriente de 0,20 A. La potencia consumida por el vibrador de cuerda es $P = IV$. Suponga que el vibrador de cuerda es 90% eficiente para convertir la energía eléctrica en la energía asociada a las vibraciones de la cuerda. La cuerda tiene una longitud de 3,00 m y está sometida a una tensión de 60,00 N. ¿Cuál es la densidad lineal de masa de la cuerda?

132. Una onda en desplazamiento en una cuerda se modela mediante la ecuación de onda $y(x,t) = 3{,}00 \text{ cm sen}\left(8{,}00 \text{ m}^{-1}x + 100{,}00 \text{ s}^{-1}t\right)$. La cuerda está bajo una tensión de 50,00 N y tiene una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}008$ kg/m. ¿Cuál es la potencia media transferida por la onda en la cuerda?

133. Una onda transversal en una cuerda tiene una longitud de onda de 5,0 m, un periodo de 0,02 s y una amplitud de 1,5 cm. La potencia media transferida por la onda es de 5,00 W. ¿Cuál es

la tensión de la cuerda?

134. a) ¿Cuál es la intensidad de un rayo láser utilizado para quemar tejido canceroso que, cuando absorbe el 90,0%, pone 500,0 J de energía en un punto circular de 2,00 mm de diámetro en 4,00 s? (b) Analice cómo se compara esta intensidad con la intensidad media de la luz solar (aproximadamente 1kW/m^2) y las implicaciones que tendría si el rayo láser entrara en su ojo. Observe cómo su respuesta depende de la duración de la exposición.

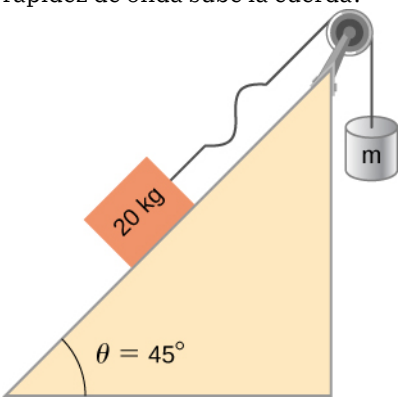
135. Considere dos funciones de onda periódicas, $y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$ y $y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$. (a) ¿Para qué valores de ϕ la onda que resulta de una superposición de las funciones de onda tendrá una amplitud de $2A$? (b) ¿Para qué valores de ϕ la onda que resulta de una superposición de las funciones de onda tendrá una amplitud de cero?

136. Considere dos funciones de onda periódicas, $y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$ y $y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$. (a) ¿Para qué valores de ϕ la onda que resulta de una superposición de las funciones de onda tendrá una amplitud de $2A$? (b) ¿Para qué valores de ϕ la onda que resulta de una superposición de las funciones de onda tendrá una amplitud de cero?

137. Una depresión de dimensiones 10,00 metros por 0,10 metros por 0,10 metros está parcialmente llena de agua. Las ondas acuáticas superficiales de pequeña amplitud se producen desde ambos extremos de la depresión mediante remos que oscilan en movimiento armónico simple. La altura de las ondas acuáticas se modela con dos ecuaciones de ondas sinusoidales, $y_1(x,t) = 0{,}3\text{ m}\,\text{sen}\left(4\text{ m}^{-1}x - 3\text{ s}^{-1}t\right)$ y $y_2(x,t) = 0{,}3\text{ m}\cos\left(4\text{ m}^{-1}x + 3\text{ s}^{-1}t - \frac{\pi}{2}\right)$. ¿Cuál es la función de onda de la onda resultante después de que las ondas se alcancen entre sí y antes de que lleguen al final de la depresión (es decir, suponiendo que solo hay dos ondas en la depresión e ignorando las reflexiones)? Use una hoja de cálculo para comprobar sus resultados. *(Pista:* Use las identidades trigonométricas $\text{sen}\,(u \pm v) = \text{sen}\,u\cos v \pm \cos u\,\text{sen}\,v$ y $\cos(u \pm v) = \cos u\cos v \mp \text{sen}\,u\,\text{sen}\,v$)

138. Un sismógrafo registra las ondas S y P de un terremoto con una diferencia de 20,00 s. Si recorren la misma trayectoria a rapidez de onda constante de $v_S = 4{,}00$ km/s y $v_P = 7{,}50$ km/s, ¿A qué distancia está el epicentro del terremoto?

139. Considere lo que se muestra a continuación. Una masa de 20,00 kg reposa sobre una rampa sin fricción inclinada a 45°. Una cuerda con una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}025$ kg/m está atada a la masa de 20,00 kg. La cuerda pasa por encima de una polea sin fricción de masa insignificante y está atada a una masa colgante (m). El sistema está en equilibrio estático. Se induce una onda en la cuerda y sube por la rampa. (a) ¿Cuál es la masa de la masa colgante (m)? (b) ¿A qué rapidez de onda sube la cuerda?



140. Considere la superposición de tres funciones de onda $y(x,t) = 3{,}00\text{ cm}\,\text{sen}\left(2\text{ m}^{-1}x - 3\text{ s}^{-1}t\right)$, $y(x,t) = 3{,}00\text{ cm}\,\text{sen}\left(6\text{ m}^{-1}x + 3\text{ s}^{-1}t\right)$, y $y(x,t) = 3{,}00\text{ cm}\,\text{sen}\left(2\text{ m}^{-1}x - 4\text{ s}^{-1}t\right)$. ¿Cuál es la altura de la onda resultante en la posición $x = 3{,}00$ m en el tiempo $t = 10{,}0$ s?

141. Una cuerda tiene una masa de 150 g y una longitud de 3,4 m. Uno de los extremos de la cuerda está fijado a un soporte de laboratorio y el otro está atado a un resorte con una constante de resorte de $k_s = 100$ N/m. El extremo libre del resorte está unido a otro poste de laboratorio. La tensión de la cuerda se mantiene gracias al resorte. Los postes del laboratorio están separados por una distancia que estira el resorte 2,00 cm. Se puntea la cuerda y un pulso la recorre. ¿Cuál es la rapidez de propagación del pulso?

142. En una cuerda bajo una tensión de 70,0 N se produce una onda estacionaria mediante dos ondas transversales sinusoidales idénticas, pero que se mueven en direcciones opuestas. La cuerda se fija en $x = 0{,}00$ m y $x = 10{,}00$ m. Los nodos aparecen en $x = 0{,}00$ m, 2,00 m,

4,00 m, 6,00 m, 8,00 m y 10,00 m. La amplitud de la onda estacionaria es de 3,00 cm. Los antinodos tardan 0,10 s en hacer una oscilación completa. (a) ¿Cuáles son las funciones de onda de las dos ondas sinusoidales que producen la onda estacionaria? (b) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración máximas de la cuerda, perpendicular a la dirección del movimiento de las ondas transversales, en los antinodos?

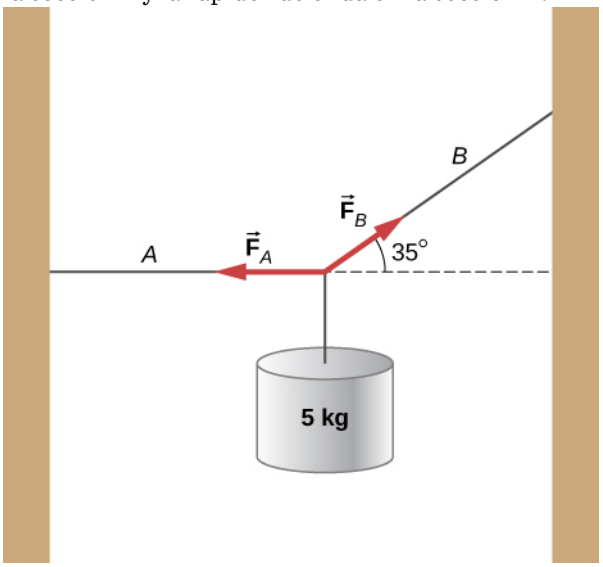
143. Una cuerda con una longitud de 4 m se mantiene con una tensión constante. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}006\ \text{kg/m}$. Las dos frecuencias de resonancia de la cuerda son 400 Hz y 480 Hz. No hay frecuencias de resonancia entre las dos frecuencias. (a) ¿Cuáles son las longitudes de onda de los dos modos resonantes? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

Problemas De Desafío

144. Un cable de cobre tiene un radio de 200 µm y una longitud de 5,0 m. El cable se coloca bajo una tensión de 3.000 N y el cable se estira un poco. Se pulsa el cable y un pulso lo recorre hacia abajo. ¿Cuál es la rapidez de propagación del pulso? (Suponga que la temperatura no cambia: $\left(\rho = 8{,}96\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, Y = 1{,}1 \times 10^{11}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)$.)

145. Un pulso que se mueve a lo largo del eje x puede ser modelado como la función de onda $y(x,t) = 4{,}00\ \text{m}e^{-\left(\frac{x+(2{,}00\ \text{m/s})t}{1{,}00\ \text{m}}\right)^2}$. (a)¿Cuál es la dirección y la velocidad de propagación del pulso? (b) ¿Qué distancia ha recorrido la onda en 3,00 s? (c) Grafique el pulso en una hoja de cálculo en el tiempo $t = 0{,}00$ s y $t = 3{,}00$ s para verificar su respuesta en la parte (b).

146. Una cuerda con una densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}0085\ \text{kg/m}$ se fija en ambos extremos. Una masa de 5,0 kg se cuelga de la cuerda, como se muestra a continuación. Si se envía un pulso a lo largo de la sección *A*, ¿cuál es la rapidez de onda en la sección *A* y la rapidez de onda en la sección *B*?



147. Considere dos funciones de onda $y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$ y $y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx + \omega t + \phi)$. ¿Cuál es la función de onda resultante de la interferencia de las dos ondas? *(Pista:* $\text{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ y $\phi = \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2}$).

148. La función de onda que modela una onda estacionaria viene dada por $y_R(x,t) = 6{,}00\ \text{cm}\,\text{sen}\left(3{,}00\ \text{m}^{-1}x + 1{,}20\ \text{rad}\right)\cos\left(6{,}00\ \text{s}^{-1}t + 1{,}20\ \text{rad}\right)$. ¿Cuáles son las dos funciones de onda que interfieren para formar esta función de onda? Trace las dos funciones de onda y la adición de la suma de las dos funciones de onda en $t = 1{,}00$ s para verificar su respuesta.

149. Considere dos funciones de onda $y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$ y $y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx + \omega t + \phi)$. La forma de onda resultante al sumar las dos funciones es $y_R = 2A\,\text{sen}\left(kx + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$. Considere el caso en el que $A = 0{,}03\ \text{m}^{-1}$, $k = 1{,}26\ \text{m}^{-1}$, $\omega = \pi\ \text{s}^{-1}$ y $\phi = \frac{\pi}{10}$. (a) ¿Dónde están los tres primeros nodos de la función de onda estacionaria que comienza en cero y se mueve en la dirección x positiva? (b) En una hoja de cálculo trace las dos funciones de onda y la función resultante en el tiempo $t = 1{,}00$ s para verificar su respuesta.

CAPÍTULO 17
Sonido



Figura 17.1 La audición es un importante sentido del ser humano que puede detectar frecuencias de sonido que oscilan entre 20 Hz y 20 kHz. Sin embargo, otras especies tienen rangos de audición muy diferentes. Los murciélagos, por ejemplo, emiten chasquidos con ultrasonidos que usan frecuencias superiores a los 20 kHz. Pueden detectar insectos cercanos al escuchar el eco de estos chasquidos ultrasónicos. Los ultrasonidos son importantes en varias aplicaciones humanas, como el sondeo de las estructuras interiores del cuerpo humano, la Tierra y el Sol. Los ultrasonidos también son útiles en la industria para hacer pruebas no destructivas (crédito: modificación de un trabajo de Angell Williams).

ESQUEMA DEL CAPITULO

17.1 Ondas sonoras
17.2 Velocidad del sonido
17.3 Intensidad del sonido
17.4 Modos normales de una onda sonora estacionaria
17.5 Fuentes de sonido musical
17.6 Batimientos
17.7 El Efecto Doppler
17.8 Ondas expansivas

INTRODUCCIÓN El sonido es un ejemplo de onda mecánica, concretamente, una onda de presión: las ondas sonoras se desplazan por el aire y otros medios en forma de oscilaciones de moléculas. La audición humana normal abarca un impresionante rango de frecuencias de 20 Hz a 20 kHz. Los sonidos inferiores a 20 Hz se denominan infrasonidos, mientras que los superiores a 20 kHz se llaman ultrasonidos. Algunos animales, como el murciélago que aparece en la Figura 17.1, pueden oír sonidos en el rango de los ultrasonidos.

Muchos de los conceptos tratados en la sección Ondas también tienen aplicaciones en el estudio del sonido. Por ejemplo, cuando una onda sonora encuentra una interfase entre dos medios con rapidez de onda

diferentes se produce la reflexión y la transmisión de la onda.

Los ultrasonidos tienen muchos usos en la ciencia, la ingeniería y la medicina. Los ultrasonidos se usan para hacer pruebas no destructivas en ingeniería, como la comprobación del grosor del revestimiento sobre el metal. En medicina, las ondas sonoras son mucho menos destructivas que los rayos X y se pueden usar para obtener imágenes del feto en el útero de la madre sin peligro para ninguno de los dos. Más adelante en este mismo capítulo hablaremos del Efecto Doppler, que se puede utilizar para determinar la velocidad de la sangre en las arterias o la velocidad del viento los sistemas meteorológicos.

17.1 Ondas sonoras

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la diferencia entre sonido y audición.
- Describir el sonido como una onda.
- Enumerar las ecuaciones usadas para modelar ondas sonoras.
- Describir compresión y rarefacciones en relación con el sonido.

El fenómeno físico del **sonido** es una alteración de la materia que se transmite desde su origen hacia el exterior. La **audición** es la percepción del sonido, al igual que la visión es la percepción de la luz visible. A escala atómica, el sonido es una alteración de los átomos mucho más ordenada que sus movimientos térmicos. En muchos casos, el sonido es una onda periódica y los átomos experimentan un movimiento armónico simple. Así, las ondas sonoras pueden inducir oscilaciones y efectos de resonancia (Figura 17.2).



FIGURA 17.2 Esta copa la destrozó una onda sonora de alta intensidad de la misma frecuencia que la frecuencia de resonancia de la copa (créditos: "||read||"/Flickr).

INTERACTIVO

En este video (https://openstax.org/l/21waveswineglas) se muestran las ondas en la superficie de una copa de vino impulsadas por las ondas sonoras de un altavoz. A medida que la frecuencia de la onda sonora se acerca a la frecuencia de resonancia de la copa de vino, aumentan la amplitud y la frecuencia de las ondas en la copa de vino. Cuando se alcanza la frecuencia de resonancia se rompe la copa.

Un altavoz produce una onda sonora mediante la oscilación de un cono, lo que provoca vibración de moléculas de aire. En la Figura 17.3, un altavoz vibra a una frecuencia y una amplitud constantes, lo que produce vibraciones en las moléculas de aire circundantes. Cuando el altavoz oscila de un lado a otro transfiere energía al aire, principalmente en forma de energía térmica. Pero una pequeña parte de la energía del altavoz se destina a comprimir y expandir el aire circundante, lo que crea presiones locales ligeramente más altas y más bajas. Estas compresiones (regiones de alta presión) y rarefacciones (regiones de baja presión) se desplazan como ondas de presión longitudinales que tienen la misma frecuencia que el altavoz: son la alteración que es una onda sonora (las ondas sonoras en el aire y en la mayoría de los fluidos son longitudinales, ya que los fluidos casi no tienen resistencia al corte. En los sólidos, las ondas sonoras pueden ser tanto transversales como longitudinales).

La Figura 17.3(a) muestra las compresiones y las rarefacciones, y también muestra un gráfico de presión manométrica versus distancia de un altavoz. Cuando el altavoz se mueve en la dirección x positiva empuja las moléculas de aire y las desplaza de sus posiciones de equilibrio. Cuando el altavoz se mueve en la dirección x negativa las moléculas de aire vuelven a su posición de equilibrio debido a una fuerza restauradora. Las moléculas de aire oscilan en movimiento armónico simple alrededor de sus posiciones de equilibrio, como se muestra en la parte (b). Observe que las ondas sonoras en el aire son longitudinales y, en la figura, la onda se propaga en la dirección x positiva y las moléculas oscilan paralelas a la dirección en que se propaga la onda.

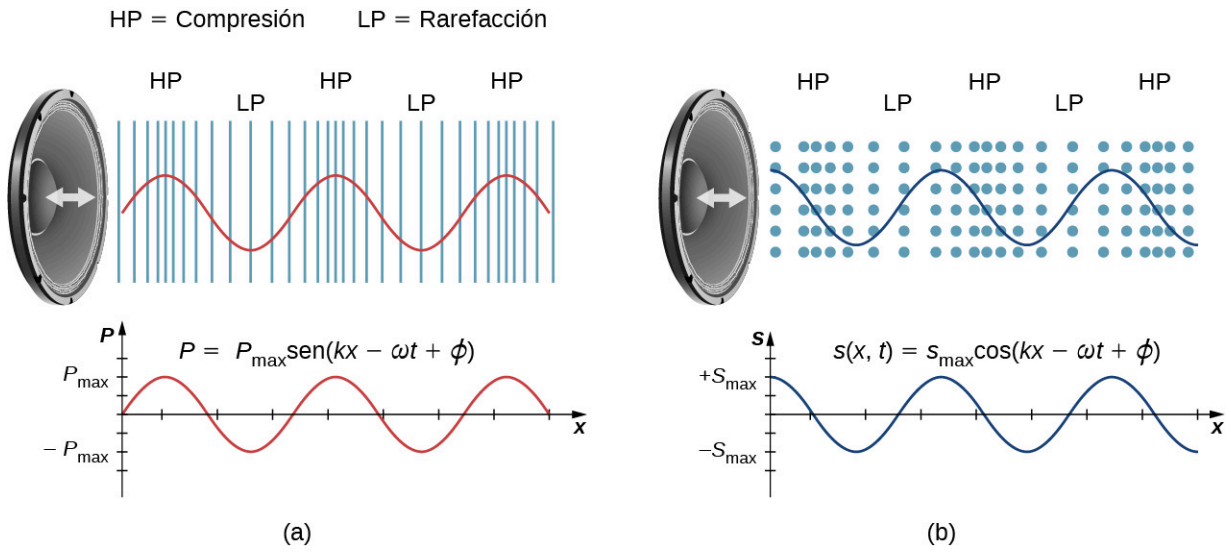


FIGURA 17.3 (a) El cono vibratorio de un altavoz, que se mueve en la dirección x positiva, comprime el aire que tiene delante y expande el que tiene detrás. Cuando el altavoz oscila crea otras compresión y rarefacción a medida que lo que está a la derecha se aleja del altavoz. Después de muchas vibraciones, varias compresiones y rarefacciones salen del altavoz en forma de onda sonora. En el gráfico rojo se muestra la presión manométrica del aire versus la distancia del altavoz. Las presiones solo varían ligeramente de la presión atmosférica para sonidos ordinarios. Observe que la presión manométrica se modela con una función seno, en la que las crestas de la función se alinean con las compresiones y las depresiones lo hacen con las rarefacciones. (b) Las ondas sonoras también se pueden modelar mediante el desplazamiento de las moléculas de aire. En el gráfico azul se muestra el desplazamiento de las moléculas de aire versus la posición del altavoz y se modela con una función coseno. Observe que el desplazamiento es cero para las moléculas en su posición de equilibrio y están centradas en las compresiones y las rarefacciones. Las compresiones se forman cuando las moléculas de ambos lados del equilibrio se desplazan hacia la posición de equilibrio. Las rarefacciones se forman cuando las moléculas se alejan de la posición de equilibrio.

Modelos que describen el sonido

El sonido se puede modelar como una onda de presión considerando el cambio de presión a partir de la

presión media,

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx.}} \operatorname{sen}(kx \mp \omega t + \phi). \quad \textbf{17.1}$$

Esta ecuación es similar a las ecuaciones de ondas periódicas vistas en la sección Ondas, donde ΔP es el cambio de presión, $\Delta P_{\text{máx.}}$ es el cambio máximo de presión, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ es la frecuencia angular y ϕ es la fase inicial. La rapidez de onda se puede determinar a partir de $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$. Las ondas sonoras también se pueden modelar en términos del desplazamiento de las moléculas de aire. El desplazamiento de las moléculas de aire se puede modelar mediante una función coseno:

$$s(x,t) = s_{\text{máx.}} \cos(kx \mp \omega t + \phi). \quad \textbf{17.2}$$

En esta ecuación, s es el desplazamiento y $s_{\text{máx.}}$ es el desplazamiento máximo.

En la figura no se muestra la amplitud de una onda sonora a medida que disminuye con la distancia desde su fuente, ya que la energía de la onda se propaga sobre un área cada vez mayor. La intensidad disminuye a medida que se aleja del altavoz, como se analizó en la sección Ondas. La energía también la absorben los objetos y se convierte en energía térmica por la viscosidad del aire. Además, durante cada compresión se transfiere un poco de calor al aire; durante cada rarefacción, se transfiere aún menos calor del aire, y estas transferencias de calor reducen la alteración organizada en movimientos térmicos aleatorios. Que la transferencia de calor de la compresión a la rarefacción sea significativa depende de la distancia a la que se encuentren, es decir, depende de la longitud de onda. La longitud de onda, la frecuencia, la amplitud y la velocidad de propagación son características importantes para el sonido, como lo son para todas las ondas.

17.2 Velocidad del sonido

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar la relación entre longitud de onda y frecuencia del sonido.
- Determinar la velocidad del sonido en diferentes medios.
- Derivar la ecuación de la velocidad del sonido en el aire.
- Determinar la velocidad del sonido en el aire para una temperatura dada.

El sonido, como todas las ondas, se desplaza a cierta velocidad y tiene las propiedades de frecuencia y longitud de onda. Puede observar una prueba directa de la velocidad del sonido cuando vea un espectáculo de fuegos artificiales (Figura 17.4). Verá el destello de una explosión mucho antes de oír su sonido y, posiblemente, sentirá la onda de presión, lo que implica tanto que el sonido se desplaza a una velocidad finita como que es mucho más lento que la luz.



FIGURA 17.4 Cuando explota un proyectil de fuegos artificiales percibimos la energía luminosa antes que la sonora porque el sonido se desplaza más lentamente que la luz.

La diferencia entre la velocidad de la luz y la del sonido también puede experimentarse durante una tormenta eléctrica. El destello de la luz se ve, a menudo, antes de escuchar el estruendo del trueno. Es posible que haya oído que si cuenta el número de segundos entre el destello y el sonido, puedes estimar la distancia a la fuente. Cada cinco segundos se convierte en una milla aproximadamente. La velocidad de cualquier onda está relacionada con su frecuencia y longitud de onda mediante

$$v = f\lambda, \tag{17.3}$$

donde v es la velocidad de la onda, f es su frecuencia y λ es su longitud de onda. De la sección Ondas recordamos que la longitud de onda es la longitud de la onda medida entre puntos idénticos consecutivos. Por ejemplo, para una onda acuática superficial o una onda sinusoidal en una cuerda, la longitud de onda se puede medir entre cualesquiera dos puntos secuenciales convenientes con la misma altura y pendiente, como entre dos crestas secuenciales o dos depresiones secuenciales. Del mismo modo, la longitud de onda de una onda sonora es la distancia entre partes secuenciales idénticas de una onda, por ejemplo, entre compresiones secuenciales (Figura 17.5). La frecuencia es la misma que la de la fuente y es el número de ondas que pasan por un punto por unidad de tiempo.

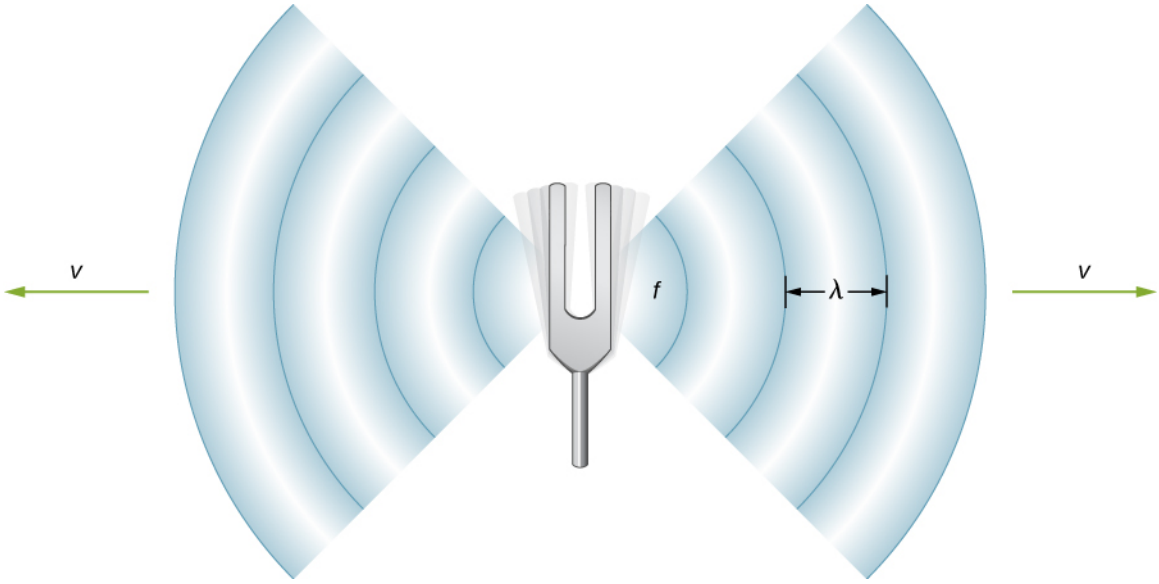


FIGURA 17.5 Una onda sonora emana de una fuente, como un diapasón, que vibra a una frecuencia *f*. Se propaga a una velocidad *v* y tiene una longitud de onda λ.

Velocidad del sonido en varios medios

En la Tabla 17.1 se muestra que la velocidad del sonido varía mucho en distintos medios. La velocidad del sonido en un medio depende de la rapidez con la que la energía vibratoria se puede transferir a través del medio. Por esto, la derivación de la velocidad del sonido en un medio depende del medio y de su estado. En general, la ecuación de la velocidad de una onda mecánica en un medio depende de la raíz cuadrada de la fuerza restauradora, o de las propiedades elásticas, dividida entre la propiedad inercial,

$$v = \sqrt{\frac{\text{propiedad elástica}}{\text{propiedad inercial}}}.$$

Además, las ondas sonoras satisfacen la ecuación de onda derivada de la sección Ondas,

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.$$

Recuerde de la sección Ondas que velocidad de una onda en una cuerda es igual a $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$, donde la fuerza restauradora es la tensión en la cuerda F_T y la densidad lineal μ es la propiedad inercial. En un fluido, la velocidad del sonido depende del módulo de compresibilidad y de la densidad,

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \qquad 17.4$$

La velocidad del sonido en un sólido depende del módulo de Young del medio y de la densidad,

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \qquad 17.5$$

En un gas ideal (vea el capítulo La teoría cinética de los gases (http://openstax.org/books/university-physics-volume-2/pages/2-introduction)) la ecuación de la velocidad del sonido es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T_{\text{K}}}{M}}, \qquad 17.6$$

donde γ es el índice adiabático, $R = 8{,}31\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$ es la constante universal de los gases ideales, T_K es la temperatura absoluta en kelvin y M es la masa molar. En general, cuanto más rígido (o menos comprimible) sea el medio, más rápida será la velocidad del sonido. Esta observación es análoga al hecho de que la frecuencia del movimiento armónico simple es directamente proporcional a la rigidez del objeto oscilante, medida por k, la constante del resorte. Cuanto mayor sea la densidad de un medio, más lenta será la velocidad del sonido. Esta observación es análoga al hecho de que la frecuencia de un movimiento armónico simple es inversamente proporcional a m, la masa del objeto que oscila. La velocidad del sonido en el aire es baja, ya que el aire es fácilmente comprimible. Como los líquidos y los sólidos son relativamente rígidos y muy difíciles de comprimir, la velocidad del sonido en estos medios suele ser mayor que en los gases.

Medio	*v* (m/s)
Gases a $0°C$	
Aire	331
Dióxido de carbono	259
Oxígeno	316
Helio	965
Hidrógeno	1.290
Líquidos a $20°C$	
Etanol	1.160
Mercurio	1.450
Agua dulce	1.480
Agua de mar	1.540
Tejido humano	1.540
Sólidos (longitudinales o de compresibilidad)	
Caucho vulcanizado	54
Polietileno	920
Mármol	3.810
Vidrio, Pyrex	5.640
Plomo	1.960
Aluminio	5.120
Acero	5.960

TABLA 17.1 Velocidad del sonido en varios medios

Dado que la velocidad del sonido depende de la densidad del material, y la densidad depende de la temperatura, existe una relación entre la temperatura en un medio determinado y la velocidad del sonido en el medio. Para el aire a nivel del mar, la velocidad del sonido viene dada por

$$v = 331\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{1+\frac{T_\text{C}}{273°\text{C}}} = 331\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{T_\text{K}}{273\text{ K}}} \qquad 17.7$$

donde la temperatura en la primera ecuación (denotada como T_C) está en grados Celsius y la temperatura en la segunda ecuación (denotada como T_K) está en kelvin. La velocidad del sonido en los gases está relacionada con la rapidez media de las partículas del gas, $v_\text{rms} = \sqrt{\frac{3k_\text{B}T}{m}}$, donde k_B es la constante de Boltzmann ($1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K) y m es la masa de cada partícula (idéntica) en el gas. Note que v se refiere a la velocidad de propagación coherente de una alteración (la onda), mientras que v_rms describe las velocidades de las partículas en direcciones aleatorias. Por tanto, es razonable que la velocidad del sonido en el aire y otros gases dependa de la raíz cuadrada de la temperatura. Aunque no es insignificante, no es una dependencia fuerte. En 0°C, la velocidad del sonido es de 331 m/s, mientras que en 20,0°C, es de 343 m/s, menos de un 4% de aumento. La Figura 17.6 muestra cómo un murciélago utiliza la velocidad del sonido para percibir distancias.

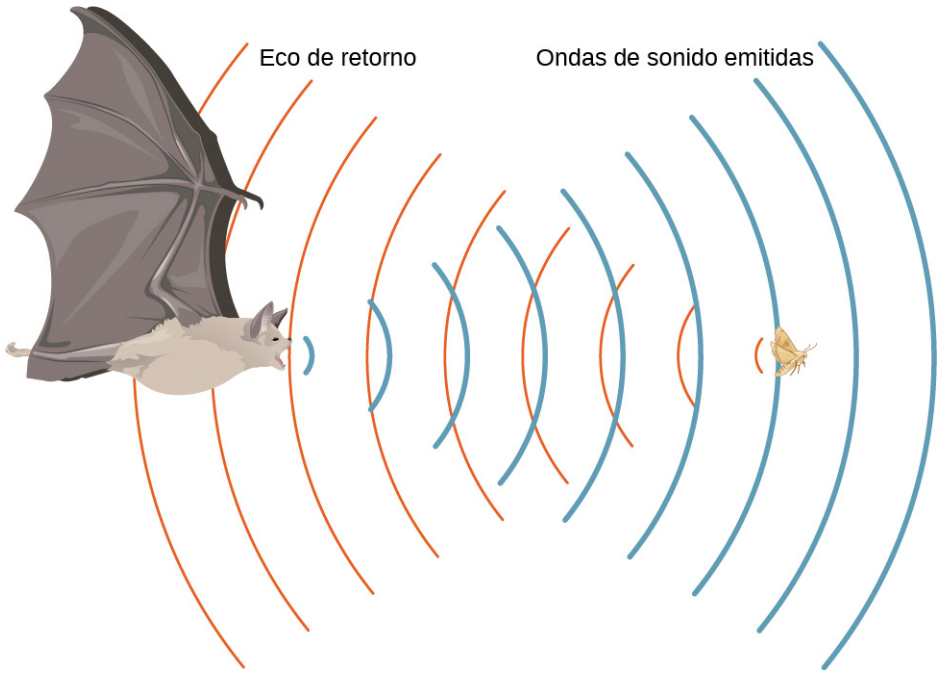


FIGURA 17.6 Un murciélago utiliza los ecos de sonido para orientarse y atrapar a sus presas. El tiempo de retorno del eco es directamente proporcional a la distancia.

Derivación de la velocidad del sonido en el aire

Como ya se ha dicho, la velocidad del sonido en un medio depende del medio y de su estado. La derivación de la ecuación de la velocidad del sonido en el aire parte de la ecuación de tasa de flujo de masa y de la ecuación de continuidad analizadas en la sección Mecánica de fluidos.

Considere el flujo de un fluido a través de un tubo con área de sección transversal A (Figura 17.7). La masa en un pequeño volumen de longitud x del tubo es igual a la densidad por el volumen, o $m = \rho V = \rho Ax$. La tasa de flujo de masa es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho V) = \frac{d}{dt}(\rho Ax) = \rho A\frac{dx}{dt} = \rho Av.$$

La ecuación de continuidad de la sección Mecánica de fluidos establece que la tasa de flujo de masa que entra en un volumen tiene que ser igual a la tasa de flujo de masa que sale del volumen,

$$\rho_{\text{entra}} A_{\text{entra}} v_{\text{entra}} = \rho_{\text{sale}} A_{\text{sale}} v_{\text{sale}}.$$

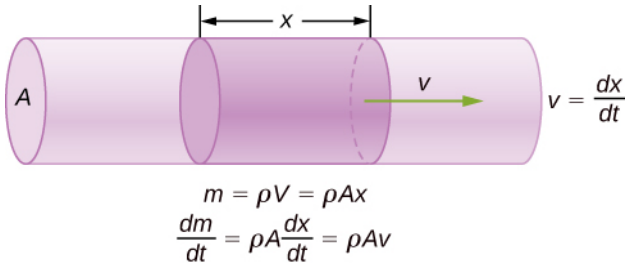


FIGURA 17.7 La masa de un fluido en un volumen es igual a la densidad por el volumen, $m = \rho V = \rho A x$. La tasa de flujo de masa es la derivada temporal de la masa.

Considere ahora una onda sonora que se mueve a través de una parcela de aire. Una parcela de aire es un pequeño volumen de aire con fronteras imaginarias (Figura 17.8). La densidad, la temperatura y la velocidad en un lado del volumen del fluido están dadas como ρ, T, v, y en el otro lado están $\rho + d\rho, T + dT, v + dv$.

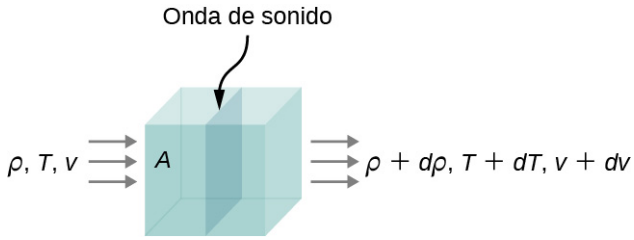


FIGURA 17.8 Una onda sonora se mueve a través de un volumen de fluido. La densidad, la temperatura y la velocidad del fluido cambian de un lado a otro.

La ecuación de continuidad establece que la tasa de flujo de masa que entra en el volumen es igual a la tasa de flujo de masa que sale del volumen, por lo que

$$\rho A v = (\rho + d\rho)\, A\, (v + dv)\,.$$

Esta ecuación se puede simplificar, al notar que el área se cancela y considerar que la multiplicación de dos infinitesimales es aproximadamente igual a cero: $d\rho\,(dv) \approx 0$,

$$\begin{aligned} \rho v &= (\rho + d\rho)\,(v + dv) \\ \rho v &= \rho v + \rho\,(dv) + (d\rho)\,v + (d\rho)\,(dv) \\ 0 &= \rho\,(dv) + (d\rho)\,v \\ \rho\, dv &= -v d\rho. \end{aligned}$$

La fuerza neta sobre el volumen de fluido (Figura 17.9) es igual a la suma de las fuerzas sobre el lado izquierdo y el lado derecho:

$$\begin{aligned} F_{\text{neto}} &= p\, dy\, dz - (p + dp)\, dy\, dz \\ &= p\, dy\, dz - p dy\, dz - dp\, dy\, dz \\ &= -dp\, dy\, dz \\ ma &= -dp\, dy\, dz. \end{aligned}$$

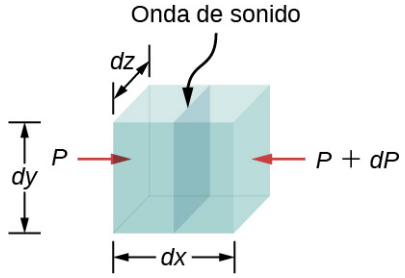


FIGURA 17.9 Una onda sonora se mueve a través de un volumen de fluido. La fuerza en cada lado se puede

calcular mediante la presión por el área.

La aceleración es la fuerza dividida entre la masa, y la masa es igual a la densidad por el volumen, $m = \rho V = \rho\, dx\, dy\, dz$. Tenemos

$$\begin{aligned} ma &= -dp\, dy\, dz \\ a &= -\frac{dp\, dy\, dz}{m} = -\frac{dp\, dy\, dz}{\rho\, dx\, dy\, dz} = -\frac{dp}{(\rho\, dx)} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{dp}{(\rho\, dx)} \\ dv &= -\frac{dp}{(\rho\, dx)}dt = -\frac{dp}{\rho}\frac{1}{v} \\ \rho v\, dv &= -dp. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación de continuidad $\rho\, dv = -v d\rho$, obtenemos

$$\begin{aligned} \rho v dv &= -dp \\ (-v d\rho)\, v &= -dp \\ v &= \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \end{aligned}$$

Considere una onda sonora que se mueve en el aire. Durante el proceso de compresión y expansión del gas, no se añade ni se elimina calor del sistema. Un proceso en el que no se añade ni se elimina calor del sistema se conoce como sistema adiabático. Los procesos adiabáticos se tratan con detalle en el capítulo La primera ley de termodinámica (http://openstax.org/books/university-physics-volume-2/pages/3-introduction), pero por ahora basta con decir que para un proceso adiabático, $pV^{\gamma} = \text{constante}$, donde p es la presión, V es el volumen y gamma (γ) es una constante que depende del gas. Para el aire, $\gamma = 1{,}40$. La densidad es igual al número de moles por la masa molar dividida entre el volumen, por lo que el volumen es igual a $V = \frac{nM}{\rho}$. El número de moles y la masa molar son constantes y se pueden absorber en la constante $p\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma} = \text{constante}$. Tomando el logaritmo natural de ambos lados se obtiene $\ln p - \gamma \ln \rho = \text{constante}$. Al diferenciar con respecto a la densidad, la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} \ln p - \gamma \ln \rho &= \text{constante} \\ \frac{d}{d\rho}(\ln p - \gamma \ln \rho) &= \frac{d}{d\rho}(\text{constante}) \\ \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho} - \frac{\gamma}{\rho} &= 0 \\ \frac{dp}{d\rho} &= \frac{\gamma p}{\rho}. \end{aligned}$$

Si el aire puede considerarse un gas ideal, podemos utilizar la ley de los gases ideales:

$$\begin{aligned} pV &= nRT = \frac{m}{M}RT \\ p &= \frac{m}{V}\frac{RT}{M} = \rho\frac{RT}{M}. \end{aligned}$$

Aquí M es la masa molar del aire:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} = \frac{\gamma\left(\rho\frac{RT}{M}\right)}{\rho} = \frac{\gamma RT}{M}.$$

Como la velocidad del sonido es igual a $v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, la velocidad es igual a

$$v = \sqrt{\frac{\gamma\, RT}{M}}.$$

Observe que la velocidad es más rápida a temperaturas más altas y más lenta para gases más pesados. Para el aire, $\gamma = 1{,}4$, $M = 0{,}02897\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$, y $R = 8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$. Si la temperatura es $T_{\text{C}} = 20°\text{C}\,(T = 293\ \text{K})$, la velocidad del sonido es $v = 343$ m/s.

La ecuación de la velocidad del sonido en el aire $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ se puede simplificar para obtener la ecuación de la velocidad del sonido en el aire como una función de temperatura absoluta:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}\left(\frac{273\text{ K}}{273\text{ K}}\right)} = \sqrt{\frac{(273\text{ K})\gamma R}{M}}\sqrt{\frac{T}{273\text{ K}}} \\ &\approx 331\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{T}{273\text{ K}}}. \end{aligned}$$

Una de las propiedades más importantes del sonido es que su velocidad es casi independiente de la frecuencia. Esta independencia es definitivamente cierta al aire libre para sonidos en el rango audible. Si esta independencia no fuera cierta, sin duda lo notaría en la música interpretada por una banda de música en un estadio de fútbol, por ejemplo. Suponga que los sonidos de alta frecuencia se desplazan más rápido; entonces, cuanto más lejos esté de la banda, el sonido de los instrumentos de tono grave irá más retrasado que el de los de tono agudo. Pero la música de todos los instrumentos llega en cadencia independiente de la distancia, por lo que todas las frecuencias deben desplazarse casi a la misma velocidad. Recuerde que

$$v = f\lambda.$$

En un medio determinado en condiciones fijas, v es constante, por lo que existe una relación entre f y λ; cuanto mayor sea la frecuencia, menor será la longitud de onda (Figura 17.10).



FIGURA 17.10 Como se desplazan a la misma velocidad en un medio determinado, los sonidos de baja frecuencia deben tener una mayor longitud de onda que los de alta frecuencia. Aquí, los sonidos de menor frecuencia son emitidos por el altavoz grande, llamado woofer, mientras que los sonidos de mayor frecuencia son emitidos por el altavoz pequeño, llamado altavoz de alta frecuencia (tweeter) (créditos: modificación de un trabajo de Jane Whitney).

EJEMPLO 17.1

Calcular longitudes de onda

Calcule las longitudes de onda de los sonidos en los extremos del rango audible, 20 y 20.000 Hz, en aire a

30,0°C (suponga que los valores de frecuencia tienen una precisión de dos cifras significativas).

Estrategia

Para calcular la longitud de onda a partir de la frecuencia, podemos usar $v = f\lambda$.

Solución

1. Identifique aspectos conocidos. El valor de v viene dado por
$$v = (331 \text{ m/s})\sqrt{\frac{T}{273 \text{ K}}}.$$
2. Convierta la temperatura en kelvin y luego introduzca la temperatura en la ecuación
$$v = (331 \text{ m/s})\sqrt{\frac{303 \text{ K}}{273 \text{ K}}} = 348{,}7 \text{ m/s}.$$
3. Resuelva la relación entre la velocidad y la longitud de onda para λ:
$$\lambda = \frac{v}{f}.$$
4. Introduzca la velocidad y la frecuencia mínima para obtener la longitud de onda máxima:
$$\lambda_{\text{máx.}} = \frac{348{,}7 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m}.$$
5. Introduzca la velocidad y la frecuencia máxima para obtener la longitud de onda mínima:
$$\lambda_{\text{min}} = \frac{348{,}7 \text{ m/s}}{20.000 \text{ Hz}} = 0{,}017 \text{ m} = 1{,}7 \text{ cm}.$$

Importancia

Porque el producto de f multiplicado por λ es igual a una constante, cuanto menor sea f, mayor será λ, y viceversa.

La velocidad del sonido puede cambiar cuando el sonido se desplaza de un medio a otro, pero la frecuencia suele ser la misma. Esto es similar a la frecuencia de una onda en una cuerda que es igual a la frecuencia de la fuerza que oscila la cuerda. Si v cambia y f permanece igual, entonces la longitud de onda λ debe cambiar. Es decir, porque $v = f\lambda$, cuanto mayor sea la velocidad de un sonido, mayor será su longitud de onda para una frecuencia determinada.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.1

Imagine que observa la explosión de dos proyectiles de fuegos artificiales. Oye la explosión de uno tan pronto como lo ve. Sin embargo, puede ver el otro proyectil durante varios milisegundos antes de oír la explosión. Explique por qué es así.

Aunque las ondas sonoras en un fluido son longitudinales, en un sólido se desplazan tanto como ondas longitudinales como transversales. Las ondas sísmicas, que son esencialmente ondas sonoras en la corteza terrestre producidas por terremotos, son un ejemplo interesante de cómo la velocidad del sonido depende de la rigidez del medio. Los terremotos producen ondas longitudinales y transversales, y estas se desplazan a diferentes velocidades. El módulo de compresibilidad del granito es mayor que su módulo de corte. Por ello, la rapidez de ondas longitudinales o de presión (ondas P) en terremotos en granito es significativamente mayor que la rapidez de ondas transversales o de corte (ondas S). Ambos tipos de ondas sísmicas se desplazan más lentamente en materiales menos rígidos, como los sedimentos. Las ondas P tienen una velocidad de 4 a 7 km/s, y las ondas S oscilan entre 2 y 5 km/s, siendo ambas más rápidas en materiales más rígidos. La onda P se adelanta progresivamente a la onda S a medida que se desplazan por la corteza terrestre. El tiempo entre las ondas P y S se utiliza habitualmente para determinar la distancia a su fuente, el epicentro del terremoto. Como las ondas S no atraviesan el núcleo líquido, se producen dos regiones de sombra (Figura 17.11).

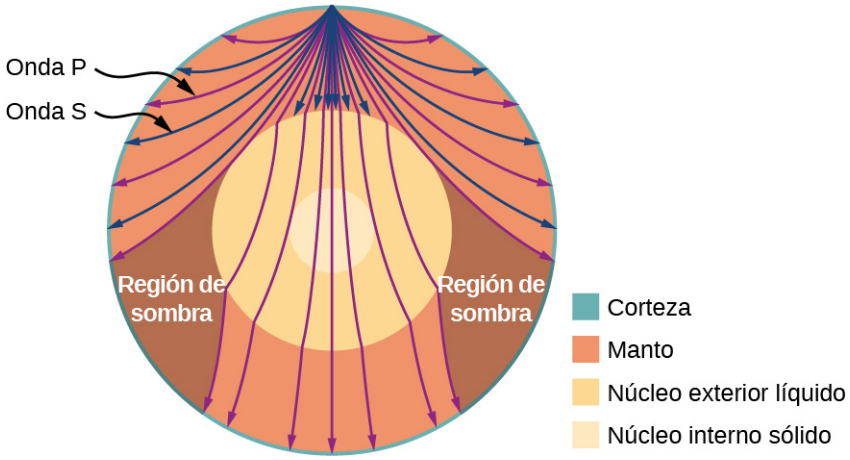


FIGURA 17.11 Los terremotos producen tanto ondas longitudinales (ondas P) como transversales (ondas S), y estas se desplazan a diferentes velocidades. Ambas ondas se desplazan a diferentes velocidades en las distintas regiones de la Tierra, pero en general, las ondas P se desplazan más rápido que las S. El núcleo líquido no puede soportar las ondas S, lo que produce regiones de sombra.

A medida que las ondas sonoras se alejan de un altavoz, o del epicentro de un terremoto, su potencia por unidad de área disminuye. Por eso el sonido es muy fuerte cerca de un altavoz y se vuelve menos fuerte a medida que se aleja de él. Esto también explica por qué puede haber una cantidad extrema de daños en el epicentro de un terremoto pero solo se sienten los temblores en áreas alejadas del epicentro. La potencia por unidad de área se conoce como intensidad, y en la siguiente sección estudiaremos cómo la intensidad depende de la distancia de la fuente.

17.3 Intensidad del sonido

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Definir el término intensidad.
- Explicar el concepto de nivel de intensidad del sonido.
- Describir cómo el oído humano traduce el sonido.

En un bosque tranquilo, a veces, se puede oír cómo cae una hoja al suelo. Pero cuando un automovilista que pasa tiene su equipo de música a todo volumen, usted no podrá escuchar lo que dice la persona que está a su lado en su automóvil (Figura 17.12). Todos estamos muy familiarizados con el volumen de los sonidos y somos conscientes de que el volumen está relacionado con la forma en que la fuente vibra energéticamente. La exposición a altos niveles de ruido es peligrosa para la audición, por lo que es importante que las personas que trabajan en entornos industriales utilicen protección auditiva. La cantidad física relevante es la intensidad del sonido, un concepto que es válido para todos los sonidos, estén o no en el rango audible.



FIGURA 17.12 El ruido en las carreteras abarrotadas, como esta en Delhi, hace que sea difícil oír a los demás a menos que griten (créditos: "Lingaraj, G. J."/Flickr).

En la sección Ondas definimos la intensidad como la potencia por unidad de área transportada por una onda. La potencia es la tasa a la que la energía se transfiere por la onda. En forma de ecuación, la intensidad I es

$$I = \frac{P}{A}, \tag{17.8}$$

donde P es la potencia que atraviesa un área A. La unidad del SI para I es $\mathrm{W/m^2}$. Si suponemos que la onda sonora es esférica, y que no se pierde energía en los procesos térmicos, la energía de la onda sonora se propaga en un área mayor a medida que aumenta la distancia, por lo que la intensidad disminuye. El área de una esfera es $A = 4\pi r^2$. A medida que la onda se propaga desde r_1 a r_2, la energía también se propaga en un más amplia:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ I_1 4\pi r_1^2 &= I_2 4\pi r_2^2; \end{aligned}$$

$$I_2 = I_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \tag{17.9}$$

La intensidad disminuye a medida que la onda se aleja de la fuente. En una relación inversa al cuadrado, como la intensidad, cuando usted duplica la distancia, la intensidad disminuye a una cuarta parte,

$$I_2 = I_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = I_1 \left(\frac{r_1}{2r_1}\right)^2 = \frac{1}{4} I_1 .$$

Generalmente, cuando se considera la intensidad de una onda sonora se toma la intensidad como el valor promediado en el tiempo de la potencia, denotado por $\langle P \rangle$, dividido entre el área,

$$I = \frac{\langle P \rangle}{A}. \tag{17.10}$$

La intensidad de una onda sonora es proporcional al cambio de presión al cuadrado e inversamente

proporcional a la densidad y a la velocidad. Considere una parcela de un medio inicialmente sin alteraciones y luego influenciado por una onda sonora en el tiempo *t*, como se muestra en la Figura 17.13.

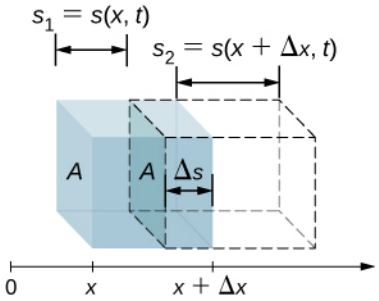


FIGURA 17.13 Una parcela de un medio sin alteraciones con un volumen $V = A\Delta x$ se muestra en azul. Una onda sonora se mueve a través del medio en el tiempo *t*, y la parcela se desplaza y se expande, como se muestra en las líneas punteadas. El cambio de volumen es $\Delta V = A\Delta s = A\,(s_2 - s_1)$, donde s_1 es el desplazamiento del borde dominante de la parcela y s_2 es el desplazamiento del borde rezagado de la parcela. En la figura, $s_2 > s_1$ y la parcela se expande, pero puede expandirse o comprimirse $(s_2 < s_1)$, según cuál parte de la onda sonora (compresión o rarefacción) se esté desplazando a través de la parcela.

A medida que la onda sonora se mueve a través de la parcela, esta se desplaza y puede expandirse o contraerse. Si $s_2 > s_1$, el volumen ha aumentado y la presión disminuye. Si $s_2 < s_1$, el volumen ha disminuido y la presión aumenta. El cambio de volumen es

$$\Delta V = A\Delta s = A\,(s_2 - s_1) = A\,(s\,(x + \Delta x, t) - s\,(x, t))\,.$$

El cambio fraccionario del volumen es el cambio de volumen dividido entre el volumen original:

$$\frac{dV}{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\,[s\,(x + \Delta x, t) - s\,(x, t)]}{A\Delta x} = \frac{\partial s\,(x, t)}{\partial x}.$$

El cambio fraccionario de volumen está relacionado con la fluctuación de la presión por el módulo de compresibilidad $\beta = -\frac{\Delta p(x,t)}{dV/V}$. Recuerde que el signo menos es necesario porque el volumen está *inversamente* relacionado con la presión (usamos la *p* minúscula para la presión para distinguirla de la potencia, denotada por *P*). Por lo tanto, el cambio de presión es $\Delta p\,(x, t) = -\beta\frac{dV}{V} = -\beta\frac{\partial s(x,t)}{\partial x}$. Si la onda sonora es sinusoidal, entonces el desplazamiento como se muestra en la Ecuación 17.2 es $s\,(x, t) = s_{\text{máx.}} \cos\,(kx \mp \omega t + \phi)$ y la presión se calcula con

$$\Delta p\,(x, t) = -\beta\frac{dV}{V} = -\beta\frac{\partial s\,(x, t)}{\partial x} = \beta k s_{\text{máx.}}\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi) = \Delta p_{\text{máx.}}\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi)\,.$$

La intensidad de la onda sonora es la potencia por unidad de área, y la potencia es la fuerza por la velocidad, $I = \frac{P}{A} = \frac{Fv}{A} = pv$. Aquí, la velocidad es la velocidad de las oscilaciones del medio, y no la velocidad de la onda sonora. La velocidad del medio es la tasa de tiempo del cambio en el desplazamiento:

$$v\,(x, t) = \frac{\partial}{\partial y} s\,(x, t) = \frac{\partial}{\partial y}\,(s_{\text{máx.}} \cos\,(kx - \omega t + \phi)) = s_{\text{máx.}}\,\omega\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi)\,.$$

Así, la intensidad se convierte en

$$\begin{aligned} I &= \Delta p\,(x, t)\,v\,(x, t) \\ &= \beta k s_{\text{máx.}}\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi)\,[s_{\text{máx.}}\,\omega\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi)] \\ &= \beta k \omega s_{\text{máx.}}^2\,\text{sen}^2\,(kx - \omega t + \phi)\,. \end{aligned}$$

Para hallar la intensidad promediada en el tiempo durante un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ para una posición *x*, integramos sobre el periodo, $I = \frac{\beta k \omega s_{\text{máx.}}^2}{2}$. Al usar $\Delta p_{\text{máx.}} = \beta k s_{\text{máx.}}$, $v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$, y $v = \frac{\omega}{k}$, obtenemos

$$I = \frac{\beta k \omega s_{\text{máx.}}^2}{2} = \frac{\beta^2 k^2 \omega s_{\text{máx.}}^2}{2\beta k} = \frac{\omega (\Delta p_{\text{máx.}})^2}{2\left(\rho v^2\right) k} = \frac{v(\Delta p_{\text{máx.}})^2}{2\left(\rho v^2\right)} = \frac{(\Delta p_{\text{máx.}})^2}{2\rho v}.$$

Es decir, la intensidad de una onda sonora está relacionada con su amplitud al cuadrado por

$$I = \frac{(\Delta p_{\text{máx.}})^2}{2\rho v}. \qquad 17.11$$

Aquí, $\Delta p_{\text{máx.}}$ es la variación de presión o la amplitud de presión en unidades de pascales (Pa) o N/m^2. La energía (como energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$) de un elemento oscilante de aire debido a una onda sonora en desplazamiento es proporcional a su amplitud al cuadrado. En esta ecuación, ρ es la densidad del material en el que se desplaza la onda sonora, en unidades de kg/m^3, y v es la velocidad del sonido en el medio, en unidades de m/s. La variación de la presión es proporcional a la amplitud de la oscilación, por lo que I varía como $(\Delta p)^2$. Esta relación es coherente con el hecho de que la onda sonora la produce alguna vibración; cuanto mayor es su amplitud de presión, más se comprime el aire en el sonido que crea.

Audición humana y niveles de intensidad del sonido

Como ya se ha dicho en este capítulo, la audición es la percepción del sonido. El mecanismo de la audición implica una física interesante. La onda sonora que incide en nuestro oído es una onda de presión. El oído es un **transductor** que convierte las ondas sonoras en impulsos nerviosos eléctricos de una manera mucho más sofisticada que un micrófono, pero análoga a este. La Figura 17.14 muestra la anatomía del oído.

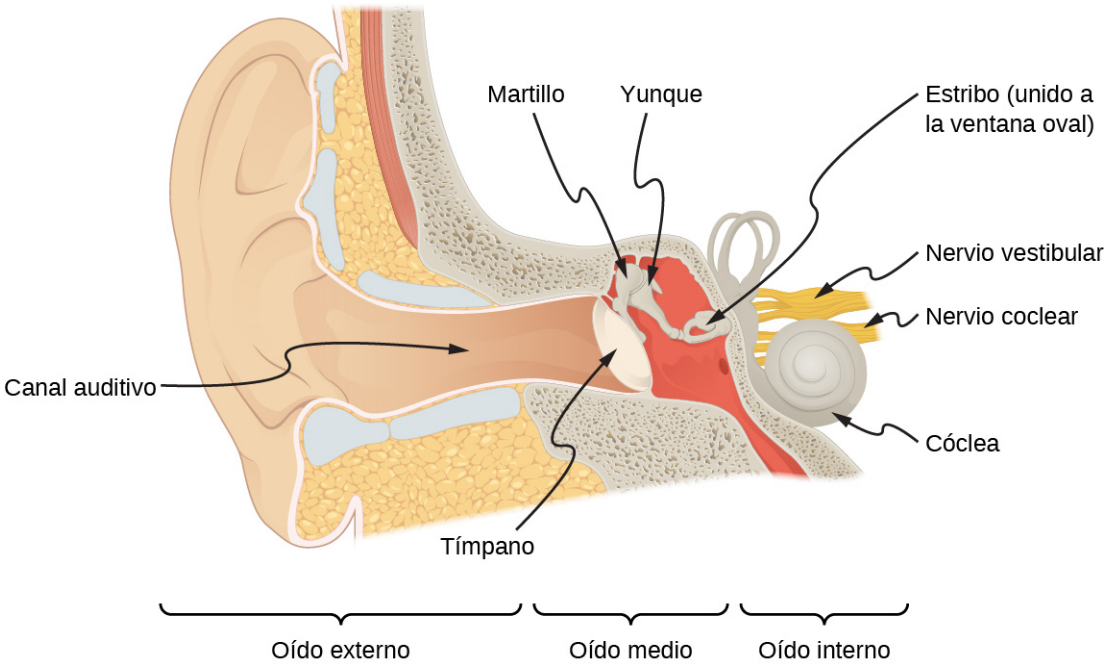


FIGURA 17.14 Anatomía del oído humano.

El oído externo, o canal auditivo, lleva el sonido hasta la cavidad timpánica, el tímpano protegido. La columna de aire del canal auditivo resuena y es parcialmente responsable de la sensibilidad del oído a los sonidos en el rango entre 2.000 y 5.000 Hz. El oído medio convierte el sonido en vibraciones mecánicas y aplica estas vibraciones a la cóclea.

INTERACTIVO

Mire este video (https://openstax.org/l/21humanear) para conocer con más detalle el funcionamiento del oído humano.

El rango de intensidades que el oído humano puede escuchar será según la frecuencia del sonido, pero, en general, el rango es bastante amplio. La intensidad mínima del umbral que se puede escuchar es $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$. El dolor se experimenta con intensidades de $I_{\text{dolor}} = 1\ \text{W/m}^2$. Las mediciones de la intensidad del sonido (en unidades de W/m^2) son muy engorrosas debido a este gran rango de valores. Por este motivo, así como por otros, se propuso el concepto de nivel de intensidad del sonido.

El **nivel de intensidad del sonido** β de un sonido, medido en decibeles, con una intensidad I en vatios por metro cuadrado, se define como

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right), \tag{17.12}$$

donde $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ es una intensidad de referencia, que corresponde a la intensidad umbral del sonido que una persona con audición normal puede percibir a una frecuencia de 1,00 kHz. Es más común considerar los niveles de intensidad del sonido en dB que en W/m^2. La forma en que el oído humano percibe el sonido se puede describir con mayor precisión mediante el logaritmo de la intensidad que directamente por la intensidad. Porque β se define en términos de relación, es una cantidad sin unidad, lo que indica el *nivel* del sonido en relación con un estándar fijo ($10^{-12}\ \text{W/m}^2$). Las unidades de decibeles (dB) se utilizan para indicar que esta relación se multiplica por 10 en su definición. El bel, en el que se basa el decibelio, lleva el nombre de Alexander Graham Bell, el inventor del teléfono.

El nivel de decibeles de un sonido que tiene la intensidad umbral de $10^{-12}\ \text{W/m}^2$ es $\beta = 0\ \text{dB}$, porque $\log_{10} 1 = 0$. La Tabla 17.2 ofrece niveles en decibeles e intensidades en vatios por metro cuadrado para algunos sonidos conocidos. El oído es sensible a algo tan pequeño como una trillonésima parte de un vatio por metro cuadrado, lo que resulta aún más impresionante si tiene en cuenta que el área del tímpano es únicamente de, aproximadamente, $1\ \text{cm}^2$, por lo que solo $10^{-16}\ \text{W}$ cae sobre ella en el umbral de la audición. Las moléculas de aire en una onda sonora de esta intensidad vibran a una distancia inferior a un diámetro molecular, y las presiones manométricas involucradas son inferiores a $10^{-9}\ \text{atm}$.

Nivel de intensidad del sonido β (dB)	Intensidad *(I)* $\left(\text{W/m}^2\right)$	Ejemplo/efecto
0	1×10^{-12}	Umbral de audición a 1.000 Hz
10	1×10^{-11}	Crujido de hojas
20	1×10^{-10}	Susurro a 1 m de distancia
30	1×10^{-9}	Hogar tranquilo
40	1×10^{-8}	Hogar regular
50	1×10^{-7}	Oficina regular, música suave
60	1×10^{-6}	Conversación normal
70	1×10^{-5}	Oficina ruidosa, tráfico congestionado
80	1×10^{-4}	Radio con volumen alto, conferencia en un aula
90	1×10^{-3}	Dentro de un camión pesado; daños por exposición prolongada

Nivel de intensidad del sonido β (dB)	Intensidad (I) $\left(\mathrm{W/m^2}\right)$	Ejemplo/efecto
100	1×10^{-2}	Fábrica ruidosa, sirena a 30 m; daños por exposición de 8 h al día
110	1×10^{-1}	Daños por una exposición de 30 minutos al día
120	1	Concierto de rock ruidoso; trituradora neumática a 2 m; umbral del dolor
140	1×10^{2}	Avión a reacción a 30 m; dolor intenso, daños en segundos
160	1×10^{4}	Estallido de los tímpanos

TABLA 17.2 Niveles de intensidad del sonido e intensidades [1] Varias agencias gubernamentales y asociaciones profesionales relacionadas con la salud recomiendan que no se superen los 85 dB para exposiciones diarias de 8 horas sin protección auditiva.

Una observación que se puede comprobar fácilmente al examinar la Tabla 17.2 o mediante la Ecuación 17.12 es que cada factor de 10 en la intensidad corresponde a 10 dB. Por ejemplo, un sonido de 90 dB comparado con uno de 60 dB es 30 dB mayor, o tres factores de 10 (es decir, 10^3 veces) como intenso. Otro ejemplo es que si un sonido es 10^7 tan intenso como otro, es 70 dB más alto (Tabla 17.3).

I_2/I_1	$\beta_2 - \beta_1$
2,0	3,0 dB
5,0	7,0 dB
10,0	10,0 dB
100,0	20,0 dB
1.000,0	30,0 dB

TABLA 17.3 Relación de intensidades y diferencias correspondientes en los niveles de intensidad del sonido

EJEMPLO 17.2

Cálculo de niveles de intensidad del sonido

Calcule el nivel de intensidad del sonido en decibeles para una onda sonora que se desplaza en el aire a $0°\mathrm{C}$ y con una amplitud de presión de 0,656 Pa.

Estrategia

Nos dan Δp, por lo que podemos calcular I mediante la ecuación $I = \frac{(\Delta p)^2}{2\rho v_\mathrm{w}}$. Al usar I, podemos calcular β directamente de su definición en $\beta(dB) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

Solución

1. Identifique aspectos conocidos:
   El sonido se desplaza a 331 m/s en el aire a 0°C.
   El aire tiene una densidad de $1{,}29\ \text{kg/m}^3$ en presión atmosférica y 0°C.
2. Introduzca estos valores y la amplitud de la presión en $I = \frac{(\Delta p)^2}{2\rho v}$.
$$I = \frac{(\Delta p)^2}{2\rho v} = \frac{(0{,}656\ \text{Pa})^2}{2(1{,}29\ \text{kg/m}^3)(331\ \text{m/s})} = 5{,}04 \times 10^{-4}\ \text{W/m}^2.$$
3. Introduzca el valor de I y el valor conocido de I_0 en $\beta(\text{dB}) = 10\log_{10}(I/I_0)$. Calcule para hallar el nivel de intensidad del sonido en decibeles:
$$10\log_{10}(5{,}04 \times 10^8) = 10(8{,}70)\text{dB} = 87\ \text{dB}.$$

Importancia

Este sonido de 87 dB tiene una intensidad cinco veces mayor que un sonido de 80 dB. Así, un factor de cinco en la intensidad corresponde a una diferencia de 7 dB en el nivel de intensidad del sonido. Este valor es cierto para cualquier intensidad que difiera en un factor de cinco.

EJEMPLO 17.3

Cambiar niveles de intensidad de un sonido

Demuestre que si un sonido es dos veces más intenso que otro, tiene un nivel de sonido de unos 3 dB más alto.

Estrategia

Nos dan que la relación de dos intensidades es de 2 a 1 y luego nos piden que hallemos la diferencia de sus niveles de sonido en decibeles. Podemos resolver este problema mediante las propiedades de los logaritmos.

Solución

1. Identifique aspectos conocidos:
   La relación de las dos intensidades es de 2 a 1, o lo que es lo mismo,
$$\frac{I_2}{I_1} = 2{,}00.$$
   Queremos demostrar que la diferencia de niveles de sonido es de unos 3 dB. Es decir, queremos demostrar:
$$\beta_2 - \beta_1 = 3\ \text{dB}.$$
   Tenga en cuenta que
$$\log_{10} b - \log_{10} a = \log_{10}\left(\frac{b}{a}\right).$$
2. Use la definición de β para obtener
$$\beta_2 - \beta_1 = 10\log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10\log_{10} 2{,}00 = 10(0{,}301)\ \text{dB}.$$
   Así,
$$\beta_2 - \beta_1 = 3{,}01\ \text{dB}.$$

Importancia

Esto significa que los dos niveles de intensidad del sonido difieren en 3,01 dB, es decir, unos 3 dB, según lo anunciado. Observe que, debido a que solamente dan la relación I_2/I_1 (y no las intensidades reales), este resultado es cierto para cualquier intensidad que difiera en un factor de dos. Por ejemplo, un sonido de 56,0 dB es dos veces más intenso que uno de 53,0 dB, un sonido de 97,0 dB es la mitad de intenso que uno de 100 dB y así sucesivamente.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.2

Identifique los sonidos más comunes a los niveles de 10 dB, 50 dB y 100 dB.

También se utiliza otra escala de decibeles, denominada **nivel de presión del sonido**, que se basa en la relación entre la amplitud de la presión y una presión de referencia. Esta escala se utiliza sobre todo en aplicaciones en las que el sonido se desplaza por el agua. Queda fuera del alcance de este texto tratar esta escala porque no se utiliza habitualmente para los sonidos en el aire, pero es importante señalar que se pueden encontrar niveles de decibeles muy diferentes cuando se citan los niveles de presión del sonido.

Audición y tono

El oído humano tiene un alcance y una sensibilidad enormes. Puede darnos una gran cantidad de información sencilla, como el tono, el volumen y la dirección.

La percepción de la frecuencia se llama **tono**. Normalmente, los seres humanos tienen un tono relativo excelente y pueden discriminar entre dos sonidos si sus frecuencias difieren en un 0,3 % o más. Por ejemplo, 500,0 y 501,5 Hz son notablemente diferentes. Las **notas** musicales son sonidos de una frecuencia determinada que pueden ser producidos por la mayoría de los instrumentos y que en la música occidental tienen nombres particulares, como la sostenido, do o mi bemol.

La percepción de la intensidad se denomina **volumen**. A una frecuencia determinada, es posible discernir diferencias de 1 dB, aproximadamente, y un cambio de 3 dB se nota fácilmente. Pero el volumen no está relacionado únicamente con la intensidad. La frecuencia tiene un efecto importante en el volumen de un sonido. Los sonidos cercanos a los extremos de alta y baja frecuencia del rango de audición parecen aún menos fuertes, ya que el oído es menos sensible en esas frecuencias. Cuando un violín toca el do medio, no se puede confundir con un piano que toca la misma nota. Esto se debe a que cada instrumento produce un conjunto distintivo de frecuencias e intensidades. A nuestra percepción de estas combinaciones de frecuencias e intensidades la llamamos calidad del tono o, más comúnmente, **timbre** del sonido. El timbre es la forma de la onda que surge de las numerosas reflexiones, resonancias y superposiciones de un instrumento.

Para expresar el volumen numéricamente se utiliza una unidad llamada **fonio**. Los fonios se diferencian de los decibeles porque el fonio es una unidad de percepción del volumen, mientras que el decibelio es una unidad de intensidad física. La Figura 17.15 muestra la relación de volumen e intensidad (o nivel de intensidad) y frecuencia para personas con audición normal. Las líneas curvas representan igualdad de volumen. Cada curva está identificada con su volumen en fonios. Cualquier sonido a lo largo de una curva determinada se percibe como igualmente fuerte por la persona promedio. Las curvas se determinaron haciendo que un gran número de personas compararan el volumen de los sonidos a diferentes frecuencias y niveles de intensidad del sonido. A una frecuencia de 1,000 Hz, los fonios se consideran numéricamente iguales a los decibeles.

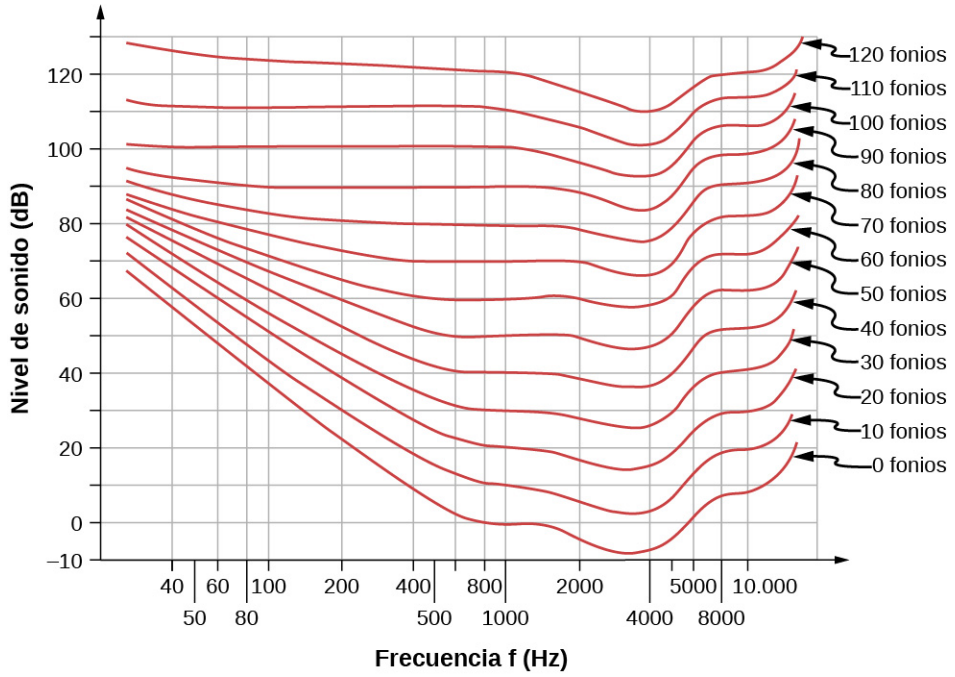


FIGURA 17.15 Relación entre volumen en fonios y nivel de intensidad (en decibeles) e intensidad (en vatios por metro cuadrado) para personas con audición normal. Las líneas curvas representan igualdad de volumen: todos los sonidos de una curva determinada se perciben con el mismo volumen. Los fonios y los decibeles se definen igual a 1.000 Hz.

EJEMPLO 17.4

Medición del volumen

(a) ¿Cuál es el volumen en fonios de un sonido de 100 Hz que tiene un nivel de intensidad de 80 dB? (b) ¿Cuál es el nivel de intensidad en decibeles de un sonido de 4.000 Hz que tiene un volumen de 70 fonios? (c) ¿A qué nivel de intensidad un sonido de 8.000 Hz tendrá el mismo volumen que un sonido de 200 Hz a 60 dB?

Estrategia

Para resolver este ejemplo hay que consultar el gráfico de la Figura 17.15. Para calcular el volumen de un determinado sonido, debe conocer su frecuencia y su nivel de intensidad, localizar ese punto en la cuadrícula y, seguidamente, interpolar entre las curvas de volumen para obtener el volumen en fonios. Una vez localizado ese punto, se puede determinar el nivel de intensidad a partir del eje vertical.

Solución

1. Identifique aspectos conocidos: la cuadrícula del gráfico que relaciona fonios y decibeles es un trazado del nivel de intensidad versus la frecuencia, ambas cantidades físicas: 100 Hz a 80 dB se encuentra a medio camino entre las curvas marcadas con 70 y 80 fonios.
   Calcule el volumen: 75 fonios.
2. Identifique aspectos conocidos: los valores indicados son de 4.000 Hz a 70 fonios.
   Siga la curva de los 70 fonios hasta llegar a los 4.000 Hz. En ese punto, está por debajo de la línea de 70 dB, a unos 67 dB.
   Calcule el nivel de intensidad: 67 dB.
3. Localice el punto para un sonido de 200 Hz y 60 dB.
   Calcule el volumen: este punto se encuentra ligeramente por encima de la curva de 50 fonios, por lo que su volumen es de 51 fonios.
   El nivel de los 51 fonios se encuentra a 8.000 Hz: 63 dB.

Importancia

Estas respuestas, como toda la información extraída de la Figura 17.15, tienen incertidumbres de varios fonios o varios decibeles, en parte debido a dificultades de interpolación, pero sobre todo relacionadas con imprecisiones en las curvas de igual volumen.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.3

Describa cómo se relaciona la amplitud con el volumen de un sonido.

En esta sección hemos hablado de las características del sonido y de cómo oímos, pero ¿cómo se producen los sonidos que oímos? Las fuentes de sonido más interesantes son los instrumentos musicales y la voz humana, y hablaremos sobre ellas. Pero antes de entender cómo los instrumentos musicales producen sonido, debemos revisar los mecanismos básicos que los sustentan. Las teorías que sustentan los mecanismos utilizados por los instrumentos musicales incluyen interferencia, superposición y ondas estacionarias, de lo que hablaremos en la siguiente sección.

17.4 Modos normales de una onda sonora estacionaria

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el mecanismo de auriculares que reducen el sonido.
- Describir la resonancia en un tubo cerrado en un extremo y abierto por el otro.
- Describir la resonancia en un tubo abierto en ambos extremos.

La interferencia es el sello distintivo de las ondas, todas las cuales presentan una interferencia constructiva y una destructiva exactamente análogas a la que se observa en las ondas acuáticas. De hecho, una forma de demostrar que algo “es una onda” es observar efectos de interferencia. Como el sonido es una onda, es de esperar que presente interferencias.

Interferencia de las ondas sonoras

En la sección Ondas hablamos de la interferencia de funciones de onda que solo difieren en un deslizamiento de fase. Hallamos que la función de onda resultante de la superposición de $y_1\,(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$ y $y_2\,(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$ es

$$y\,(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right).$$

Una forma de que dos ondas idénticas que inicialmente están en fase se desfasen entre sí es que las ondas recorran distancias diferentes; es decir, que tengan longitudes del trayecto diferentes. Las ondas sonoras constituyen un excelente ejemplo de deslizamiento de fase debido a una diferencia de trayectoria. Como hemos comentado, las ondas sonoras se pueden modelar básicamente como ondas longitudinales, en las que las moléculas del medio oscilan alrededor de una posición de equilibrio, o como ondas de presión.

Cuando las ondas salen de los altavoces, lo hacen en forma de ondas esféricas (Figura 17.16). Las ondas interfieren; la inferencia constructiva se produce por la combinación de dos crestas o dos depresiones, como se muestra. La interferencia destructiva se produce por la combinación de una depresión y una cresta.

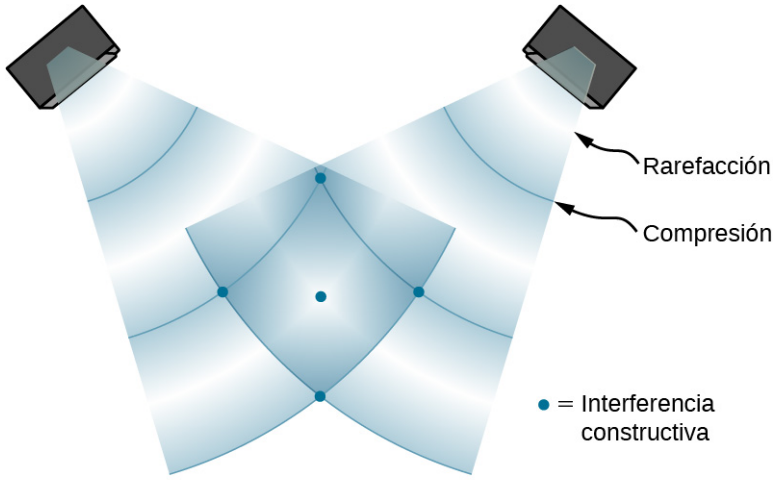
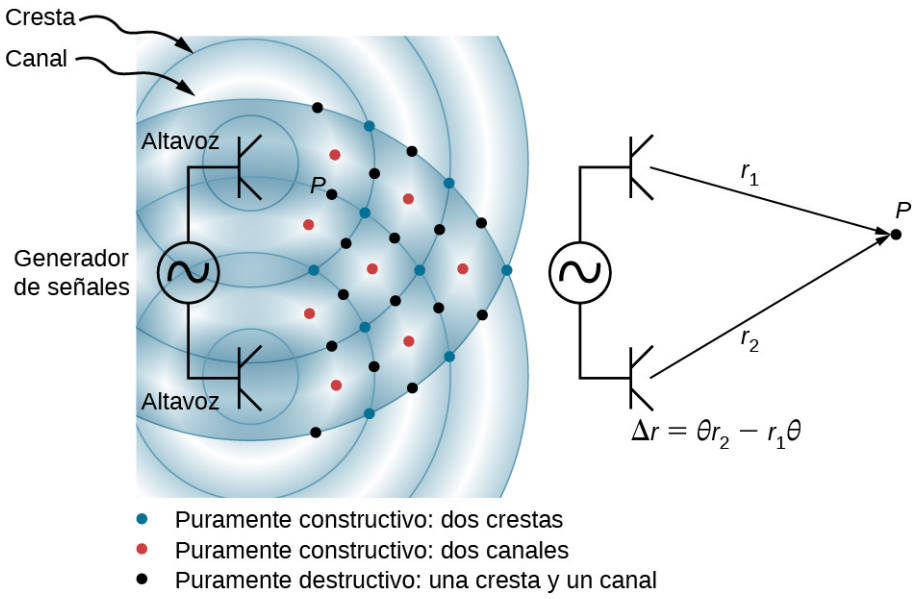


FIGURA 17.16 Cuando las ondas sonoras son producidas por un altavoz, se desplazan a la velocidad del sonido y se mueven hacia fuera como ondas esféricas. En este caso, dos altavoces producen el mismo tono constante (frecuencia). El resultado son puntos de alta intensidad de sonido (resaltados), que resultan de la superposición de dos crestas (compresión) o dos depresiones (rarefacción). La interferencia destructiva se genera por la superposición de una cresta y una depresión. Los puntos donde hay interferencia constructiva en la figura se producen porque las dos ondas están en fase en esos puntos. Los puntos de interferencia destructiva (Figura 17.17) son el resultado de que las dos ondas estén desfasadas.



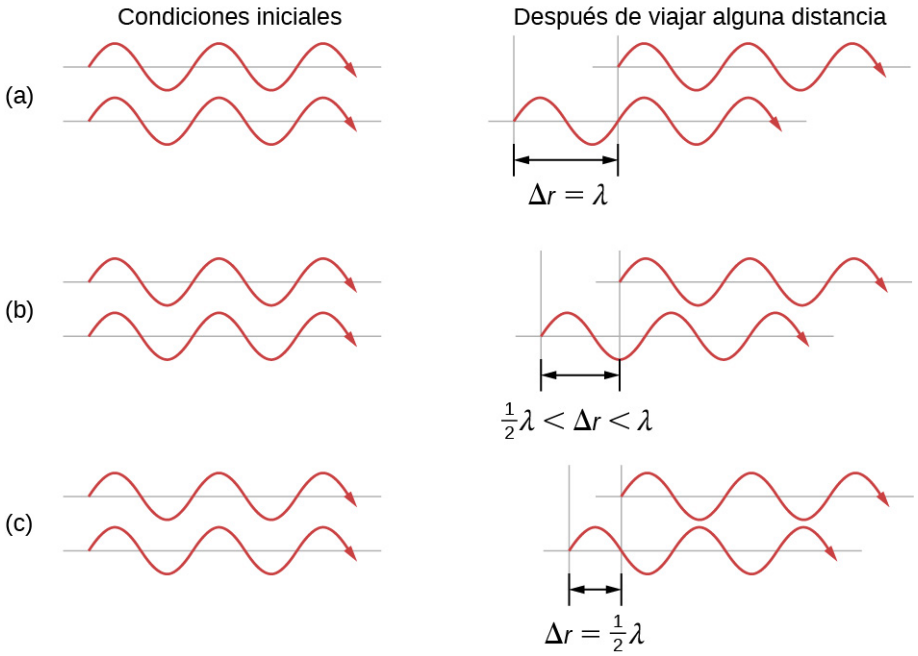


FIGURA 17.17 Dos altavoces accionados por un solo generador de señales. Las ondas sonoras producidas por los altavoces están en fase y son de una sola frecuencia. Las ondas sonoras interfieren entre sí. Cuando dos crestas o dos depresiones coinciden se produce una interferencia constructiva, marcada con los puntos rojos y azules. Cuando una depresión y una cresta coinciden se produce una interferencia destructiva, marcada con puntos negros. La diferencia de fase se debe a las longitudes del trayecto recorridas por cada una de las ondas. Dos ondas idénticas recorren dos longitudes del trayecto diferentes hasta un punto *P*. (a) La diferencia en las longitudes del trayecto es de una longitud de onda, lo que genera una interferencia constructiva total y una amplitud resultante igual al doble de la amplitud original. (b) La diferencia en las longitudes del trayecto es menor que una longitud de onda, pero mayor que media longitud de onda, lo que ocasiona una amplitud mayor que cero y menor que el doble de la amplitud original. (c) La diferencia en las longitudes del trayecto es de media longitud de onda, lo que genera una interferencia destructiva total y una amplitud resultante de cero.

La diferencia de fase en cada punto se debe a las diferentes longitudes del trayecto recorridas por cada onda.

Cuando la diferencia de longitudes del trayecto es un múltiplo entero de una longitud de onda,

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = n\lambda, \text{ donde } n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

las ondas están en fase y hay interferencia constructiva. Cuando la diferencia de longitudes del trayecto es un múltiplo impar de media longitud de onda,

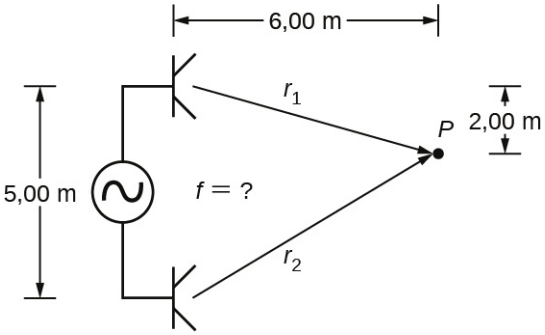
$$\Delta r = |r_2 - r_1| = n\frac{\lambda}{2}, \text{ donde } n = 1, 3, 5, \ldots,$$

las ondas están $180°(\pi \text{ rad})$ fuera de fase y el resultado es una interferencia destructiva. Estos puntos se pueden localizar con un medidor de intensidad del sonido.

EJEMPLO 17.5

Interferencia de las ondas sonoras

Dos altavoces tienen una separación de 5,00 m y son accionados por un generador de señales a una frecuencia desconocida. Un estudiante con un medidor de sonido recorre 6,00 m y baja 2,00 m y halla la primera intensidad mínima, como se muestra a continuación. ¿Cuál es la frecuencia suministrada por el generador de señales? Suponga que la rapidez de onda del sonido es $v = 343{,}00$ m/s.

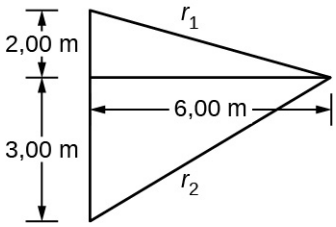


Estrategia

La velocidad de la onda es igual a $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$. La frecuencia es entonces $f = \frac{v}{\lambda}$. Una intensidad mínima indica una interferencia destructiva, y el primer punto de este tipo se produce cuando hay una diferencia de trayectoria de $\Delta r = \lambda/2$, lo cual se puede calcular a partir de la geometría.

Solución

1. Calcule la longitud del trayecto hasta el punto mínimo desde cada altavoz



$$r_1 = \sqrt{(6{,}00\text{ m})^2 + (2{,}00\text{ m})^2} = 6{,}32\text{ m}, \quad r_2 = \sqrt{(6{,}00\text{ m})^2 + (3{,}00\text{ m})^2} = 6{,}71\text{ m}$$

2. Use la diferencia en la longitud del trayecto para calcular la longitud de onda.

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = |6{,}71\text{ m} - 6{,}32\text{ m}| = 0{,}39\text{ m}$$

$$\lambda = 2\Delta r = 2\,(0{,}39\text{ m}) = 0{,}78\text{ m}$$

3. Calcule la frecuencia.

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343{,}00\text{ m/s}}{0{,}78\text{ m}} = 439{,}74\text{ Hz}$$

Importancia

Si el punto *P* fuera un punto de máxima intensidad, entonces la longitud del trayecto sería un múltiplo entero de la longitud de onda.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.4

Si camina alrededor de dos altavoces que reproducen música, ¿cómo no se percata de los lugares donde la música está muy alta o muy baja, es decir, donde hay interferencias constructivas y destructivas?

El concepto de deslizamiento de fase debido a una diferencia en la longitud del trayecto es muy importante. Este concepto lo volverá a usar en las secciones Interferencia (http://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/3-introduction) y Fotones y ondas de materia (http://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/6-introduction), en las cuales se analiza cómo Thomas Young puso en práctica este método en su famoso experimento de la doble rendija para demostrar que la luz tiene propiedades ondulatorias.

Reducción de ruido mediante interferencia destructiva

La Figura 17.18 muestra un uso inteligente de la interferencia de sonido para anular el ruido. Se han propuesto aplicaciones a mayor escala de reducción de ruido activa por interferencia destructiva para compartimentos enteros de pasajeros en aviones comerciales. Para obtener interferencia destructiva, se hace un análisis electrónico rápido y se introduce un segundo sonido 180° fuera de fase con el sonido original, con sus máximos y mínimos exactamente invertidos con respecto al ruido entrante. Las ondas sonoras en los fluidos son ondas de presión y son coherentes con el principio de Pascal; es decir, las presiones de dos fuentes diferentes se suman y restan como números simples. Por lo tanto, las presiones manométricas positivas y negativas se suman a una presión mucho menor, lo que produce un sonido de menor intensidad. Aunque la interferencia destructiva por completo solo es posible en las condiciones más sencillas, es posible reducir los niveles de ruido en 30 dB o más a través de esta técnica.

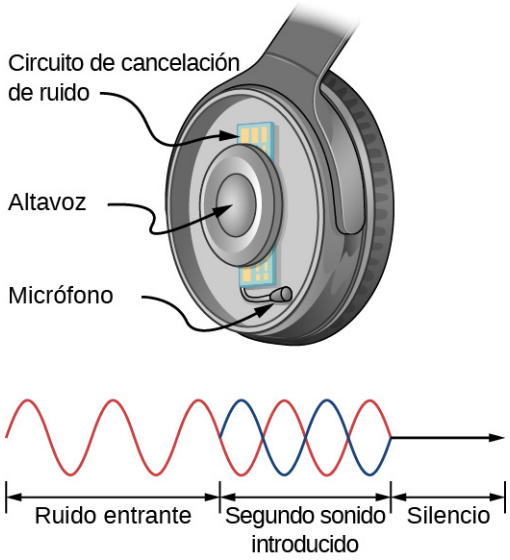


FIGURA 17.18 Los auriculares diseñados para anular el ruido con interferencia destructiva crean una onda sonora exactamente opuesta al sonido entrante. Estos auriculares pueden ser más eficaces que la simple atenuación pasiva utilizada en la mayoría de las protecciones auditivas. Tales auriculares se usaron en el vuelo sin escalas alrededor del mundo de la aeronave *Voyager*, que batió el récord mundial en 1986, para proteger los oídos de los pilotos del ruido del motor.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.5

Describa en qué se diferencian los auriculares con cancelación de ruido de los estándar que se usan para bloquear sonidos exteriores.

¿Dónde más podemos observar interferencias de sonido? Todas las resonancias de sonido, como las de los instrumentos musicales, se deben a interferencias constructivas y destructivas. Solo las frecuencias de resonancia interfieren constructivamente para formar ondas estacionarias, mientras que otras interfieren destructivamente y están ausentes.

Resonancia en un tubo cerrado en un extremo

Como ya comentamos en la sección Ondas, las *ondas estacionarias* están formadas por dos ondas que se mueven en direcciones opuestas. Cuando dos ondas sinusoidales idénticas se mueven en direcciones opuestas, las ondas se pueden modelar como

$$y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t) \text{ y } y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(kx + \omega t)\,.$$

Cuando estas dos ondas interfieren, la onda resultante es una onda estacionaria:

$$y_R(x,t) = [2A\,\text{sen}\,(kx)]\cos(\omega t)\,.$$

La resonancia se puede producir debido a las condiciones de frontera impuestas a una onda. En la sección Ondas, demostramos que la resonancia se podía producir en una cuerda en tensión que tenía condiciones de frontera simétricas, concretamente, un nodo en cada extremo. Definimos un nodo como un punto fijo en el que la cuerda no se ha movido. Descubrimos que las condiciones de frontera simétricas hacían que algunas frecuencias resonaran y produjeran ondas estacionarias, mientras que otras frecuencias interferían destructivamente. Las ondas sonoras pueden resonar en un tubo hueco, y las frecuencias de las ondas sonoras que resuenan dependen de las condiciones de frontera.

Suponga que tenemos un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro. Si sostenemos un diapasón vibrante cerca del extremo abierto del tubo, una onda sonora incidente se desplaza a través del tubo y se refleja en el extremo cerrado. El sonido reflejado tiene la misma frecuencia y la misma longitud de onda que la onda sonora incidente, pero se desplaza en dirección opuesta. En el extremo cerrado del tubo, las moléculas de aire tienen muy poca libertad para oscilar y se produce un nodo. En el extremo abierto, las moléculas son libres de moverse y, a la frecuencia adecuada, se produce un antinodo. A diferencia de las condiciones de frontera simétricas para las ondas estacionarias en la cuerda, las condiciones de frontera para un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro son antisimétricas: un nodo en el extremo cerrado y un antinodo en el extremo abierto.

Si el diapasón tiene la frecuencia adecuada, la columna de aire del tubo resuena con fuerza, pero en la mayoría de las frecuencias vibra muy poco. Esta observación solo significa que la columna de aire tiene ciertas frecuencias naturales únicamente. Considere la frecuencia más baja que hará que el tubo resuene y produzca un sonido fuerte. Habrá un nodo en el extremo cerrado y un antinodo en el extremo abierto, como se muestra en la Figura 17.19.

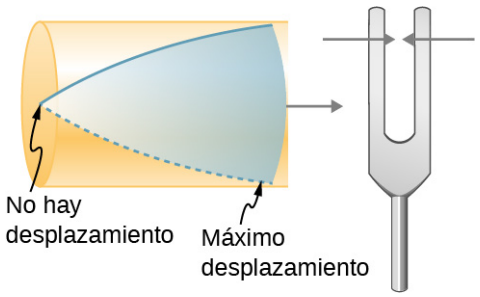


FIGURA 17.19 Resonancia de aire en un tubo cerrado en un extremo causada por un diapasón que vibra a la frecuencia más baja que puede producir resonancia (la frecuencia fundamental). Existe un nodo en el extremo cerrado y un antinodo en el extremo abierto.

La onda estacionaria formada en el tubo tiene un antinodo en el extremo abierto y un nodo en el extremo cerrado. La distancia de un nodo a un antinodo es un cuarto de la longitud de onda, y esta es igual a la longitud del tubo; por lo tanto, $\lambda_1 = 4L$. Esta misma resonancia la puede producir una vibración introducida en o cerca del extremo cerrado del tubo (Figura 17.20). Lo mejor es considerar que se trata de una vibración natural de la columna de aire, independientemente de cómo se introduzca.

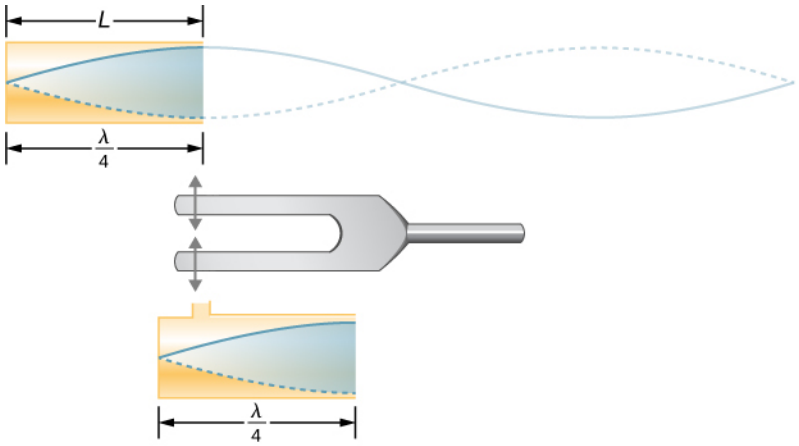


FIGURA 17.20 La misma onda estacionaria se crea en el tubo mediante una vibración introducida cerca de su extremo cerrado.

Dado que los desplazamientos máximos de aire son posibles en el extremo abierto y ninguno en el cerrado, pueden resonar en el tubo otras longitudes de onda más cortas, como la que se muestra en la Figura 17.21. Aquí la onda estacionaria tiene tres cuartas partes de su longitud de onda en el tubo, o $\frac{3}{4}\lambda_3 = L$, por lo que $\lambda_3 = \frac{4}{3}L$. Continuando con este proceso, se obtiene toda una serie de sonidos de menor longitud de onda y mayor frecuencia que resuenan en el tubo. Utilizamos términos específicos para las resonancias de cualquier sistema. La frecuencia de resonancia más baja se llama **fundamental**, mientras que todas las frecuencias de resonancia más altas se llaman **sobretonos**. Las frecuencias de resonancia que son múltiplos integrales de la fundamental se denominan colectivamente **armónicos**. La fundamental es el primer armónico, el segundo armónico es el doble de la frecuencia del primer armónico y así sucesivamente. Es posible que algunos de estos armónicos no existan para un escenario determinado. La Figura 17.22 muestra la fundamental y los tres primeros sobretonos (o los armónicos primero, tercero, quinto y séptimo) en un tubo cerrado en un extremo.

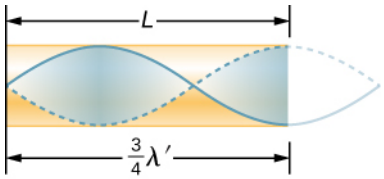


FIGURA 17.21 Otra resonancia para un tubo cerrado en un extremo. Esta onda estacionaria tiene el máximo desplazamiento de aire en el extremo abierto y ninguno en el extremo cerrado. La longitud de onda es más corta, con tres cuartos λ' igualando la longitud del tubo, por lo que $\lambda' = 4L/3$. Esta vibración de mayor frecuencia es el primer sobretono.

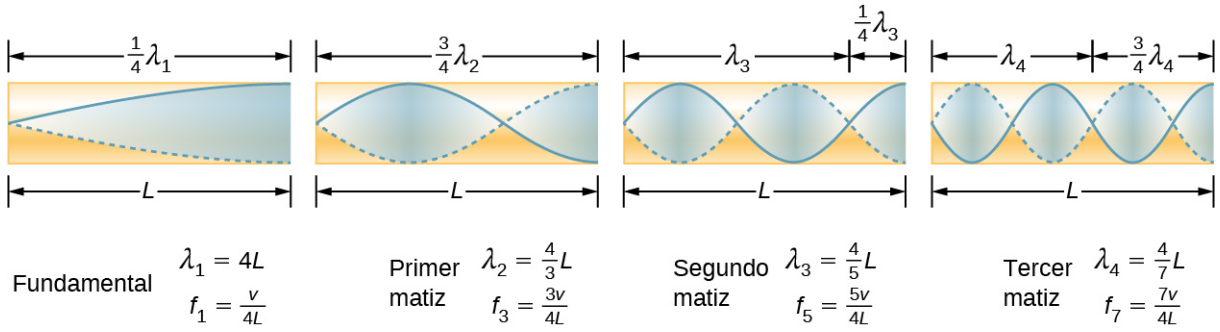


FIGURA 17.22 La fundamental y los tres sobretonos más bajos de un tubo cerrado en un extremo. Todos tienen desplazamientos máximos de aire en el extremo abierto y ninguno en el extremo cerrado.

La relación para las longitudes de onda resonantes de un tubo cerrado en un extremo es

$$\lambda_n = \frac{4}{n}L \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{17.13}$$

Ahora, busquemos un patrón en las frecuencias de resonancia para un tubo simple que está cerrado en un extremo. La fundamental tiene $\lambda = 4L$, y la frecuencia se relaciona con la longitud de onda y la velocidad del sonido según

$v = f\lambda$.

Si se resuelve f en esta ecuación se obtiene

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L},$$

donde v es la velocidad del sonido en el aire. Del mismo modo, el primer sobretono tiene $\lambda = 4L/3$ (vea la Figura 17.22), por lo que

$$f_3 = 3\frac{v}{4L} = 3f_1.$$

Porque $f_3 = 3f_1$, llamamos al primer sobretono el tercer armónico. Siguiendo este proceso, vemos un patrón que puede generalizarse en una expresión única. Las frecuencias de resonancia de un tubo cerrado en un extremo son

$$f_n = n\frac{v}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots, \tag{17.14}$$

donde f_1 es la fundamental, f_3 es el primer sobretono y así sucesivamente. Es interesante que las frecuencias de resonancia dependan de la velocidad del sonido y, por tanto, de la temperatura. Esta relación supone un problema notable para los órganos de las antiguas catedrales sin calefacción, y es también lo que justifica que los músicos suelen poner sus instrumentos de viento a temperatura ambiente antes de tocarlos.

Resonancia en un tubo abierto en ambos extremos

Otra fuente de ondas estacionarias es un tubo abierto en ambos extremos. En este caso, las condiciones de frontera son simétricas: un antinodo en cada extremo. Las resonancias de los tubos abiertos en ambos extremos se pueden analizar de forma muy similar a las de los tubos cerrados en un extremo. Las columnas de aire en tubos abiertos en ambos extremos tienen desplazamientos máximos de aire en ambos extremos (Figura 17.23). Las ondas estacionarias se forman como se muestra.

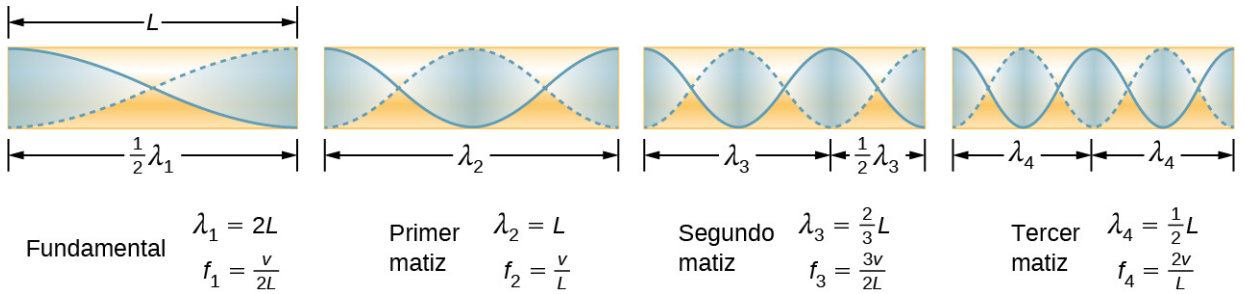


FIGURA 17.23 Las frecuencias de resonancia de un tubo abierto en ambos extremos, incluso la fundamental y los tres primeros sobretonos. En todos los casos, los desplazamientos máximos de aire se producen en ambos extremos del tubo, lo que le confiere frecuencias naturales diferentes a las de un tubo cerrado en un extremo.

La relación para las longitudes de onda resonantes de un tubo abierto en ambos extremos es

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{17.15}$$

Basándonos en el hecho de que un tubo abierto en ambos extremos tiene desplazamientos máximos de aire en ambos extremos, y al usar la Figura 17.23 como guía podemos ver que las frecuencias de resonancia de un tubo abierto en ambos extremos son

$$f_n = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3..., \tag{17.16}$$

donde f_1 es la fundamental, f_2 es el primer sobretono, f_3 es el segundo sobretono y así sucesivamente. Observe que un tubo abierto en ambos extremos tiene una frecuencia fundamental doble de la que tendría si estuviera cerrado en un extremo. También tiene un espectro de sobretonos diferente al de un tubo cerrado en un extremo.

Observe que un tubo abierto en ambos extremos tiene condiciones de frontera simétricas, similares a las de la cuerda fijada en ambos extremos de la que hablamos en la sección Ondas. Las relaciones para las longitudes de onda y las frecuencias de un instrumento de cuerda son las mismas que se dan en la Ecuación 17.15 y la Ecuación 17.16. La velocidad de la onda en la cuerda (de la sección Ondas) es $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$. El aire que rodea la cuerda vibra a la misma frecuencia que esta, lo que produce un sonido de la misma frecuencia. La onda sonora se mueve a la velocidad del sonido y la longitud de onda se puede calcular mediante $v = \lambda f$.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.6

¿Cómo es posible utilizar el nodo y el antinodo de una onda estacionaria para determinar la longitud de un tubo cerrado en un extremo?

INTERACTIVO

En este video (https://openstax.org/l/21soundwaves) podrá visualizar ondas sonoras.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.7

Observe dos instrumentos musicales que no puede identificar. Uno reproduce sonidos agudos y el otro sonidos graves. ¿Cómo podría determinar cuál es cuál sin escuchar el sonido que emiten?

17.5 Fuentes de sonido musical

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Describir las frecuencias de resonancia en instrumentos que se pueden modelar como un tubo con condiciones de frontera simétricas.
- Describir las frecuencias de resonancia en instrumentos que se pueden modelar como un tubo con condiciones de frontera antisimétricas.

Algunos instrumentos musicales, como los de viento de madera, los metales y los órganos de tubos, se pueden modelar como tubos con condiciones de frontera simétricas, es decir, abiertos en ambos extremos o cerrados en ambos extremos (Figura 17.24). Otros instrumentos se pueden modelar como tubos con condiciones de frontera antisimétricas, como un tubo con un extremo abierto y el otro cerrado (Figura 17.25).

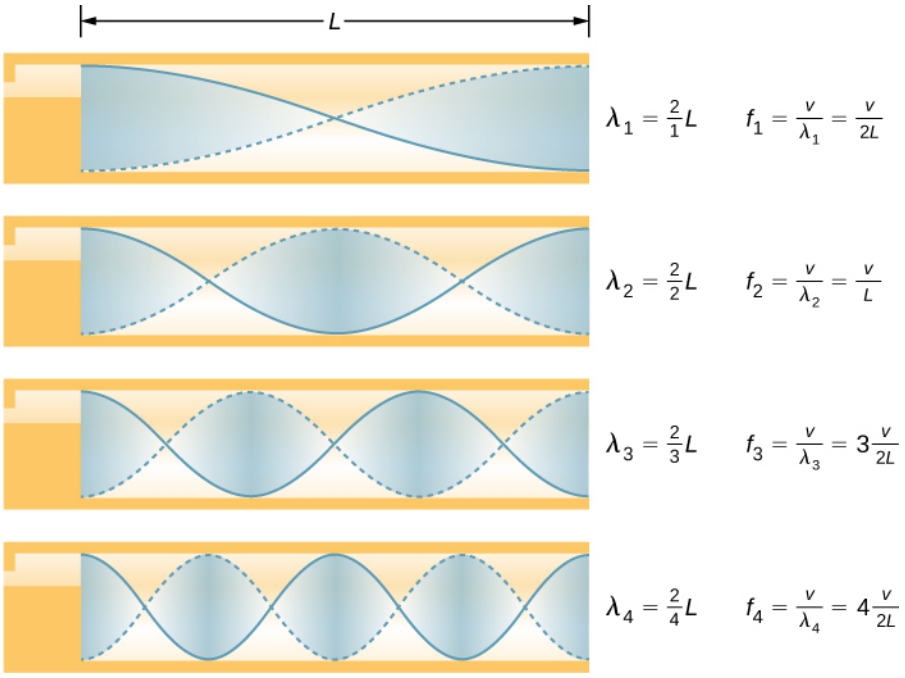


FIGURA 17.24 Algunos instrumentos musicales se pueden modelar como un tubo abierto en ambos extremos.

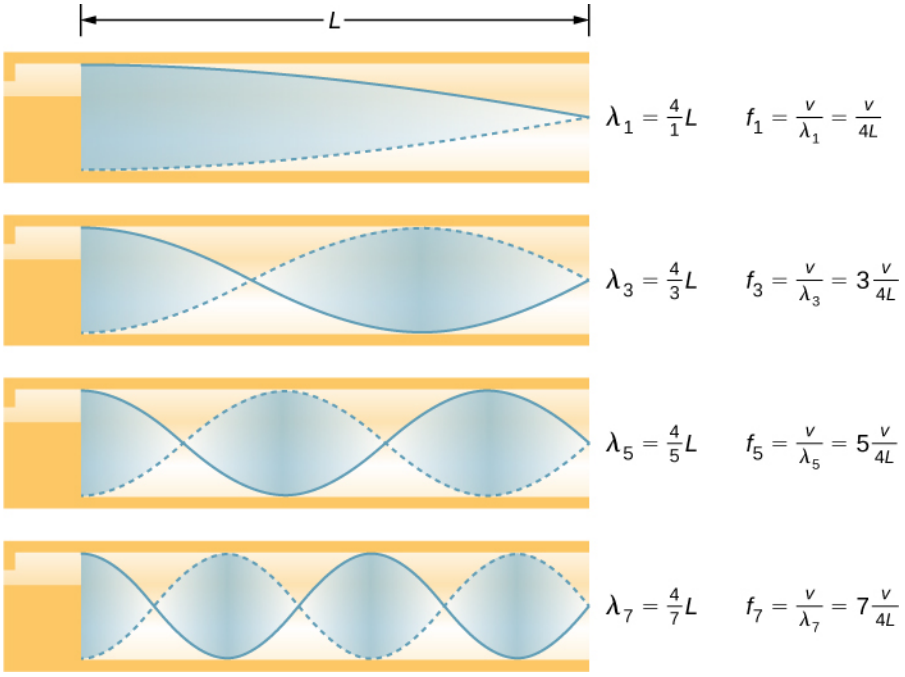


FIGURA 17.25 Algunos instrumentos musicales se pueden modelar como un tubo cerrado en un extremo.

Las frecuencias de resonancia son producidas por ondas longitudinales que se desplazan por los tubos e interfieren con las ondas reflejadas que se desplazan en la dirección opuesta. Un órgano de tubos se fabrica con varios tubos de longitudes fijas para producir diferentes frecuencias. Las ondas son el resultado del aire comprimido que se expande en los tubos. Incluso en tubos abiertos se produce cierta reflexión debido a las limitaciones de los lados de los tubos y a la presión atmosférica fuera del tubo abierto.

Los antinodos no se producen en la apertura del tubo, sino que dependen de su radio. Las ondas no se expanden del todo hasta que están fuera del extremo abierto de un tubo, y para un tubo de paredes finas hay que añadir una *corrección en el extremo*. Esta corrección en el extremo es 0,6 veces el radio del tubo, aproximadamente, y se debe añadir a su longitud.

Los intérpretes de instrumentos como la flauta o el oboe varían la longitud del tubo abriendo y cerrando los agujeros de los dedos. En un trombón, usted cambia la longitud del tubo mediante un tubo deslizante. Las cornetas tienen una longitud fija y solo pueden producir un rango limitado de frecuencias.

La fundamental y los sobretonos pueden estar presentes simultáneamente en una variedad de combinaciones. Por ejemplo, el do medio de una trompeta suena de forma distinta al do medio de un clarinete, aunque ambos instrumentos son versiones modificadas de un tubo cerrado en un extremo. La frecuencia fundamental es la misma (y suele ser la más intensa), pero los sobretonos y su mezcla de intensidades son diferentes y están sujetos al matiz del músico. Esta mezcla es la que confiere a los distintos instrumentos musicales (y a las voces humanas) sus características distintivas, ya sean columnas de aire, cuerdas, cajas de resonancia o parches de batería. De hecho, gran parte de nuestra forma de hablar viene determinada por el modelado de la cavidad formada por la garganta y la boca y la colocación de la lengua para ajustar la fundamental y la combinación de sobretonos. Por ejemplo, se puede hacer que las cavidades resonantes simples resuenen con el sonido de las vocales (Figura 17.26). Cuando los niños pasan por la pubertad la laringe crece y la forma de la cavidad resonante cambia, lo que genera la diferencia de frecuencias predominantes en el habla entre hombres y mujeres.

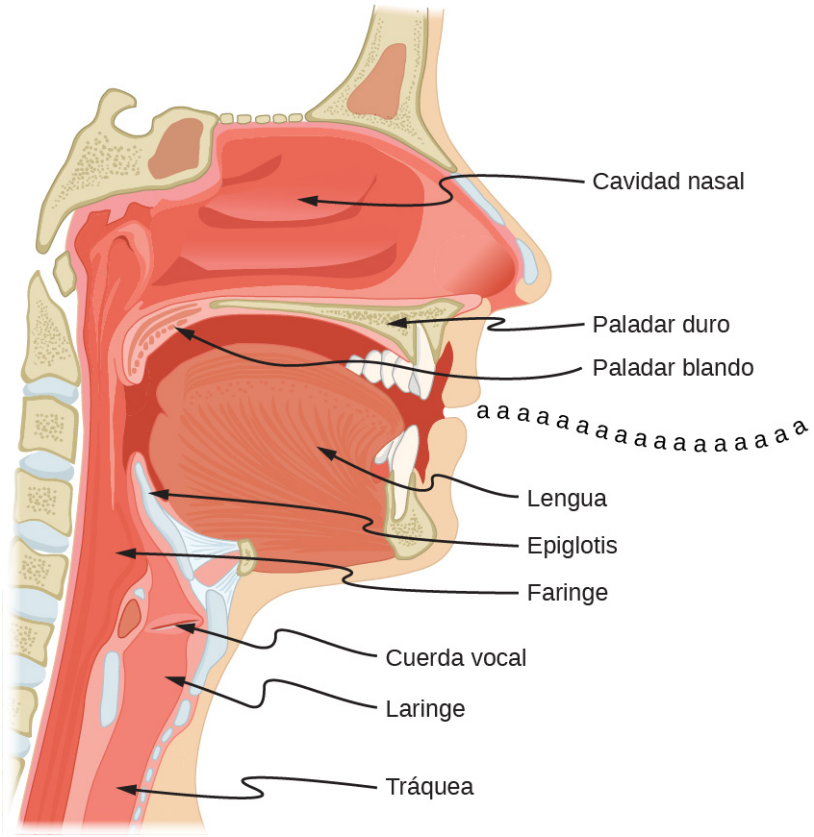


FIGURA 17.26 La garganta y la boca forman una columna de aire cerrada en un extremo que resuena en respuesta a las vibraciones en la laringe. El espectro de sobretonos y sus intensidades varían con la forma de la boca y la posición de la lengua para formar diferentes sonidos. La laringe puede sustituirse por un vibrador mecánico, y el habla comprensible sigue siendo posible. Las variaciones en las formas básicas hacen que se reconozcan las diferentes voces.

EJEMPLO 17.6

Calcular la longitud de un tubo con una fundamental de 128 Hz

(a) ¿Qué longitud debe tener un tubo cerrado en un extremo un día en el que la temperatura del aire es 22,0°C si su frecuencia fundamental debe ser de 128 Hz (do por debajo del do medio)?

(b) ¿Cuál es la frecuencia de su cuarto sobretono?

Estrategia

La longitud L se puede hallar a partir de la relación $f_n = n\frac{v}{4L}$, pero primero tenemos que hallar la velocidad del sonido v.

Solución

a. Identifique aspectos conocidos: la frecuencia fundamental es de 128 Hz y la temperatura del aire es de 22,0°C.
Use $f_n = n\frac{v}{4L}$ para calcular la frecuencia fundamental ($n = 1$),

$$f_1 = \frac{v}{4L}.$$

Resuelva esta ecuación para la longitud,

$$L = \frac{v}{4f_1}.$$

Calcule la velocidad del sonido mediante $v = (331\ \text{m/s})\sqrt{\frac{T}{273\ \text{K}}}$,

$$v = (331\ \text{m/s})\sqrt{\frac{295\ \text{K}}{273\ \text{K}}} = 344\ \text{m/s}.$$

Introduzca los valores de la velocidad del sonido y la frecuencia en la expresión de L.

$$L = \frac{v}{4f_1} = \frac{344\ \text{m/s}}{4(128\ \text{Hz})} = 0{,}672\ \text{m}$$

b. Identifique aspectos conocidos: el primer sobretono tiene $n = 3$, el segundo sobretono tiene $n = 5$, el tercer sobretono tiene $n = 7$ y el cuarto sobretono tiene $n = 9$.
Introduzca el valor del cuarto sobretono en $f_n = n\frac{v}{4L}$,

$$f_9 = 9\frac{v}{4L} = 9f_1 = 1{,}15\ \text{kHz}.$$

Importancia

Muchos instrumentos de viento son tubos modificados que tienen agujeros para los dedos, válvulas y otros dispositivos para cambiar la longitud de la columna de aire resonante y, por lo tanto, la frecuencia de la nota tocada. Las bocinas que producen frecuencias muy bajas requieren tubos tan largos que se enrollan en bucles. Un ejemplo es la tuba. El hecho de que se produzca un sobretono en un tubo simple o en un instrumento musical depende de cómo se estimule su vibración y de los detalles de su forma. El trombón, por ejemplo, no produce su frecuencia fundamental y solo hace sobretonos.

Si tiene dos tubos con la misma frecuencia fundamental, pero uno está abierto en ambos extremos y el otro está cerrado en uno de ellos, sonarían diferente al tocarlos porque tienen sobretonos diferentes. El do medio, por ejemplo, sonaría más rico tocado en un tubo abierto, ya que tiene múltiplos pares de la fundamental además de impares. Un tubo cerrado solo tiene múltiplos impares.

Resonancia

La resonancia se produce en muchos sistemas diferentes como cuerdas, columnas de aire y átomos. Como ya hemos comentado en capítulos anteriores, la resonancia es la oscilación impulsada o forzada de un sistema a su frecuencia natural. En la resonancia, la energía se transfiere rápidamente al sistema oscilante y la amplitud de sus oscilaciones crece hasta que el sistema ya no se puede describir por la ley de Hooke. Un ejemplo de ello es el sonido distorsionado que se produce intencionadamente en ciertos tipos de música rock.

Los instrumentos de viento utilizan la resonancia de las columnas de aire para amplificar los tonos producidos por los labios o las lengüetas que vibran. Otros instrumentos también utilizan la resonancia del aire de forma inteligente para amplificar el sonido. La Figura 17.27 muestra un violín y una guitarra, ambos con cajas de resonancia pero con formas diferentes, lo que genera estructuras de sobretono distintas. La cuerda que vibra crea un sonido que resuena en la caja de resonancia, amplifica enormemente el sonido y crea sobretonos que dan al instrumento su timbre característico. Cuanto más compleja sea la forma de la caja de resonancia, mayor será su capacidad para resonar en un amplio rango de frecuencias. La marimba, como la que se muestra en la Figura 17.28, utiliza macetas de barro o vasijas en forma de calabaza debajo de los listones de madera para amplificar sus tonos. La resonancia de la maceta se puede ajustar al añadir agua.



(a) (b)

FIGURA 17.27 Los instrumentos de cuerda como (a) los violines y (b) las guitarras utilizan la resonancia en sus cajas de resonancia para amplificar y enriquecer el sonido creado por sus cuerdas vibrantes. El puente y los soportes acoplan las vibraciones de las cuerdas a las cajas de resonancia y al aire de su interior (créditos: a, modificación del trabajo de Feliciano Guimarães; b, modificación del trabajo de Steve Snodgrass).



FIGURA 17.28 Esta marimba utiliza vasijas en forma de calabaza como cámara de resonancia para amplificar su sonido (créditos: “Eventos de APC”/Flickr).

Hemos hecho hincapié en las aplicaciones del sonido en nuestros análisis sobre resonancia y ondas estacionarias, pero estas ideas se aplican a cualquier sistema que tenga características ondulatorias. Las cuerdas que vibran, por ejemplo, son realmente resonantes y tienen fundamentales y sobretonos similares a los de las columnas de aire. Más sutiles son las resonancias en los átomos debido al carácter ondulatorio de sus electrones. Sus orbitales pueden verse como ondas estacionarias, que tienen una fundamental (estado fundamental) y sobretonos (estados excitados). Es fascinante que las características de las ondas se apliquen a un rango tan amplio de sistemas físicos.

17.6 Batimientos

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Determinar la frecuencia de batimiento producida por dos ondas sonoras que difieren en frecuencia.
- Describir cómo los instrumentos musicales producen batimientos.

El estudio de la música ofrece muchos ejemplos de la superposición de ondas y de las interferencias constructivas y destructivas que se producen. Muy pocos ejemplos de música interpretada consisten en que una sola fuente reproduzca una sola frecuencia durante un periodo prolongado. Probablemente estará de acuerdo en que una sola frecuencia de sonido durante un periodo prolongado puede resultar aburrida hasta el punto de irritar, similar al zumbido no deseado de un motor de avión o a un ventilador ruidoso. La música es agradable e interesante gracias a la mezcla de las frecuencias cambiantes de varios instrumentos y voces.

Un fenómeno interesante que se produce debido a la interferencia constructiva y la destructiva de dos o más frecuencias de sonido es el fenómeno de **batimientos**. Si dos sonidos difieren en frecuencia, las ondas sonoras se pueden modelar como

$$y_1 = A\cos(k_1 x - 2\pi f_1 t) \text{ y } y_2 = A\cos(k_2 x - 2\pi f_2 t).$$

Al usar la identidad trigonométrica $\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$ y considerar el punto en el espacio como $x = 0{,}0$ m, hallamos que el sonido resultante en un punto del espacio, a partir de la superposición de las dos ondas sonoras, es igual a la Figura 17.29:

$$y(t) = 2A\cos\left(2\pi f_{avg} t\right)\cos\left(2\pi\left(\frac{|f_2 - f_1|}{2}\right)t\right),$$

donde la **frecuencia de batimiento** es

$$f_{\text{bat}} = |f_2 - f_1|. \qquad 17.17$$

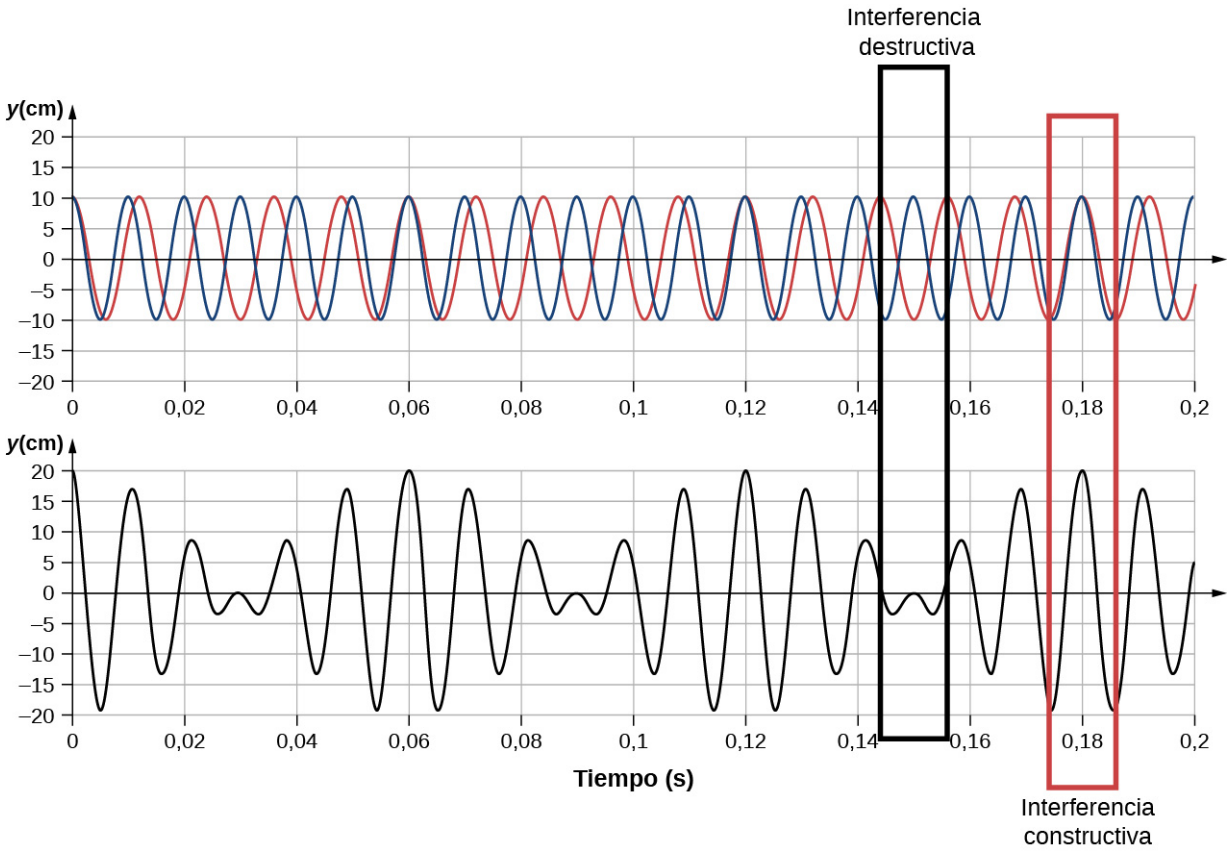


FIGURA 17.29 Batimientos producidos por las interferencias constructiva y destructiva de dos ondas sonoras que difieren en frecuencia.

Los afinadores de pianos pueden utilizar estos batimientos para afinar un piano. Se golpea un diapasón y se toca una nota en el piano. A medida que el afinador del piano afina la cuerda, los batimientos tienen una frecuencia más baja a medida que la frecuencia de la nota tocada se acerca a la frecuencia del diapasón.

EJEMPLO 17.7

Calcular la frecuencia de batimiento entre dos diapasones

¿Cuál es la frecuencia de batimiento producida cuando se golpean simultáneamente un diapasón de una frecuencia de 256 Hz y otro de una frecuencia de 512 Hz?

Estrategia

La frecuencia de batimiento es la diferencia de las dos frecuencias.

Solución

Usamos $f_{\text{bat}} = |f_2 - f_1|$:

$$|f_2 - f_1| = (512 - 256)\ \text{Hz} = 256\ \text{Hz}.$$

Importancia

La frecuencia de batimiento es el valor absoluto de la diferencia entre las dos frecuencias. Una frecuencia negativa no tendría sentido.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.8

¿Qué pasaría si interactuaran más de dos frecuencias? Considere tres frecuencias.

El estudio de la superposición de varias ondas tiene muchas aplicaciones interesantes más allá del estudio del sonido. En capítulos posteriores hablaremos de las propiedades ondulatorias de las partículas. Las partículas se pueden modelar como un "paquete de ondas" que se genera de la superposición de varias ondas, donde la partícula se mueve a la "velocidad de grupo" del paquete de ondas.

17.7 El Efecto Doppler

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

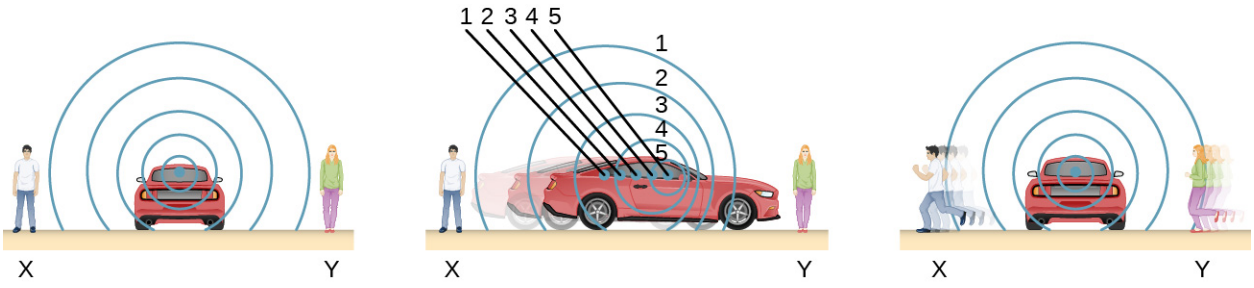
Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el cambio en la frecuencia observada cuando una fuente de sonido en movimiento se acerca o se aleja de un observador estacionario.
- Explicar el cambio en la frecuencia observada cuando un observador se acerca o se aleja de una fuente de sonido estacionaria.

El sonido característico de una motocicleta que pasa zumbando es un ejemplo del **Efecto Doppler**. En concreto, si usted está parado en una esquina de una calle y observa una ambulancia con la sirena encendida que pasa a una velocidad constante, notará dos cambios característicos en el sonido de la sirena. Primero, el sonido aumenta su volumen a medida que la ambulancia se acerca y disminuye el volumen a medida que se aleja, lo que es de esperar. Pero además, la sirena aguda cambia drásticamente a un sonido más grave. A medida que pasa la ambulancia, la frecuencia del sonido que escucha un observador estacionario cambia de una frecuencia alta constante a una frecuencia baja constante, aunque la sirena esté produciendo una fuente de frecuencia constante. Cuanto más cerca pase la ambulancia, más brusco será el cambio. Además, cuanto más rápido se mueva la ambulancia, mayor será el cambio. También oímos este cambio de frecuencia característico cuando pasan automóviles, aviones y trenes.

El Efecto Doppler es una alteración de la frecuencia observada de un sonido debido al movimiento de la fuente o del observador. Aunque es menos conocido, este efecto es fácilmente perceptible para una fuente estacionaria y un observador en movimiento. Por ejemplo, si pasa por delante de un tren con una bocina de advertencia estacionaria, oirá que la frecuencia de la bocina cambia de alta a baja cuando usted pasa. El cambio real en la frecuencia debido al movimiento relativo de la fuente y el observador se denomina **corrimiento Doppler**. El Efecto Doppler y el corrimiento Doppler deben su nombre al físico y matemático austriaco Christian Johann Doppler (1803-1853), quien hizo experimentos con fuentes y observadores en movimiento. Doppler, por ejemplo, hizo que los músicos tocaran en un vagón de tren abierto en movimiento y que también lo hicieran parados junto a las vías del tren mientras este pasaba. Se observó su música tanto dentro como fuera del tren, y se midieron los cambios de frecuencia.

¿Qué causa el corrimiento Doppler? La Figura 17.30 ilustra ondas sonoras emitidas por fuentes estacionarias y en movimiento en una masa de aire estacionaria. Cada alteración se propaga esféricamente desde el punto en el que se emite el sonido. Si la fuente es estacionaria, entonces todas las esferas que representan las compresiones de aire en la onda sonora están centradas en el mismo punto y los observadores estacionarios a ambos lados oyen la misma longitud de onda y frecuencia que emite la fuente (caso a). Si la fuente se mueve, la situación es diferente. Cada compresión del aire se desplaza en una esfera desde el punto en el que se emitió, pero el punto de emisión se desplaza. Este punto de emisión en movimiento hace que las compresiones de aire estén más juntas en un lado y más separadas en el otro. Así, la longitud de onda es más corta en la dirección en que se mueve la fuente (a la derecha en el caso b) y más larga en la dirección opuesta (a la izquierda en el caso b). Por último, si los observadores se mueven, como en el caso (c), la frecuencia con la que reciben las compresiones cambia. El observador que se acerca a la fuente las recibe a una frecuencia más alta, y la persona que se aleja de la fuente las recibe a una frecuencia más baja.



(a) Fuente y observadores estacionarios

(b) Fuente móvil, observadores estacionarios

(c) Fuente estacionaria, observadores móviles

FIGURA 17.30 Los sonidos emitidos por una fuente se propagan en ondas esféricas. (a) Cuando la fuente, los observadores y el aire son estacionarios la longitud de onda y la frecuencia son iguales en todas las direcciones y para todos los observadores. (b) Los sonidos emitidos por una fuente que se mueve hacia la derecha se propagan desde los puntos en los que fueron emitidos. La longitud de onda se reduce y, en consecuencia, la frecuencia aumenta en la dirección del movimiento, por lo que el observador de la derecha oye un sonido más agudo. Lo opuesto ocurre con el observador de la izquierda, donde la longitud de onda aumenta y la frecuencia se reduce. (c) El mismo efecto se produce cuando los observadores se mueven con respecto a la fuente. El movimiento hacia la fuente aumenta la frecuencia, ya que el observador de la derecha pasa por más crestas de onda de las que pasaría si estuviera estacionario. El movimiento de alejamiento de la fuente disminuye la frecuencia, ya que el observador de la izquierda pasa por menos crestas de onda de las que pasaría si estuviera estacionario.

Sabemos que la longitud de onda y la frecuencia están relacionadas por $v = f\lambda$, donde v es la velocidad fija del sonido. El sonido se mueve en un medio y tiene la misma velocidad v en ese medio tanto si la fuente se mueve como si no. Así, f multiplicado por λ es una constante. Como el observador de la derecha en el caso (b) recibe una longitud de onda más corta, la frecuencia que recibe debe ser mayor. Del mismo modo, el observador de la izquierda recibe una longitud de onda más larga y, por tanto, escucha una frecuencia más baja. Lo mismo ocurre en el caso (c). El observador que se acerca a la fuente recibe una frecuencia más alta y el que se aleja de la fuente recibe una frecuencia más baja. Por tanto, en general, el movimiento relativo de la fuente y el observador entre sí aumenta la frecuencia recibida. El movimiento relativo de separación disminuye la frecuencia. Cuanto mayor sea la velocidad relativa, mayor será el efecto.

El Efecto Doppler se produce no solo para el sonido, sino para cualquier onda cuando hay un movimiento relativo entre el observador y la fuente. Los corrimientos Doppler se producen en la frecuencia de ondas sonoras, de luz y de agua, por ejemplo. Los corrimientos Doppler se pueden usar para determinar velocidad, como cuando los ultrasonidos se reflejan en la sangre en un diagnóstico médico. Las velocidades relativas de estrellas y galaxias están determinadas por el desplazamiento de las frecuencias de la luz que reciben de ellas y han implicado mucho sobre los orígenes del universo. La física moderna se ha visto profundamente afectada por las observaciones de los corrimientos Doppler.

Derivación de la frecuencia observada debido al corrimiento Doppler

Considere dos observadores estacionarios X y Y en la Figura 17.31, situados a ambos lados de una fuente estacionaria. Cada observador oye la misma frecuencia, y esa frecuencia es la que produce la fuente estacionaria.

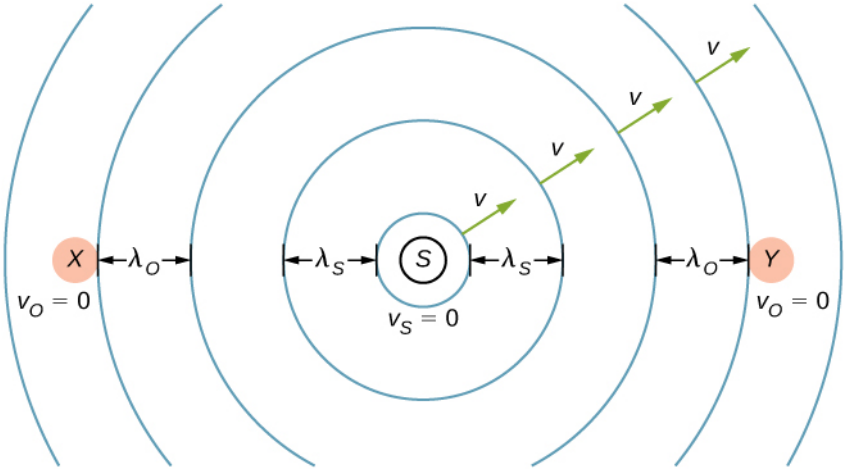


FIGURA 17.31 Una fuente estacionaria envía ondas sonoras a una frecuencia constante f_S, con una longitud de onda constante λ_S, a la velocidad del sonido *v*. Dos observadores estacionarios *X* y *Y*, a ambos lados de la fuente, observan una frecuencia $f_\text{O} = f_\text{S}$, con una longitud de onda $\lambda_\text{O} = \lambda_\text{S}$.

Considere ahora un observador estacionario *X* con una fuente que se aleja del observador con una velocidad constante $v_\text{S} < v$ (Figura 17.32). En el tiempo $t = 0$ la fuente envía una onda sonora, indicada en negro. Esta onda se desplaza a la velocidad del sonido *v*. La posición de la onda sonora en cada intervalo de tiempo del periodo T_S se muestra como líneas punteadas. Después de un periodo, la fuente se ha movido $\Delta x = v_\text{S} T_\text{S}$ y emite una segunda onda sonora, que se desplaza a la velocidad del sonido. La fuente sigue moviéndose y produciendo ondas sonoras, como indican los círculos numerados 3 y 4. Observe que a medida que las ondas se desplazan hacia afuera permanecen centradas en su respectivo punto de origen.

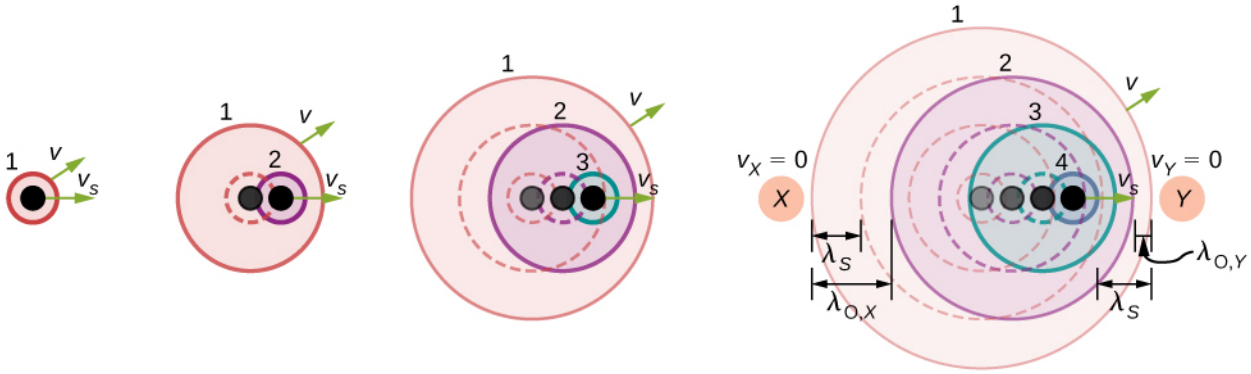


FIGURA 17.32 Una fuente que se mueve a velocidad constante v_S lejos de un observador *X*. La fuente en movimiento envía ondas sonoras a una frecuencia constante f_S, con una longitud de onda constante λ_S, a la velocidad del sonido *v*. Las representaciones de la fuente en un intervalo de T_S se muestran a medida que la fuente se aleja del observador estacionario *X*. Las líneas sólidas representan la posición de las ondas sonoras después de cuatro periodos desde el tiempo inicial. Las líneas punteadas sirven para mostrar las posiciones de las ondas en cada tiempo. El observador escucha una longitud de onda de $\lambda_\text{O} = \lambda_\text{S} + \Delta x = \lambda_\text{S} + v_\text{S} T_\text{S}$.

Mediante el hecho de que la longitud de onda es igual a la velocidad por el periodo y el periodo es el inverso de la frecuencia podemos derivar la frecuencia observada:

$$\begin{aligned} \lambda_\text{O} &= \lambda_\text{S} + \Delta x \\ v T_\text{O} &= v T_\text{S} + v_\text{S} T_\text{S} \\ \frac{v}{f_\text{O}} &= \frac{v}{f_\text{S}} = \frac{v_\text{S}}{f_\text{S}} = \frac{v + v_\text{S}}{f_\text{S}} \\ f_\text{O} &= f_\text{S} \left(\frac{v}{v + v_\text{S}} \right). \end{aligned}$$

A medida que la fuente se aleja del observador, la frecuencia notada es menor que la de la fuente.

Considere ahora una fuente que se mueve a velocidad constante v_s, moviéndose hacia un observador estacionario *Y*, también mostrado en la Figura 17.32. La longitud de onda es observada por *Y* como $\lambda_o = \lambda_s - \Delta x = \lambda_s - v_s T_s$. Una vez más, mediante el hecho de que la longitud de onda es igual a la velocidad por el periodo y el periodo es el inverso de la frecuencia podemos derivar la frecuencia observada:

$$\begin{aligned} \lambda_o &= \lambda_s - \Delta x \\ vT_o &= vT_s - v_s T_s \\ \frac{v}{f_o} &= \frac{v}{f_s} - \frac{v_s}{f_s} = \frac{v - v_s}{f_s} \\ f_o &= f_s \left(\frac{v}{v - v_s} \right). \end{aligned}$$

Cuando una fuente está en movimiento y el observador es estacionario, la frecuencia notada es

$$f_o = f_s \left(\frac{v}{v \mp v_s} \right), \tag{17.18}$$

donde f_o es la frecuencia notada por el observador estacionario, f_s es la frecuencia producida por la fuente en movimiento, *v* es la velocidad del sonido, v_s es la velocidad constante de la fuente, el signo superior es para la fuente que se acerca al observador y el signo inferior es para la fuente que se aleja del observador.

¿Qué ocurre si el observador se mueve y la fuente es estacionaria? Si el observador se mueve hacia la fuente estacionaria, la frecuencia notada es mayor que la de la fuente. Si el observador se aleja de la fuente estacionaria, la frecuencia notada es inferior a la de la fuente. Considere el observador *X* en la Figura 17.33 mientras el observador se mueve hacia una fuente estacionaria con una velocidad v_o. La fuente emite un tono con una frecuencia constante f_s y periodo constante T_s. El observador escucha la primera onda emitida por la fuente. Si el observador fuera estacionario, el tiempo de paso de una longitud de onda del sonido debería ser igual al periodo de la fuente T_s. Como el observador se mueve hacia la fuente, el tiempo de paso de una longitud de onda es inferior a T_s y es igual al periodo observado $T_o = T_s - \Delta t$. En el tiempo $t = 0$, el observador comienza en el principio de una longitud de onda y se desplaza hacia la segunda longitud de onda a medida que esta se aleja de la fuente. La longitud de onda es igual a la distancia que recorrió el observador más la distancia que recorrió la onda sonora hasta encontrarse con el observador:

$$\begin{aligned} \lambda_s &= vT_o + v_o T_o \\ vT_s &= (v + v_o) T_o \\ v\left(\frac{1}{f_s}\right) &= (v + v_o)\left(\frac{1}{f_o}\right) \\ f_o &= f_s \left(\frac{v + v_o}{v} \right). \end{aligned}$$

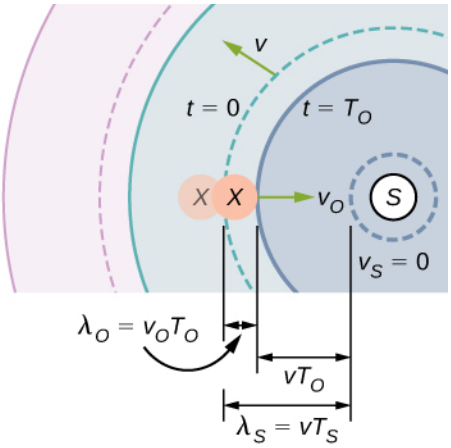


FIGURA 17.33 Una fuente estacionaria emite una onda sonora con una frecuencia constante f_s con una longitud de onda constante λ_s moviéndose a la velocidad del sonido *v*. El observador *X* se mueve hacia la fuente con una velocidad constante v_o, y la figura muestra la posición inicial y final del observador *X*. El observador *X* nota una

frecuencia superior a la de la fuente. Las líneas punteadas muestran la posición de las ondas en $t = 0$. Las líneas continuas muestran la posición de las ondas en $t = T_o$.

Si el observador se aleja de la fuente (Figura 17.34), se puede calcular la frecuencia observada:

$$\begin{aligned} \lambda_s &= vT_o - v_o T_o \\ vT_s &= (v - v_o)T_o \\ v\left(\frac{1}{f_s}\right) &= (v - v_o)\left(\frac{1}{f_o}\right) \\ f_o &= f_s\left(\frac{v - v_o}{v}\right). \end{aligned}$$

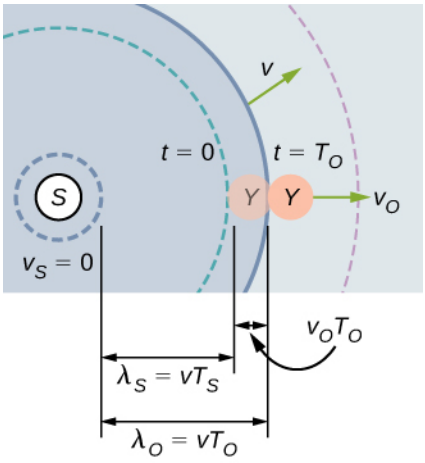


FIGURA 17.34 Una fuente estacionaria emite una onda sonora con una frecuencia constante f_s con una longitud de onda constante λ_s moviéndose a la velocidad del sonido *v*. El observador *Y* se aleja de la fuente con una velocidad constante v_o, y la figura muestra la posición inicial y final del observador *Y*. El observador *Y* nota una frecuencia inferior a la de la fuente. Las líneas punteadas muestran la posición de las ondas en $t = 0$. Las líneas continuas muestran la posición de las ondas en $t = T_o$.

Las ecuaciones para un observador que se acerca o se aleja de una fuente estacionaria pueden combinarse en una sola ecuación:

$$f_o = f_s\left(\frac{v \pm v_o}{v}\right), \qquad 17.19$$

donde f_o es la frecuencia observada, f_s es la frecuencia de la fuente, v es la velocidad del sonido, v_o es la velocidad del observador, el signo superior es para el observador que se acerca a la fuente y el signo inferior es para el observador que se aleja de la fuente.

La Ecuación 17.18 y la Ecuación 17.19 se pueden resumir en una ecuación (el signo superior es de aproximación) y se ilustra con más detalle en la Tabla 17.4:

$$f_o = f_s\left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}\right), \qquad 17.20$$

Corrimiento Doppler $f_o = f_s\left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}\right)$	**Observador estacionario**	**El observador se mueve hacia la fuente**	**El observador se aleja de la fuente**
Fuente estacionaria	$f_o = f_s$	$f_o = f_s\left(\frac{v + v_o}{v}\right)$	$f_o = f_s\left(\frac{v - v_o}{v}\right)$
Fuente en movimiento hacia el observador	$f_o = f_s\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$	$f_o = f_s\left(\frac{v + v_o}{v - v_s}\right)$	$f_o = f_s\left(\frac{v - v_o}{v - v_s}\right)$

Corrimiento Doppler $f_o = f_s\left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}\right)$	Observador estacionario	El observador se mueve hacia la fuente	El observador se aleja de la fuente
Fuente que se aleja del observador	$f_o = f_s\left(\frac{v}{v+v_s}\right)$	$f_o = f_s\left(\frac{v+v_o}{v+v_s}\right)$	$f_o = f_s\left(\frac{v-v_o}{v+v_s}\right)$

TABLA 17.4

donde f_o es la frecuencia observada, f_s es la frecuencia de la fuente, v es la velocidad del sonido, v_o es la velocidad del observador, v_s es la velocidad de la fuente, el signo superior es para la aproximación y el inferior para la salida.

INTERACTIVO

El Efecto Doppler implica movimiento y un video (https://openstax.org/l/21doppler) ayudará a visualizar los efectos de un observador o fuente en movimiento. En este video se muestra una fuente en movimiento y un observador estacionario, así como un observador en movimiento y una fuente estacionaria. También se analiza el Efecto Doppler y su aplicación a la luz.

EJEMPLO 17.8

Cálculo de un corrimiento Doppler

Suponga que un tren con una bocina de 150 Hz se desplaza a 35,0 m/s en aire quieto un día en que la velocidad del sonido es de 340 m/s.

(a) ¿Qué frecuencias observa una persona en estado estacionario al lado de las vías cuando el tren se acerca y después de que pasa?

(b) ¿Qué frecuencia observa el maquinista que va en el tren?

Estrategia

Para calcular la frecuencia observada en (a), debemos usar $f_{\text{obs}} = f_s\left(\frac{v}{v \mp v_s}\right)$ porque la fuente está en movimiento. El signo menos se utiliza para el tren que se acerca y el signo más para el que se aleja. En (b), hay dos corrimientos Doppler: uno para una fuente en movimiento y otro para un observador en movimiento.

Solución

a. Introduzca los valores conocidos en $f_o = f_s\left(\frac{v}{v-v_s}\right)$:

$$f_o = f_s\left(\frac{v}{v-v_s}\right) = (150\text{ Hz})\left(\frac{340\text{ m/s}}{340\text{ m/s} - 35{,}0\text{ m/s}}\right).$$

Calcule la frecuencia observada por una persona en estado estacionario cuando el tren se acerca:

$$f_o = (150\text{ Hz})\,(1{,}11) = 167\text{ Hz}.$$

Use la misma ecuación con el signo más para calcular la frecuencia que oye una persona parada cuando el tren se aleja:

$$f_o = f_s\left(\frac{v}{v+v_s}\right) = (150\text{ Hz})\left(\frac{340\text{ m/s}}{340\text{ m/s} + 35{,}0\text{ m/s}}\right).$$

Calcule la segunda frecuencia:

$$f_o = (150\text{ Hz})\,(0{,}907) = 136\text{ Hz}.$$

b. Identifique aspectos conocidos:
   - Parece razonable que el maquinista reciba la misma frecuencia que emite la bocina, porque la velocidad relativa entre ellos es cero.

- En relación con el medio (aire), las velocidades son $v_S = v_O = 35{,}0$ m/s.
- El primer corrimiento Doppler es para el observador en movimiento; el segundo es para la fuente en movimiento.

Use la siguiente ecuación:

$$f_O = \left[f_S\left(\frac{v \pm v_O}{v}\right)\right]\left(\frac{v}{v \mp v_S}\right).$$

La cantidad entre corchetes es la frecuencia del corrimiento Doppler debido a un observador en movimiento. El factor de la derecha es el efecto de la fuente en movimiento.
Como el maquinista del tren se mueve en dirección a la bocina, debemos utilizar el signo más para v_{obs}; sin embargo, como la bocina también se mueve en dirección contraria al maquinista, también usamos el signo más para v_S. Pero el tren lleva tanto al maquinista como a la bocina a la misma velocidad, por lo que $v_S = v_O$. Como consecuencia, todo menos f_S se cancela, lo que ocasiona

$$f_O = f_S.$$

Importancia

Para el caso en que la fuente y el observador no se mueven juntos, los números calculados son válidos cuando la fuente (en este caso, el tren) está lo suficientemente lejos como para que el movimiento sea casi a lo largo de la línea que une a la fuente y al observador. En ambos casos, el desplazamiento es significativo y fácilmente perceptible. Observe que el desplazamiento es de 17,0 Hz para el movimiento de aproximación y de 14,0 Hz para el de alejamiento. Los desplazamientos no son simétricos.

Para el maquinista que va en el tren podemos esperar que no haya ningún cambio de frecuencia porque la fuente y el observador se mueven juntos. Esto coincide con su experiencia. Por ejemplo, no hay corrimiento Doppler en la frecuencia de las conversaciones entre el conductor y el pasajero en una motocicleta. Las personas que hablan cuando un viento mueve el aire entre ellas tampoco observan ningún corrimiento Doppler en su conversación. El punto crucial es que la fuente y el observador no se mueven uno respecto al otro.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 17.9

Describa una situación de su vida en la que podría confiar en el corrimiento Doppler para ayudarse mientras conduce un automóvil o camina cerca del tráfico.

El Efecto Doppler y el corrimiento Doppler tienen muchas aplicaciones importantes en la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, el corrimiento Doppler de los ultrasonidos se puede usar para medir la velocidad de la sangre, y la policía utiliza el corrimiento Doppler de un radar (una microonda) para medir la velocidad de los automóviles. En meteorología, el corrimiento Doppler se utiliza para seguir el movimiento de nubes de tormenta; este “radar Doppler” puede dar la velocidad y la dirección de la lluvia o la nieve en los frentes meteorológicos. En astronomía, podemos examinar la luz emitida por galaxias lejanas y determinar su velocidad en relación con la nuestra. Cuando las galaxias se alejan de nosotros, su luz se desplaza a una frecuencia más baja y, por tanto, a una longitud de onda más larga, lo que se conoce como corrimiento al rojo. Esta información procedente de galaxias muy muy lejanas ha permitido estimar la edad del universo (desde el Big Bang) en unos 14.000 millones de años.

17.8 Ondas expansivas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al final de esta sección, podrá:

- Explicar el mecanismo de las explosiones sónicas.
- Describir la diferencia entre explosiones sónicas y ondas expansivas.
- Describir una estela de proa.

Cuando hablamos del Efecto Doppler de una fuente en movimiento y un observador estacionario, los únicos casos que consideramos fueron aquellos en los que la fuente se movía a velocidades inferiores a la del sonido. Recuerde que la frecuencia observada para una fuente en movimiento que se acerca a un observador estacionario es $f_{\mathrm{o}} = f_{\mathrm{s}} \left(\frac{v}{v - v_{\mathrm{s}}} \right)$. A medida que la fuente se acerca a la velocidad del sonido, la frecuencia observada aumenta. Según la ecuación, si la fuente se mueve a la velocidad del sonido, el denominador es igual a cero, lo que implica que la frecuencia observada es infinita. Si la fuente se mueve a velocidades superiores a la del sonido, la frecuencia observada es negativa.

¿Qué puede significar esto? ¿Qué ocurre cuando una fuente se acerca a la velocidad del sonido? Algunos científicos argumentaron alguna vez que la interferencia constructiva de las ondas sonoras ocasionaría una onda de presión tan grande que sería imposible que un avión superara la velocidad del sonido porque las presiones serían lo suficientemente grandes como para destruir el avión. Pero ahora los aviones vuelan rutinariamente más rápido que la velocidad del sonido. El 28 de julio de 1976, el capitán Eldon W. Joersz y el mayor George T. Morgan volaron un Lockheed SR-71 Blackbird #61-7958 a 3529,60 km/h (2193,20 mi/h), es decir, a Mach 2,85. El número Mach es la velocidad de la fuente dividida entre la velocidad del sonido:

$$M = \frac{v_{\mathrm{s}}}{v}. \tag{17.21}$$

Verá que se producen fenómenos interesantes cuando una fuente se acerca a la velocidad del sonido y la supera.

Efecto Doppler y alta velocidad

¿Qué ocurre con el sonido producido por una fuente en movimiento, como un avión a reacción, que se acerca a la velocidad del sonido o incluso la supera? La respuesta a esta pregunta se aplica no solo al sonido, sino también a todas las demás ondas. Suponga que un avión a reacción viene casi en línea recta hacia usted y emite un sonido de frecuencia f_{s}. Cuanto mayor sea la velocidad del avión v_{s}, mayor será el corrimiento Doppler y mayor será el valor observado para f_{o} (Figura 17.35).

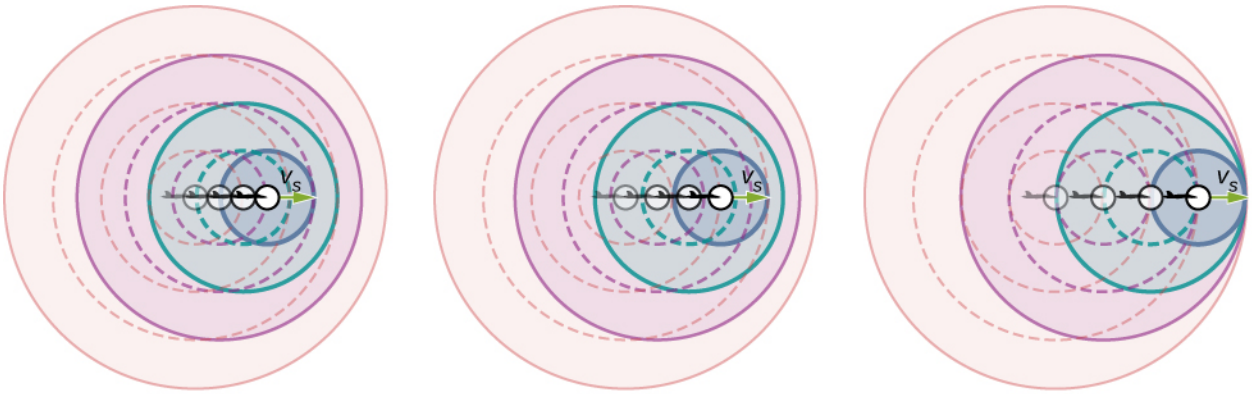


FIGURA 17.35 Debido al corrimiento Doppler, cuando una fuente en movimiento se acerca a un observador estacionario, la frecuencia observada es mayor que la de la fuente. Cuanto más rápido se mueva la fuente, mayor será la frecuencia observada. En esta figura la fuente de (b) se mueve más rápido que la de (a). Se muestran cuatro pasos de tiempo, los tres primeros mostrados como líneas punteadas. (c) Si una fuente se mueve a la velocidad del sonido, cada onda sucesiva interfiere con la anterior y el observador las ve todas en el mismo instante.

Ahora, como v_{s} se acerca a la velocidad del sonido, f_{o} se acerca al infinito, ya que el denominador en $f_{\mathrm{o}} = f_{\mathrm{s}} \left(\frac{v}{v \mp v_{\mathrm{s}}} \right)$ se acerca a cero. A la velocidad del sonido este resultado significa que delante de la fuente cada onda sucesiva interfiere con la anterior porque la fuente avanza a la velocidad del sonido. El observador las recibe todas en el mismo instante, por lo que la frecuencia es infinita (parte (c) de la figura).

Ondas expansivas y explosiones sónicas

Si la fuente supera la velocidad del sonido, el observador no recibe ningún sonido hasta que la fuente haya pasado, por lo que los sonidos de la fuente que se acerca se mezclan con los de esta cuando se aleja. Esta mezcla parece desordenada, pero ocurre algo interesante: se crea una onda expansiva (Figura 17.36).

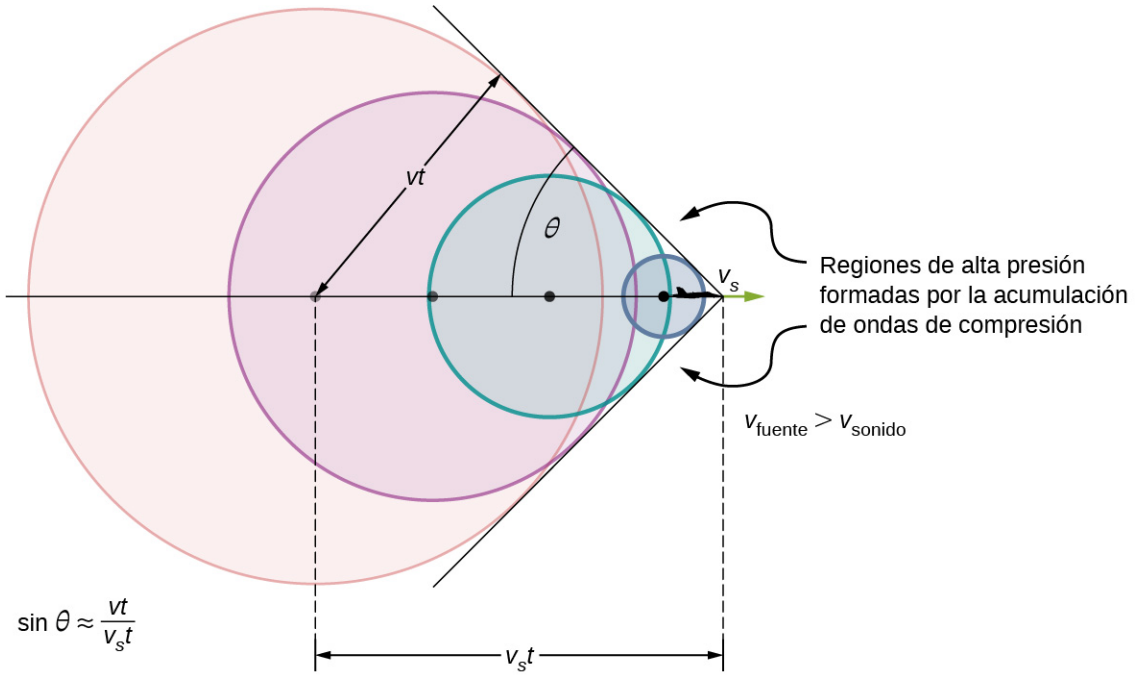


FIGURA 17.36 Las ondas sonoras procedentes de una fuente que se mueve más rápido que la velocidad del sonido se propagan esféricamente desde el punto en el que se emiten, pero la fuente se adelanta a cada onda. La interferencia constructiva a lo largo de las líneas mostradas (en realidad un cono en tres dimensiones) crea una onda expansiva llamada "explosión sónica." Cuanto mayor sea la velocidad de la fuente, menor será el ángulo θ

Interferencia constructiva a lo largo de las líneas mostradas (un cono en tres dimensiones) a partir de ondas sonoras similares que llegan allí simultáneamente. Esta superposición forma una alteración llamada **onda expansiva**, una interferencia constructiva del sonido creada por un objeto que se mueve más rápido que el sonido. En el interior del cono, la interferencia es mayoritariamente destructiva, por lo que la intensidad del sonido allí es mucho menor que en la onda expansiva. El ángulo de la onda expansiva se puede calcular a partir de la geometría. En el tiempo t la fuente se ha desplazado $v_S t$, la onda sonora se ha desplazado una distancia vt y el ángulo se puede calcular mediante $\text{sen}\,\theta = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S}$. Tenga en cuenta que el número Mach se define como $\frac{v_S}{v}$, por lo que el seno del ángulo es igual a la inversa del número Mach,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{v}{w_S} = \frac{1}{M}. \qquad 17.22$$

Es posible que haya oído hablar del término común "**explosión sónica**". Un error de concepto común es que la explosión sónica se produce cuando el avión rompe la barrera del sonido, es decir, acelera a una velocidad superior a la del sonido. En realidad, la explosión sónica se produce cuando la onda expansiva hace un barrido por el suelo.

Un avión crea dos ondas expansivas, una desde la nariz y otra desde la cola (Figura 17.37). Durante la cobertura televisiva de aterrizajes de transbordadores espaciales, a menudo, se oyen dos pitidos distintos. Estos estaban separados por el tiempo exacto que tardaría el transbordador en pasar por un punto. Los observadores en tierra, a menudo, no ven la aeronave que crea la explosión sónica, ya que ha pasado antes de que la onda expansiva los alcance, como se ve en la figura. Si el avión vuela cerca a baja altura, las presiones de la explosión sónica pueden ser destructivas y romper ventanas, además de hacer saltar los nervios. Debido a lo

destructivas que pueden ser las explosiones sónicas, los vuelos supersónicos están prohibidos sobre áreas pobladas.

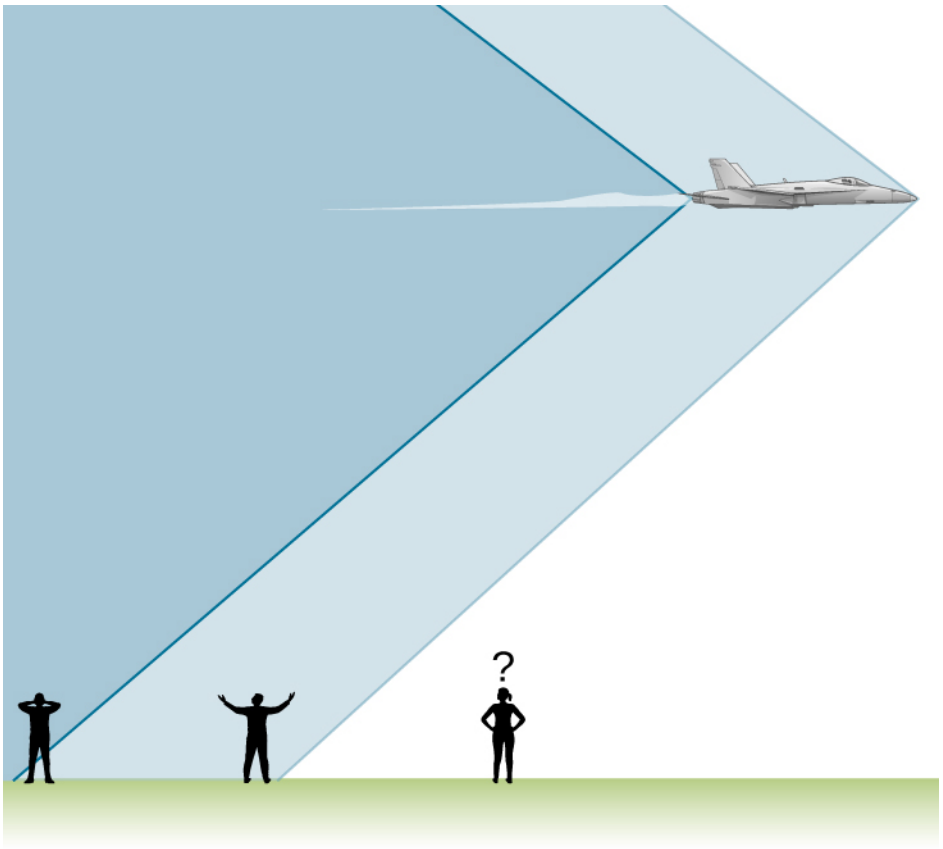


FIGURA 17.37 Los observadores experimentan dos explosiones sónicas en el suelo después del paso del avión, las cuales se crean por la nariz y la cola de un avión cuando la onda expansiva hace un barrido por el suelo.

Las ondas expansivas son un ejemplo de un fenómeno más amplio llamado estela de proa. Una **estela de proa**, como la que aparece en la Figura 17.38, se crea cuando la fuente de la onda se mueve más rápido que la velocidad de propagación de la onda. Las ondas acuáticas se extienden en círculos desde el punto en que se crean, y la estela de proa es la conocida estela en forma de V, que sigue a la fuente. Una estela de proa más exótica se crea cuando una partícula subatómica se desplaza a través de un medio más rápido que el desplazamiento de la velocidad de la luz en ese medio (en el vacío, la velocidad de la luz máxima es $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s; en el medio de agua, la velocidad de la luz está más cerca de $0{,}75c$). Si la partícula crea luz a su paso, esa luz se propaga en un cono con un ángulo indicativo de la velocidad de la partícula, como se ilustra en la Figura 17.39. Dicha estela de proa se denomina radiación de Cerenkov y se observa habitualmente en la física de partículas.

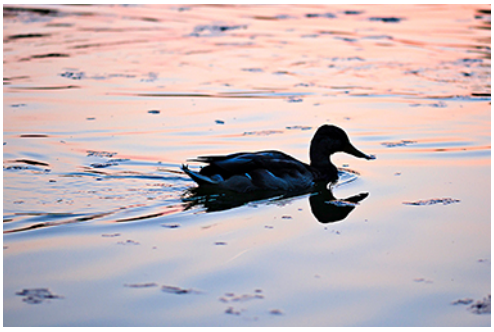


FIGURA 17.38 Estela de proa creada por un pato. La interferencia constructiva produce la estela más bien

estructurada, mientras que dentro de la estela se produce relativamente poca acción de las ondas, donde la interferencia es mayormente destructiva (créditos: Horia Varlan).

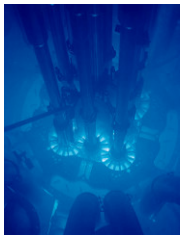


FIGURA 17.39 El resplandor azul de este reactor en estanque de investigación es la radiación de Cerenkov causada por partículas subatómicas que se desplazan más rápido que la velocidad de la luz en el agua (créditos: Laboratorio Nacional de Idaho).

Revisión Del Capítulo

Términos Clave

armónicos el término utilizado para referirse colectivamente a la fundamental y a sus sobretonos
audición percepción del sonido
batimientos interferencias constructiva y destructiva de dos o más frecuencias de sonido
corrimiento Doppler cambio real de la frecuencia debido al movimiento relativo de la fuente y el observador
Efecto Doppler alteración de la frecuencia observada de un sonido debido al movimiento de la fuente o del observador
estela de proa alteración en forma de v creada cuando la fuente de la onda se mueve más rápido que su velocidad de propagación
explosión sónica ruido fuerte que se produce como una onda expansiva que hace un barrido por el suelo
fonio unidad numérica de volumen
frecuencia de batimiento frecuencia de batimientos producidos por ondas sonoras que difieren en frecuencia
fundamental la resonancia de frecuencia más baja
nivel de intensidad del sonido cantidad sin unidades que le indica el nivel del sonido en relación con un estándar fijo
nivel de presión del sonido relación entre la amplitud de la presión y una presión de referencia
notas unidad básica de música con nombres específicos combinados para generar melodías
onda expansiva frente de onda que se produce cuando una fuente de sonido se mueve más rápido que la velocidad del sonido
sobretonos todas las frecuencias de resonancia más altas que la fundamental
sonido onda de presión en desplazamiento que puede ser periódica; la onda se puede modelar como una onda de presión o como una oscilación de moléculas
timbre número e intensidad relativa de múltiples frecuencias de sonido
tono percepción de la frecuencia de un sonido
transductor dispositivo que convierte la energía de una señal en forma de energía medible, por ejemplo, un micrófono convierte ondas sonoras en una señal eléctrica
volumen percepción de la intensidad del sonido

Ecuaciones Clave

Presión de una onda sonora
$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx.}} \operatorname{sen}(kx \mp \omega t + \phi)$$

Desplazamiento de las moléculas oscilantes de una onda sonora
$$s(x,t) = s_{\text{máx.}} \cos(kx \mp \omega t + \phi)$$

Velocidad de una onda
$$v = f\lambda$$

Velocidad del sonido en un fluido
$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

Velocidad del sonido en un sólido
$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Velocidad del sonido en un gas ideal
$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Velocidad del sonido en el aire como una función de temperatura
$$v = 331\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{T_{\text{K}}}{273\text{ K}}} = 331\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{1 + \frac{T_{\text{C}}}{273°\text{C}}}$$

Disminución de intensidad al expandirse una onda esférica
$$I_2 = I_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

Intensidad promediada a lo largo de un periodo	$I = \frac{\langle P \rangle}{A}$
Intensidad del sonido	$I = \frac{(\Delta p_{\text{máx.}})^2}{2\rho v}$
Nivel de intensidad del sonido	$\beta\,(dB) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$
Longitudes de onda resonantes de un tubo cerrado en un extremo	$\lambda_n = \frac{4}{n}L, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$
Frecuencias de resonancia de un tubo cerrado en un extremo	$f_n = n\frac{v}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$
Longitudes de onda resonantes de un tubo abierto en ambos extremos	$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
Frecuencias de resonancia de un tubo abierto en ambos extremos	$f_n = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
Frecuencia de batimiento producida por dos ondas que difieren en frecuencia	$f_{\text{bat}} = \lvert f_2 - f_1 \rvert$
Frecuencia que ve un observador estacionario y una fuente en movimiento	$f_{\text{o}} = f_{\text{s}}\left(\frac{v}{v \mp v_{\text{S}}}\right)$
Frecuencia que ve un observador en movimiento y una fuente estacionaria	$f_{\text{o}} = f_{\text{s}}\left(\frac{v \pm v_{\text{O}}}{v}\right)$
Corrimiento Doppler para la frecuencia observada	$f_{\text{o}} = f_{\text{s}}\left(\frac{v \pm v_{\text{O}}}{v \mp v_{\text{S}}}\right)$
Número Mach	$M = \frac{v_S}{v}$
Seno del ángulo formado por la onda expansiva	$\text{sen}\,\theta = \frac{v}{v_S} = \frac{1}{M}$

Resumen

17.1 Ondas sonoras

- El sonido es una alteración de la materia (una onda de presión) que se transmite desde su origen hacia el exterior. La audición es la percepción del sonido.
- El sonido se puede modelar en términos de presión o de desplazamiento de moléculas.
- El oído humano es sensible a frecuencias entre 20 Hz y 20 kHz.

17.2 Velocidad del sonido

- La velocidad del sonido depende del medio y de su estado.
- En un fluido, debido a la ausencia de fuerzas de corte, las ondas sonoras son longitudinales. Un sólido puede soportar ondas sonoras tanto longitudinales como transversales.
- En el aire, la velocidad del sonido está relacionada con la temperatura del aire T mediante $v = 331\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{T_{\text{K}}}{273\text{ K}}} = 331\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{1 + \frac{T_{\text{C}}}{273°\text{C}}}$.
- v es el mismo para todas las frecuencias y longitudes de onda del sonido en el aire.

17.3 Intensidad del sonido

- La intensidad $I = P/A$ es la misma para una onda sonora que se definió para todas las ondas, donde P es la potencia que atraviesa el área A.

La unidad SI para I es vatios por metro cuadrado. La intensidad de una onda sonora también está relacionada con la amplitud de la presión Δp:

$$I = \frac{(\Delta p)^2}{2\,\rho v},$$

donde ρ es la densidad del medio en el que se desplaza la onda sonora y v_w es la rapidez de sonido en el medio.

- El nivel de intensidad del sonido en unidades de decibeles (dB) es

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ es el umbral de intensidad de la audición.

- La percepción de la frecuencia es el tono. La percepción de la intensidad es el volumen y el volumen tiene unidades de fonios.

17.4 Modos normales de una onda sonora estacionaria

- El sonido no deseado se puede reducir mediante interferencia destructiva.
- El sonido tiene las mismas propiedades de interferencia y resonancia definidas para todas las ondas.
- En las columnas de aire, la resonancia de frecuencia más baja se denomina fundamental, mientras que todas las frecuencias de resonancia más altas se denominan sobretonos. En conjunto, se denominan armónicos.

17.5 Fuentes de sonido musical

- Algunos instrumentos musicales se pueden modelar como tubos que tienen condiciones de frontera simétricas: abiertos en ambos extremos o cerrados en ambos extremos. Otros instrumentos musicales se pueden modelar como tubos que tienen condiciones de frontera antisimétricas: cerrados en un extremo y abiertos en el otro.
- Algunos instrumentos, como el órgano de tubos, tienen varios tubos con diferentes longitudes. Los instrumentos como la flauta varían la longitud del tubo cerrando los agujeros a lo largo de este. El trombón varía la longitud del tubo mediante una barra deslizante.
- Los instrumentos de cuerda producen sonido mediante una cuerda que vibra con nodos en cada extremo. El aire que rodea la cuerda oscila a su frecuencia. La relación de las frecuencias para la cuerda es la misma que para las condiciones de frontera simétricas del tubo, y la longitud del tubo se sustituye por la longitud de la cuerda y la velocidad por $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$.

17.6 Batimientos

- Cuando dos ondas sonoras que difieren en frecuencia interfieren, se crean batimientos con una frecuencia de batimiento que es igual al valor absoluto de la diferencia de las frecuencias.

17.7 El Efecto Doppler

- El Efecto Doppler es una alteración de la frecuencia observada de un sonido debido al movimiento de la fuente o del observador.
- El cambio real de frecuencia se denomina corrimiento Doppler.

17.8 Ondas expansivas

- El número Mach es la velocidad de una fuente dividida entre la velocidad del sonido, $M = \frac{v_S}{v}$.
- Cuando una fuente de sonido se mueve más rápido que la velocidad del sonido, se produce una onda expansiva al interferir las ondas sonoras.
- La explosión sónica es el sonido intenso que se produce cuando la onda expansiva se desplaza por el suelo.
- El ángulo que produce la onda expansiva se puede calcular como $\text{sen}\,\theta = \frac{v}{v_S} = \frac{1}{M}$.
- La estela de proa se produce cuando un objeto se mueve más rápido que la velocidad de una onda mecánica en el medio, como un barco que se mueve a través del agua.

Preguntas Conceptuales

17.1 Ondas sonoras

1. ¿Cuál es la diferencia entre sonido y audición?

2. Aprenderá que la luz es una onda electromagnética que puede desplazarse a través del vacío. ¿Las ondas sonoras pueden desplazarse por el vacío?

3. Las ondas sonoras se pueden modelar como un cambio de presión. ¿Por qué se utiliza el cambio de presión y no la presión real?

17.2 Velocidad del sonido

4. ¿En qué se diferencian las vibraciones de sonido

de los átomos del movimiento térmico?

5. Cuando el sonido pasa de un medio a otro en el que su velocidad de propagación es diferente, ¿cambia su frecuencia o su longitud de onda? Explique brevemente su respuesta.
6. Un truco de fiesta muy popular es inhalar helio y hablar con una voz aguda y divertida. Explique este fenómeno.
7. Es posible que haya utilizado un telémetro sónico en el laboratorio para medir la distancia de un objeto mediante un chasquido de un transductor de sonido. ¿Cuál es el principio utilizado en este dispositivo?
8. El telémetro sónico del que se habla en la pregunta anterior debe calibrarse a menudo. Durante la calibración, el software pregunta por la temperatura ambiente. ¿Por qué supone que se requiere la temperatura ambiente?

17.3 Intensidad del sonido

9. Seis miembros de un equipo de natación sincronizada llevan tapones en los oídos para protegerse de la presión del agua en las profundidades, pero aun así pueden escuchar la música y ejecutar las combinaciones en el agua perfectamente. Un día, les pidieron que salieran de la piscina para que el equipo de buceo pudiera practicar algunas inmersiones y trataron de practicar en una colchoneta, pero parecían tener mucha más dificultad. ¿A qué se debe esto?
10. Una comunidad está preocupada por un plan para llevar el servicio de tren al centro de la ciudad desde las afueras. El nivel de intensidad del sonido actual, a pesar de que el astillero ferroviario está a unas cuadras de distancia, es de 70 dB en el centro. El alcalde asegura que solo habrá una diferencia de 30 dB de sonido en el centro de la ciudad. ¿Los habitantes de la ciudad se deben preocupar? ¿Por qué?

17.4 Modos normales de una onda sonora estacionaria

11. Le dan dos instrumentos de viento de idéntica longitud. Uno de ellos está abierto en ambos extremos, mientras que el otro está cerrado en un extremo. ¿Cuál es capaz de producir la frecuencia más baja?
12. ¿Cuál es la diferencia entre un sobretono y un armónico? ¿Todos los armónicos son sobretonos? ¿Todos los sobretonos son armónicos?
13. Dos columnas idénticas abiertas en ambos extremos se encuentran en habitaciones separadas. En la habitación A, la temperatura es $T = 20°\text{C}$ y en la habitación B, la temperatura es $T = 25°\text{C}$. En el extremo de cada tubo se conecta un altavoz que hace que los tubos resuenen a la frecuencia fundamental. ¿La frecuencia es la misma para ambos tubos? ¿Cuál es la frecuencia más alta?

17.5 Fuentes de sonido musical

14. ¿Cómo es posible que una guitarra sin amplificar produzca sonidos mucho más intensos que los de una cuerda pulsada y tensada por un simple palo?
15. Considere tres tubos de la misma longitud (L). El tubo A está abierto en ambos extremos, el tubo B está cerrado en ambos extremos y el tubo C tiene un extremo abierto y otro cerrado. Si la velocidad del sonido es la misma en cada uno de los tres tubos, ¿en cuál de ellos se podría producir la frecuencia fundamental más baja? ¿En cuál de los tubos se podría producir la frecuencia fundamental más alta?
16. El tubo A tiene una longitud L y está abierto en ambos extremos. El tubo B tiene una longitud $L/2$ y tiene un extremo abierto y el otro cerrado. Suponga que la velocidad del sonido es la misma en ambos tubos. ¿Cuáles de los armónicos de cada tubo serían iguales?
17. Se ata una cuerda entre dos postes de laboratorio a una distancia L. La tensión en la cuerda y la densidad lineal de masa es tal que la velocidad de una onda en la cuerda es $v = 343\ \text{m/s}$. Un tubo con condiciones de frontera simétricas tiene una longitud L y la velocidad del sonido en el tubo es $v = 343\ \text{m/s}$. ¿Qué se puede decir de las frecuencias de los armónicos en la cuerda y el tubo? ¿Y si la velocidad en la cuerda fuera $v = 686\ \text{m/s}$?

17.6 Batimientos

18. Dos altavoces están conectados a un generador de señal de frecuencia variable. El altavoz A produce una onda sonora de frecuencia constante de 1,00 kHz, y el altavoz B produce un tono de 1,10 kHz. La frecuencia de batimiento es de 0,10 kHz. Si se duplica la frecuencia de cada altavoz, ¿cuál es la frecuencia de batimiento producida?
19. La etiqueta de un diapasón se borró y usted necesita saber su frecuencia. Por su tamaño, sospecha que está en torno a los 250 Hz. Usted

encuentra un diapasón de 250 Hz y otro de 270 Hz. Al golpear el diapasón de 250 Hz y el diapasón de frecuencia desconocida se produce una frecuencia de batimiento de 5 Hz. Cuando se golpea el desconocido con el diapasón de 270 Hz, la frecuencia de batimiento es de 15 Hz. ¿Cuál es la frecuencia desconocida? ¿Podría haber deducido la frecuencia solamente con el diapasón de 250 Hz?

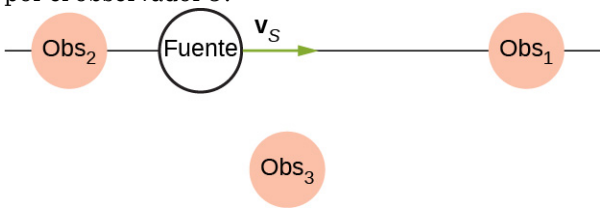
20. Refiriéndonos a la pregunta anterior, si solo tuviera el diapasón de 250 Hz, ¿podría proponer una solución al problema de hallar la frecuencia desconocida?

21. Un automóvil "vistoso" construido al gusto del dueño tiene dos bocinas de latón que se supone que producen la misma frecuencia, pero que en realidad emiten 263,8 y 264,5 Hz. ¿Qué frecuencia de batimiento se produce?

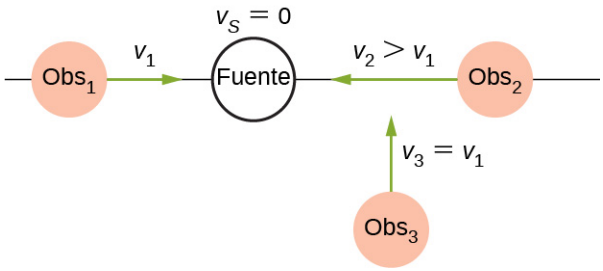
17.7 El Efecto Doppler

22. ¿El corrimiento Doppler es real o solo una ilusión sensorial?

23. Tres observadores estacionarios notan el corrimiento Doppler de una fuente que se mueve a velocidad constante. Los observadores tienen una ubicación estacionaria como se indica a continuación. ¿Cuál observador notará la frecuencia más alta? ¿Cuál observador notará la frecuencia más baja? ¿Qué se puede decir de la frecuencia notada por el observador 3?



24. A continuación se muestra una fuente estacionaria y observadores en movimiento. Describa las frecuencias notadas por los observadores para esta configuración.



25. Antes de 1980 los meteorólogos utilizaban el radar convencional. En los años 60, los meteorólogos comenzaron a experimentar con el radar Doppler. ¿Cuál cree que es la ventaja de utilizar el radar Doppler?

17.8 Ondas expansivas

26. ¿Cuál es la diferencia entre una explosión sónica y una onda expansiva?

27. Debido a consideraciones de eficiencia relacionadas con su estela de proa, el avión de transporte supersónico debe mantener una velocidad de crucero que sea una relación constante con la velocidad del sonido (un número Mach constante). Si la aeronave pasa de aire caliente a aire más frío, ¿debe aumentar o disminuir su velocidad? Explique su respuesta.

28. Cuando se oye una explosión sónica, a menudo no se puede ver el avión que la ha producido. ¿Por qué?

Problemas

17.1 Ondas sonoras

29. Considere una onda sonora modelada con la ecuación $s(x,t) = 4{,}00\ \text{nm}\cos\left(3{,}66\ \text{m}^{-1}\ x - 1.256\ \text{s}^{-1}t\right)$. ¿Cuál es el desplazamiento máximo, la longitud de onda, la frecuencia y la rapidez de la onda sonora?

30. Considere una onda sonora que se mueve por el aire modelada con la ecuación $s(x,t) = 6{,}00\ \text{nm}\cos\left(54{,}93\ \text{m}^{-1}x - 18{,}84\times10^{3}\ \text{s}^{-1}t\right)$. ¿Cuál es el menor tiempo necesario para que una molécula de aire se mueva entre 3,00 nm y −3,00 nm?

31. Considere un ultrasonido de diagnóstico con frecuencia de 5,00 MHz que se usa para examinar una irregularidad en el tejido blando. (a) ¿Cuál es la longitud de onda en el aire de dicha onda sonora si la velocidad del sonido es de 343 m/s? (b) Si la velocidad del sonido en el tejido es de 1.800 m/s, ¿cuál es la longitud de onda de esta onda en el tejido?

32. Una onda sonora se modela como $\Delta P = 1{,}80\ \text{Pa}\,\text{sen}\left(55{,}41\ \text{m}^{-1}\ x - 18.840\ \text{s}^{-1}t\right)$. ¿Cuál es el cambio máximo de presión, la longitud de onda, la frecuencia y la rapidez de la onda sonora?

33. Una onda sonora se modela con la función de

onda $\Delta P = 1{,}20\ \text{Pa}\ \text{sen}\left(kx - 6{,}28 \times 10^4\ \text{s}^{-1}t\right)$ y la onda sonora se desplaza en el aire a una velocidad de $v = 343{,}00$ m/s. (a) ¿Cuál es el número de onda de la onda sonora? (b) ¿Cuál es el valor de $\Delta P\,(3{,}00\ \text{m}, 20{,}00\ \text{s})$?

34. El desplazamiento de las moléculas de aire en la onda sonora se modela con la función de onda

$$s(x,t) = 5{,}00\ \text{nm}\cos\left(91{,}54\ \text{m}^{-1}x - 3{,}14 \times 10^4\ \text{s}^{-1}t\right).$$

(a) ¿Cuál es la rapidez de onda de la onda sonora? (b) ¿Cuál es la velocidad máxima de las moléculas de aire al oscilar en movimiento armónico simple? (c) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración máxima de las moléculas de aire al oscilar en movimiento armónico simple?

35. Se coloca un altavoz en la abertura de un tubo horizontal largo. El altavoz oscila a una frecuencia f y crea una onda sonora que se desplaza por el tubo. La onda se mueve a través del tubo a una velocidad de $v = 340{,}00$ m/s. La onda sonora se modela con la función de onda $s(x,t) = s_{\text{máx.}}\cos(kx - \omega t + \phi)$. En el tiempo $t = 0{,}00$ s, una molécula de aire en $x = 3{,}5$ m está en el desplazamiento máximo de 7,00 nm. Al mismo tiempo, otra molécula en $x = 3{,}7$ m tiene un desplazamiento de 3,00 nm. ¿Cuál es la frecuencia a la que oscila el altavoz?

36. Se golpea un diapasón de 250 Hz y comienza a vibrar. Un sonómetro está situado a 34,00 m de distancia. Toma el sonido $\Delta t = 0{,}10$ s para llegar al medidor. El desplazamiento máximo del diapasón es de 1,00 mm. Escriba una función de onda para el sonido.

37. Una onda sonora producida por un transductor de ultrasonido que se mueve en el aire se modela con la ecuación de onda

$$s(x,t) = 4{,}50\ \text{nm}\cos\left(9{,}15 \times 10^4\ \text{m}^{-1}x - 2\pi\,(5{,}00\ \text{MHz})\,t\right).$$

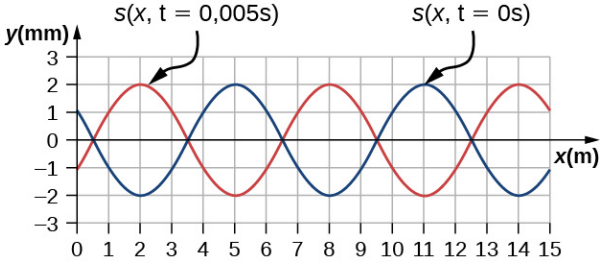
El transductor se usará en pruebas no destructivas para identificar fracturas en vigas de acero. La velocidad del sonido en la viga de acero es $v = 5.950$ m/s. Calcule la función de onda para la onda sonora en la viga de acero.

38. Las marsopas emiten ondas sonoras que usan para desplazarse por el agua. Si la longitud de onda de la onda sonora emitida es de 4,5 cm y la velocidad del sonido en el agua es $v = 1.530$ m/s, ¿cuál es el periodo del sonido?

39. Los murciélagos usan ondas sonoras para atrapar insectos. Los murciélagos pueden detectar frecuencias de hasta 100 kHz. Si las ondas sonoras se desplazan por el aire a una velocidad de $v = 343$ m/s, ¿cuál es la longitud de onda de las ondas sonoras?

40. Un murciélago envía una onda sonora de 100 kHz y las ondas sonoras se desplazan por el aire a una velocidad de $v = 343$ m/s. (a) Si la diferencia de presión máxima es de 1,30 Pa, ¿cuál es la función de onda que modelaría la onda sonora, suponiendo que la onda es sinusoidal? (Suponga que el deslizamiento de fase es cero). (b) ¿Cuáles son el periodo y la longitud de onda de la onda sonora?

41. Considere el gráfico que se muestra a continuación de una onda de compresión. Se muestran representaciones de la función de onda para $t = 0{,}000$ s (azul) y $t = 0{,}005$ s (naranja). ¿Cuáles son la longitud de onda, el desplazamiento máximo, la velocidad y el periodo de la onda de compresión?



42. Considere el gráfico del problema anterior de una onda de compresión. Se muestran representaciones de la función de onda para $t = 0{,}000$ s (azul) y $t = 0{,}005$ s (naranja). Dado que el desplazamiento de la molécula en el tiempo $t = 0{,}00$ s y posición $x = 0{,}00$ m es $s\,(0{,}00\ \text{m}, 0{,}00\ \text{s}) = 1{,}08$ mm, derive una función de onda para modelar la onda de compresión.

43. Una cuerda de guitarra oscila a una frecuencia de 100 Hz y produce una onda sonora. (a) ¿Cuál cree que es la frecuencia de la onda sonora que produce la cuerda que vibra? (b) Si la velocidad de la onda sonora es $v = 343$ m/s, ¿cuál es la longitud de onda de la onda sonora?

17.2 Velocidad del sonido

44. Cuando se le clava una lanza, una soprano de ópera suelta un chillido de 1.200 Hz. ¿Cuál es su longitud de onda si la velocidad del sonido es de 345 m/s?

45. ¿Qué frecuencia de sonido tiene una longitud de onda de 0,10 m cuando la velocidad del sonido es de 340 m/s?

46. Calcule la velocidad del sonido un día en que una frecuencia de 1.500 Hz tiene una longitud de onda de 0,221 m.

47. (a) ¿Cuál es la velocidad del sonido en un medio en el que una frecuencia de 100 kHz produce una longitud de onda de 5,96 cm? (b) ¿De qué sustancia de la Tabla 17.1 es probable que se trate?

48. Demuestre que la velocidad del sonido en un aire de 20,0°C es 343 m/s, como se afirma en el texto.

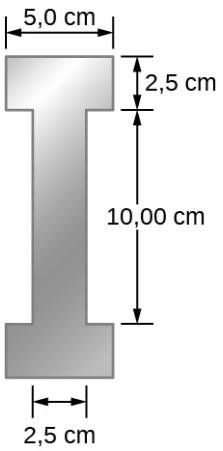
49. La temperatura del aire en el desierto del Sahara puede alcanzar 56,0°C (alrededor de 134°F). ¿Cuál es la velocidad del sonido en el aire a esa temperatura?

50. Los delfines emiten sonidos en el aire y en el agua. ¿Cuál es la relación entre la longitud de onda de un sonido en el aire y su longitud de onda en el agua de mar? Suponga que la temperatura del aire es 20,0°C.

51. El eco de un sonar regresa a un submarino 1,20 s después de ser emitido. ¿Cuál es la distancia al objeto que crea el eco? (Suponga que el submarino está en el océano, no en agua dulce)

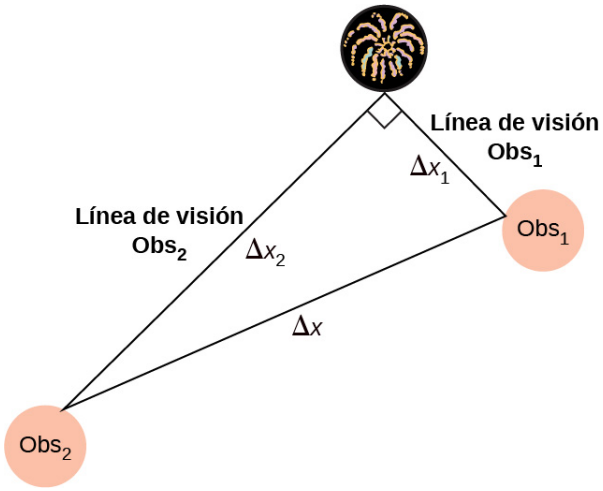
52. (a) Si el sonar de un submarino puede medir los tiempos de los ecos con una precisión de 0,0100 s, ¿cuál es la menor diferencia de distancias que puede detectar? (Suponga que el submarino está en el océano, no en agua dulce). (b) Analice los límites que esta resolución temporal impone a la capacidad del sistema del sonar para detectar el tamaño y la forma del objeto que crea el eco.

53. Las ondas sonoras ultrasónicas se utilizan a menudo en métodos de pruebas no destructivas. Por ejemplo, este método se puede usar para identificar fallos estructurales en vigas de acero en forma de I que se utilizan en la construcción. Considere una viga en forma de I de acero de 10,00 metros de longitud con la sección transversal que se muestra a continuación. El peso de la viga I es de 3.846,50 N. ¿Cuál sería la velocidad del sonido a través de la viga en forma de I?
($Y_{\text{acero}} = 200\ \text{GPa}, \beta_{\text{acero}} = 159\ \text{GPa}$).



54. Un físico que asiste a un espectáculo de fuegos artificiales calcula el tiempo que transcurre entre la visión de una explosión y la audición de su sonido, y descubre que es de 0,400 s. (a) ¿A qué distancia está la explosión si la temperatura del aire es 24,0°C y si obviara el tiempo que tarda la luz en llegar al físico? (b) Calcule la distancia a la explosión teniendo en cuenta la velocidad de la luz. Tome en cuenta que esta distancia es insignificante.

55. Durante una celebración del 4 de julio, un fuego artificial M80 explota en el suelo, y produce un destello brillante y un fuerte estallido. La temperatura del aire nocturno es $T_{\text{F}} = 90{,}00°\text{F}$. Dos observadores ven el destello y oyen el estallido. El primer observador nota que el tiempo transcurrido entre el destello y el estallido es de 1,00 segundo. El segundo observador anota que la diferencia es de 3,00 segundos. La línea de visión entre los dos observadores se encuentra en un ángulo recto como se muestra a continuación. ¿Cuál es la distancia Δx entre los dos observadores?



56. La densidad de una muestra de agua es $\rho = 998{,}00\ \text{kg/m}^3$ y el módulo de compresibilidad es $\beta = 2{,}15\ \text{GPa}$. ¿Cuál es la

velocidad del sonido a través de la muestra?

57. Suponga que un murciélago utiliza los ecos de sonido para localizar a su presa, un insecto, a 3,00 m de distancia (Vea la Figura 17.6). (a) Calcule los tiempos del eco para temperaturas de $5{,}00°\text{C}$ y $35{,}0°\text{C}$. (b) ¿Qué porcentaje de incertidumbre provoca esto para el murciélago a la hora de localizar el insecto? (c) Analice la importancia de esta incertidumbre y si podría causarle dificultades al murciélago (en la práctica, el murciélago sigue utilizando el sonido mientras se acerca, lo que elimina la mayor parte de las dificultades impuestas por este y otros efectos como el movimiento de la presa).

17.3 Intensidad del sonido

58. ¿Cuál es la intensidad en vatios por metro cuadrado de un sonido de 85,0 dB?

59. La etiqueta de advertencia de un cortacésped indica que produce un ruido de 91,0 dB. ¿Cuánto es esto en vatios por metro cuadrado?

60. Una onda sonora que se desplaza en el aire tiene una amplitud de presión de 0,5 Pa. ¿Cuál es la intensidad de la onda?

61. ¿A qué nivel de intensidad corresponde el sonido del problema anterior?

62. ¿Qué nivel de intensidad del sonido en dB se produce por auriculares que crean una intensidad de $4{,}00 \times 10^{-2}\ \text{W/m}^2$?

63. ¿Cuál es el nivel de decibeles de un sonido que es dos veces más intenso que un sonido de 90,0 dB? b) ¿Cuál es el nivel de decibeles de un sonido que es una quinta parte más intenso que un sonido de 90,0 dB?

64. ¿Cuál es la intensidad de un sonido que tiene un nivel 7,00 dB inferior a un sonido de $4{,}00 \times 10^{-9}\text{W/m}^2$? (b) ¿Cuál es la intensidad de un sonido que es 3,00 dB mayor que un sonido de $4{,}00 \times 10^{-9}\text{W/m}^2$?

65. Las personas con buena audición pueden percibir sonidos tan bajos como –8,00 dB a una frecuencia de 3.000 Hz. ¿Cuál es la intensidad de este sonido en vatios por metro cuadrado?

66. Si una mosca grande a 3,0 m de distancia de usted hace un ruido de 40,0 dB, ¿cuál es el nivel de ruido de 1.000 moscas a esa distancia, suponiendo que las interferencias tienen un efecto insignificante?

67. Diez automóviles en círculo en una competencia de radiofónicos producen un nivel de intensidad del sonido de 120 dB en el centro del círculo. ¿Cuál es el nivel de intensidad del sonido promedio producido allí por cada equipo de música, suponiendo que se puedan ignorar los efectos de la interferencia?

68. La amplitud de una onda sonora se mide en términos de su presión manométrica máxima. ¿En qué factor aumenta la amplitud de una onda sonora si el nivel de intensidad del sonido aumenta en 40,0 dB?

69. Si un nivel de intensidad del sonido de 0 dB a 1.000 Hz corresponde a una presión manométrica máxima (amplitud de sonido) de 10^{-9} atm, ¿cuál es la presión manométrica máxima en un sonido de 60 dB? ¿Cuál es la presión manométrica máxima en un sonido de 120 dB?

70. Una exposición de 8 horas a un nivel de intensidad del sonido de 90,0 dB puede provocar daños auditivos. ¿Qué energía en julios cae sobre un tímpano de 0,800 cm de diámetro tan expuesto?

71. El sonido se transmite más eficazmente en un estetoscopio por contacto directo que a través del aire, y se intensifica aún más al concentrarse en el área más pequeña del tímpano. Es razonable suponer que el sonido se transmite en un estetoscopio con una eficacia 100 veces superior a la de la transmisión a través del aire. Entonces, ¿cuál es la ganancia en decibeles producida por un estetoscopio que tiene un área de captación de sonido de $15{,}0\ \text{cm}^2$ y concentra el sonido en dos tímpanos con un área total de $0{,}900\ \text{cm}^2$ con una eficiencia de $40{,}0\%$?

72. Los altavoces pueden producir sonidos intensos con un aporte de energía sorprendentemente pequeño a pesar de su baja eficiencia. Calcule la potencia necesaria para producir un nivel de intensidad del sonido de 90,0 dB para un altavoz de 12,0 cm de diámetro con un rendimiento de $1{,}00\%$ (este valor es el nivel de intensidad del sonido justo en el altavoz).

73. El factor de 10^{-12} en el rango de intensidades a las que puede responder el oído, desde el umbral hasta el que causa daños tras una breve exposición, es realmente notable. Si pudiera medir distancias en el mismo rango con un solo instrumento y la menor distancia que pudiera medir fuera de 1 mm, ¿cuál sería la mayor?

74. ¿Cuáles son las frecuencias más cercanas a 500 Hz que una persona promedio puede distinguir claramente como diferentes en frecuencia de 500 Hz? Los sonidos no están presentes simultáneamente.

75. ¿Puede saber que su compañero de vivienda ha subido el sonido del televisor si su nivel de intensidad del sonido promedio pasa de 70 a 73 dB?

76. Si una mujer necesita una ampliación de $5{,}0 \times 10^5$ veces la intensidad del umbral para poder oír en todas las frecuencias, ¿cuál es su pérdida auditiva global en dB? Tenga en cuenta que una amplificación menor es adecuada para sonidos más intensos para evitar que los niveles superiores a 90 dB dañen aún más su audición.

77. Una persona tiene un umbral de audición 10 dB por encima de lo normal a 100 Hz y 50 dB por encima de lo normal a 4.000 Hz. ¿Cuánto más intenso debe ser un tono de 100 Hz que uno de 4.000 Hz si ambos son apenas audibles para esta persona?

17.4 Modos normales de una onda sonora estacionaria

78. (a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de un tubo de 0,672 m de longitud abierto en ambos extremos un día en que la velocidad del sonido es de 344 m/s? (b) ¿Cuál es la frecuencia de su segundo armónico?

79. ¿Cuál es la longitud de un tubo que tiene una frecuencia fundamental de 176 Hz y un primer sobretono de 352 Hz si la velocidad del sonido es de 343 m/s?

80. El canal auditivo resuena como un tubo cerrado en un extremo. Si la longitud de los canales auditivos oscila entre 1,80 y 2,60 cm en una población promedio, ¿cuál es el rango de frecuencias fundamentales de resonancia? Tome la temperatura del aire para que sea $37{,}0°\text{C}$, que es lo mismo que la temperatura corporal.

81. Calcule el primer sobretono en un canal auditivo, que resuena como un tubo de 2,40 cm de longitud cerrado en un extremo, tomando como temperatura del aire $37{,}0°\text{C}$. ¿El oído es especialmente sensible a esa frecuencia? (Las resonancias del canal auditivo se complican por su forma no uniforme, lo cual ignoraremos).

82. Una aproximación burda a la producción de la voz es considerar que los conductos respiratorios y la boca son un tubo resonante cerrado en un extremo. (a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental si el tubo tiene una longitud de 0,240 m, considerando que la temperatura del aire es $37{,}0°\text{C}$? (b) ¿En qué se convertiría esta frecuencia si la persona sustituyera el aire por helio? Suponga la misma dependencia de la temperatura para el helio que para el aire.

83. Un tubo de 4,0 m de longitud abierto en un extremo y cerrado en el otro se encuentra en una habitación donde la temperatura es $T = 22°\text{C}$. Se coloca un altavoz capaz de producir frecuencias variables en el extremo abierto y se utiliza para hacer resonar el tubo. (a) ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia de la frecuencia fundamental? (b) ¿Cuál es la frecuencia y la longitud de onda del primer sobretono?

84. Un tubo de 4,0 m de longitud abierto en ambos extremos se coloca en una habitación donde la temperatura es $T = 25°\text{C}$. Se coloca un altavoz capaz de producir frecuencias variables en el extremo abierto y se utiliza para hacer resonar el tubo. (a) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia fundamental? (b) ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del primer sobretono?

85. Una cuerda de guitarra de nailon se fija entre dos postes de laboratorio con 2,00 m de separación. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de $\mu = 7{,}20\ \text{g/m}$ y se coloca con una tensión de 160,00 N. La cuerda se coloca junto a un tubo abierto en ambos extremos de longitud L. La cuerda se puntea y el tubo resuena en el modo $n = 3$. La velocidad del sonido es de 343 m/s. ¿Cuál es la longitud del tubo?

86. Se golpea un diapasón de 512 Hz y se coloca junto a un tubo con un pistón móvil, lo que crea un tubo de longitud variable. El pistón se desliza por el tubo y la resonancia se alcanza cuando el pistón está a 115,50 cm del extremo abierto. La siguiente resonancia se alcanza cuando el pistón está a 82,50 cm del extremo abierto. (a) ¿Cuál es la velocidad del sonido en el tubo? (b) ¿A qué distancia del extremo abierto el pistón provocará el siguiente modo de resonancia?

87. En un laboratorio de física se les pide a los estudiantes que calculen la longitud de una columna de aire en un tubo cerrado en un extremo que tiene una frecuencia fundamental de 256 Hz. Sostienen el tubo verticalmente y lo llenan de agua hasta arriba, luego el agua baja mientras se hace sonar un diapasón de 256 Hz y escuchan la primera resonancia. (a) ¿Cuál es la temperatura del aire si la resonancia se produce para una longitud de 0,336 m? (b) ¿A qué longitud observarán la segunda resonancia (primer sobretono)?

17.5 Fuentes de sonido musical

88. Si un instrumento de viento, como una tuba, tiene una frecuencia fundamental de 32,0 Hz, ¿cuáles son sus tres primeros sobretonos? Está cerrado en un extremo (los sobretonos de una tuba real son más complejos que los de este ejemplo, debido a que es un tubo cónico).

89. ¿Cuáles son los tres primeros sobretonos de un fagot que tiene una frecuencia fundamental de 90,0 Hz? Está abierto en ambos extremos (los sobretonos de un fagot real son más complejos que los de este ejemplo, ya que su doble lengüeta hace que actúe más como un tubo cerrado en un extremo).

90. ¿Qué longitud debe tener una flauta para lograr una frecuencia fundamental de 262 Hz (esta frecuencia corresponde al do medio de la escala cromática de temperamento uniforme) un día en el que la temperatura del aire es 20,0°C? Está abierto en ambos extremos

91. ¿Qué longitud debería tener un oboe para producir una frecuencia fundamental de 110 Hz un día en el que la velocidad del sonido es de 343 m/s? Está abierto en ambos extremos

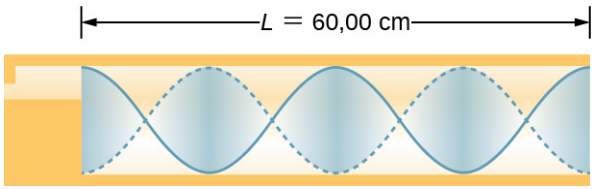
92. (a) Halle la longitud de un tubo de órgano cerrado en un extremo que produce una frecuencia fundamental de 256 Hz cuando la temperatura del aire es 18,0°C. (b) ¿Cuál es su frecuencia fundamental a 25,0°C?

93. Un tubo de órgano ($L = 3{,}00$ m) está cerrado en ambos extremos. Calcule las longitudes de onda y las frecuencias de los tres primeros modos de resonancia. Suponga que la velocidad del sonido es $v = 343{,}00$ m/s.

94. Un tubo de órgano ($L = 3{,}00$ m) está cerrado en un extremo. Calcule las longitudes de onda y las frecuencias de los tres primeros modos de resonancia. Suponga que la velocidad del sonido es $v = 343{,}00$ m/s.

95. Una cuerda que oscila en el modo $n = 6$ produce una onda sonora de una frecuencia de 2,00 kHz. La densidad lineal de masa de la cuerda es $\mu = 0{,}0065$ kg/m y la longitud de la cuerda es de 1,50 m. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

96. Considere el sonido creado por la resonancia del tubo que se muestra a continuación. La temperatura del aire es $T_C = 30{,}00°C$. ¿Cuáles son la longitud de onda, la rapidez de onda y la frecuencia del sonido producido?



97. Un estudiante sujeta un poste de laboratorio de 80,00 cm a un cuarto de la longitud de su extremo. El poste de laboratorio es de aluminio. El estudiante golpea el poste del laboratorio con un martillo. El poste resuena a la frecuencia más baja posible. ¿Cuál es esa frecuencia?

98. Una cuerda del violín tiene una longitud de 24,00 cm y una masa de 0,860 g. La frecuencia fundamental de la cuerda es de 1,00 kHz. (a) ¿Cuál es la velocidad de la onda en la cuerda? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

99. ¿En qué fracción cambiarán las frecuencias producidas por un instrumento de viento cuando la temperatura del aire pasa de 10,0°C a 30,0°C? Es decir, calcule la relación de las frecuencias a esas temperaturas.

17.6 Batimientos

100. ¿Qué frecuencias de batimiento hay (a) si se tocan juntas las notas musicales la y do (frecuencias de 220 y 264 Hz); (b) si se tocan juntas re y fa (frecuencias de 297 y 352 Hz); (c) si se tocan juntas las cuatro?

101. ¿Qué frecuencias de batimiento se generan si un martillo de piano golpea tres cuerdas que emiten frecuencias de 127,8, 128,1 y 128,3 Hz?

102. Un afinador de pianos oye un batimiento cada 2,00 s cuando escucha un diapasón de 264,0 Hz y una sola cuerda de piano. ¿Cuáles son las dos frecuencias posibles de la cuerda?

103. Dos cuerdas idénticas, de longitudes idénticas de 2,00 m y densidad lineal de masa de $\mu = 0{,}0065$ kg/m se fijan en ambos extremos. La cuerda *A* está sometida a una tensión de 120,00 N. La cuerda *B* está sometida a una tensión de 130,00 N. Cada una de ellas se puntea y produce un sonido en el modo $n = 10$. ¿Cuál es la frecuencia de batimiento?

104. Un afinador de pianos utiliza un diapasón de 512 Hz para afinar un piano. Golpea el diapasón y toca una tecla del piano y escucha una frecuencia de batimiento de 5 Hz. Aprieta la cuerda del piano y repite el procedimiento. De nuevo escucha una frecuencia de batimiento de 5 Hz. ¿Qué ha pasado?

105. Una cuerda con una densidad lineal de masa

de $\mu = 0{,}0062$ kg/m se estira entre dos postes con 1,30 m de separación. La tensión de la cuerda es de 150,00 N. La cuerda oscila y produce una onda sonora. Se golpea un diapasón de 1.024 Hz y la frecuencia de batimiento entre las dos fuentes es de 52,83 Hz. ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda posibles de la onda en la cuerda?

106. Un automóvil tiene dos bocinas, una que emite una frecuencia de 199 Hz y otra que emite una frecuencia de 203 Hz. ¿Qué frecuencia de batimiento producen?

107. El martillo del do medio de un piano golpea dos cuerdas y produce batimientos de 1,50 Hz. Una de las cuerdas está afinada a 260,00 Hz. ¿Qué frecuencias podría tener la otra cuerda?

108. Se golpean simultáneamente dos diapasones con frecuencias de 460 y 464 Hz. ¿Qué frecuencia promedio escuchará y cuál será la frecuencia de batimiento?

109. Los dos motores a reacción de un avión producen una frecuencia de sonido promedio de 4.100 Hz con una frecuencia de batimiento de 0,500 Hz. ¿Cuáles son sus frecuencias individuales?

110. Tres teclas adyacentes de un piano (fa, fa sostenido y sol) se golpean simultáneamente, lo que produce frecuencias de 349, 370 y 392 Hz. ¿Qué frecuencias de batimiento produce esta combinación discordante?

17.7 El Efecto Doppler

111. (a) ¿Qué frecuencia recibe una persona que observa una ambulancia que se aproxima a 110 km/h y que emite un sonido constante de 800 Hz con la sirena? La velocidad del sonido en este día es de 345 m/s. (b) ¿Qué frecuencia recibe tras el paso de la ambulancia?

112. (a) En un espectáculo aéreo un avión a reacción vuela directamente hacia las gradas a una velocidad de 1.200 km/h y emite una frecuencia de 3.500 Hz un día en que la velocidad del sonido es de 342 m/s. ¿Qué frecuencia reciben los observadores? b) ¿Qué frecuencia reciben cuando el avión se aleja de ellos?

113. ¿Qué frecuencia recibe un ratón justo antes de ser despachado por un halcón que vuela hacia él a 25,0 m/s y emite un chillido de frecuencia 3.500 Hz? Tomemos que la velocidad del sonido es de 331 m/s.

114. Un espectador en un desfile recibe un tono de 888 Hz de un trompetista que se acerca y que está tocando una nota de 880 Hz. ¿A qué velocidad se acerca el músico si la velocidad del sonido es de 338 m/s?

115. Un tren de cercanías hace sonar su bocina de 200 Hz al acercarse a un cruce. La velocidad del sonido es de 335 m/s. (a) Un observador que espera en el cruce recibe una frecuencia de 208 Hz. ¿Cuál es la velocidad del tren? b) ¿Qué frecuencia recibe el observador cuando el tren se aleja?

116. ¿Puede percibir el cambio de frecuencia que se produce al atraer un diapasón hacia usted a 10,0 m/s un día en que la velocidad del sonido es de 344 m/s? Para responder esta pregunta, calcule el factor por el que se desplaza la frecuencia y compruebe si es superior al 0,300%.

117. Dos águilas vuelan directamente una hacia la otra, la primera a 15,0 m/s y la segunda a 20,0 m/s. Ambas chirrían, la primera emite una frecuencia de 3.200 Hz y la segunda una frecuencia de 3.800 Hz. ¿Qué frecuencias reciben si la velocidad del sonido es de 330m/s?

118. El estudiante *A* corre por el pasillo de la escuela a una velocidad de $v_o = 5{,}00$ m/s, y lleva un diapasón de 1.024,00 Hz hacia una pared de hormigón. La velocidad del sonido es $v = 343{,}00$ m/s. El estudiante *B* está recostado de la pared. (a) ¿Cuál es la frecuencia que oye el estudiante *B*? (b) ¿Cuál es la frecuencia de batimiento que oye el estudiante *A*?

119. Una ambulancia con sirena ($f = 1{,}00$kHz) se aproxima estruendosamente a la escena de un accidente. La ambulancia se mueve a 70,00 mph. Un enfermero se acerca a la escena desde la dirección opuesta corriendo a $v_o = 7{,}00$ m/s. ¿Con qué frecuencia observa la enfermera? Suponga que la velocidad del sonido es $v = 343{,}00$ m/s.

120. La frecuencia de la sirena de una ambulancia es de 900 Hz y se está acercando hacia usted. Usted está parado en una esquina y observa una frecuencia de 960 Hz. ¿Cuál es la velocidad de la ambulancia (en mph) si la velocidad del sonido es $v = 340{,}00$ m/s?

121. ¿Cuál es la velocidad mínima a la que debe desplazarse una fuente hacia usted para que pueda oír que su frecuencia está desplazada por el corrimiento Doppler? Es decir, ¿qué velocidad produce un desplazamiento de $0{,}300\%$ un día en que la velocidad del sonido es de 331 m/s?

17.8 Ondas expansivas

122. Un avión vuela a Mach 1,50 a una altitud de 7.500,00 metros, donde la velocidad del sonido es $v = 343{,}00$ m/s. ¿A qué distancia de un observador estacionario estará el avión cuando el observador oiga la explosión sónica?

123. Un avión a reacción que vuela a 8,50 km de altura tiene una velocidad Mach de 2,00, donde la velocidad del sonido es $v = 340{,}00$ m/s. ¿Cuánto tiempo después de que el avión a reacción esté directamente encima un observador estacionario oirá una explosión sónica?

124. La onda expansiva de la parte delantera de un avión a reacción de combate tiene un ángulo de $\theta = 70{,}00°$ El avión a reacción vuela a 1.200 km/h. ¿Cuál es la velocidad del sonido?

125. Un avión vuela a Mach 1,2 y un observador en tierra oye la explosión sónica 15,00 segundos después de que el avión esté directamente encima. ¿Cuál es la altitud del avión? Suponga que la velocidad del sonido es $v_{\text{w}} = 343{,}00$ m/s.

126. Se dispara una bala y se mueve a una velocidad de 1.342 mph. Suponga que la velocidad del sonido es $v = 340{,}00$ m/s. ¿Cuál es el ángulo de la onda expansiva que se produce?

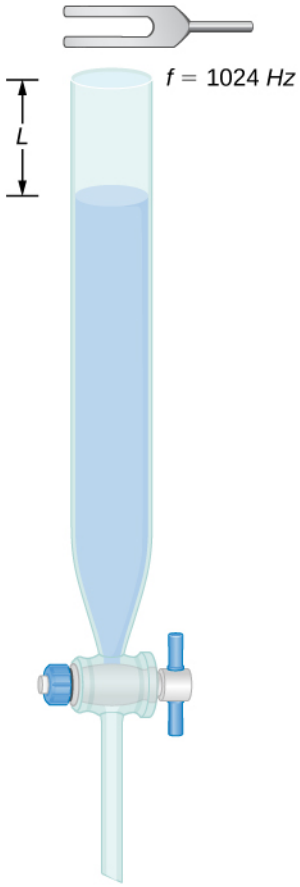
127. Se coloca un altavoz en la abertura de un tubo horizontal largo. El altavoz oscila a una frecuencia f y crea una onda sonora que se desplaza por el tubo. La onda se mueve a través del tubo a una velocidad de $v = 340{,}00$ m/s. La onda sonora se modela con la función de onda $s(x,t) = s_{\text{máx.}} \cos(kx - \omega t + \phi)$. En el tiempo $t = 0{,}00$ s, una molécula de aire en $x = 2{,}3$ m está en el desplazamiento máximo de 6,34 nm. Al mismo tiempo, otra molécula en $x = 2{,}7$ m tiene un desplazamiento de 2,30 nm. ¿Cuál es la función de onda de la onda sonora?, es decir, calcule el número de onda, la frecuencia angular y el deslizamiento de fase inicial.

128. Un avión se mueve a Mach 1,2 y produce una onda expansiva. (a) ¿Cuál es la velocidad del avión en metros por segundo? (b) ¿Cuál es el ángulo con el que se mueve la onda expansiva?

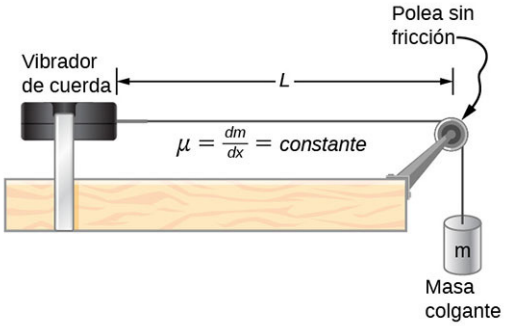
Problemas Adicionales

129. Un tubo de 0,80 m de longitud está abierto en ambos extremos. La temperatura del aire es 26°C. El aire del tubo se hace oscilar mediante un altavoz conectado a un generador de señales. ¿Cuáles son las longitudes de onda y las frecuencias de los dos primeros modos de las ondas sonoras que resuenan en el tubo?

130. Un tubo lleno de agua tiene una válvula en la parte inferior para permitir que el agua salga del tubo. A medida que el agua se vacía del tubo, la longitud L de la columna de aire cambia. Se coloca un diapasón de 1.024 Hz en la abertura del tubo. El agua se retira del tubo hasta que el $n = 5$ modo de una onda sonora resuena. ¿Cuál es la longitud de la columna de aire si la temperatura del aire en la habitación es 18°C?



131. Considere la siguiente figura. La longitud de la cuerda entre el vibrador de cuerda y la polea es $L = 1{,}00$ m. La densidad lineal de la cuerda es $\mu = 0{,}006$ kg/m. El vibrador de cuerda puede oscilar a cualquier frecuencia. La masa colgante es de 2,00 kg. (a)¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia del modo $n = 6$? (b) La cuerda hace oscilar el aire a su alrededor. ¿Cuál es la longitud de onda del sonido si la velocidad del sonido es $v_s = 343{,}00$ m/s?



132. Los primeros experimentos de corrimiento Doppler se realizaron con una banda que tocaba música en un tren. Un trompetista en un vagón de tren en movimiento toca una nota de 320 Hz. Las ondas sonoras que escucha un observador estacionario en el andén de un tren tienen una frecuencia de 350 Hz. ¿Cuál es la velocidad del vagón en mph? La temperatura del aire es $T_C = 22°C$.

133. Dos automóviles se acercan el uno al otro y hacen sonar sus bocinas ($f_s = 800$ Hz). El automóvil A se mueve a 65 mph y el automóvil B va a 75 mph. ¿Cuál es la frecuencia de batimiento que escucha cada conductor? La temperatura del aire es $T_C = 22{,}00°C$.

134. El estudiante A corre detrás del estudiante B. El estudiante A lleva un diapasón que suena a 1.024 Hz, y el estudiante B lleva un diapasón que suena a 1.000 Hz. El estudiante A corre a una velocidad de $v_A = 5{,}00$ m/s y el estudiante B corre a $v_B = 6{,}00$ m/s. ¿Cuál es la frecuencia de batimiento que escucha cada estudiante? La velocidad del sonido es $v = 343{,}00$ m/s.

135. Suponga que el nivel de sonido de una fuente es de 75 dB y luego baja a 52 dB, con una frecuencia de 600 Hz. Determine las intensidades de sonido (a) inicial y (b) final y las amplitudes (c) inicial y (d) final de la onda sonora. La temperatura del aire es $T_C = 24{,}00°C$ y la densidad del aire es $\rho = 1{,}184\ \text{kg/m}^3$.

136. El corrimiento Doppler para un radar Doppler se calcula mediante $f = f_R\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$, donde f_R es la frecuencia del radar, f es la frecuencia percibida por el radar, c es la velocidad de la luz y v es la velocidad del objetivo. ¿Cuál es la frecuencia de batimiento observada en el radar, suponiendo que la velocidad del objetivo es mucho menor que la de la luz?

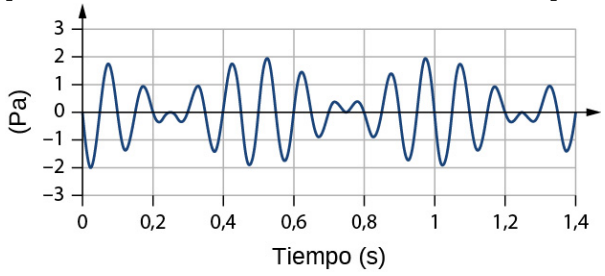
137. Un observador estacionario escucha una frecuencia de 1.000,00 Hz cuando una fuente se acerca y una frecuencia de 850,00 Hz cuando una fuente se aleja. La fuente se mueve a una velocidad constante de 75 mph. ¿Cuál es la temperatura del aire?

138. Una flauta toca una nota con una frecuencia de 600 Hz. La flauta se puede modelar como un tubo abierto en ambos extremos, donde el flautista cambia la longitud con la posición de los dedos. ¿Cuál es la longitud del tubo si esta es la frecuencia fundamental?

Problemas De Desafío

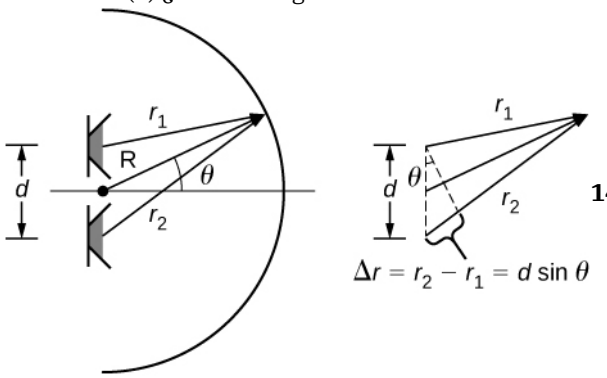
139. Dos altavoces de sonido están separados por una distancia d y cada uno emite una frecuencia f. Un observador se sitúa frente a un altavoz y camina en línea recta una distancia x perpendicular a los dos altavoces hasta llegar a la primera intensidad máxima de sonido. La velocidad del sonido es v. ¿A qué distancia está del altavoz?

140. Considere los batimientos que se muestran a continuación. Este es un gráfico de la presión manométrica versus el tiempo para la posición $x = 0{,}00$ m. La onda se mueve con una velocidad de $v = 343{,}00$ m/s. (a) ¿Cuántos batimientos hay por segundo? (b) ¿Cuántas veces oscila la onda por segundo? (c) Escriba una función de onda para la presión manométrica como una función de tiempo.



141. Dos altavoces que producen la misma frecuencia de sonido están a una distancia de d. Considere un

arco a lo largo de un círculo de radio *R* centrado en el punto medio de los altavoces como se muestra a continuación. (a) ¿En cuáles ángulos habrá máximos? (b) ¿En cuál ángulo habrá mínimos?



142. Una cuerda tiene una longitud de 1,5 m, una densidad lineal de masa $\mu = 0{,}008$ kg/m y una tensión de 120 N. Si la temperatura del aire es $T = 22°\text{C}$, ¿cuál debe ser la longitud de un tubo abierto en ambos extremos para que tenga la misma frecuencia para el modo $n = 3$?

143. Una cuerda $\left(\mu = 0{,}006\frac{\text{kg}}{\text{m}}, L = 1{,}50\text{ m}\right)$ está fijada en ambos extremos y está sometida a una tensión de 155 N. Oscila en el modo $n = 10$ y produce sonido. Un diapasón está sonando cerca y produce una frecuencia de batimiento de 23,76 Hz. (a) ¿Cuál es la frecuencia del sonido de la cuerda? (b) ¿Cuál es la frecuencia del diapasón si su frecuencia es menor? (c) ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda para que la frecuencia de batimiento sea cero?

144. Una cuerda tiene una densidad lineal de masa μ, una longitud L y una tensión de F_T, y oscila en un modo n a una frecuencia f. Calcule la relación de $\frac{\Delta f}{f}$ para un pequeño cambio de tensión.

145. Una cuerda tiene una densidad lineal de masa $\mu = 0{,}007$ kg/m, una longitud $L = 0{,}70$ m, una tensión de $F_T = 110$ N, y oscila en un modo $n = 3$. (a) ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones? (b) Use el resultado del problema anterior para calcular el cambio en la frecuencia cuando la tensión se incrementa en 1,00%.

146. Un altavoz alimentado por un generador de señales se utiliza para estudiar la resonancia en un tubo. El generador de señales puede ajustarse desde una frecuencia de 1.000 Hz hasta 1.800 Hz. Primero, se estudia un tubo de 0,75 m de longitud abierto en ambos extremos. La temperatura de la habitación es $T_\text{F} = 85{,}00°\text{F}$. (a) ¿Cuáles modos normales del tubo se pueden estudiar? ¿Cuáles son las frecuencias y las longitudes de onda? A continuación, se coloca un tapón en un extremo del tubo de 0,75 metros de longitud. (b) ¿Cuáles modos normales del tubo se pueden estudiar? ¿Cuáles son las frecuencias y las longitudes de onda?

147. Una cuerda del violín tiene una longitud de 23,00 cm y una masa de 0,900 gramos. La tensión en la cuerda es de 850,00 N. La temperatura en la habitación es $T_C = 24{,}00°\text{C}$. La cuerda se puntea y oscila en el modo $n = 9$. (a) ¿Cuál es la velocidad de la onda en la cuerda? (b) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda sonora producida? (c) ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda oscilante? (d) ¿Cuál es la frecuencia del sonido producido? (e) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido producido?

APÉNDICE A

Unidades

Cantidad	Símbolo común	Unidad	Unidad en términos de unidades SI básicas
Aceleración	$\vec{\mathbf{a}}$	m/s^2	m/s^2
Cantidad de sustancia	n	**mol**	mol
Ángulo	θ, ϕ	radián (rad)	
Aceleración angular	$\vec{\alpha}$	rad/s^2	s^{-2}
Frecuencia angular	ω	rad/s	s^{-1}
Momento angular	$\vec{\mathbf{L}}$	$kg \cdot m^2/s$	$kg \cdot m^2/s$
Velocidad angular	$\vec{\omega}$	rad/s	s^{-1}
Área	A	m^2	m^2
Número atómico	Z		
Capacidad	C	faradio (F)	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$
Carga	q, Q, e	culombio (C)	$A \cdot s$
Densidad de carga:			
Línea	λ	C/m	$A \cdot s/m$
Superficie	σ	C/m^2	$A \cdot s/m^2$
Volumen	ρ	C/m^3	$A \cdot s/m^3$
Conductividad	σ	$1/\Omega \cdot m$	$A^2 \cdot s^3/kg \cdot m^3$
Corriente	I	**amperio**	A
Densidad de corriente	$\vec{\mathbf{J}}$	A/m^2	A/m^2
Densidad	ρ	kg/m^3	kg/m^3
Constante dieléctrica	κ		
Momento dipolar eléctrico	$\vec{\mathbf{p}}$	$C \cdot m$	$A \cdot s \cdot m$

Cantidad	Símbolo común	Unidad	Unidad en términos de unidades SI básicas
Campo eléctrico	$\vec{\mathbf{E}}$	N/C	$\mathrm{kg \cdot m/A \cdot s^3}$
Flujo eléctrico	Φ	$\mathrm{N \cdot m^2/C}$	$\mathrm{kg \cdot m^3/A \cdot s^3}$
Fuerza electromotriz	$\boldsymbol{\varepsilon}$	voltios (V)	$\mathrm{kg \cdot m^2/A \cdot s^3}$
Energía	*E, U, K*	julio (J)	$\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$
Entropía	*S*	J/K	$\mathrm{kg \cdot m^2/s^2 \cdot K}$
Fuerza	$\vec{\mathbf{F}}$	newton (N)	$\mathrm{kg \cdot m/s^2}$
Frecuencia	*f*	hercio (Hz)	$\mathrm{s^{-1}}$
Calor	*Q*	julio (J)	$\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$
Inductancia	*L*	henrio (H)	$\mathrm{kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2}$
Longitud:	ℓ, L	**metro**	m
Desplazamiento	$\Delta x, \Delta\vec{\mathbf{r}}$		
Distancia	*d, h*		
Posición	$x, y, z, \vec{\mathbf{r}}$		
Momento dipolar magnético	$\vec{\mu}$	$\mathrm{N \cdot J/T}$	$\mathrm{A \cdot m^2}$
Campo magnético	$\vec{\mathbf{B}}$	tesla (T) $= \left(\mathrm{Wb/m^2}\right)$	$\mathrm{kg/A \cdot s^2}$
Flujo magnético	Φ_m	weber (Wb)	$\mathrm{kg \cdot m^2/A \cdot s^2}$
Masa	*m, M*	**kilogramo**	kg
Calor específico molar	*C*	$\mathrm{J/mol \cdot K}$	$\mathrm{kg \cdot m^2/s^2 \cdot mol \cdot K}$
Momento de inercia	*I*	$\mathrm{kg \cdot m^2}$	$\mathrm{kg \cdot m^2}$
Momento	$\vec{\mathbf{p}}$	$\mathrm{kg \cdot m/s}$	$\mathrm{kg \cdot m/s}$
Periodo	*T*	s	s
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$\mathrm{N/A^2 = (H/m)}$	$\mathrm{kg \cdot m/A^2 \cdot s^2}$

Cantidad	Símbolo común	Unidad	Unidad en términos de unidades SI básicas
Permeabilidad del espacio libre	ε_0	$C^2/N \cdot m^2 = (F/m)$	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^3$
Potencial	V	voltios (V) = (J/C)	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$
Potencia	P	vatio (W) = (J/s)	$kg \cdot m^2/s^3$
Presión	p	pascal (P) $= \left(N/m^2\right)$	$kg/m \cdot s^2$
Resistencia	R	ohm (Ω) = (V/A)	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$
Calor específico	c	$J/kg \cdot K$	$m^2/s^2 \cdot K$
Velocidad	v	m/s	m/s
Temperatura	T	**kelvin**	K
Tiempo	t	**segundo**	s
Torque	$\vec{\tau}$	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2/s^2$
Velocidad	$\vec{\mathbf{v}}$	m/s	m/s
Volumen	V	m^3	m^3
Longitud de onda	λ	m	m
Trabajo	W	julio (J) = $(N \cdot m)$	$kg \cdot m^2/s^2$

TABLA A1 Unidades que se usan en física (unidades fundamentales en negritas)

APÉNDICE B

Factores de conversión

	m	cm	km
1 metro	1	10^{2}	10^{-3}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}
1 kilómetro	10^{3}	10^{5}	1
1 pulgada	$2{,}540 \times 10^{-2}$	2,540	$2{,}540 \times 10^{-5}$
1 pie	0,3048	30,48	$3{,}048 \times 10^{-4}$
1 milla	1.609	$1{,}609 \times 10^{4}$	1,609
1 angstrom	10^{-10}		
1 fermi	10^{-15}		
1 año luz			$9{,}460 \times 10^{12}$
	in	**ft**	**mi**
1 metro	39,37	3,281	$6{,}214 \times 10^{-4}$
1 centímetro	0,3937	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$6{,}214 \times 10^{-6}$
1 kilómetro	$3{,}937 \times 10^{4}$	$3{,}281 \times 10^{3}$	0,6214
1 pulgada	1	$8{,}333 \times 10^{-2}$	$1{,}578 \times 10^{-5}$
1 pie	12	1	$1{,}894 \times 10^{-4}$
1 milla	$6{,}336 \times 10^{4}$	5.280	1

TABLA B1 Longitud

Área

$1\ \text{cm}^2 = 0{,}155\ \text{in}^2$

$1\ \text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2 = 10{,}76\ \text{ft}^2$

$1\ \text{in}^2 = 6{,}452\ \text{cm}^2$

$1\ \text{ft}^2 = 144\ \text{in}^2 = 0{,}0929\ \text{m}^2$

Volumen

1 litro $= 1.000\ \text{cm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3 = 0{,}03531\ \text{ft}^3 = 61{,}02\ \text{in}^3$

$1\ \text{ft}^3 = 0{,}02832\ \text{m}^3 = 28{,}32$ litros $= 7{,}477$ galones

1 galón $= 3{,}788$ litros

	s	min	h	día	año
1 segundo	1	$1{,}667 \times 10^{-2}$	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}157 \times 10^{-5}$	$3{,}169 \times 10^{-8}$
1 minuto	60	1	$1{,}667 \times 10^{-2}$	$6{,}944 \times 10^{-4}$	$1{,}901 \times 10^{-6}$
1 hora	3.600	60	1	$4{,}167 \times 10^{-2}$	$1{,}141 \times 10^{-4}$
1 día	$8{,}640 \times 10^{4}$	1.440	24	1	$2{,}738 \times 10^{-3}$
1 año	$3{,}156 \times 10^{7}$	$5{,}259 \times 10^{5}$	$8{,}766 \times 10^{3}$	365,25	1

TABLA B2 Tiempo

	m/s	cm/s	ft/s	mi/h
1 metro/segundo	1	10^{2}	3,281	2,237
1 centímetro/segundo	10^{-2}	1	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$2{,}237 \times 10^{-2}$
1 pie/segundo	0,3048	30,48	1	0,6818
1 milla/hora	0,4470	44,70	1,467	1

TABLA B3 Velocidad

Aceleración

$1\ \text{m/s}^2 = 100\ \text{cm/s}^2 = 3{,}281\ \text{ft/s}^2$

$1\ \text{cm/s}^2 = 0{,}01\ \text{m/s}^2 = 0{,}03281\ \text{ft/s}^2$

$1\ \text{ft/s}^2 = 0{,}3048\ \text{m/s}^2 = 30{,}48\ \text{cm/s}^2$

$1\ \text{mi/h} \cdot \text{s} = 1{,}467\ \text{ft/s}^2$

	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	10^{3}	$6{,}852 \times 10^{-2}$	$6{,}024 \times 10^{26}$
1 gramo	10^{-3}	1	$6{,}852 \times 10^{-5}$	$6{,}024 \times 10^{23}$
1 slug	14,59	$1{,}459 \times 10^{4}$	1	$8{,}789 \times 10^{27}$
1 unidad de masa atómica	$1{,}661 \times 10^{-27}$	$1{,}661 \times 10^{-24}$	$1{,}138 \times 10^{-28}$	1

	kg	g	slug	u
1 tonelada métrica	1.000			

TABLA B4 Masa

	N	dina	lb
1 newton	1	10^5	0,2248
1 dina	10^{-5}	1	$2,248 \times 10^{-6}$
1 libra	4,448	$4,448 \times 10^5$	1

TABLA B5 Fuerza

	Pa	dina/cm^2	atm	cmHg	lb/in^2
1 pascal	1	10	$9,869 \times 10^{-6}$	$7,501 \times 10^{-4}$	$1,450 \times 10^{-4}$
1 dina/centímetro^2	10^{-1}	1	$9,869 \times 10^{-7}$	$7,501 \times 10^{-5}$	$1,450 \times 10^{-5}$
1 atmósfera	$1,013 \times 10^5$	$1,013 \times 10^6$	1	76	14,70
1 centímetro de mercurio*	$1,333 \times 10^3$	$1,333 \times 10^4$	$1,316 \times 10^{-2}$	1	0,1934
1 libra/pulgada^2	$6,895 \times 10^3$	$6,895 \times 10^4$	$6,805 \times 10^{-2}$	5,171	1
1 bar	10^5				
1 torr				1 (mmHg)	

* Donde la aceleración debido a la gravedad es 9,80665 m/s^2 y la temperatura es 0°C

TABLA B6 Presión

	J	erg	ft.lb
1 julio	1	10^7	0,7376
1 erg	10^{-7}	1	$7,376 \times 10^{-8}$
1 pie-libra	1,356	$1,356 \times 10^7$	1
1 electronvoltio	$1,602 \times 10^{-19}$	$1,602 \times 10^{-12}$	$1,182 \times 10^{-19}$
1 caloría	4,186	$4,186 \times 10^7$	3,088
1 unidad térmica británica	$1,055 \times 10^3$	$1,055 \times 10^{10}$	$7,779 \times 10^2$

	J	erg	ft.lb
1 kilovatio-hora	$3{,}600 \times 10^{6}$		
	eV	**cal**	**Btu**
1 julio	$6{,}242 \times 10^{18}$	0,2389	$9{,}481 \times 10^{-4}$
1 erg	$6{,}242 \times 10^{11}$	$2{,}389 \times 10^{-8}$	$9{,}481 \times 10^{-11}$
1 pie-libra	$8{,}464 \times 10^{18}$	0,3239	$1{,}285 \times 10^{-3}$
1 electronvoltio	1	$3{,}827 \times 10^{-20}$	$1{,}519 \times 10^{-22}$
1 caloría	$2{,}613 \times 10^{19}$	1	$3{,}968 \times 10^{-3}$
1 unidad térmica británica	$6{,}585 \times 10^{21}$	$2{,}520 \times 10^{2}$	1

TABLA B7 Trabajo, energía, calor

Potencia

1 W = 1 J/s

1 hp = 746 W = 550 ft · lb/s

1 Btu/h = 0,293 W

Ángulo

1 rad = 57,30° = 180°/π

1° = 0,01745 rad = π/180 rad

1 revolución = 360° = 2π rad

1 rev./min (rpm) = 0,1047 rad/s

APÉNDICE C

Constantes fundamentales

Cantidad	Símbolo	Valor
Unidad de masa atómica	u	$1{,}660\,538\,782\ (83) \times 10^{-27}$ kg $931{,}494\,028\ (23)$ MeV/c^2
Número de Avogadro	N_{A}	$6{,}02214076 \times 10^{23}$ mol recíproco$\left(\mathrm{mol}^{-1}\right)$
Magnetón de Bohr	$\mu_{\mathrm{B}} = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9{,}274\,009\,15\ (23) \times 10^{-24}$ J/T
Radio de Bohr	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5{,}291\,772\,085\,9\ (36) \times 10^{-11}$ m
La constante de Boltzmann	$k_{\mathrm{B}} = \frac{R}{N_{\mathrm{A}}}$	$1{,}380649 \times 10^{-23}$ julio por kelvin$\left(\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}\right)$
Longitud de onda Compton	$\lambda_{\mathrm{C}} = \frac{h}{m_e c}$	$2{,}426\,310\,217\,5\ (33) \times 10^{-12}$ m
Constante de Coulomb	$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$8{,}987\,551\,788... \times 10^{9}$ N · m^2/C^2 (exactamente)
Masa de deuterón|	m_d	$3{,}343\,583\,20\ (17) \times 10^{-27}$ kg $2{,}013\,553\,212\,724\,(78)$ u $1875{,}612\,859$ MeV/c^2
Masa del electrón	m_e	$9{,}109\,382\,15\ (45) \times 10^{-31}$ kg $5{,}485\,799\,094\,3\,(23) \times 10^{-4}$ u $0{,}510\,998\,910\ (13)$ MeV/c^2
Voltaje de electrón	eV	$1{,}602\,176\,487\ (40) \times 10^{-19}$ J
Cargo elemental	e	$1{,}602176634 \times 10^{-19}$ C
Constante universal de los gases ideales	R	$8{,}314\,472\ (15)$ J/mol · K
Constante gravitacional	G	$6{,}674\,28\ (67) \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Masa de neutrón	m_n	$1{,}674\,927\,211\ (84) \times 10^{-27}$ kg $1{,}008\,664\,915\,97\ (43)$ u $939{,}565\,346\ (23)$ MeV/c^2

Cantidad	Símbolo	Valor
Magnetón nuclear	$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5{,}050\ 783\ 24\ (13) \times 10^{-27}$ J/T
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T · m/A (exactamente)
Permeabilidad del espacio libre	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8{,}854\ 187\ 817... \times 10^{-12}$ $C^2/N \cdot m^2$ (exactamente)
Constante de Planck	h $\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$6{,}626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$ kg · m^2 · s^{-1} $1{,}054\ 571\ 82 \times 10^{-34}$ kg · m^2 · s^{-1}
Masa de protón	m_p	$1{,}672\ 621\ 637\ (83) \times 10^{-27}$ kg 1,007 276 466 77 (10) u 938,272 013 (23) MeV/c^2
Constante de Rydberg	R_H	$1{,}097\ 373\ 156\ 852\ 7\ (73) \times 10^{7}$ m^{-1}
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2{,}997\ 924\ 58 \times 10^{8}$ m/s (exactamente)

TABLA C1 Constantes fundamentales *Nota:* Estas constantes son los valores recomendados en 2006 por el Comité de Información para Ciencia y Tecnología (Committee on Data for Science and Technology, CODATA), basados en un ajuste por mínimos cuadrados de los datos de diferentes mediciones. Los números entre paréntesis de los valores representan las imprecisiones de los dos últimos dígitos.

Combinaciones útiles de constantes para los cálculos:

$hc = 12.400\ \mathrm{eV} \cdot \text{Å} = 1.240\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm} = 1.240\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}$

$\hbar c = 1.973\ \mathrm{eV} \cdot \text{Å} = 197{,}3\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm} = 197{,}3\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}$

$k_e e^2 = 14{,}40\ \mathrm{eV} \cdot \text{Å} = 1{,}440\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm} = 1{,}440\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}$

$k_\mathrm{B} T = 0{,}02585\ \mathrm{eV}$ en $T = 300\ \mathrm{K}$

APÉNDICE D

Datos astronómicos

Objeto celestial	Distancia media al Sol (millones de km)	Periodo de revolución (d = días) (y = años)	Periodo de rotación en el ecuador	Excentricidad de la órbita
Sol	–	–	27 d	–
Mercurio	57,9	88 d	59 d	0,206
Venus	108,2	224,7 d	243 d	0,007
Tierra	149,6	365,25 d	23 h 56 min 4 s	0,017
Marte	227,9	687 d	24 h 37 min 23 s	0,093
Júpiter	778,4	11,9 y	9 h 50 min 30 s	0,048
Saturno	1426,7	29,5 y	10 h 14 min	0,054
Urano	2871,0	84,0 y	17 h 14 min	0,047
Neptuno	4498,3	164,8 y	16 h	0,009
La Luna de la Tierra	149,6 (0,386 desde la Tierra)	27,3 d	27,3 d	0,055
Objeto celestial	**Diámetro ecuatorial (km)**	**Masa (Tierra = 1)**	**Densidad (g/cm^3)**	
Sol	1392000	333000,00	1,4	
Mercurio	4.879	0,06	5,4	
Venus	12.104	0,82	5,2	
Tierra	12.756	1,00	5,5	
Marte	6.794	0,11	3,9	
Júpiter	142.984	317,83	1,3	
Saturno	120.536	95,16	0,7	
Urano	51.118	14,54	1,3	
Neptuno	49.528	17,15	1,6	

Objeto celestial	Distancia media al Sol (millones de km)	Periodo de revolución (d = días) (y = años)	Periodo de rotación en el ecuador	Excentricidad de la órbita
La Luna de la Tierra	3.476	0,01	3,3	

TABLA D1 Datos astronómicos

Otros datos:

Masa de la Tierra: $5{,}97 \times 10^{24}$ kg

Masa de la Luna: $7{,}36 \times 10^{22}$ kg

Masa del Sol: $1{,}99 \times 10^{30}$ kg

APÉNDICE E

Fórmulas matemáticas

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Triángulo de base b y altura h	**Área** $= \frac{1}{2}bh$	
Círculo de radio r	Circunferencia $= 2\pi r$	Área $= \pi r^2$
Esfera de radio r	Superficie $= 4\pi r^2$	Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Cilindro de radio r y altura h	Superficie curva $= 2\pi rh$	Volumen $= \pi r^2 h$

TABLA E1 Geometría

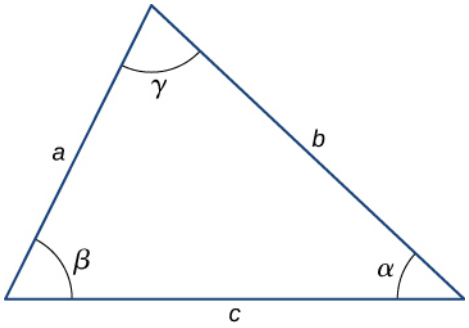
Trigonometría

Identidades trigonométricas

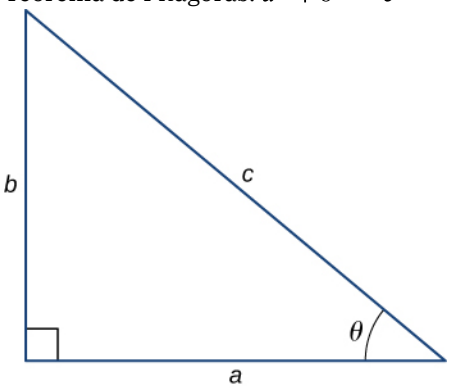
1. $\operatorname{sen}\theta = 1/\csc\theta$
2. $\cos\theta = 1/\sec\theta$
3. $\tan\theta = 1/\cot\theta$
4. $\operatorname{sen}\left(90^0 - \theta\right) = \cos\theta$
5. $\cos\left(90^0 - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$
6. $\tan\left(90^0 - \theta\right) = \cot\theta$
7. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
8. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
9. $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$
10. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
11. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
12. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
13. $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
14. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$
15. $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
16. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Triángulos

1. Ley de los senos: $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$
2. Ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



3. Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$



Ampliaciones de la serie

1. Teorema del binomio $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots$
2. $(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \cdots \left(x^2 < 1\right)$
3. $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \cdots \left(x^2 < 1\right)$
4. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$
6. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$
7. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$
8. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots (|x| < 1)$

Derivadas

1. $\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{d}{dx}f(x)$
2. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
3. $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$
4. $\frac{d}{dx}f(u) = \left[\frac{d}{du}f(u)\right]\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
6. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
7. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
8. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
9. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
10. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
11. $\frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$
12. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

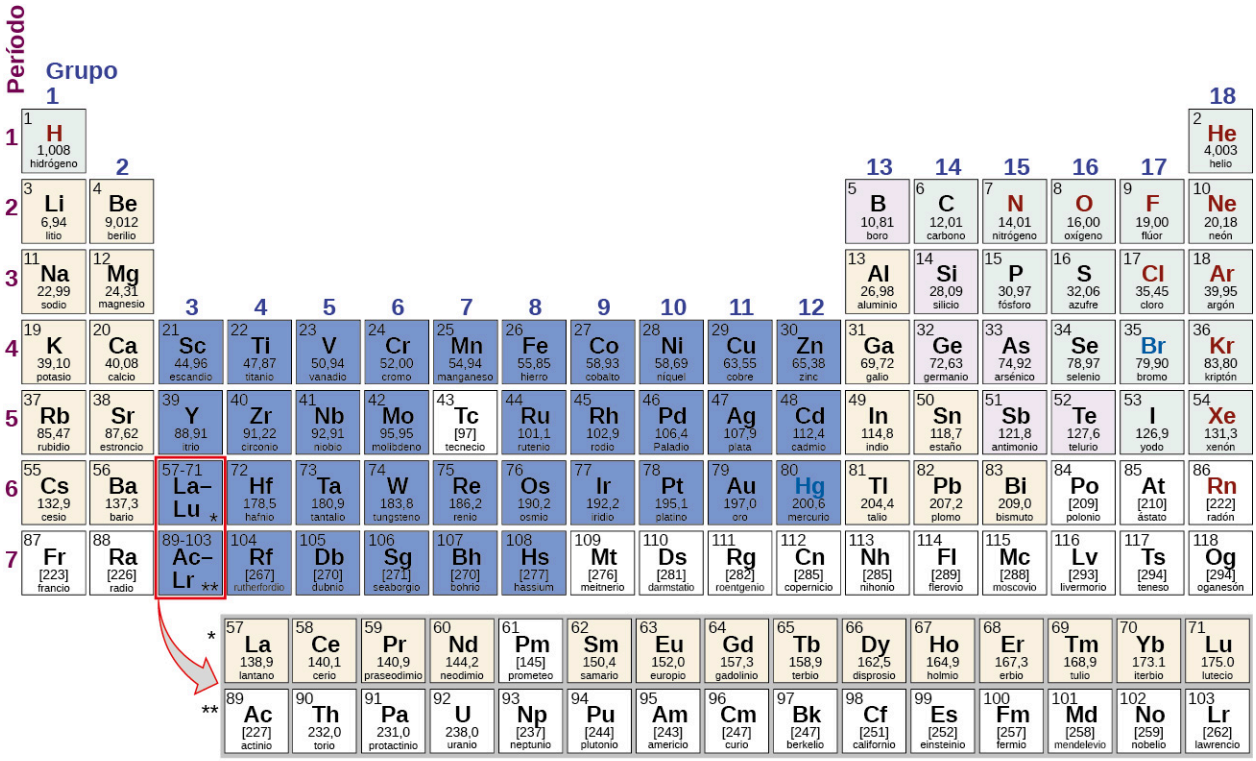
13. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
14. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

Integrales

1. $\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$
2. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
3. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ (m \neq -1)$
   $= \ln x (m = -1)$
4. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$
5. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$
6. $\int \tan x\, dx = \ln |\sec x|$
7. $\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
8. $\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
9. $\int \operatorname{sen} ax \cos ax\, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a}$
10. $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
11. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$
12. $\int \ln ax\, dx = x \ln ax - x$
13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$
17. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a}$
18. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$

APÉNDICE F

Química



Código de colores

Metales representativos	**Sólido**
Metales de transición y de transición interna	**Líquido**
Elementos radioactivos	**Gas**
Metaloide	
No metal	

APÉNDICE G

El alfabeto griego

Nombre	Mayúsculas	Minúsculas	Nombre	Mayúsculas	Minúsculas
Alpha	A	α	Nu	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Ómicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ε	Rho	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Theta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
lota	I	ι	Phi	Φ	ϕ
Kappa	K	κ	Chi	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Omega	Ω	ω

TABLA G1 El alfabeto griego

CLAVE DE RESPUESTAS

Capítulo 1

Compruebe Lo Aprendido

1.1 $4{,}79 \times 10^2$ megagramos (Mg) o 479 Mg
1.2 3×10^8 m/s
1.3 10^8 km^2
1.4 Los números eran demasiado pequeños, por un factor de 4,45.
1.5 $4\pi r^3/3$
1.6 sí
1.7 3×10^4 m o 30 km. Probablemente sea una subestimación porque la densidad de la atmósfera disminuye con la altitud. (De hecho, 30 km ni siquiera nos sacan de la estratosfera).
1.8 No, el nuevo cronómetro del entrenador no servirá. La incertidumbre del cronómetro es demasiado grande para diferenciar los tiempos de las carreras de forma eficaz.

Preguntas Conceptuales

1. La física es la ciencia que se ocupa de describir las interacciones de la energía, la materia, el espacio y el tiempo para descubrir los mecanismos fundamentales que subyacen a todo fenómeno.
3. No, ninguna de estas dos teorías es más válida que la otra. La experimentación es la que decide en última instancia. Si la evidencia experimental no sugiere ninguna teoría por encima de la otra, entonces ambas son igualmente válidas. Un físico determinado podría preferir una teoría sobre otra con el argumento de que una parece más sencilla, más natural o más bella que la otra, pero no reconocería rápidamente que no puede decir que la otra teoría sea inválida. Más bien, sería honesto sobre el hecho de que se necesitan más pruebas experimentales para determinar qué teoría describe mejor la naturaleza.
5. Probablemente no. Como dice el refrán: "Las afirmaciones extraordinarias requieren pruebas extraordinarias".
7. Las conversiones entre unidades solo requieren factores de 10, lo que simplifica los cálculos. Además, las mismas unidades básicas pueden aumentarse o reducirse con prefijos métricos a tamaños adecuados para el problema en cuestión.
9. a. Las unidades base se definen por un proceso particular de medición de una cantidad base, mientras que las unidades derivadas se definen como combinaciones algebraicas de unidades base. b. Se elige una cantidad base por convención y por consideraciones prácticas. Las cantidades derivadas se expresan como combinaciones algebraicas de las cantidades base. c. Una unidad base es un estándar para expresar la medida de una cantidad base dentro de un determinado sistema de unidades. Así, una medida de una cantidad base puede expresarse en términos de una unidad base en cualquier sistema de unidades que utilice las mismas cantidades base. Por ejemplo, la longitud es una cantidad base tanto en el SI como en el sistema inglés, pero el metro es una unidad base solamente en el sistema SI.
11. a. La incertidumbre es una medida cuantitativa de la precisión. b. La discrepancia es una medida cuantitativa de la exactitud.
13. Compruebe que tenga sentido y evalúe su significado.

Problemas

15. a. 10^3; b. 10^5; c. 10^2; d. 10^{15}; e. 10^2; f. 10^{57}
17. 10^2 generaciones
19. 10^{11} átomos
21. 10^3 impulsos nerviosos/s
23. 10^{26} operaciones en coma flotante por vida humana
25. a. 957 kilosegundos (ks); b. 4,5 cs o 45 ms; c. 550 nanosegundos (ns); d. 31,6 megasegundos (Ms)

27. a. 75,9 megámetros (Mm); b. 7,4 mm; c. 88 picómetros (pm); d. 16,3 Tm
29. a. 3,8 cg o 38 mg; b. 230 exagramos (Eg); c. 24 ng; d. 8 Eg e. 4,2 g
31. a. 27,8 m/s; b. 62 mi/h
33. a. 3,6 km/h; b. 2,2 mi/h
35. $1{,}05 \times 10^5$ pies^2
37. 8,847 km
39. a. $1{,}3 \times 10^{-9}$ m; b. 40 km/My
41. $10^6 \text{Mg}/\mu\text{L}$
43. 62,4 lbm/pies^3
45. 0,017 rad
47. 1 nanosegundo de luz
49. $3{,}6 \times 10^{-4}\,\text{m}^3$
51. a. Sí, ambos términos tienen la dimensión L^2T^{-2} b. No. c. Sí, ambos términos tienen la dimensión LT^{-1} d. Sí, ambos términos tienen la dimensión LT^{-2}
53. a. [v] = LT^{-1}; b. [a] = LT^{-2}; c. $\left[\int v dt\right] = \text{L}$; d. $\left[\int a dt\right] = \text{LT}^{-1}$; e. $\left[\frac{da}{dt}\right] = \text{LT}^{-3}$
55. a. L; b. L; c. $L^0 = 1$ (es decir, es adimensional)
57. 10^{28} átomos
59. 10^{51} moléculas
61. 10^{16} sistemas solares
63. a. Volumen = 10^{27} m^3, el diámetro es de 10^9 m.; b. 10^{11} m
65. a. Una estimación razonable podría ser una operación por segundo para un total de 10^9 en toda la vida; b. unos $(10^9)(10^{-17}\text{ s}) = 10^{-8}$ s, o unos 10 nanosegundos (ns)
67. 2 kg
69. 4 %
71. 67 mL
73. a. El número 99 tiene 2 cifras significativas; el 100. tiene 3 cifras significativas. b. 1,00 %; c. porcentajes de incertidumbre
75. a. 2 %; b. 1 mm Hg
77. 7,557 cm^2
79. a. 37,2 lb; como el número de bolsas es un valor exacto, no se considera en las cifras significativas; b. 1,4 N; como el valor 55 kg solo tiene dos cifras significativas, el valor final también debe contener dos cifras significativas

Problemas Adicionales

81. a. $[s_0] = \text{L}$ y las unidades son metros (m); b. $[v_0] = \text{LT}^{-1}$ y las unidades son metros por segundo (m/s); c. $[a_0] = \text{LT}^{-2}$ y las unidades son metros por segundo al cuadrado (m/s^2); d. $[j_0] = \text{LT}^{-3}$ y las unidades son metros por segundo al cubo (m/s^3); e. $[S_0] = \text{LT}^{-4}$ y las unidades son m/s^4; f. $[c] = \text{LT}^{-5}$ y las unidades son m/s^5.
83. a. 0,059 %; b. 0,01 %; c. 4,681 m/s; d. 0,07 %, 0,003 m/s
85. a. 0,02 %; b. 1×10^4 lbm
87. a. 143,6 cm^3; b. 0,1 cm^3 o 0,084

Problemas De Desafío

89. Como cada término de la serie de potencias implica el argumento elevado a una potencia diferente, la única manera de que cada término de la serie de potencias tenga la misma dimensión es que el argumento sea adimensional. Para ver esto explícitamente, supongamos que $[x] = L^aM^bT^c$. Entonces, $[x^n] = [x]^n = L^{an}M^{bn}T^{cn}$. Si queremos que $[x] = [x^n]$, entonces an = a, bn = b, y cn = c para todo n. La única manera de que esto ocurra es si a = b = c = 0.

Capítulo 2

Compruebe Lo Aprendido

2.1 a. no son iguales porque son ortogonales; b. no son iguales porque tienen magnitudes diferentes; c. no son iguales porque tienen magnitudes y direcciones diferentes; d. no son iguales porque son antiparalelos; e. son iguales.

2.2 16 m; $\vec{\mathbf{D}} = -16\ \text{m}\hat{\mathbf{u}}$

2.3 $G = 28{,}2$ cm, $\theta_G = 291°$

2.4 $\vec{\mathbf{D}} = (-5{,}0\hat{\mathbf{i}} - 3{,}0\hat{\mathbf{j}})$cm; la mosca se desplazó 5,0 cm hacia la izquierda y 3,0 cm hacia abajo desde su lugar de aterrizaje.

2.5 5,83 cm, 211°

2.6 $\vec{\mathbf{D}} = (-20\ \text{m})\hat{\mathbf{i}}$

2.7 35,2 m/s = 126,4 km/h

2.8 $\vec{\mathbf{G}} = (10{,}25\hat{\mathbf{i}} - 26{,}22\hat{\mathbf{j}})$cm

2.9 $D = 55{,}7$ N; dirección 65,7° al norte del este

2.10 $\hat{\mathbf{v}} = 0{,}8\hat{\mathbf{i}} + 0{,}6\hat{\mathbf{j}}$, 36,87° al norte del este

2.11 $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -57{,}3$, $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{C}} = 27{,}8$

2.13 131,9°

2.14 $W_1 = 1{,}5\ \text{J}$, $W_2 = 0{,}3\ \text{J}$

2.15 $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -40{,}1\hat{\mathbf{k}}$ o, de forma equivalente, $\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = 40{,}1$, y la dirección es hacia la página

$\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{F}} = +157{,}6\hat{\mathbf{k}}$ o, de forma equivalente, $\left|\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{F}}\right| = 157{,}6$, y la dirección es hacia fuera de la página.

2.16 a. $-2\hat{\mathbf{k}}$, b. 2, c. 153,4°, d. 135°

Preguntas Conceptuales

1. escalar

3. las respuestas pueden variar

5. paralelo, suma de magnitudes, antiparalelo, cero

7. no, sí

9. cero, sí

11. no

13. iguales, iguales, las mismas

15. un vector unitario del eje de la x

17. Son iguales.

19. sí

21. a. $C = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, b. $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ o $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, c. $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, d. $\vec{\mathbf{C}} = A\vec{\mathbf{B}}$, e. $\vec{\mathbf{C}} + 2\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$, f. $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, g. el lado izquierdo es un escalar y el derecho un vector, h. $\vec{\mathbf{C}} = 2\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, i. $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}/B$, j. $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}/B$

23. Son ortogonales.

Problemas

25. $\vec{\mathbf{h}} = -49\ \text{m}\hat{\mathbf{u}}$, 49 m

27. 30,8 m, 35,7° al oeste del norte

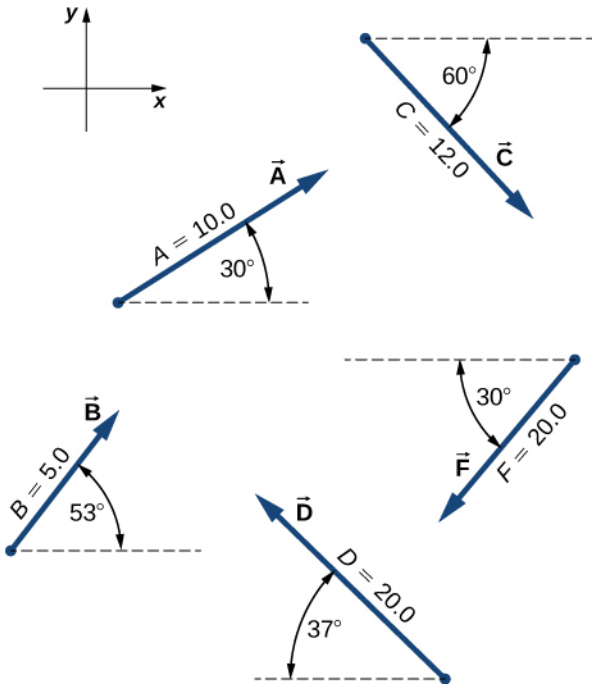
29. 134 km, 80°

31. 7,34 km, 63,5° al sur del este

33. 3,8 km al este, 3,2 km al norte, 7,0 km

35. 14,3 km, 65°

37. a. $\vec{\mathbf{A}} = +8{,}66\hat{\mathbf{i}} + 5{,}00\hat{\mathbf{j}}$, b. $\vec{\mathbf{B}} = +3{,}01\hat{\mathbf{i}} + 3{,}99\hat{\mathbf{j}}$, c. $\vec{\mathbf{C}} = +6{,}00\hat{\mathbf{i}} - 10{,}39\hat{\mathbf{j}}$, d. $\vec{\mathbf{D}} = -15{,}97\hat{\mathbf{i}} + 12{,}04\hat{\mathbf{j}}$, f. $\vec{\mathbf{F}} = -17{,}32\hat{\mathbf{i}} - 10{,}00\hat{\mathbf{j}}$



39. a. 1,94 km, 7,24 km; b. prueba

41. 3,8 km al este, 3,2 km al norte, 2,0 km, $\vec{\mathbf{D}} = (3{,}8\hat{\mathbf{i}} + 3{,}2\hat{\mathbf{j}})$km

43. P_1 (2,165 m, 1,250 m), $P_2(-1{,}900\text{ m}, 3{,}290\text{ m})$, 5,27 m

45. 8,60 m, $A(2\sqrt{5}\text{ m}, 0{,}647\pi)$, $B(3\sqrt{2}\text{ m}, 0{,}75\pi)$

47. a. $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = -4\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}$, $\left|\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}\right| = 7{,}211, \theta = 236°$; b. $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$, $\left|\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}\right| = 2\sqrt{2}, \theta = 135°$

49. a. $\vec{\mathbf{C}} = (5{,}0\hat{\mathbf{i}} - 1{,}0\hat{\mathbf{j}} - 3{,}0\hat{\mathbf{k}})$m, $C = 5{,}92$ m;
b. $\vec{\mathbf{D}} = (4{,}0\hat{\mathbf{i}} - 11{,}0\hat{\mathbf{j}} + 15{,}0\hat{\mathbf{k}})$m, $D = 19{,}03$ m

51. $\vec{\mathbf{D}} = (3{,}3\hat{\mathbf{i}} - 6{,}6\hat{\mathbf{j}})$km, $\hat{\mathbf{i}}$ es al este, a 7,34 km, $-63{,}5°$

53. a. $\vec{\mathbf{R}} = -1{,}35\hat{\mathbf{i}} - 22{,}04\hat{\mathbf{j}}$, b. $\vec{\mathbf{R}} = -17{,}98\hat{\mathbf{i}} + 0{,}89\hat{\mathbf{j}}$

55. $\vec{\mathbf{D}} = (200\hat{\mathbf{i}} + 300\hat{\mathbf{j}})$yardas, D = 360,5 yardas, 56,3° al norte del este; las respuestas numéricas seguirían siendo las mismas, aunque la unidad física sería el metro. El significado físico y las distancias serían más o menos las mismas porque 1 yarda (yd) es comparable a 1 m.

57. $\vec{\mathbf{R}} = -3\hat{\mathbf{i}} - 16\hat{\mathbf{j}}$

59. $\vec{\mathbf{E}} = E\hat{\mathbf{E}}$, $E_x = +178{,}9\text{V/m}$, $E_y = -357{,}8\text{V/m}$, $E_z = 0{,}0\text{V/m}$, $\theta_E = -\tan^{-1}(2)$

61. a. $-34{,}290\vec{\mathbf{R}}_B = (-12{,}278\hat{\mathbf{i}} + 7{,}089\hat{\mathbf{j}} + 2{,}500\hat{\mathbf{k}})$km, $\vec{\mathbf{R}}_D = (-34{,}290\hat{\mathbf{i}} + 3{,}000\hat{\mathbf{k}})$km; b. $\left|\vec{\mathbf{R}}_B - \vec{\mathbf{R}}_D\right| = 23{,}131$ km

63. a. 0, b. 0, c. 0,866, d. 17,32

65. $\theta_i = 64{,}12°, \theta_j = 150{,}79°, \theta_k = 77{,}39°$

67. a. $-120\hat{\mathbf{k}}$, b. $0\hat{\mathbf{k}}$, c. $-94\hat{\mathbf{k}}$, d. $-240\hat{\mathbf{k}}$, e. $4{,}0\hat{\mathbf{k}}$, f. $-3{,}0\hat{\mathbf{k}}$, g. $15\hat{\mathbf{k}}$, h. 0

69. a. 0, b. 0, c. $+-20.000\hat{\mathbf{k}}$

Problemas Adicionales

71. a. 18,4 km y 26,2 km, b. 31,5 km y 5,56 km

73. a. $(r, \pi - \varphi)$, b. $(2r, \varphi + 2\pi)$, (c) $(3r, -\varphi)$

75. $d_{\text{PM}} = 6{,}2\text{ nmi} = 11{,}4\text{ km}$, $d_{\text{NP}} = 7{,}2\text{ nmi} = 13{,}3\text{ km}$

77. prueba

79. a. 10,00 m, b. 5π m, c. 0

81. 22,2 km/h, 35,8° al sur del oeste

83. 270 m, 4,2° al norte del oeste

85. $\vec{\mathbf{B}} = -4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}}$ o $\vec{\mathbf{B}} = 4{,}0\hat{\mathbf{i}} - 3{,}0\hat{\mathbf{j}}$
87. prueba

Problemas De Desafío

89. $G_{\mathrm{H}} = 19\,\mathrm{N}/\sqrt{17} \approx 4{,}6\,\mathrm{N}$
91. prueba

Capítulo 3

Compruebe Lo Aprendido

3.1 (a) El desplazamiento del ciclista es $\Delta x = x_{\mathrm{f}} - x_0 = -1$ km. (El desplazamiento es negativo porque tomamos el este como positivo y el oeste como negativo). (b) La distancia recorrida es de 3 km + 2 km = 5 km. (c) La magnitud del desplazamiento es de 1 km.

3.2 (a) Tomando la derivada de $x(t)$ se obtiene $v(t)$ = -6t m/s. (b) No, porque el tiempo nunca puede ser negativo. (c) La velocidad es $v(1{,}0\ \mathrm{s})$ = -6 m/s y la rapidez es $|v(1{,}0\ \mathrm{s})| = 6$ m/s.

3.3 Al incorporar los valores conocidos, tenemos

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2{,}0 \times 10^7\ \mathrm{m/s} - 0}{10^{-4}\ \mathrm{s} - 0} = 2{,}0 \times 10^{11}\,\mathrm{m/s^2}.$$

3.4 Si tomamos el este como positivo, entonces el avión tiene una aceleración negativa porque está acelerando hacia el oeste. También desacelera; su aceleración es en sentido contrario a su velocidad.

3.5 Para responder esto, elija una ecuación que nos permita resolver el tiempo t, dados solo a, v_0, y v:
$v = v_0 + at$.
Reordene para resolver t:
$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{400\ \mathrm{m/s} - 0\ \mathrm{m/s}}{20\ \mathrm{m/s^2}} = 20\ \mathrm{s}$.

3.6 $a = \frac{2}{3}\ \mathrm{m/s^2}$.

3.7 Tarda 2,47 s en llegar al agua. La distancia recorrida aumenta más rápidamente.

3.8 a. La función de velocidad es la integral de la función de aceleración más una constante de integración. Según la Ecuación 3.18,

$$v(t) = \int a(t)dt + C_1 = \int (5 - 10t)dt + C_1 = 5t - 5t^2 + C_1.$$

Dado que $v(0)$ = 0, tenemos que C_1 = 0; por lo tanto,
$v(t) = 5t - 5t^2$.

b. Según la Ecuación 3.19,

$$x(t) = \int v(t)dt + C_2 = \int (5t - 5t^2)dt + C_2 = \frac{5}{2}t^2 - \frac{5}{3}t^3 + C_2.$$

Dado que $x(0)$ = 0, tenemos C_2 = 0, y
$x(t) = \frac{5}{2}t^2 - \frac{5}{3}t^3$.

c. La velocidad puede escribirse como $v(t)$ = 5t(1 - t), que es igual a cero en t = 0, y t = 1 s.

Preguntas Conceptuales

1. Conduce su auto hasta la ciudad y vuelve a pasar por su casa para ir a la de un amigo.
3. Si las bacterias se mueven de un lado a otro, los desplazamientos se anulan entre sí y el desplazamiento final es pequeño.
5. La distancia recorrida
7. La rapidez media es la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo transcurrido. Si va a dar un paseo a pie, entre salir y volver a su casa, su rapidez media es un número positivo. Dado que la velocidad media = desplazamiento/tiempo transcurrido, su velocidad media es cero.
9. Rapidez media. Son iguales si el auto no invierte la dirección.
11. No, en una dimensión la rapidez constante requiere una aceleración cero.
13. Se lanza una pelota al aire y su velocidad es cero en el vértice del lanzamiento, pero la aceleración no es cero.

15. Más, menos

17. Si la aceleración, el tiempo y el desplazamiento son los valores conocidos, y las velocidades inicial y final son las incógnitas, entonces hay que resolver simultáneamente dos ecuaciones cinemáticas. Además, si la velocidad final, el tiempo y el desplazamiento son valores conocidos, hay que resolver dos ecuaciones cinemáticas para la velocidad y la aceleración iniciales.

19. a. en la parte superior de su trayectoria; b. sí, en la parte superior de su trayectoria; c. sí

21. Tierra $v = v_0 - gt = -gt$; Luna $v' = \frac{g}{6}t'$ $v = v'$ $-gt = -\frac{g}{6}t'$ $t' = 6t$; Tierra $y = -\frac{1}{2}gt^2$ Luna $y' = -\frac{1}{2}\frac{g}{6}(6t)^2 = -\frac{1}{2}g6t^2 = -6\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = -6y$

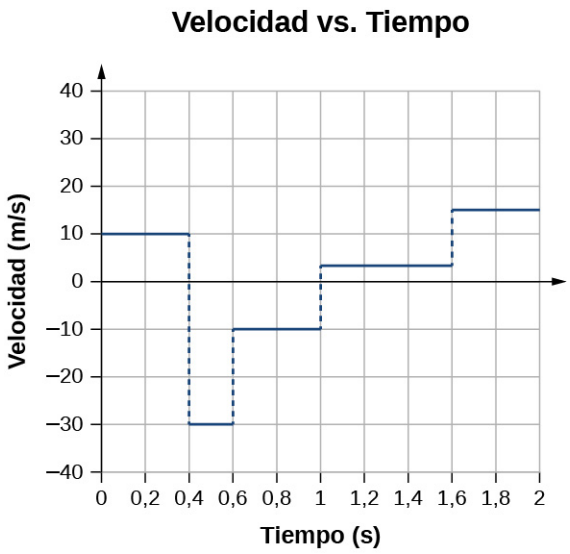
Problemas

25. a. $\vec{\mathbf{x}}_1 = (-2{,}0\text{ m})\hat{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{x}}_2 = (5{,}0\text{ m})\hat{\mathbf{i}}$; b. 7,0 m al este

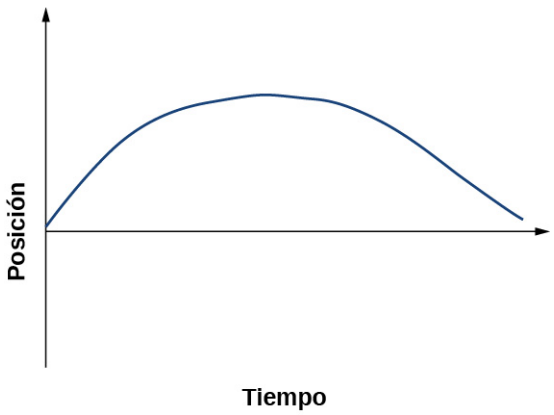
27. a. $t = 2{,}0$ s; b. $x(6{,}0) - x(3{,}0) = -8{,}0 - (-2{,}0) = -6{,}0$ m

29. a. 150,0 s, $\bar{v} = 156{,}7$ m/s; b. El 163 % de la velocidad del sonido a nivel del mar o aproximadamente Mach 2.

31.



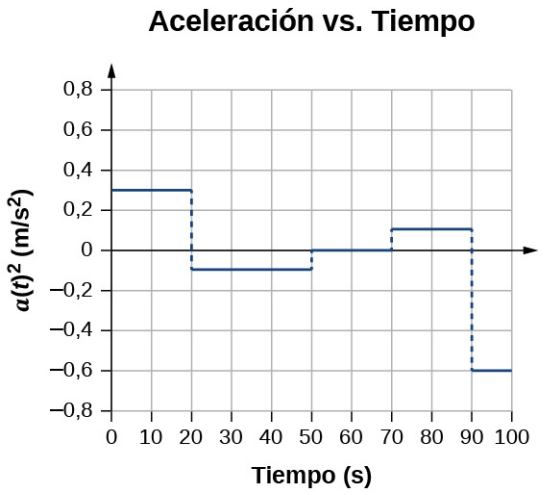
33.



35. a. $v(t) = (10 - 4t)$m/s; $v(2\text{ s}) = 2$ m/s, $v(3\text{ s}) = -2$ m/s; b. $|v(2\text{ s})| = 2$ m/s, $|v(3\text{ s})| = 2$ m/s; (c) $\bar{v} = 0$ m/s

37. $a = 4{,}29\text{m/s}^2$

39.

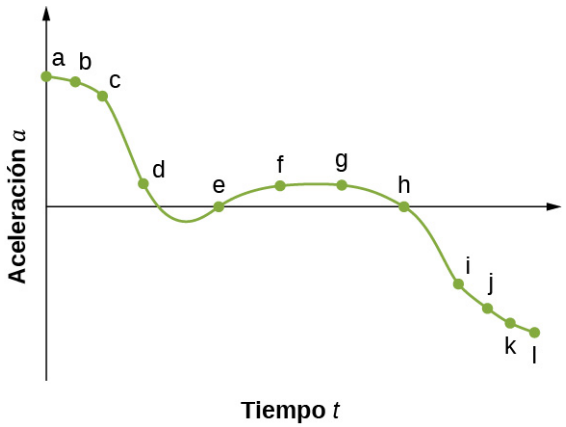


41. $a = 11{,}1g$

43. 150 m

45. a. 525 m;
b. $v = 180$ m/s

47. a.



b. La aceleración tiene el mayor valor positivo en t_a
c. La aceleración es cero en t_e y t_h
d. La aceleración es negativa en t_i, t_j, t_k, t_l

49. a. $a = -1{,}3$ m/s^2;
b. $v_0 = 18$ m/s;
c. $t = 13{,}8$ s

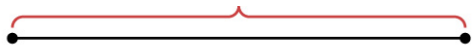
51. $v = 502{,}20$ m/s

53. a.



b. Valores conocidos: $a = 2{,}40$ m/s^2, $t = 12{,}0$ s, $v_0 = 0$ m/s y $x_0 = 0$ m;
c. $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 = 2{,}40$ m/s$^2(12{,}0$ s$)^2 = 172{,}80$ m, la respuesta parece razonable para aproximadamente 172,8 m; d. $v = 28{,}8$ m/s

55. a.



$t_0 = 0$ s	$t_0 = ?$
$x_0 = 0$ m	$x_0 = 1{,}80$ cm
$v_0 = 0$ m/s	$v_0 = 30{,}0$ cm/s
$a = ?$	$a = ?$

b. Valores conocidos: $v = 30{,}0$ cm/s, $x = 1{,}80$ cm;
c. $a = 250\ \text{cm/s}^2$, $t = 0{,}12$ s;
d. sí

57. a. $6{,}87\ \text{m/s}^2$; b $x = 52{,}26$ m

59. a. $a = 8.450\ \text{m/s}^2$;
b. $t = 0{,}0077$ s

61. a. $a = 9{,}18\ g$;
b. $t = 6{,}67 \times 10^{-3}$ s;

c.
$a = -40{,}0\ \text{m/s}^2$
$a = 4{,}08\ g$

63. Valores conocidos: $x = 3$ m, $v = 0$ m/s, $v_0 = 54$ m/s. Queremos encontrar a, así que podemos usar esta ecuación $a = -486\ \text{m/s}^2$.

65. a. $a = 32{,}58\ \text{m/s}^2$;
b. $v = 161{,}85$ m/s;
c. $v > v_{\text{máx}}$, porque la suposición de una aceleración constante no es válida para un dragster. Un dragster cambia de marcha y tendría una mayor aceleración en la primera marcha que en la segunda, que en la tercera, y así sucesivamente. La aceleración sería mayor al principio, por lo que no aceleraría a $32{,}6\ \text{m/s}^2$ durante los últimos metros, pero sustancialmente menos, y la velocidad final sería inferior a 162 m/s.

67. a.
$y = -8{,}23$ m ;
$v_1 = -18{,}9$ m/s

b.
$y = -18{,}9$ m ;
$v_2 = -23{,}8$ m/s

c.
$y = -32{,}0$ m ;
$v_3 = -28{,}7$ m/s

d.
$y = -47{,}6$ m ;
$v_4 = -33{,}6$ m/s

e.
$y = -65{,}6$ m
$v_5 = -38{,}5$ m/s

69. a. Valores conocidos: $a = -9{,}8\ \text{m/s}^2$ $v_0 = -1{,}4$ m/s $t = 1{,}8$ s $y_0 = 0$ m;
b. $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt = -1{,}4\ \text{m/s}(1{,}8\ \text{seg}) - \frac{1}{2}(9{,}8)(1{,}8\ \text{s})^2 = -18{,}4$ m y el origen está en los socorristas, que están a 18,4 m sobre el agua.

71. a. $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$ $y_0 = 0$ $v = 0$ $y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(4{,}0\text{ m/s})^2}{2(9{,}80)} = 0{,}82$ m; b. al vértice $v = 0{,}41$ s por 2 al trampolín = 0,82 s del trampolín al agua
$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ $y = -1{,}80$ m $y_0 = 0$ $v_0 = 4{,}0$ m/s$-1{,}8 = 4{,}0t - 4{,}9t^2$ $4{,}9t^2 - 4{,}0t - 1{,}80 = 0$, la solución de la ecuación cuadrática da 1,13 s; c.
$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$ $y_0 = 0$ $v_0 = 4{,}0$ m/s $y = -1{,}80$ m
$v = 7{,}16$ m/s

73. Tiempo hasta el vértice: $t = 1{,}12$ s por 2 es igual a 2,24 s a una altura de 2,20 m. A 1,80 m de altura hay que añadir 0,40 m $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ $y = -0{,}40$ m $y_0 = 0$ $v_0 = -11{,}0$ m/s.

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad y = -0{,}40\text{ m} \quad y_0 = 0 \quad v_0 = -11{,}0\text{ m/s}$$
$$-0{,}40 = -11{,}0t - 4{,}9t^2 \text{ o } 4{,}9t^2 + 11{,}0t - 0{,}40 = 0$$

Tome la raíz positiva, por lo que el tiempo para recorrer los 0,4 m adicionales es de 0,04 s. El tiempo total es 2,24 s + 0,04 s = 2,28 s.

75. a. $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$ $y_0 = 0$ $v = 0$ $y = 2{,}50$ m; b. $t = 0{,}72$ s por 2 da 1,44 s en el aire
$v_0^2 = 2gy \Rightarrow v_0 = \sqrt{2(9{,}80)(2{,}50)} = 7{,}0$ m/s

77. a. $v = 70{,}0$ m/s; b. tiempo que se escucha después de que la roca comienza a caer: 0,75 s, tiempo para llegar al suelo: 6,09 s

79. a. $A = \text{m/s}^2$ $B = \text{m/s}^{5/2}$;

b. $v(t) = \int a(t)dt + C_1 = \int \left(A - Bt^{1/2}\right) dt + C_1 = At - \frac{2}{3}Bt^{3/2} + C_1$;
$v(0) = 0 = C_1$ así que $v(t_0) = At_0 - \frac{2}{3}Bt_0^{3/2}$

c. $x(t) = \int v(t)dt + C_2 = \int \left(At - \frac{2}{3}Bt^{3/2}\right) dt + C_2 = \frac{1}{2}At^2 - \frac{4}{15}Bt^{5/2} + C_2$
$x(0) = 0 = C_2$ así que $x(t_0) = \frac{1}{2}At_0^2 - \frac{4}{15}Bt_0^{5/2}$

81. a. $a(t) = 3{,}2\text{m/s}^2$ $t \le 5{,}0$ s ;
$a(t) = 1{,}5\text{m/s}^2$ $5{,}0\text{ s} \le t \le 11{,}0$ s
$a(t) = 0\text{m/s}^2$ $t > 11{,}0$ s

$x(t) = \int v(t)dt + C_2 = \int 3{,}2tdt + C_2 = 1{,}6t^2 + C_2$

$t \leq 5{,}0$ s

$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ por lo tanto, $x(2{,}0\text{ s}) = 6{,}4$ m

$x(t) = \int v(t)dt + C_2 = \int [16{,}0 - 1{,}5\,(t - 5{,}0)]\,dt + C_2 = 16t - 1{,}5\left(\frac{t^2}{2} - 5{,}0t\right) + C_2$

$5{,}0 \leq t \leq 11{,}0$ s

b. $x(5\text{ s}) = 1{,}6(5{,}0)^2 = 40\text{ m} = 16(5{,}0\text{ s}) - 1{,}5\left(\frac{5^2}{2} - 5{,}0\,(5{,}0)\right) + C_2$

$40 = 98{,}75 + C_2 \Rightarrow C_2 = -58{,}75$

$x(7{,}0\text{ s}) = 16(7{,}0) - 1{,}5\left(\frac{7^2}{2} - 5{,}0\,(7)\right) - 58{,}75 = 69\text{ m}$

$x(t) = \int 7{,}0dt + C_2 = 7t + C_2$

$t \geq 11{,}0$ s

$x(11{,}0\text{ s}) = 16(11) - 1{,}5\left(\frac{11^2}{2} - 5{,}0\,(11)\right) - 58{,}75 = 109 = 7(11{,}0\text{ s}) + C_2 \Rightarrow C_2 = 32\text{ m}$

$x(t) = 7t + 32$ m

$x \geq 11{,}0\text{ s} \Rightarrow x(12{,}0\text{ s}) = 7(12) + 32 = 116$ m

Problemas Adicionales

83. Tome el oeste como la dirección positiva.
Primer avión: $\overline{v} = 600$ km/h
Segundo avión: $\overline{v} = 667{,}0$ km/h

85. $a = \frac{v - v_0}{t - t_0}, t = 0,\ a = \frac{-3{,}4\text{ cm/s} - v_0}{4\text{ s}} = 1{,}2\text{ cm/s}^2 \Rightarrow v_0 = -8{,}2$ cm/s $v = v_0 + at = -8{,}2 + 1{,}2\,t$;
$v = -7{,}0$ cm/s $\quad v = -1{,}0$ cm/s

87. $a = -3\text{ m/s}^2$

89. a.
$v = 8{,}7 \times 10^5$ m/s;
b. $t = 7{,}8 \times 10^{-8}$ s

91. $1\text{ km} = v_0(80{,}0\text{ s}) + \frac{1}{2}a(80{,}0)^2$; $2\text{ km} = v_0(200{,}0) + \frac{1}{2}a(200{,}0)^2$ resuelva simultáneamente para obtener $a = -\frac{0{,}1}{2400{,}0}\text{km/s}^2$ y $v_0 = 0{,}014167$ km/s, que es 51,0 km/h. La velocidad al final del viaje es $v = 21{,}0$ km/h.

93. $a = -0{,}9\text{ m/s}^2$

95. Ecuación para el auto que va a gran velocidad: este auto tiene una velocidad constante, que es la velocidad media, y no está acelerando, por lo que utilizamos la ecuación del desplazamiento con $x_0 = 0$:$x = x_0 + \overline{v}t = \overline{v}t$; ecuación para el auto de policía: este auto está acelerando, así que utilizamos la ecuación del desplazamiento con $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$, ya que el auto de policía arranca desde el reposo: $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$; ahora tenemos una ecuación de movimiento para cada auto con un parámetro común, que puede eliminarse para encontrar la solución. En este caso, resolvemos t. Paso 1, eliminar x: $x = \overline{v}t = \frac{1}{2}at^2$; paso 2, resolver t: $t = \frac{2\overline{v}}{a}$. El auto que va a gran velocidad tiene una velocidad constante de 40 m/s, que es su velocidad media. La aceleración del auto de policía es de 4 m/s^2. Al evaluar t, el tiempo que tarda el auto de policía en alcanzar al auto que va a gran velocidad, tenemos $t = \frac{2\overline{v}}{a} = \frac{2(40)}{4} = 20$ s.

97. Con esta aceleración se detiene por completo en $t = \frac{-v_0}{a} = \frac{8}{0{,}5} = 16$ s, pero la distancia recorrida es $x = 8\text{ m/s}(16\text{ s}) - \frac{1}{2}(0{,}5)(16\text{ s})^2 = 64$ m, que es menor que la distancia que le separa de la meta, por lo que

nunca termina la carrera.

99. $x_1 = \frac{3}{2}v_0 t$

$x_2 = \frac{5}{3}x_1$

101. $v_0 = 7{,}9$ m/s velocidad en la parte inferior de la ventana.

$v = 7{,}9$ m/s

$v_0 = 14{,}1$ m/s

103. a. $v = 5{,}42$ m/s;

b. $v = 4{,}64$ m/s;

c. $a = 2874{,}28$ m/s^2;

d. $(x - x_0) = 5{,}11 \times 10^{-3}$ m

105. Considere que los jugadores caen desde el reposo a la altura de 1,0 m y 0,3 m.

0,9 s

0,5 s

107. a. $t = 6{,}37$ s tomando la raíz positiva;

b $v = 59{,}5$ m/s

109. a. $y = 4{,}9$ m;

b. $v = 38{,}3$ m/s;

c. $-33{,}3$ m

111. $h = \frac{1}{2}gt^2$, h = altura total y tiempo de caída al suelo

$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t-1)^2$ en t - 1 segundos baja $2/3h$

$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = \frac{1}{2}g(t-1)^2$ o $\frac{t^2}{3} = \frac{1}{2}(t-1)^2$

$0 = t^2 - 6t + 3\; t = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{24}}{2}$

$t = 5{,}45$ s y $h = 145{,}5$ m. La otra raíz es inferior a 1 s. Para comprobar $t = 4{,}45$ s $h = \frac{1}{2}gt^2 = 97{,}0$ m

$= \frac{2}{3}(145{,}5)$

Problemas De Desafío

113. a. $v(t) = 10t - 12t^2$ m/s, $a(t) = 10 - 24t$ m/s^2;

b. $v(2\text{ s}) = -28$ m/s, $a(2\text{ s}) = -38$m/s^2; c. La pendiente de la función de posición es cero o la velocidad es cero. Hay dos soluciones posibles: $t = 0$, que da $x = 0$, o $t = 10{,}0/12{,}0 = 0{,}83$ s, que da $x = 1{,}16$ m. La segunda respuesta es la opción correcta; d. 0,83 s (e) 1,16 m

115. 96 km/h $= 26{,}67$ m/s, $a = \frac{26{,}67 \text{ m/s}}{4{,}0 \text{ s}} = 6{,}67$m/s^2, 295,38 km/h = 82,05 m/s, $t = 12{,}3$ s tiempo para acelerar a la velocidad máxima

$x = 504{,}55$ m distancia recorrida durante la aceleración

7.495,44 m a una rapidez constante

$\frac{7.495{,}44 \text{ m}}{82{,}05 \text{ m/s}} = 91{,}35$ s por lo que el tiempo total es $91{,}35 \text{ s} + 12{,}3 \text{ s} = 103{,}65$ s.

Capítulo 4

Compruebe Lo Aprendido

4.1 (a) Tomando la derivada con respecto al tiempo de la función de posición, tenemos $\vec{\mathbf{v}}(t) = 9{,}0t^2\hat{\mathbf{i}}$ y $\vec{\mathbf{v}}(3{,}0\text{s}) = 81{,}0\hat{\mathbf{i}}$m/s. (b) Como la función de velocidad no es lineal, sospechamos que la velocidad media no es igual a la velocidad instantánea. Lo revisamos y encontramos

$\vec{\mathbf{v}}_{\text{avg}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(4{,}0\text{ s}) - \vec{\mathbf{r}}(2{,}0\text{ s})}{4{,}0\text{ s} - 2{,}0\text{ s}} = \frac{(188\hat{\mathbf{i}} - 20\hat{\mathbf{i}})\text{ m}}{2{,}0\text{ s}} = 84\hat{\mathbf{i}}$m/s,

que es diferente de $\vec{\mathbf{v}}(3{,}0\text{s}) = 81{,}0\hat{\mathbf{i}}$m/s.

4.2 El vector de aceleración es constante y no cambia con el tiempo. Si a, b y c no son cero, entonces la función de velocidad debe ser lineal en el tiempo. Tenemos

$\vec{\mathbf{v}}(t) = \int \vec{\mathbf{a}}dt = \int (a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}})dt = (a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}})t$ m/s, ya que al tomar la derivada de la función de

velocidad se obtiene $\vec{\mathbf{a}}(t)$. Si alguno de los componentes de la aceleración es cero, entonces ese componente de la velocidad sería una constante.

4.3 (a) Elija la parte superior del acantilado donde se lanza la roca como el origen del sistema de coordenadas. Aunque es arbitrario, solemos elegir el tiempo $t = 0$ para que corresponda al origen. (b) La ecuación que describe el movimiento horizontal es $x = x_0 + v_x t$. Con $x_0 = 0$, esta ecuación se convierte en $x = v_x t$. (c) La Ecuación 4.16 a la Ecuación 4.18 y la Ecuación 4.19 describen el movimiento vertical, pero dado que $y_0 = 0$ y $v_{0y} = 0$, estas ecuaciones se simplifican en gran medida para convertirse en $y = \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t = \frac{1}{2}v_y t,\ v_y = -gt,\ y = -\frac{1}{2}gt^2,$ y $v_y^2 = -2gy$. (d) Utilizamos las ecuaciones cinemáticas para encontrar los componentes de la x y de la y de la velocidad en el punto de impacto. Utilizando $v_y^2 = -2gy$ y observando que el punto de impacto es -100,0 m, encontramos que el componente y de la velocidad en el impacto es $v_y = 44{,}3$ m/s. Se nos da el componente x, $v_x = 15{,}0$ m/s, por lo que podemos calcular la velocidad total en el momento del impacto: $v = 46{,}8$ m/s y $\theta = 71{,}3°$ por debajo de la horizontal.

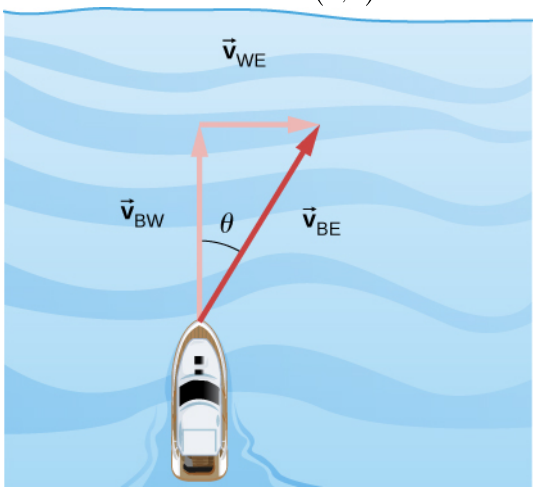
4.4 El tiro de golf a 30°.

4.5 134,0 cm/s

4.6 Al marcar los subíndices de la ecuación vectorial, tenemos B = barco, R = río y E = Tierra. La ecuación vectorial se convierte en $\vec{\mathbf{v}}_{\text{BE}} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{BR}} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{RE}}$. Tenemos una geometría de triángulo rectángulo que se muestra en la figura 04_05_BoatRiv_img. Al resolver $\vec{\mathbf{v}}_{\text{BE}}$, tenemos

$$v_{\text{BE}} = \sqrt{v_{\text{BR}}^2 + v_{\text{RE}}^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 3{,}0^2}$$

$$v_{\text{BE}} = 5{,}4 \text{ m/s},\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}0}{4{,}5}\right) = 33{,}7°.$$



Preguntas Conceptuales

1. línea recta

3. La pendiente debe ser cero porque el vector velocidad es tangente al gráfico de la función posición.

5. No, los movimientos en direcciones perpendiculares son independientes.

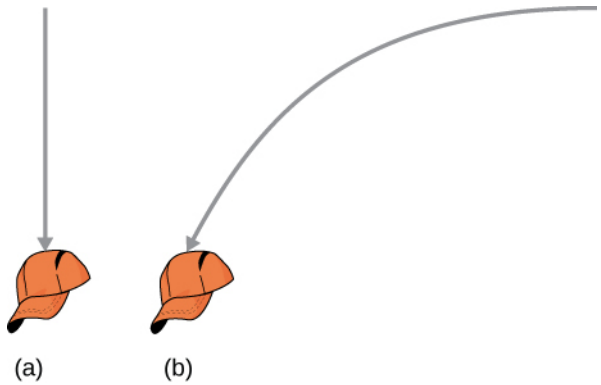
7. a. no; b. mínima en el vértice de la trayectoria y máxima en el lanzamiento y el impacto; c. no, la velocidad es un vector; d. sí, donde cae

9. Ambas caen al suelo al mismo tiempo.

11. sí

13. Si va a pasar el balón a otro jugador, tiene que mantener la vista en el marco de referencia en el que se encuentran los demás jugadores del equipo.

15.



Problemas

17. $\vec{\mathbf{r}} = 1{,}0\hat{\mathbf{i}} - 4{,}0\hat{\mathbf{j}} + 6{,}0\hat{\mathbf{k}}$

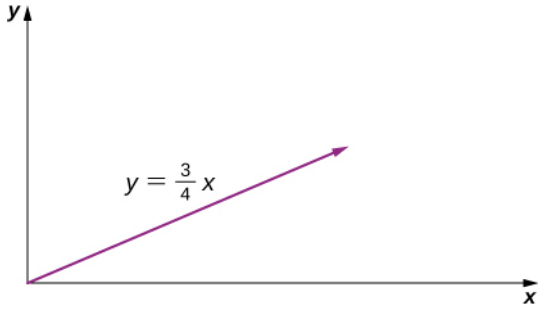
19. $\Delta\vec{\mathbf{r}}_{\text{Total}} = 472{,}0\ \text{m}\hat{\mathbf{i}} + 80{,}3\ \text{m}\hat{\mathbf{j}}$

21. Suma de los desplazamientos $= -6{,}4\ \text{km}\hat{\mathbf{i}} + 9{,}4\ \text{km}\hat{\mathbf{j}}$

23. a. $\vec{\mathbf{v}}(t) = 8{,}0t\hat{\mathbf{i}} + 6{,}0t^2\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{v}}(0) = 0$, $\vec{\mathbf{v}}(1{,}0) = 8{,}0\hat{\mathbf{i}} + 6{,}0\hat{\mathbf{k}}\text{m/s}$,
b. $\vec{\mathbf{v}}_{\text{avg}} = 4{,}0\ \hat{\mathbf{i}} + 2{,}0\hat{\mathbf{k}}\ \text{m/s}$

25. $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 = 20{,}00\ \text{m}\hat{\mathbf{j}}$, $\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 = (2{,}000 \times 10^4\text{m})\,(\cos 30°\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\ 30°\hat{\mathbf{j}})$
$\Delta\vec{\mathbf{r}} = 1{,}700 \times 10^4\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 1{,}002 \times 10^4\text{m}\hat{\mathbf{j}}$

27. a. $\vec{\mathbf{v}}(t) = (4{,}0t\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0t\hat{\mathbf{j}})\text{m/s}$, $\vec{\mathbf{r}}(t) = (2{,}0t^2\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{2}t^2\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$,
b. $x(t) = 2{,}0t^2\text{m}$, $y(t) = \frac{3}{2}t^2\text{m}$, $t^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$



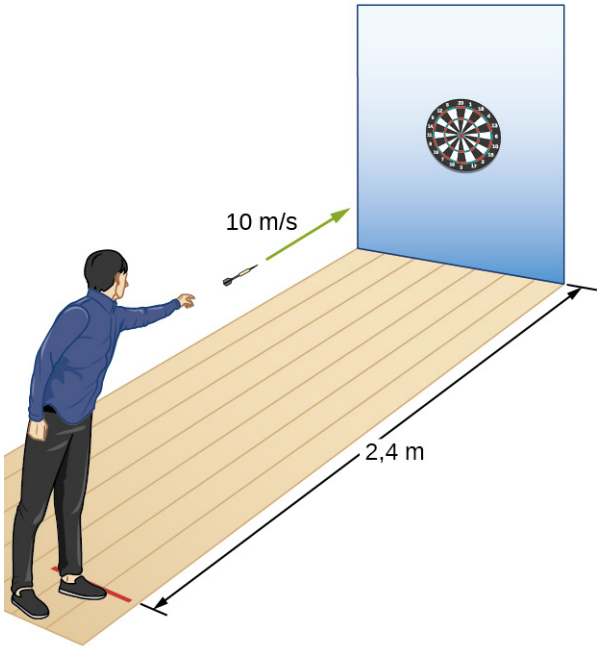
29. a. $\vec{\mathbf{v}}(t) = (6{,}0t\hat{\mathbf{i}} - 21{,}0t^2\hat{\mathbf{j}} + 10{,}0t^{-3}\hat{\mathbf{k}})\text{m/s}$,
b. $\vec{\mathbf{a}}(t) = (6{,}0\hat{\mathbf{i}} - 42{,}0t\hat{\mathbf{j}} - 30t^{-4}\hat{\mathbf{k}})\text{m/s}^2$,
c. $\vec{\mathbf{v}}(2{,}0s) = (12{,}0\hat{\mathbf{i}} - 84{,}0\hat{\mathbf{j}} + 1{,}25\hat{\mathbf{k}})\text{m/s}$,
d. $\vec{\mathbf{v}}(1{,}0\ \text{s}) = 6{,}0\hat{\mathbf{i}} - 21{,}0\hat{\mathbf{j}} + 10{,}0\hat{\mathbf{k}}\text{m/s}$, $\left|\vec{\mathbf{v}}(1{,}0\ \text{s})\right| = 24{,}0\ \text{m/s}$
$\vec{\mathbf{v}}(3{,}0\ \text{s}) = 18{,}0\hat{\mathbf{i}} - 189{,}0\hat{\mathbf{j}} + 0{,}37\hat{\mathbf{k}}\text{m/s}$, $\left|\vec{\mathbf{v}}(3{,}0\ \text{s})\right| = 190\ \text{m/s}$,
e. $\vec{\mathbf{r}}(t) = (3{,}0t^2\hat{\mathbf{i}} - 7{,}0t^3\hat{\mathbf{j}} - 5{,}0t^{-2}\hat{\mathbf{k}})\text{m}$

$\vec{\mathbf{v}}_{\text{avg}} = 9{,}0\hat{\mathbf{i}} - 49{,}0\hat{\mathbf{j}} + 3{,}75\hat{\mathbf{k}}\text{m/s}$

31. a. $\vec{\mathbf{v}}(t) = \text{-sen}(1{,}0t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(1{,}0t)\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, b. $\vec{\mathbf{a}}(t) = \text{-cos}(1{,}0t)\hat{\mathbf{i}} - \text{sen}(1{,}0t)\hat{\mathbf{j}}$

33. a. $t = 0{,}55$ s, b. $x = 110$ m

35. a. $t = 0{,}24\text{s}$, $d = 0{,}28$ m, b. Apuntan alto.



37. a., $t = 12{,}8$ s, $x = 5.619$ m b. $v_y = 125{,}0$ m/s, $v_x = 439{,}0$ m/s, $|\vec{v}| = 456{,}0$ m/s

39. a. $v_y = v_{0y} - gt$, $t = 10$s, $v_y = 0$, $v_{0y} = 98{,}0$ m/s, $v_0 = 196{,}0$ m/s,
b. $h = 490{,}0$ m,
c. $v_{0x} = 169{,}7$ m/s, $x = 3394{,}0$ m,

d. $x = 169{,}7 \text{ m/s}\,(15{,}0 \text{ s}) = 2.550 \text{ m}$
$y = (98{,}0 \text{ m/s})\,(15{,}0 \text{ s}) - 4{,}9(15{,}0\text{s})^2 = 368 \text{ m}$
$\vec{\mathbf{s}} = 2.550 \text{ m}\hat{\mathbf{i}} + 368 \text{ m}\hat{\mathbf{j}}$

41. $-100 \text{ m} = (-2{,}0 \text{ m/s})t - (4{,}9 \text{ m/s}^2)t^2, t = 4{,}3$ s,$x = 86{,}0$ m

43. $R_{Moon} = 48$ m

45. a. $v_{0y} = 24$ m/s$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy \Rightarrow h = 29{,}3$ m,
b. $t = 2{,}4$ s $v_{0x} = 18$ m/s $x = 43{,}2$ m,
c. $y = -100$ m $y_0 = 0$ $y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ $-100 = 24t - 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 7{,}58$ s,
d. $x = 136{,}44$ m,
e. $t = 2{,}0$ s $y = 28{,}4$ m $x = 36$ m
$t = 4{,}0$ s $y = 17{,}6$ m $x = 72$ m
$t = 6{,}0$ s $y = -32{,}4$ m $x = 108$ m

47. $v_{0y} = 12{,}9$ m/s $y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ $-20{,}0 = 12{,}9t - 4{,}9t^2$
$t = 3{,}7$ s $v_{0x} = 15{,}3$ m/s $\Rightarrow x = 56{,}7$ m
Por lo tanto el tiro de la golfista cae a 13,3 m del *green*.

49. a. $R = 60{,}8$ m,
b. $R = 137{,}8$ m

51. a. $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy \Rightarrow y = 2{,}9$ m/s
$y = 3{,}3$ m/s
$y = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(v_0 \operatorname{sen}\theta)^2}{2g} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0{,}91 \Rightarrow \theta = 65{,}5°$

53. $R = 18{,}5$ m

55. $y = (\tan\theta_0)x - \left[\frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}\right]x^2 \Rightarrow v_0 = 16{,}4$ m/s

57. $R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g} \Rightarrow \theta_0 = 15{,}9°$

59. El receptor tarda 1,1 s en recorrer los últimos 10 m de su recorrido.
$T_{\text{tof}} = \frac{2(v_0 \operatorname{sen}\theta)}{g} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0{,}27 \Rightarrow \theta = 15{,}6°$

61. $a_C = 40 \text{ m/s}^2$

63. $a_C = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = r \;\; a_C = 78{,}4, \;\; v = 8{,}85 \text{ m/s}$
$T = 5{,}68$ s, que es 0,176 rev/s = 10,6 rev/min

65. Venus se encuentra a 108,2 millones de km del Sol y tiene un periodo orbital de 0,6152 años (year, y).
$r = 1{,}082 \times 10^{11}$ m $\;\; T = 1{,}94 \times 10^7$ s
$v = 3{,}5 \times 10^4$ m/s, $\;a_C = 1{,}135 \times 10^{-2}$ m/s^2

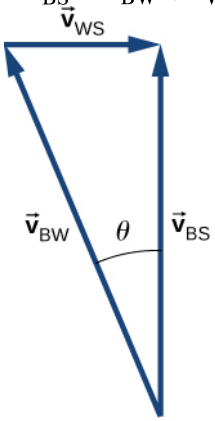
67. 360 rev/min = 6 rev/s
$v = 3{,}8$ m/s $a_C = 144.$ m/s^2

69. a. $O'(t) = (4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 5{,}0\hat{\mathbf{k}})t$ m,
b. $\vec{\mathbf{r}}_{PS} = \vec{\mathbf{r}}_{PS'} + \vec{\mathbf{r}}_{S'S}, \quad \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}'(t) + (4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 5{,}0\hat{\mathbf{k}})t$ m,
c. $\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{v}}'(t) + (4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 3{,}0\hat{\mathbf{j}} + 5{,}0\hat{\mathbf{k}})$ m/s, d. Las aceleraciones son las mismas.

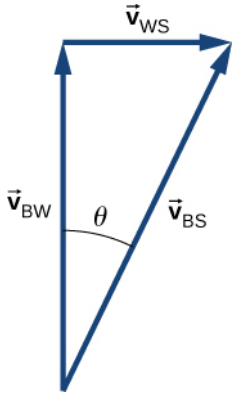
71. $\vec{\mathbf{v}}_{PC} = (2{,}0\hat{\mathbf{i}} + 5{,}0\hat{\mathbf{j}} + 4{,}0\hat{\mathbf{k}})$m/s

73. a. A = aire, S = gaviota, G = suelo
$\vec{\mathbf{v}}_{SA} = 9{,}0$ m/s velocidad de la gaviota con respecto al aire en calma
$\vec{\mathbf{v}}_{AG} = ? \;\; \vec{\mathbf{v}}_{SG} = 5$ m/s $\vec{\mathbf{v}}_{SG} = \vec{\mathbf{v}}_{SA} + \vec{\mathbf{v}}_{AG} \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_{AG} = \vec{\mathbf{v}}_{SG} - \vec{\mathbf{v}}_{SA}$
$\vec{\mathbf{v}}_{AG} = -4{,}0$ m/s
b. $\vec{\mathbf{v}}_{SG} = \vec{\mathbf{v}}_{SA} + \vec{\mathbf{v}}_{AG} \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_{SG} = -13{,}0$ m/s
$\frac{-6000 \text{ m}}{-13{,}0 \text{ m/s}} = 7$ min 42 s

75. Tome la dirección positiva como la misma dirección en la que fluye el río, es decir, el este. S = orilla/tierra, W = agua y B = bote.
a $\vec{\mathbf{v}}_{BS} = 11$ km/h
$t = 8{,}2$ min
b. $\vec{\mathbf{v}}_{BS} = -5$ km/h
$t = 18$ min
c. $\vec{\mathbf{v}}_{BS} = \vec{\mathbf{v}}_{BW} + \vec{\mathbf{v}}_{WS}$ $\theta = 22°$ al oeste del norte

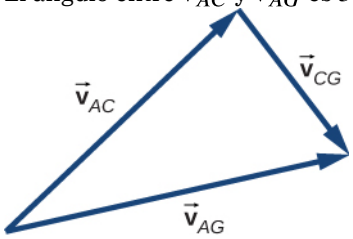


d. $\left|\vec{\mathbf{v}}_{BS}\right| = 7{,}4$ km/h $t = 6{,}5$ min
e. $\vec{\mathbf{v}}_{BS} = 8{,}54$ km/h, pero solo se utiliza el componente de la velocidad en línea recta para obtener el tiempo



$t = 6{,}0$ min
Aguas abajo = 0,3 km

77. $\vec{\mathbf{v}}_{AG} = \vec{\mathbf{v}}_{AC} + \vec{\mathbf{v}}_{CG}$
$|\vec{\mathbf{v}}_{AC}| = 25$ km/h $|\vec{\mathbf{v}}_{CG}| = 15$ km/h $|\vec{\mathbf{v}}_{AG}| = 29{,}15$ km/h $\vec{\mathbf{v}}_{AG} = \vec{\mathbf{v}}_{AC} + \vec{\mathbf{v}}_{CG}$
El ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}_{AC}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{AG}$ es 31°, por lo que la dirección del viento es 14° al norte del este.



Problemas Adicionales

79. $a_C = 39{,}6$ m/s^2
81. 90,0 km/h = 25,0 m/s, 9,0 km/h = 2,5 m/s, 60,0 km/h = 16,7 m/s
$a_T = -2{,}5$ m/s^2, $a_C = 1{,}86$ m/s^2, $a = 3{,}1$ m/s^2
83. El radio del círculo de revolución en la latitud λ es $R_E \cos\lambda$. La velocidad del cuerpo es $\frac{2\pi r}{T}$. $a_C = \frac{4\pi^2 R_E \cos\lambda}{T^2}$ para $\lambda = 40°$, $a_C = 0{,}26\%\, g$
85. $a_T = 3{,}00$ m/s^2
$v(5\text{ s}) = 15{,}00$ m/s $a_C = 150{,}00$ m/s^2 $\theta = 88{,}8°$ con respecto a la tangente al círculo de revolución dirigida hacia el interior. $|\vec{\mathbf{a}}| = 150{,}03$ m/s^2
87. $\vec{\mathbf{a}}(t) = -A\omega^2 \cos\omega t\hat{\mathbf{i}} - A\omega^2 \operatorname{sen}\omega t\hat{\mathbf{j}}$
$a_C = 5{,}0\ \text{m}\omega^2$ $\omega = 0{,}89$ rad/s
$\vec{\mathbf{v}}(t) = -2{,}24$ m/s $\hat{\mathbf{i}} - 3{,}87$ m/s$\hat{\mathbf{j}}$
89. $\vec{\mathbf{r}}_1 = 1{,}5\hat{\mathbf{j}} + 4{,}0\hat{\mathbf{k}}$ $\vec{\mathbf{r}}_2 = \Delta\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{r}}_1 = 2{,}5\hat{\mathbf{i}} + 4{,}7\hat{\mathbf{j}} + 2{,}8\hat{\mathbf{k}}$
91. $v_x(t) = 265{,}0$ m/s
$v_y(t) = 20{,}0$ m/s
$\vec{\mathbf{v}}(5{,}0\text{ s}) = (265{,}0\hat{\mathbf{i}} + 20{,}0\hat{\mathbf{j}})$m/s
93. $R = 1{,}07$ m
95. $v_0 = 20{,}1$ m/s
97. $v = 3072{,}5$ m/s
$a_C = 0{,}223$ m/s^2

Problemas De Desafío

99. a. $-400{,}0\text{ m} = v_{0y}t - 4{,}9t^2$ $359{,}0\text{ m} = v_{0x}t$ $t = \frac{359{,}0}{v_{0x}}$ $-400{,}0 = 359{,}0\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - 4{,}9(\frac{359{,}0}{v_{0x}})^2$

$-400{,}0 = 359{,}0 \tan 40 - \frac{631516{,}9}{v_{0x}^2} \Rightarrow v_{0x}^2 = 900{,}6 \;\; v_{0x} = 30{,}0 \text{ m/s} \;\; v_{0y} = v_{0x} \tan 40 = 25{,}2 \text{ m/s}$

$v = 39{,}2$ m/s, b. $t = 12{,}0$ s

101. a. $\vec{\mathbf{r}}_{TC} = (-32 + 80t)\hat{\mathbf{i}} + 50t\hat{\mathbf{j}}, \;\; \left|\vec{\mathbf{r}}_{TC}\right|^2 = (-32 + 80t)^2 + (50t)^2$

$2r\frac{dr}{dt} = 2(-32 + 80t)(80) + 5.000t \;\; \frac{dr}{dt} = \frac{160(-32+80t)+5.000t}{2r} = 0$

$17800t = 5.184 \Rightarrow t = 0{,}29$ hr,

b. $\left|\vec{\mathbf{r}}_{TC}\right| = 17$ km

Capítulo 5

Compruebe Lo Aprendido

5.1 14 N, 56° que se miden desde el eje de la x positiva

5.2 a. Su peso actúa hacia abajo, y la fuerza de resistencia del aire con el paracaídas actúa hacia arriba. b. ninguna; las fuerzas son de igual magnitud.

5.3 0,1 m/s^2

5.4 40 m/s^2

5.5 a. $159{,}0\hat{\mathbf{i}} + 770{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N; b. $0{,}1590\hat{\mathbf{i}} + 0{,}7700\hat{\mathbf{j}}$ N

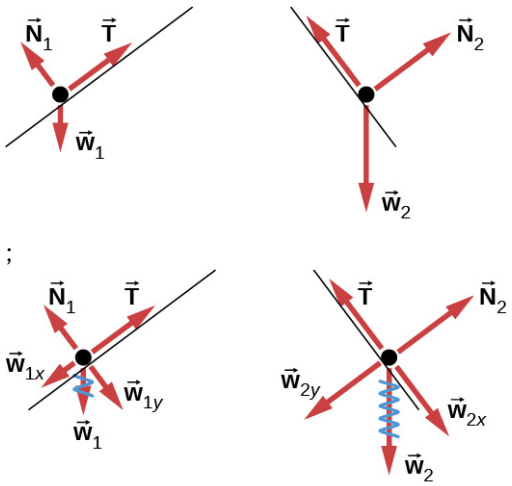
5.6 $a = 2{,}78$ m/s^2

5.7 a. 3,0 m/s^2; b. 18 N

5.8 a. 1,7 m/s^2; b. 1,3 m/s^2

5.9 $6{,}0 \times 10^2$ N

5.10



Preguntas Conceptuales

1. Las fuerzas son direccionales y tienen magnitud.

3. La velocidad de la magdalena antes de la acción de frenado era la misma que la del auto. Por lo tanto, las magdalenas eran cuerpos en movimiento sin restricciones, y cuando el auto se detuvo de repente, las magdalenas siguieron avanzando según la primera ley de Newton.

5. No. Si la fuerza fuera cero en este punto, entonces no habría nada que cambiara la velocidad cero momentánea del objeto. Dado que no observamos el objeto colgando inmóvil en el aire, la fuerza no podría ser cero.

7. La astronauta es realmente ingrávida en el lugar descrito, porque no hay ningún cuerpo grande (planeta o estrella) cerca que ejerza una fuerza gravitatoria. Su masa es de 70 kg independientemente del lugar donde se encuentre.

9. La fuerza que ejerce (una fuerza de contacto de igual magnitud que su peso) es pequeña. La Tierra es extremadamente masiva en comparación. Así, la aceleración de la Tierra sería increíblemente pequeña. Para ver esto, utilice la segunda ley de Newton para calcular la aceleración que causaría si su peso es de

600,0 N y la masa de la Tierra es $6{,}00 \times 10^{24}$ kg.

11. a. acción: la Tierra ejerce una fuerza gravitatoria sobre la Luna, reacción: la Luna ejerce una fuerza gravitatoria sobre la Tierra; b. acción: el pie aplica fuerza al balón, reacción: el balón aplica fuerza al pie; c. acción: el cohete empuja sobre el gas, reacción: el gas empuja de vuelta al cohete; d. acción: los neumáticos del auto empujan hacia atrás sobre la carretera, reacción: la carretera empuja hacia delante sobre los neumáticos; e. acción: el saltador empuja hacia abajo sobre el suelo, reacción: el suelo empuja hacia arriba sobre el saltador; f. acción: la pistola empuja hacia delante sobre la bala, reacción: la bala empuja hacia atrás sobre la pistola.

13. a. El rifle (el casquillo apoyado en el rifle) ejerce una fuerza para expulsar la bala; la reacción a esta fuerza es la fuerza que la bala ejerce sobre el rifle (casquillo) en sentido contrario. b. En un rifle sin retroceso, el casquillo no está asegurado en el rifle; por lo tanto, a medida que la bala se empuja para avanzar, el casquillo se empuja para ser expulsado desde el extremo opuesto del cañón. c. No es seguro estar detrás de un rifle sin retroceso.

15. a. Sí, la fuerza puede actuar hacia la izquierda; la partícula experimentaría una desaceleración y perdería rapidez. B. Sí, la fuerza puede estar actuando hacia abajo porque su peso actúa hacia abajo incluso cuando se mueve hacia la derecha.

17. dos fuerzas de distinto tipo: el peso que actúa hacia abajo y la fuerza normal que actúa hacia arriba

Problemas

19. a. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = 5{,}0\hat{\mathbf{i}} + 10{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N; b. la magnitud es $F_{\text{neta}} = 11$ N, y la dirección es $\theta = 63°$

21. a. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = 660{,}0\hat{\mathbf{i}} + 150{,}0\hat{\mathbf{j}}$ N; b. $F_{\text{neta}} = 676{,}6$ N a $\theta = 12{,}8°$ de la cuerda de David

23. a. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = 95{,}0\hat{\mathbf{i}} + 283\hat{\mathbf{j}}$N; b. 299 N a 71° al norte del este; c $\vec{\mathbf{F}}_{\text{DS}} = -\left(95{,}0\hat{\mathbf{i}} + 283\hat{\mathbf{j}}\right)$ N

25. Corriendo desde el reposo, la velocista alcanza una velocidad de $v = 12{,}96$ m/s, al final de la aceleración. Encontramos el tiempo de aceleración con $x = 20{,}00\text{ m} = 0 + 0{,}5at_1{}^2$, o $t_1 = 3{,}086$ s. Para mantener la velocidad, $x_2 = vt_2$, o $t_2 = x_2/v = 80{,}00\text{ m}/12{,}96\text{ m/s} = 6{,}173$ s. Tiempo total = 9,259 s.

27. a. $m = 56{,}0$ kg; b. $a_{\text{medida}} = a_{\text{astro}} + a_{\text{nave}}$, donde $a_{\text{nave}} = \frac{m_{\text{astro}}a_{\text{astro}}}{m_{\text{nave}}}$; c. Si otra fuente (distinta de la nave espacial) pudiera ejercer la fuerza en la astronauta, entonces la nave espacial no experimentaría un retroceso.

29. $F_{\text{neta}} = 4{,}12 \times 10^5$ N

31. $a = 253\text{ m/s}^2$

33. $F_{\text{neta}} = F - f = ma \Rightarrow F = 1{,}26 \times 10^3$ N

35.
$$v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow a = -7{,}80\text{ m/s}^2$$
$$F_{\text{neta}} = -7{,}80 \times 10^3\text{ N}$$

37. a. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = m\vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} = 9{,}0\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}^2$; b. La aceleración tiene una magnitud $9{,}0\text{ m/s}^2$, así que $x = 110$ m.

39. $1{,}6\hat{\mathbf{i}} - 0{,}8\hat{\mathbf{j}}\text{ m/s}^2$

$w_{\text{Luna}} = mg_{\text{Luna}}$

41. a. $m = 150\text{ kg}$; b. La masa no cambia, por lo que la masa del astronauta con su traje tanto en la Tierra como en la Luna es 150 kg.

$w_{\text{Tierra}} = 1{,}5 \times 10^3$ N y

$F_{\text{h}} = 3{,}68 \times 10^3$ N

43. a. $w = 7{,}35 \times 10^2$ N ;

$\frac{F_{\text{h}}}{w} = 5{,}00$ veces mayor que el peso

b. $F_{\text{neta}} = 3.750$ N

$\theta = 11{,}3°$ desde la horizontal

$w = 19{,}6$ N

45. $F_{\text{neta}} = 5{,}40$ N

$F_{\text{neta}} = ma \Rightarrow a = 2{,}70\text{ m/s}^2$

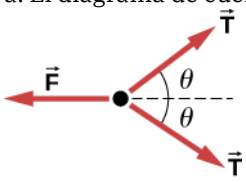
47. 98 N

49. 497 N

51. a. $F_{\text{neta}} = 2{,}64 \times 10^7$ N; b. La fuerza ejercida sobre el barco también es $2{,}64 \times 10^7$ N porque es opuesta a la dirección de movimiento del casquillo.

53. Como el peso del libro de historia es la fuerza que ejerce la Tierra sobre el libro de historia, lo representamos como $\vec{\mathbf{F}}_{\text{EH}} = -14\hat{\mathbf{j}}$ N. Por lo demás, el libro de historia interactúa solamente con el libro de física. Dado que la aceleración del libro de historia es cero, la fuerza neta sobre este es cero por la segunda ley de Newton: $\vec{\mathbf{F}}_{\text{PH}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{EH}} = \vec{\mathbf{0}}$, donde $\vec{\mathbf{F}}_{\text{PH}}$ es la fuerza que ejerce el libro de física sobre el libro de historia. Por lo tanto, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{PH}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\text{EH}} = -\left(-14\hat{\mathbf{j}}\right)$ N $= 14\hat{\mathbf{j}}$ N. Encontramos que el libro de física ejerce una fuerza ascendente de magnitud 14 N sobre el libro de historia. Tres fuerzas se ejercen sobre el libro de física: $\vec{\mathbf{F}}_{\text{EP}}$ debido a la Tierra, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{HP}}$ debido al libro de historia, y $\vec{\mathbf{F}}_{\text{DP}}$ debido al escritorio. Dado que el libro de física pesa 18 N, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{EP}} = -18\hat{\mathbf{j}}$ N. Por la tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{HP}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\text{PH}}$, así que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{HP}} = -14\hat{\mathbf{j}}$ N. La segunda ley de Newton aplicada al libro de física da $\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$, o $\vec{\mathbf{F}}_{\text{DP}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{EP}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{HP}} = \vec{\mathbf{0}}$, así que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{DP}} = -\left(-18\hat{\mathbf{j}}\right) - \left(-14\hat{\mathbf{j}}\right) = 32\hat{\mathbf{j}}$ N. El escritorio ejerce una fuerza ascendente de 32 N sobre el libro de física. Para llegar a esta solución, aplicamos la segunda ley de Newton dos veces y la tercera ley de Newton una vez.

55. a. El diagrama de cuerpo libre de la polea 4:



b. $T = mg, \quad F = 2T\cos\theta = 2mg\cos\theta$

57. a. 1,95 m/s^2

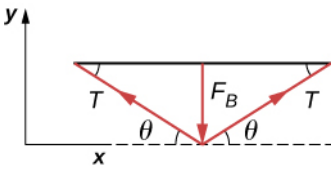
b. 1.960 N

59. a. $T = 1{,}96 \times 10^{-4}$ N;

b. $T' = 4{,}71 \times 10^{-4}$ N

$\frac{T'}{T} = 2{,}40$ por la tensión en el hilo vertical

61.



$F_{y\,\text{neta}} = F_\perp - 2T\,\text{sen}\,\theta = 0$

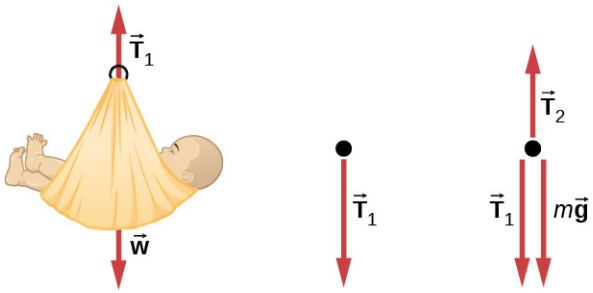
$F_\perp = 2T\text{sen}\,\theta$

$T = \frac{F_\perp}{2\,\text{sen}\,\theta}$

63. a. vea el Ejemplo 5.13; b. 1,5 N; c. 15 N

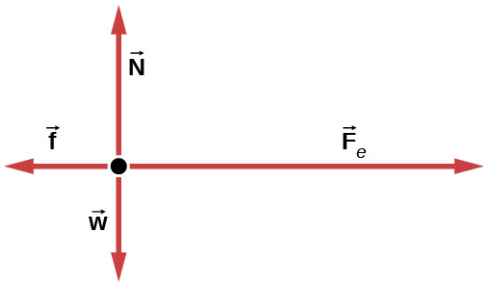
65. a. 5,6 kg; b. 55 N; c $T_2 = 60$ N;

d.

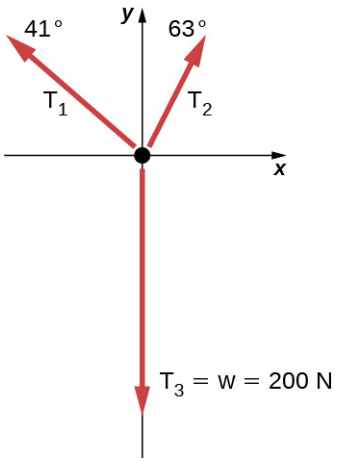


67. a. 4,9 m/s^2, 17 N; b. 9,8 N

69.



71.



Problemas Adicionales

73. 5,90 kg

75.



77. a. $F_{\text{neta}} = \frac{m(v^2 - {v_0}^2)}{2x}$; b. 2590 N

79. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 = (6{,}02\hat{\mathbf{i}} + 14{,}0\hat{\mathbf{j}})\text{N}$

$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = m\vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}}}{m} = \frac{6{,}02\hat{\mathbf{i}}+14{,}0\hat{\mathbf{j}}\text{N}}{10{,}0\text{kg}} = (0{,}602\hat{\mathbf{i}} + 1{,}40\hat{\mathbf{j}})\text{m/s}^2$

$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = \vec{\mathbf{F}}_A + \vec{\mathbf{F}}_B$

81. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = A\hat{\mathbf{i}} + \left(-1{,}41A\hat{\mathbf{i}} - 1{,}41A\hat{\mathbf{j}}\right)$

$\vec{\mathbf{F}}_{\text{neta}} = A\left(-0{,}41\hat{\mathbf{i}} - 1{,}41\hat{\mathbf{j}}\right)$

$\theta = 254°$

(Sumamos 180°, porque el ángulo está en el cuadrante IV).

83. $F = 2mk^2x^2$; En primer lugar, tome la derivada de la función de velocidad para obtener $a = 2kxv = 2kx\left(kx^2\right) = 2k^2x^3$. Luego aplique la segunda ley de Newton $F = ma = 2mk^2x^2$.

85. a. Para la caja A, $N_A = mg$ y $N_B = mg\cos\theta$; b. $N_A > N_B$ dado que para $\theta < 90°$, $\cos\theta < 1$; c. $N_A > N_B$ cuando $\theta = 10°$

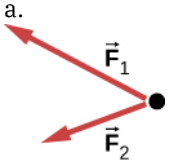
87. a. 8,66 N; b. 0,433 m

89. 0,40 o 40 %

91. 16 N

Problemas De Desafío

93. a.



; b. No; $\vec{\mathbf{F}}_R$ no se muestra, porque sustituiría a $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ (si queremos mostrarla, podríamos dibujarla y luego colocar líneas onduladas en $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ para demostrar que ya no se tienen en cuenta).

95. a. 14,1 m/s; b. 601 N

97. $\frac{F}{m}t^2$

99. 936 N

101. $\vec{\mathbf{a}} = -248\hat{\mathbf{i}} - 433\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}^2$

103. $0{,}548\ \text{m/s}^2$

105. a. $T_1 = \frac{2mg}{\text{sen}\,\theta}$, $T_2 = \frac{mg}{\text{sen}\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)\right)}$, $T_3 = \frac{2mg}{\tan\theta}$; b. $\phi = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)$; c. 2,56°; (d)

$x = d\left(2\cos\theta + 2\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)\right) + 1\right)$

107. a. $\vec{\mathbf{a}} = \left(\frac{5{,}00}{m}\hat{\mathbf{i}} + \frac{3{,}00}{m}\hat{\mathbf{j}}\right)\ \text{m/s}^2$; b. 1,38 kg; c. 21,2 m/s; d. $\vec{\mathbf{v}} = \left(18{,}1\hat{\mathbf{i}} + 10{,}9\hat{\mathbf{j}}\right)\ \text{m/s}^2$

109. a. $0{,}900\hat{\mathbf{i}} + 0{,}600\hat{\mathbf{j}}$ N; b. 1,08 N

Capítulo 6

Compruebe Lo Aprendido

6.1 $F_s = 645$ N

6.2 $a = 3{,}68\ \text{m/s}^2$, $T = 18{,}4$ N

6.3 $T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$ (Esto se encuentra al sustituir la ecuación de la aceleración en la Figura 6.7(a), en la ecuación de la tensión en la Figura 6.7(b)

6.4 1,49 s

6.5 49,4 grados
6.6 128 m; no
6.7 a. 4,9 N; b. 0,98 m/s^2
6.8 -0,23 m/s^2; el signo negativo indica que la surfista sobre nieve desacelera.
6.9 0,40
6.10 34 m/s
6.11 0,27 kg/m

Preguntas Conceptuales

1. La báscula está en caída libre junto con los astronautas, por lo que la lectura de la báscula sería 0. No hay diferencia en la ingravidez aparente; en el avión y en órbita, se produce la caída libre.
3. Si no se suelta el pedal de freno, las ruedas del auto se bloquearán para no rodar; ahora interviene la fricción por deslizamiento y el cambio brusco (debido a la mayor fuerza de fricción estática) provoca la sacudida.
5. 5,00 N
7. La fuerza centrípeta se define como cualquier fuerza neta que provoca un movimiento circular uniforme. La fuerza centrípeta no es un nuevo tipo de fuerza. La etiqueta "centrípeta" se refiere a *cualquier* fuerza que mantiene algo girando en un círculo. Esa fuerza puede ser la tensión, la gravedad, la fricción, la atracción eléctrica, la fuerza normal o cualquier otra fuerza. Cualquier combinación de ellas podría ser la fuente de la fuerza centrípeta; por ejemplo, la fuerza centrípeta en la parte superior de la trayectoria de un balón atado a un poste (*tether ball*) que se balancea a través de un círculo vertical es el resultado tanto de la tensión como de la gravedad.
9. El conductor que corta la curva (en la Trayectoria 2) tiene una curva más gradual, con un radio mayor. Esa será la mejor línea de carrera. Si el conductor va demasiado rápido en una curva por una línea de carrera, seguirá deslizándose fuera de la pista; la clave es mantenerse en el valor máximo de fricción estática. Por lo tanto, el conductor quiere la máxima rapidez posible y la máxima fricción. Considere la ecuación de la fuerza centrípeta: $F_c = m\frac{v^2}{r}$ donde v es la rapidez y r es el radio de curvatura. Por lo tanto, al disminuir la curvatura ($1/r$) de la trayectoria que sigue el auto, reducimos la cantidad de fuerza que los neumáticos tienen que ejercer sobre la carretera, lo que significa que ahora podemos aumentar la rapidez, v. Desde el punto de vista del conductor en la Trayectoria 1, podemos razonar de la siguiente manera: cuanto más pronunciado sea el giro, menor será el radio de giro; cuanto menor sea el radio de giro, mayor será la fuerza centrípeta necesaria. Si no se ejerce esta fuerza centrípeta, el resultado es un derrape.
11. El tambor de la secadora ejerce una fuerza centrípeta sobre la ropa (incluidas las gotas de agua) para mantenerla en movimiento en una trayectoria circular. Cuando una gota de agua llegue a uno de los agujeros del tambor, se moverá en una trayectoria tangente al círculo.
13. Si no hay fricción, entonces no hay fuerza centrípeta. Esto significa que la fiambrera se moverá a lo largo de una trayectoria tangente al círculo, y por lo tanto sigue la trayectoria *B*. El rastro de polvo será recto. Esto es el resultado de la primera ley del movimiento de Newton.
15. Debe haber una fuerza centrípeta para mantener el movimiento circular; esto lo proporciona el clavo en el centro. La tercera ley de Newton explica el fenómeno. La fuerza de acción es la fuerza de la cuerda sobre la masa; la fuerza de reacción es la fuerza de la masa sobre la cuerda. Esta fuerza de reacción hace que la cuerda se estire.
17. Como la fricción radial con los neumáticos suministra la fuerza centrípeta, y la fricción es casi 0 cuando el auto se encuentra con el hielo, el auto obedecerá la primera ley de Newton y se saldrá de la carretera en una trayectoria en línea recta, tangente a la curva. Un error común es que el auto seguirá una trayectoria curva fuera de la carretera.
19. Anna tiene razón. El satélite cae libremente hacia la Tierra debido a la gravedad, aunque la gravedad es más débil a la altura del satélite, y g no es 9,80 m/s^2. La caída libre no depende del valor de g; es decir, se podría experimentar la caída libre en Marte si se saltara desde el monte Olimpo (el volcán más alto del sistema solar).
21. Entre los pros de usar trajes de cuerpo entero se encuentran: (1) el traje de cuerpo entero reduce la fuerza de arrastre sobre el nadador y el deportista puede moverse con más facilidad; (2) la estrechez del traje de

cuerpo entero reduce el área del deportista, y aunque sea una cantidad pequeña, puede marcar la diferencia en el tiempo de rendimiento. Los contras de usar trajes de cuerpo entero son: (1) la estrechez de los trajes puede provocar calambres y problemas respiratorios. (2) Se retendrá el calor y, por ende, el atleta podría sobrecalentarse durante mucho tiempo de uso.

23. El aceite es menos denso que el agua, por lo que sube a la superficie cuando cae una lluvia ligera y se acumula en la carretera. Esto crea una situación peligrosa en la que la fricción disminuye considerablemente, por lo que el auto puede perder el control. En caso de lluvia intensa, el aceite se dispersa y no afecta tanto al movimiento de los autos.

Problemas

25. a. 170 N; b. 170 N

27. $\vec{\mathbf{F}}_3 = (-7\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})$ N

29. 376 N que apunten hacia arriba (a lo largo de la línea discontinua en la figura); la fuerza se utiliza para levantar el talón del pie.

31. -68,5 N

33. a. 7,70 m/s^2; b. 4,33 s

35. a. 46,4 m/s; b $2{,}40 \times 10^3$ m/s^2; c. $5{,}99 \times 10^3$ N; razón de 245

37. a. $1{,}87 \times 10^4$ N; b. $1{,}67 \times 10^4$ N; c. $1{,}56 \times 10^4$ N; d. 19,4 m, 0 m/s

39. a. 10 kg; b. 140 N; c. 98 N; d. 0

41. a. 3,35 m/s^2; b. 4,2 s

43. a. 2,0 m/s^2; b. 7,8 N; c. 2,0 m/s

45. a. 4,43 m/s^2 (la masa 1 acelera por la rampa mientras la masa 2 cae con la misma aceleración); b. 21,5 N

47. a. 10,0 N; b. 97,0 N

49. a. 4,9 m/s^2; b. El armario no se deslizará. c. El armario se deslizará.

51. a. 32,3 N, 35,2°; b. 0; c. 0,301 m/s^2 en dirección a $\vec{\mathbf{F}}_{\text{tot}}$

$$\text{neta } F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

53.
$$\text{neta } F_x = ma$$
$$a = g(\text{sen}\,\theta - \mu_k \cos\theta)$$

55. a. 0,737 m/s^2; b. 5,71°

57. a. 10,8 m/s^2; b. 7,85 m/s^2; c. 2,00 m/s^2

59. a. 9,09 m/s^2; b. 6,16 m/s^2; c. 0,294 m/s^2

61. a. 272 N, 512 N; b. 0,268

63. a. 46,5 N; b. 0,629 m/s^2

65. a. 483 N; b. 17,4 N; c. 2,24, 0,0807

67. 4,14°

69. a. 24,6 m; b 36,6 m/s^2; c. 3,73 por g

71. a. 16,2 m/s; b. 0,234

73. a. 179 N; b. 290 N; c. 8,3 m/s

75. 20,7 m/s

77. 21 m/s

79. 115 m/s o 414 km/h

81. $v_T = 11{,}8$ m/s;$v_2 = 9{,}9$ m/s

83. $\left(\frac{110}{65}\right)^2 = 2{,}86$ veces

85. La ley de Stokes es $F_s = 6\pi r\eta v$. Al resolver la viscosidad, $\eta = \frac{F_s}{6\pi r v}$. Considerando solo las unidades, esto se convierte en $[\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$.

87. 0,76 kg/m · s

89. a. 0,049 kg/s; b. 0,57 m

Problemas Adicionales

91. a. 1.860 N, 2,53; b. El valor (1.860 N) es más fuerza de la que se espera experimentar en un elevador. La

fuerza de 1.860 N es de 418 libras, comparada con la fuerza en un elevador típico de 904 N (que son unas 203 libras); esto se calcula para una velocidad de 0 a 10 millas por hora, que son unos 4,5 m/s, en 2,00 s). c. La aceleración $a = 1{,}53 \times g$ es mucho más alta que cualquier elevador estándar. ¡La rapidez final es demasiado grande (30,0 m/s es MUY rápido)! El tiempo de 2,00 s no es poco razonable para un elevador.

93. 199 N
95. 15 N
97. 12 N
99. $a_x = 0{,}40\ \text{m/s}^2$ y $T = 11{,}2 \times 10^3$ N
101. $m(6pt + 2q)$
103. $\vec{\mathbf{v}}(t) = \left(\frac{pt}{m} + \frac{nt^2}{2m}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{qt^2}{2m}\right)\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{pt^2}{2m} + \frac{nt^3}{6m}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{qt^3}{6m}\right)\hat{\mathbf{j}}$
105. 9,2 m/s
107. 1,3 s
109. $3{,}5\ \text{m/s}^2$
111. a. 0,75; b. 1.200 N; c $1{,}2\ \text{m/s}^2$ y 1080 N; d. $-1{,}2\ \text{m/s}^2$; e. 120 N
113. 0,789
115. a. 0,186 N; b. 0,774 N; c. 0,48 N
117. 13 m/s
119. 0,21
121. a. 28.300 N; b. 2540 m
123. 25 N
125. $a = \frac{F}{4} - \mu_k g$
127. 11 m

Problemas De Desafío

129. $v = \sqrt{{v_0}^2 - 2gr_0\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}$
131. 78,7 m
133. a. 98 m/s; b. 490 m; c. 107 m/s; d. 9,6 s
135. a. $v = 20{,}0(1 - e^{-0{,}01t})$; b. $v_{\text{límite}} = 20$ m/s

Capítulo 7

Compruebe Lo Aprendido

7.1 No, solo su magnitud puede ser constante; su dirección debe cambiar, para ser siempre opuesta al desplazamiento relativo a lo largo de la superficie.
7.2 No, solo es aproximadamente constante cerca de la superficie de la Tierra.
7.3 $W = 35$ J
7.4 a. La fuerza del resorte es de sentido contrario a una compresión (como lo es para una extensión), por lo que el trabajo que realiza es negativo. b. El trabajo realizado depende del cuadrado del desplazamiento, que es el mismo para $x = \pm 6$ cm, por lo que la magnitud es de 0,54 J.
7.5 a. el auto; b. el camión
7.6 contra
7.7 $\sqrt{3}$ m/s
7.8 980 W

Preguntas Conceptuales

1. Cuando se empuja la pared, esto "se siente" como trabajo; sin embargo, no hay desplazamiento, por lo que no hay trabajo físico. Se consume energía, pero no se transfiere.
3. Si sigue empujando una pared sin atravesarla, sigue ejerciendo una fuerza sin desplazamiento, por lo que no se realiza ningún trabajo.

5. El desplazamiento total de la pelota es cero, por lo que no se realiza ningún trabajo.
7. Ambas requieren el mismo trabajo gravitatorio, pero las escaleras permiten a Tarzán realizar este trabajo durante un tiempo más prolongado y, por ende, ejercer gradualmente su energía, en lugar de hacerlo de forma drástica subiendo a una liana.
9. La primera partícula tiene una energía cinética de $4(\frac{1}{2}mv^2)$ mientras que la segunda partícula tiene una energía cinética de $2(\frac{1}{2}mv^2)$, por lo que la primera partícula tiene el doble de energía cinética que la segunda.
11. El cortacésped ganaría energía si $-90° < \theta < 90°$. Perdería energía si $90° < \theta < 270°$. El cortacésped también puede perder energía debido a la fricción con la hierba mientras se empuja; sin embargo, no nos preocupa esa pérdida de energía para este problema.
13. La segunda canica tiene el doble de energía cinética que la primera porque la energía cinética es directamente proporcional a la masa, como el trabajo realizado por la gravedad.
15. A menos que el ambiente sea casi sin fricción, está haciendo algún trabajo positivo en el entorno para cancelar el trabajo de fricción contra usted, lo que resulta en un trabajo total cero, que produce una velocidad constante.
17. Los aparatos se clasifican en función de la energía consumida en un intervalo de tiempo relativamente pequeño. No importa el tiempo que el aparato esté encendido, sino la tasa de cambio de energía por unidad de tiempo.
19. La chispa se produce en un lapso relativamente corto, por lo que proporciona una cantidad muy baja de energía a su cuerpo.
21. Si la fuerza es antiparalela o apunta en dirección opuesta a la velocidad, la potencia gastada puede ser negativa.

Problemas

23. 3,00 J
25. a. 593 kJ; b. -589 kJ; c. 0 J
27. 3,14 kJ
29. a. -700 J; b. 0 J; c. 700 J; d. 38,6 N; e. 0 J
31. 100 J
33. a. 2,45 J; b. - 2,45 J; c. 0 J
35. a. 2,22 kJ; b. -2,22 kJ; c. 0 J
37. 18,6 kJ
39. a. 2,32 kN; b. 22,0 kJ
41. 835 N
43. 257 J
45. a. 1,47 m/s; b. las respuestas pueden variar
47. a. 772 kJ; b. 4,0 kJ; c. $1{,}8 \times 10^{-16}$ J
49. a. 2,6 kJ; b. 640 J
51. 2,72 kN
53. 102 N
55. 2,8 m/s
57. $W(\text{bala}) = 20 \times W(\text{caja})$
59. 12,8 kN
61. 0,25
63. a. 24 m/s, -4,8 m/s^2; b. 29,4 m
65. 310 m/s
67. a. 40; b. 8 millones
69. $149
71. a. 208 W; b. 141 s
73. a. 3,20 s; b. 4,04 s
75. a. 224 s; b. 24,8 MW; c. 49,7 kN
77. a. 1,57 kW; b. 6,28 kW

79. 6,83μW
81. a. 8,51 J; b. 8,51 W
83. 1,7 kW

Problemas Adicionales

85. 15 N · m
87. 39 N · m
89. a. 208 N · m; b. 240 N · m
91. a. -0,9 N · m; b. −0,83 N · m
93. a. 10. J; b. 10. J; c. 380 N/m
95. 160 J/s
97. a. 10 N; b. 20 W

Problemas De Desafío

99. Si la caja sube: a. 3,46 kJ; b. -1,89 kJ; c. -1,57 kJ; d. 0; Si la caja baja: a. -0,39 kJ; b. -1,18 kJ; c. 1,57 kJ; d. 0
101. 8,0 J
103. 35,7 J
105. 24,3 J
107. a. 40 hp; b. 39,8 MJ, independientemente de la rapidez; c. 80 hp, 79,6 MJ a 30 m/s; d. Si la resistencia del aire es proporcional a la rapidez, el auto obtiene alrededor de 22 mpg a 34 mph y la mitad de eso al doble de rapidez, más cerca de la experiencia de conducción real.

Capítulo 8

Compruebe Lo Aprendido

8.1 $(4{,}63\ \text{J}) - (-2{,}38\ \text{J}) = 7{,}00\ \text{J}$
8.2 35,3 kJ, 143 kJ, 0
8.3 22,8 cm. Utilizando 0,02 m para el desplazamiento inicial del resorte (vea más arriba), calculamos que el desplazamiento final del resorte es de 0,028 m; por lo tanto, la longitud del resorte es la longitud sin estirar más el desplazamiento, es decir, 22,8 cm.
8.4 Aumenta porque ha tenido que ejercer una fuerza hacia abajo, haciendo un trabajo positivo, para empujar la masa hacia abajo, y eso es igual al cambio en la energía potencial total.
8.5 2,83 N
8.6 $F = 4{,}8\ \text{N}$, dirigida hacia el origen
8.7 0,033 m
8.8 b. A cualquier altura, la energía potencial gravitacional es la misma subiendo o bajando, pero la energía cinética es menor bajando que subiendo, ya que la resistencia del aire es disipativa y realiza un trabajo negativo. Por lo tanto, a cualquier altura, la velocidad de bajada es menor que la de subida, por lo que debe tardar más tiempo en bajar que en subir.
8.9 constante $U(x) = -1\ \text{J}$
8.10 a. sí, movimiento limitado a $-1{,}055\ \text{m} \le x \le 1{,}055\ \text{m}$; b. mismos puntos de equilibrio y tipos que en el ejemplo
8.11 $x(t) = \pm\sqrt{(2E/k)}\ \text{sen}\left[\left(\sqrt{k/m}\right)t\right]$ y $v_0 = \pm\sqrt{(2E/m)}$

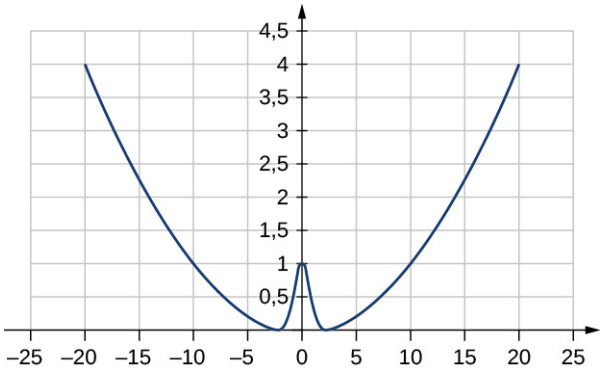
Preguntas Conceptuales

1. La energía potencial de un sistema puede ser negativa porque su valor es relativo a un punto definido.
3. Si el punto de referencia del suelo es una energía potencial gravitacional cero, la jabalina aumenta primero su energía potencial gravitacional, seguida de una disminución de su energía potencial gravitacional a medida que se lanza hasta que toca el suelo. El cambio global en la energía potencial gravitacional de la jabalina es cero, a menos que el centro de masa de la jabalina esté más bajo que desde donde se lanza inicialmente, y por lo tanto tendría un poco menos de energía potencial gravitacional.

5. la altura vertical desde el suelo hasta el objeto
7. Una fuerza que quita energía al sistema y que no se puede recuperar si invertimos la acción.
9. El cambio de energía cinética es el trabajo neto. Ya que las fuerzas conservativas son independientes de la trayectoria, cuando se vuelve al mismo punto las energías cinética y potencial son exactamente las mismas que al principio. Durante el viaje la energía total se conserva. Sin embargo, tanto la energía potencial como la cinética cambian.
11. El auto experimenta un cambio en la energía potencial gravitacional a medida que va cuesta abajo porque la distancia vertical disminuye. El trabajo realizado por la fricción sustraerá parte de este cambio de energía potencial gravitacional. El resto de la energía se traduce en un aumento de la energía cinética, lo que hace que el auto vaya más rápido. Por último, el auto frena y pierde su energía cinética por el trabajo realizado al frenar hasta detenerse.
13. Afirma que la energía total del sistema E se conserva mientras no haya fuerzas no conservativas que actúen sobre el objeto.
15. Aplica energía al sistema a través de sus piernas al comprimir y expandir.
17. Cuatro veces la altura original duplicaría la velocidad de impacto.

Problemas

19. 40.000
21. a. -200 J; b. -200 J; c. -100 J; d. -300 J
23. a. 0,068 J; b. $-0{,}068$ J; c. 0,068 J; d. 0,068 J; e. $-0{,}068$ J; f. 46 cm
25. -120 J
27. a. $\left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$; b. 0; c. $\sim x^6$
29. 14 m/s
31. 14 J
33. prueba
35. 9,7 m/s
37. 39 m/s
39. 1.900 J
41. -39 J
43. 3,5 cm
45. 10x con el eje de la x apuntando hacia fuera de la pared y el origen en la pared
47. 4,6 m/s
49. a. 5,6 m/s; b. 5,2 m/s; c. 6,4 m/s; d. no; e. sí
51. a.



donde $k = 0{,}02$, $A = 1$, $\alpha = 1$; b. $F = kx - \alpha x A e^{-\alpha x^2}$; c. La energía potencial en $x = 0$ deberá ser menor que la energía cinética más la potencial en $x =$ a o $A \leq \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ka^2 + Ae^{-\alpha a^2}$. Resolviendo esto para A coincide con los resultados en el problema.
53. 8.700 N/m
55. a. 70,6 m/s; b. 69,9 m/s

57. a. 180 N/m; b. 11 m
59. a. $9{,}8 \times 10^3$ J; b. $1{,}4 \times 10^3$ J; c. 14 m/s
61. a. 47,6 m; b. $1{,}88 \times 10^5$ J; c. 373 N
63. 33,9 cm
65. a. Cero, ya que la energía total del sistema es cero y la energía cinética en el punto más bajo es cero; b. -0,038 J; c. 0,62 m/s
67. 42 cm

Problemas Adicionales

69. -0,44 J
71. 3,6 m/s
73. $bD^4/4$
75. prueba
77. a. $\sqrt{\frac{2m^2gh}{k(m+M)}}$; b. $\frac{mMgh}{m+M}$
79. a. 2,24 m/s; b. 1,94 m/s; c. 1,94 m/s
81. 18 m/s
83. $v_A = 24$ m/s; $v_B = 14$ m/s; $v_C = 31$ m/s
85. a. La pérdida de energía es 240 N · m; b. $F = 8$ N
87. 89,7 m/s
89. 32 J

Capítulo 9

Compruebe Lo Aprendido

9.1 Para alcanzar una rapidez final de $v_\text{f} = \frac{1}{4}\left(3{,}0 \times 10^8 \text{ m/s}\right)$ a una aceleración de $10g$, el tiempo requerido es

$$10g = \frac{v_\text{f}}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{v_\text{f}}{10g} \frac{\frac{1}{4}\left(3{,}0 \times 10^8 \text{ m/s}\right)}{10g} = 7{,}7 \times 10^5 \text{ s} = 8{,}9 \text{ d}$$

9.2 Si el teléfono rebota hacia arriba aproximadamente a la misma rapidez inicial que su rapidez de impacto, el cambio de momento del teléfono será $\Delta\vec{\mathbf{p}} = m\Delta\vec{\mathbf{v}} - \left(-m\Delta\vec{\mathbf{v}}\right) = 2m\Delta\vec{\mathbf{v}}$. Esto supone el doble de cambio de momento que cuando el teléfono no rebota, por lo que el teorema del momento-impulso nos indica que hay que aplicar más fuerza al teléfono.

9.3 Si el carro más pequeño rodara a 1,33 m/s hacia la izquierda, entonces la conservación del momento da

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{f} &= m_1 v_1 \hat{\mathbf{i}} - m_2 v_2 \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{f} &= \left(\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)\hat{\mathbf{i}} \\ &= \left[\frac{(0{,}675 \text{ kg})(0{,}75 \text{ m/s}) - (0{,}500 \text{ kg})(1{,}33 \text{ m/s})}{1{,}175 \text{ kg}}\right]\hat{\mathbf{i}} \\ &= -(0{,}135 \text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad final es de 0,135 m/s hacia la izquierda.

9.4 Si la pelota no rebota, su momento final $\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{2}$ es cero, por lo que

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{p}} &= \vec{\mathbf{p}}_\mathbf{2} - \vec{\mathbf{p}}_\mathbf{1} \\ &= (0)\,\hat{\mathbf{j}} - (-1{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}} \\ &= +(1{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\,\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

9.5 Consideremos la teoría del momento impulso, que es $\vec{J} = \Delta\vec{p}$. Si $\vec{J} = 0$, tenemos la situación descrita en el ejemplo. Si una fuerza actúa sobre el sistema, entonces $\vec{J} = \vec{F}_\text{ave}\Delta t$. Así, en lugar de $\vec{\mathbf{p}}_f = \vec{\mathbf{p}}_i$, tenemos $\vec{F}_\text{ave}\Delta t = \Delta\vec{p} = \vec{p}_\text{f} - \vec{p}_\text{i}$
donde $\vec{\mathbf{F}}_\text{ave}$ es la fuerza debida a la fricción.

9.6 El impulso es el cambio de momento multiplicado por el tiempo necesario para que se produzca el cambio. Por conservación del momento, los cambios de momento de la sonda y el momento son de la misma magnitud, pero en direcciones opuestas, y el tiempo de interacción para cada uno es también el mismo. Por consiguiente, el impulso que recibe cada uno es de la misma magnitud, pero en direcciones opuestas. Ya que actúan en direcciones opuestas, los impulsos no son los mismos. En cuanto al impulso, la fuerza sobre cada cuerpo actúa en direcciones opuestas, por lo que las fuerzas sobre cada uno no son iguales. Sin embargo, el cambio en la energía cinética difiere para cada uno, porque la colisión no es elástica.

9.7 Esta solución representa el caso en el que no se produce ninguna interacción: el primer disco no alcanza al segundo y continúa con una velocidad de 2,5 m/s hacia la izquierda. Este caso no ofrece ninguna perspectiva física significativa.

9.8 Si la fricción que actúa sobre el auto es cero, entonces seguirá deslizándose indefinidamente ($d \to \infty$), por lo que no podemos utilizar el teorema de trabajo-energía cinética como se hace en el ejemplo. Así, no pudimos resolver el problema a partir de la información proporcionada.

9.9 Si las velocidades iniciales no estuvieran en ángulo recto, habría que expresar una o ambas velocidades en forma de componentes. El análisis matemático del problema sería algo más complicado, pero el resultado físico no cambiaría.

9.10 El volumen de un tanque de buceo es de unos 11 L. Suponiendo que el aire es un gas ideal, el número de moléculas de gas en el tanque es

$$\begin{aligned} PV &= NRT \\ N &= \frac{PV}{RT} = \frac{(2.500\ \text{psi})\left(0{,}011\ \text{m}^3\right)}{(8{,}31\ \text{J/mol·K})(300\ \text{K})}\left(\frac{6894{,}8\ \text{Pa}}{1\ \text{psi}}\right) \\ &= 7{,}59 \times 10^1\ \text{mol} \end{aligned}$$

La masa molecular media del aire es de 29 g/mol, por lo que la masa de aire contenida en el tanque es de unos 2,2 kg. Esto es unas 10 veces menos que la masa del tanque, por lo que es seguro descartarlo. Además, la fuerza inicial de la presión del aire es aproximadamente proporcional a la superficie de cada pedazo, que a su vez es proporcional a la masa de cada pedazo (suponiendo un grosor uniforme). Así, la aceleración inicial de cada pedazo cambiaría muy poco si consideramos explícitamente el aire.

9.11 El radio medio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es $1{,}496 \times 10^9$ m. Tomando el Sol como origen, y al observar que la masa del Sol es aproximadamente la misma que las masas del Sol, la Tierra y la Luna combinadas, el centro de masa del sistema Tierra + Luna y el Sol es

$$\begin{aligned} R_{\text{CM}} &= \frac{m_{\text{Sol}} R_{\text{Sol}} + m_{\text{em}} R_{\text{em}}}{m_{\text{Sol}}} \\ &= \frac{\left(1{,}989 \times 10^{30}\ \text{kg}\right)(0) + \left(5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg} + 7{,}36 \times 10^{22}\ \text{kg}\right)\left(1{,}496 \times 10^{9}\ \text{m}\right)}{1{,}989 \times 10^{30}\ \text{kg}} \\ &= 4{,}6\ \text{km} \end{aligned}$$

Así, el centro de masa del sistema Sol, Tierra, Luna está a 4,6 km del centro del Sol.

9.12 A escala macroscópica, el tamaño de una celda unitaria es despreciable y se puede considerar que la masa del cristal se distribuye homogéneamente por todo el cristal. Así,

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m\vec{r}_j = \frac{m}{M}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j = \frac{Nm}{M}\frac{\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j}{N}$$

donde sumamos sobre el número N de celdas unitarias en el cristal y m es la masa de una celda unitaria. Como $Nm = M$, podemos escribir

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{m}{M}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j = \frac{Nm}{M}\frac{\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j .$$

Esta es la definición del centro geométrico del cristal, por lo que el centro de masa está en el mismo punto que el centro geométrico.

9.13 Las explosiones serían esencialmente esféricamente simétricas, porque la gravedad no actuaría para

distorsionar las trayectorias de los proyectiles en expansión.

9.14 La notación m_g representa la masa del combustible y m la masa del cohete más la masa inicial del combustible. Observe que m_g cambia con el tiempo, por lo que la escribimos como $m_g\,(t)$. Utilizando m_R como la masa del cohete sin combustible, la masa total del cohete más el combustible es $m = m_R + m_g\,(t)$. La diferenciación con respecto al tiempo da como resultado

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_R}{dt} + \frac{dm_g(t)}{dt} = \frac{dm_g(t)}{dt}$$

donde utilizamos $\frac{dm_R}{dt} = 0$ porque la masa del cohete no cambia. Así, la tasa de cambio de la masa del cohete es la misma que la del combustible.

Preguntas Conceptuales

1. Dado que $K = p^2/2m$, entonces, si el momento es fijo, el objeto con menor masa tiene más energía cinética.

3. Sí; el impulso es la fuerza aplicada multiplicada por el tiempo durante el cual se aplica ($J = F\Delta t$), por lo que, si una fuerza pequeña actúa durante mucho tiempo, puede dar lugar a un impulso mayor que una fuerza grande que actúe durante poco tiempo.

5. Mediante la fricción, la carretera ejerce una fuerza horizontal sobre los neumáticos, lo que modifica el momento del auto.

7. El momento se conserva cuando la masa del sistema de interés permanece constante durante la interacción en cuestión y cuando ninguna fuerza externa *neta* actúa sobre el sistema durante la interacción.

9. Para acelerar las moléculas de aire en la dirección del movimiento del auto, este deberá ejercer una fuerza sobre estas moléculas por la segunda ley de Newton $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Según la tercera ley de Newton, las moléculas de aire ejercen una fuerza de igual magnitud, aunque en sentido contrario sobre el auto. Esta fuerza actúa en la dirección opuesta al movimiento del auto y constituye la fuerza debida a la resistencia del aire.

11. No, no es un sistema cerrado porque una fuerza externa neta diferente de cero actúa sobre este en forma de bloques de partida que empujan sus pies.

13. Sí, toda la energía cinética puede perderse si las dos masas entran en reposo debido a la colisión (es decir, se pegan).

15. El ángulo entre las direcciones debe ser de 90°. Cualquier sistema que tenga una fuerza externa neta de cero en una dirección y una fuerza externa neta diferente de cero en una dirección perpendicular satisfará estas condiciones.

17. Sí, la rapidez del cohete puede superar la de los gases que expulsa. El empuje del cohete no depende de las velocidades relativas de los gases y del cohete, simplemente depende de la conservación del momento.

Problemas

19. a. magnitud: $25\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$; b. igual que a.

21. $1{,}78 \times 10^{29}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$

23. $1{,}3 \times 10^{9}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$

25. a. $1{,}50 \times 10^{6}$ N; b. $1{,}00 \times 10^{5}$ N

27. $4{,}69 \times 10^{5}$ N

29. $2{,}10 \times 10^{3}$ N

31. $\vec{\mathbf{p}}(t) = \left(10\hat{\mathbf{i}} + 20t\hat{\mathbf{j}}\right)\ \text{kg} \cdot \text{m/s}; \vec{\mathbf{F}} = (20\ \text{N})\,\hat{\mathbf{j}}$

33. Supongamos que el eje de la x positiva está en la dirección del momento original. Entonces $p_x = 1{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$ y $p_y = 7{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$

35. $(0{,}122\ \text{m/s})\hat{\mathbf{i}}$

37. a. 47 m/s en la dirección de la bala al bloque; b.$70{,}6\ \text{N} \cdot \text{s}$, hacia la bala; c. $70{,}6\ \text{N} \cdot \text{s}$, hacia el bloque; d. la magnitud es $2{,}35 \times 10^{4}$ N

39. 2:5

41. 5,9 m/s

43. a. 6,80 m/s, 5,33°; b. sí (calcule la relación entre las energías cinéticas inicial y final)

45. 2,5 cm
47. la rapidez del auto de choque de adelante es de 6,00 m/s y la del auto de choque que lo sigue es de 5,60 m/s
49. 6,6 %
51. 1,8 m/s
53. 22,1 m/s a 32,2° por debajo de la horizontal
55. a. 33 m/s y 110 m/s; b. 57 m; c. 480 m
57. $(732\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}} + (-79{,}6\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$
59. $-(0{,}21\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}} + (0{,}25\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$
61. 341 m/s a 86,8° con respecto al eje $\hat{\mathbf{i}}$.
63. Con el origen definido en la posición de la masa de 150 g, $x_{\text{CM}} = -1{,}23\text{cm}$ y $y_{\text{CM}} = 0{,}69\text{cm}$
65. $y_{\text{CM}} = \begin{cases} \frac{h}{2} - \frac{1}{4}gt^2, & t < T \\ h - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{4}gT^2 + \frac{1}{2}gtT, & t \geq T \end{cases}$
67. a. $R_1 = 4\text{ m}$, $R_2 = 2\text{ m}$; b. $X_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $Y_{\text{CM}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$; c. sí, con $R = \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{16m_1^2 + 4m_2^2}$
69. $x_{cm} = \frac{3}{4}\,L\left(\frac{\rho_1 + \rho_0}{\rho_1 + 2\rho_0}\right)$
71. $\left(\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}\right)$
73. $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}}) = (0.0, h/4)$
75. $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}}) = (0, 4R/(3\pi), 0)$
77. (a) 0,413 m/s, (b) aproximadamente 0,2 J
79. 1.551 kg
81. 4,9 km/s

Problemas Adicionales

84. El elefante tiene un mayor momento.
86. Las respuestas pueden variar. La primera cláusula es verdadera, pero la segunda cláusula no es verdadera en general porque la velocidad de un objeto con una masa pequeña puede ser lo suficientemente grande como para que el momento del objeto sea mayor que el de un objeto de mayor masa con una velocidad menor.
88. $4{,}5 \times 10^3\text{ N}$
90. $\vec{\mathbf{J}} = \int_0^{\tau} \left[m\vec{g} - m\vec{g}\left(1 - e^{-bt/m}\right)\right] dt = \frac{m^2}{b}\vec{g}\left(e^{-b\tau/m} - 1\right)$
92. a. $-\left(2{,}1 \times 10^3\text{ kg} \cdot \text{m/s}\right)\hat{\mathbf{i}}$, b. $-\left(24 \times 10^3\text{ N}\right)\hat{\mathbf{i}}$
94. a. $\left(1{,}1 \times 10^3\text{ kg} \cdot \text{m/s}\right)\hat{\mathbf{i}}$, b. $(0{,}010\text{ kg} \cdot \text{m/s})\,\hat{\mathbf{i}}$, c. $-(0{,}00093\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}}$, d. $-(0{,}0012\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}}$
96. $-(7{,}2\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}}$
98. $v_{1,\text{f}} = v_{1,\text{i}}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$, $v_{2,\text{f}} = v_{1,\text{i}}\frac{2m_1}{m_1 + m_2}$
100. 2,8 m/s
102. 0,094 m/s
104. la velocidad final de la bola blanca es $-(0{,}76\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}}$, la velocidad final de las otras dos bolas es de 2,6 m/s a ±30° con respecto a la velocidad inicial de la bola blanca
106. bola 1: $-(1{,}4\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}} - (0{,}4\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$, bola 2: $(2{,}2\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}} + (2{,}4\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$
108. bola 1: $(1{,}4\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}} - (1{,}7\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$, bola 2: $-(2{,}8\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{i}} + (0{,}012\text{ m/s})\,\hat{\mathbf{j}}$
110. $(r, \theta) = (2R/3, \pi/8)$
112. Las respuestas pueden variar. Los gases que empujan sobre la superficie de la Tierra no impulsan el cohete, sino la conservación del momento. El momento del gas que se expulsa por la parte trasera del cohete deberá compensarse con un aumento del momento hacia delante del cohete.

Problemas De Desafío

114. a. $617\text{ N} \cdot \text{s}$, 108°; b. $F_x = 2{,}91 \times 10^4\text{ N}$, $F_y = 2{,}6 \times 10^5\text{ N}$; c. $F_x = 5.850\text{ N}$, $F_y = 5.265\text{ N}$

116. La conservación del momento exige $m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}} = m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}$. Se nos da que $m_1 = m_2$, $v_{1,\mathrm{i}} = v_{2,\mathrm{f}}$, y $v_{2,\mathrm{i}} = v_{1,\mathrm{f}} = 0$. Al combinar estas ecuaciones con la ecuación dada por la conservación del momento se obtiene $v_{1,\mathrm{i}} = v_{1,\mathrm{i}}$, lo cual es cierto, por lo que se cumple la conservación del momento. La conservación de la energía exige $\frac{1}{2}m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,\mathrm{i}}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2$. De nuevo, al combinar esta ecuación con las condiciones dadas anteriormente, se obtiene $v_{1,\mathrm{i}} = v_{1,\mathrm{i}}$, por lo que se cumple la conservación de la energía.

118. Supongamos que el origen está en la línea central y en el suelo, entonces $(x_{\mathrm{CM}}, y_{\mathrm{CM}}) = (0.86\ \mathrm{cm})$

Capítulo 10

Compruebe Lo Aprendido

10.1 a. $40{,}0\ \mathrm{rev/s} = 2\pi(40{,}0)\ \mathrm{rad/s}$, $\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi(40{,}0)-0\ \mathrm{rad/s}}{20{,}0\ \mathrm{s}} = 2\pi(2{,}0) = 4{,}0\pi\ \mathrm{rad/s^2}$; b. Dado que la velocidad angular aumenta linealmente, tiene que haber aceleración constante a lo largo del tiempo indicado. Por lo tanto, la aceleración angular instantánea en cualquier momento es la solución de $4{,}0\pi\ \mathrm{rad/s^2}$.

10.2 a. Utilizando la Ecuación 10.11, tenemos $7.000\ \mathrm{rpm} = \frac{7000{,}0(2\pi\ \mathrm{rad})}{60{,}0\ \mathrm{s}} = 733{,}0\ \mathrm{rad/s}$,
$\alpha = \frac{\omega-\omega_0}{t} = \frac{733{,}0\ \mathrm{rad/s}}{10{,}0\ \mathrm{s}} = 73{,}3\ \mathrm{rad/s^2}$;
b. Utilizando la Ecuación 10.13, tenemos
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{0-(733{,}0\ \mathrm{rad/s})^2}{2(73{,}3\ \mathrm{rad/s^2})} = 3665{,}2\ \mathrm{rad}$

10.3 La aceleración angular es $\alpha = \frac{(5{,}0-0)\mathrm{rad/s}}{20{,}0\ \mathrm{s}} = 0{,}25\ \mathrm{rad/s^2}$. Por lo tanto, el ángulo total que atraviesa el niño es
$\Delta\theta = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{(5{,}0)^2-0}{2(0{,}25)} = 50\ \mathrm{rad}.$
Así, calculamos
$s = r\theta = 5{,}0\ \mathrm{m}(50{,}0\ \mathrm{rad}) = 250{,}0\ \mathrm{m}.$

10.4 La energía cinética rotacional inicial de la hélice es
$K_0 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(800{,}0\ \mathrm{kg\text{-}m^2})(4{,}0 \times 2\pi\ \mathrm{rad/s})^2 = 2{,}53 \times 10^5\ \mathrm{J}.$
A los 5,0 s la nueva energía cinética rotacional de la hélice es
$K_{\mathrm{f}} = 2{,}03 \times 10^5\ \mathrm{J}.$
y la nueva velocidad angular es
$\omega = \sqrt{\frac{2(2{,}03 \times 10^5\ \mathrm{J})}{800{,}0\ \mathrm{kg\text{-}m^2}}} = 22{,}53\ \mathrm{rad/s}$
que es de 3,58 rev/s.

10.5 $I_{\text{eje paralelo}} = I_{\text{centro de masa}} + md^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$

10.6 El ángulo entre el brazo de palanca y el vector de fuerza es 80°; por lo tanto,
$r_\perp = 100\mathrm{m}(\mathrm{sen}80°) = 98{,}5\ \mathrm{m}.$
El producto cruz $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ da un torque negativo o en el sentido de las agujas del reloj.
El torque es entonces $\tau = -r_\perp F = -98{,}5\ \mathrm{m}(5{,}0 \times 10^5\mathrm{N}) = -4{,}9 \times 10^7\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}.$

10.7 a. La aceleración angular es $\alpha = \frac{20{,}0(2\pi)\mathrm{rad/s}-0}{10{,}0\ \mathrm{s}} = 12{,}56\ \mathrm{rad/s^2}$. Al resolver el torque, tenemos $\sum_i \tau_i = I\alpha = (30{,}0\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m^2})(12{,}56\ \mathrm{rad/s^2}) = 376{,}80\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$; b. La aceleración angular es
$\alpha = \frac{0-20{,}0(2\pi)\mathrm{rad/s}}{20{,}0\ \mathrm{s}} = -6{,}28\ \mathrm{rad/s^2}$. Al resolver el torque, tenemos
$\sum_i \tau_i = I\alpha = (30{,}0\ \mathrm{kg\text{-}m^2})(-6{,}28\ \mathrm{rad/s^2}) = -188{,}50\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$

10.8 3 MW

Preguntas Conceptuales

1. El segundero rota en el sentido de las agujas del reloj, por lo que, según la regla de la mano derecha, el

vector de velocidad angular es hacia la pared.

3. Tienen la misma velocidad angular. Los puntos más alejados del bate tienen mayor rapidez tangencial.

5. línea recta, lineal en la variable tiempo

7. constante

9. El vector de aceleración centrípeta es perpendicular al vector de velocidad.

11. a. ambas; b. aceleración centrípeta distinta de cero; c. ambas

13. La esfera hueca, dado que la masa se distribuye más lejos del eje de rotación.

15. a. Disminuye. b. Los brazos podrían calcularse aproximadamente como varillas y el disco como un disco. El torso está cerca del eje de rotación, por lo que no contribuye mucho al momento de inercia.

17. Porque el momento de inercia varía como el cuadrado de la distancia al eje de rotación. La masa de la varilla situada a distancias superiores a $L/2$ aportaría la mayor contribución para que su momento de inercia fuera mayor que la masa puntual en $L/2$.

19. magnitud de la fuerza, longitud del brazo de palanca y ángulo del brazo de palanca y del vector de fuerza

21. El momento de inercia de las ruedas se reduce, por lo que se necesita un torque menor para acelerarlas.

23. sí

25. $|\vec{\mathbf{r}}|$ puede ser igual al brazo de palanca, pero nunca menor.

27. Si las fuerzas están a lo largo del eje de rotación, o si tienen el mismo brazo de palanca y se aplican en un punto de la varilla.

Problemas

29. $\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{45{,}0 \text{ s}} = 0{,}14 \text{ rad/s}$

31. a. $\theta = \frac{s}{r} = \frac{3{,}0 \text{ m}}{1{,}5 \text{ m}} = 2{,}0 \text{ rad}$; b. $\omega = \frac{2{,}0 \text{ rad}}{1{,}0 \text{ s}} = 2{,}0 \text{ rad/s}$; c. $\frac{v^2}{r} = \frac{(3{,}0 \text{ m/s})^2}{1{,}5 \text{ m}} = 6{,}0 \text{ m/s}^2$.

33. La hélice solo necesita $\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{0 \text{ rad/s} - 10{,}0(2\pi) \text{ rad/s}}{-2{,}0 \text{ rad/s}^2} = 31{,}4 \text{ s}$ para llegar al reposo, cuando la hélice está a 0 rad/s, comenzaría a rotar en sentido contrario. Esto sería imposible debido a la magnitud de las fuerzas que intervienen para que la hélice se detenga y comience la rotación en sentido contrario.

35. a. $\omega = 25{,}0(2{,}0 \text{ s}) = 50{,}0 \text{ rad/s}$; b. $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 25{,}0 \text{ rad/s}^2$

37. a. $\omega = 54{,}8 \text{ rad/s}$;
b. $t = 11{,}0 \text{ s}$

39. a. $0{,}87 \text{ rad/s}^2$;
b. $\theta = 12.600 \text{ rad}$

41. a. $\omega = 42{,}0 \text{ rad/s}$;

b. $\theta = 220 \text{ rad}$; c. $v_t = 42 \text{ m/s}$
$a_t = 4{,}0 \text{ m/s}^2$

43. a. $\omega = 7{,}0 \text{ rad/s}$;
b. $\theta = 22{,}5 \text{ rad}$; c. $a_t = 0{,}1 \text{ m/s}$

45. $\alpha = 28{,}6 \text{ rad/s}^2$.

47. $r = 0{,}78 \text{ m}$

49. a. $\alpha = -0{,}314 \text{ rad/s}^2$,
b. $a_c = 197{,}4 \text{ m/s}^2$; c. $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{197{,}4^2 + (-6{,}28)^2} = 197{,}5 \text{ m/s}^2$
$\theta = \tan^{-1}\frac{-6{,}28}{197{,}4} = -1{,}8°$ en el sentido de las agujas del reloj a partir del vector de aceleración centrípeta.

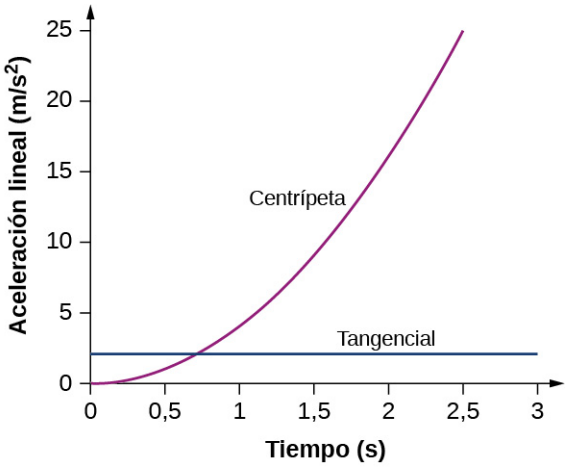
51. $ma = 40{,}0 \text{ kg}(5{,}1 \text{ m/s}^2) = 204{,}0 \text{ N}$
La fuerza de fricción máxima es $\mu_S N = 0{,}6(40{,}0 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) = 235{,}2 \text{ N}$ por lo que el niño no se cae todavía.

$$v_t = r\omega = 1{,}0(2{,}0t)\ \text{m/s}$$

53. $$a_c = \frac{v_t^2}{r} = \frac{(2{,}0t)^2}{1{,}0\ \text{m}} = 4{,}0t^2\ \text{m/s}^2$$

$$a_t(t) = r\alpha(t) = r\frac{d\omega}{dt} = 1{,}0\ \text{m}(2{,}0) = 2{,}0\ \text{m/s}^2.$$

Graficando ambas aceleraciones se obtiene



La aceleración tangencial es constante, mientras que la aceleración centrípeta depende del tiempo, y aumenta con el tiempo hasta valores mucho mayores que la aceleración tangencial después de $t = 1$s. Para tiempos inferiores a 0,7 s y próximos a cero, la aceleración centrípeta es mucho menor que la tangencial.

55. a. $K = 2{,}56 \times 10^{29}$ J;
b. $K = 2{,}68 \times 10^{33}$ J

57. $K = 434{,}0$ J

59. a. $v_f = 86{,}5$ m/s;
b. La tasa de rotación de la hélice se mantiene en 20 rev/s.

61. $K = 3{,}95 \times 10^{42}$ J

63. a. $I = 0{,}315\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
b. $K = 621{,}8$ J

65. $I = \frac{7}{36}mL^2$

67. $v = 7{,}14$ m/s.

69. $\theta = 10{,}2°$

71. $F = 30$ N

73. a. $0{,}85\ \text{m}\,(55{,}0\ \text{N}) = 46.\ 75\ \text{N} \cdot \text{m}$; b. No importa a qué altura se empuje.

75. $m_2 = \frac{4{,}9\ \text{N·m}}{9{,}8(0{,}3\ \text{m})} = 1{,}67$ kg

77. $\tau_{net} = -9{,}0\ \text{N} \cdot \text{m} + 3{,}46\ \text{N} \cdot \text{m} + 0 - 3{,}38\ \text{N} \cdot \text{m} = -8{,}92\ \text{N} \cdot \text{m}$

79. $\tau = 5{,}66\ \text{N} \cdot \text{m}$

81. $\sum \tau = 57{,}82\ \text{N} \cdot \text{m}$

83. $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = 4{,}0\hat{\mathbf{i}} + 2{,}0\hat{\mathbf{j}} - 16{,}0\hat{\mathbf{k}}\ \text{N} \cdot \text{m}$

85. a. $\tau = (0{,}280\ \text{m})(180{,}0\ \text{N}) = 50{,}4\ \text{N} \cdot \text{m}$; b. $\alpha = 17{,}14\ \text{rad/s}^2$;
c. $\alpha = 17{,}04\ \text{rad/s}^2$

87. $\tau = 8{,}0\ \text{N} \cdot \text{m}$

89. $\tau = -43{,}6\ \text{N} \cdot \text{m}$

91. a. $\alpha = 1{,}4 \times 10^{-10}\ \text{rad/s}^2$;
b. $\tau = 1{,}36 \times 10^{28}$ N-m; c. $F = 2{,}1 \times 10^{21}$ N

93. $a = 3{,}6\ \text{m/s}^2$

95. a. $a = r\alpha = 14{,}7\ \text{m/s}^2$; b. $a = \frac{L}{2}\alpha = \frac{3}{4}g$

97. $\tau = \frac{P}{\omega} = \frac{2{,}0 \times 10^6\ \text{W}}{2{,}1\ \text{rad/s}} = 9{,}5 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}$

99. a. $K = 888{,}50$ J;

b. $\Delta\theta = 294{,}6$ rev

101. a. $I = 114{,}6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
b. $P = 104.700$ W

103. $v = L\omega = \sqrt{3Lg}$

105. a. $a = 5{,}0\ \text{m/s}^2$; b. $W = 1{,}25\ \text{N} \cdot \text{m}$

Problemas Adicionales

107. $\Delta t = 10{,}0$ s

109. a. $0{,}06\ \text{rad/s}^2$; b. $\theta = 105{,}0$ rad

111. $s = 405{,}26$ m

113. a. $I = 0{,}363\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
b. $I = 2{,}34\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$

115. $\omega = \sqrt{\frac{6{,}68\ \text{J}}{4{,}4\ \text{kgm}^2}} = 1{,}23$ rad/s

117. $F = 23{,}3$ N

119. $\alpha = \frac{190{,}0\ \text{N-m}}{2{,}94\ \text{kg-m}^2} = 64{,}4\ \text{rad/s}^2$

Problemas De Desafío

121. a. $\omega = 2{,}0t - 1{,}5t^2$; b. $\theta = t^2 - 0{,}5t^3$; c. $\theta = -400{,}0$ rad; d. el vector está en $-0{,}66(360°) = -237{,}6°$

123. $I = \frac{2}{5}mR^2$

125. a. $\omega = 8{,}2$ rad/s; b. $\omega = 8{,}0$ rad/s

Capítulo 11

Compruebe Lo Aprendido

11.1 a. $\mu_\text{s} \geq \frac{\tan\theta}{1+(mr^2/I_\text{CM})}$; insertando el ángulo y observando que para un cilindro hueco $I_\text{CM} = mr^2$, tenemos $\mu_\text{s} \geq \frac{\tan 60°}{1+(mr^2/mr^2)} = \frac{1}{2}\tan 60° = 0{,}87$; nos dan un valor de 0,6 para el coeficiente de fricción estática, que es inferior a 0,87, por lo que la condición no se cumple y el cilindro hueco se deslizará; b. El cilindro macizo obedece a la condición $\mu_\text{s} \geq \frac{1}{3}\tan\theta = \frac{1}{3}\tan 60° = 0{,}58$. El valor de 0,6 para μ_S satisface esta condición, por lo que el cilindro macizo no se deslizará.

11.2 En la figura vemos que el producto cruz del vector de radio con el vector de momento da un vector dirigido hacia afuera de la página. Insertando el radio y el momento en la expresión del momento angular, tenemos
$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = (0{,}4\ \text{m}\hat{\mathbf{i}}) \times (1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}(4{,}0 \times 10^6\ \text{m/s})\hat{\mathbf{j}}) = 2{,}7 \times 10^{-21}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$

11.3 $I_\text{esfera} = \frac{2}{5}mr^2$, $I_\text{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2$; Tomando la relación de los momentos angulares, tenemos: $\frac{L_\text{cilindro}}{L_\text{esfera}} = \frac{I_\text{cilindro}\omega_0}{I_\text{esfera}\omega_0} = \frac{\frac{1}{2}mr^2}{\frac{2}{5}mr^2} = \frac{5}{4}$. Así, el cilindro tiene 25% más momento angular. Esto se debe a que el cilindro tiene más masa distribuida más lejos del eje de rotación.

11.4 Al utilizar la conservación del momento angular, tenemos
$I(4{,}0\ \text{rev/min}) = 1{,}25I\omega_\text{f}$, $\omega_\text{f} = \frac{1{,}0}{1{,}25}(4{,}0\ \text{rev/min}) = 3{,}2$ rev/min

11.5 La gravedad de la Luna es 1/6 de la de la Tierra. Al examinar la Ecuación 11.12, vemos que la frecuencia de precesión de la peonza es linealmente proporcional a la aceleración de la gravedad. Todas las demás magnitudes, masa, momento de inercia y velocidad de giro son iguales en la Luna. Así, la frecuencia de precesión en la Luna es
$\omega_P(\text{Luna}) = \frac{1}{6}\omega_P(\text{Tierra}) = \frac{1}{6}(5{,}0\ \text{rad/s}) = 0{,}83$ rad/s.

Preguntas Conceptuales

1. No, la fuerza de fricción estática es cero.
3. La rueda tiene más probabilidades de deslizarse en una pendiente pronunciada, ya que el coeficiente de fricción estática deberá aumentar con el ángulo para mantener el movimiento rodadura sin deslizar.
5. El cilindro alcanza una mayor altura. En la Ecuación 11.4, su aceleración en la dirección hacia abajo de la pendiente sería menor.
7. Todos los puntos de la recta darán un momento angular cero, porque un vector cruzado en un vector paralelo es cero.
9. La partícula deberá moverse en una línea recta que pase por el origen elegido.
11. Sin la hélice pequeña, el cuerpo del helicóptero giraría en sentido contrario a la hélice grande para así conservar el momento angular. La pequeña hélice ejerce un empuje a una distancia R del centro de masa de la aeronave para que esto no ocurra.
13. La velocidad angular aumenta porque el momento de inercia disminuye.
15. Se concentra más masa cerca del eje de rotación, lo que disminuye el momento de inercia y hace que la estrella aumente su velocidad angular.
17. Se necesita un torque en dirección perpendicular al vector de momento angular para cambiar su dirección. Estas fuerzas que actúan sobre el vehículo espacial son externas al contenedor en el que está montado el giroscopio y no imparten torques al disco giratorio del giroscopio.

Problemas

19. $v_{\text{CM}} = R\omega \Rightarrow \omega = 66{,}7 \text{ rad/s}$
21. $\alpha = 3{,}3 \text{ rad/s}^2$
23. $I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}mr^2,\ a_{\text{CM}} = 3{,}5 \text{ m/s}^2;\ x = 15{,}75 \text{ m}$
25. positivo es hacia abajo del plano inclinado;
$a_{\text{CM}} = \frac{mg \text{ sen } \theta}{m+(I_{\text{CM}}/r^2)} \Rightarrow I_{\text{CM}} = r^2\left[\frac{mg \text{ sen}30}{a_{\text{CM}}} - m\right]$,
$x - x_0 = v_0 t - \frac{1}{2}a_{\text{CM}}t^2 \Rightarrow a_{\text{CM}} = 2{,}96 \text{ m/s}^2$,
$I_{\text{CM}} = 0{,}66\, mr^2$
27. $\alpha = 67{,}9 \text{ rad/s}^2$,
$(a_{\text{CM}})_x = 1{,}5 \text{ m/s}^2$
29. $W = -1080{,}0 \text{ J}$
31. La energía mecánica en la parte inferior es igual a la energía mecánica en la parte superior;
$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{1}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)v_0^2$,
$h = 7{,}7$ m, por lo que la distancia hacia arriba de la pendiente es 22,5 m.
33. Utilice la conservación de energía
$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\text{Cyl}}\omega_0^2 = mgh_{\text{Cyl}}$,
$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\text{Sph}}\omega_0^2 = mgh_{\text{Sph}}$.
Al restar las dos ecuaciones y eliminar la energía traslacional inicial, tenemos
$\frac{1}{2}I_{\text{Cyl}}\omega_0^2 - \frac{1}{2}I_{\text{Sph}}\omega_0^2 = mg(h_{\text{Cyl}} - h_{\text{Sph}})$,
$\frac{1}{2}mr^2(\frac{v_0}{r})^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}mr^2(\frac{v_0}{r})^2 = mg(h_{\text{Cyl}} - h_{\text{Sph}})$,
$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}v_0^2 = g(h_{\text{Cyl}} - h_{\text{Sph}})$,
$h_{\text{Cyl}} - h_{\text{Sph}} = \frac{1}{g}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)v_0^2 = \frac{1}{9{,}8 \text{ m/s}^2}\left(\frac{1}{6}\right)(5{,}0 \text{ m/s})^2 = 0{,}43 \text{ m}.$
Así, la esfera hueca, con el menor momento de inercia, rueda hacia arriba hasta una altura inferior de $1{,}0 - 0{,}43 = 0{,}57$ m.
35. La magnitud del producto cruz del radio con el pájaro y su vector de momento da como produce $rp \text{ sen } \theta$, lo que da $r \text{ sen } \theta$ como la altitud del pájaro h. La dirección del momento angular es perpendicular a los vectores de radio y de momento, que elegimos arbitrariamente como $\hat{\mathbf{k}}$, que está en el plano del suelo:
$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = hmv\hat{\mathbf{k}} = (300{,}0 \text{ m})(2{,}0 \text{ kg})(20{,}0 \text{ m/s})\hat{\mathbf{k}} = 12000{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$

37. a. $\vec{\mathbf{l}} = 45{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$;
b. $\vec{\boldsymbol{\tau}} = 10{,}0\ \text{N} \cdot \text{m}\hat{\mathbf{k}}$

39. a. $\vec{\mathbf{l}}_1 = -0{,}4\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{l}}_2 = \vec{\mathbf{l}}_4 = 0$,
$\vec{\mathbf{l}}_3 = 1{,}35\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$; b. $\vec{\mathbf{L}} = 0{,}95\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$

41. a. $L = 1{,}0 \times 10^{11}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$; b. No, el momento angular sigue siendo el mismo, ya que el producto cruz solo implica la distancia perpendicular del plano al suelo, independientemente de dónde se encuentre en su trayectoria.

43. a. $\vec{\mathbf{v}} = -gt\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{r}}_\perp = -d\hat{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{l}} = mdgt\hat{\mathbf{k}}$;
b. $\vec{\mathbf{F}} = -mg\hat{\mathbf{j}}$, $\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = dmg\hat{\mathbf{k}}$; c. sí

45. a. $mgh = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2$;
$\omega = 51{,}2\ \text{rad/s}$;
$L = 16{,}4\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$;
b. $\omega = 72{,}5\ \text{rad/s}$;
$L = 23{,}2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

47. a. $I = 720{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $\alpha = 4{,}20\ \text{rad/s}^2$;
$\omega(10\ \text{s}) = 42{,}0\ \text{rad/s}$; $L = 3{,}02 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$;
$\omega(20\ \text{s}) = 84{,}0\ \text{rad/s}$;
b. $\tau = 3{,}03 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}$

49. a. $L = 1{,}131 \times 10^7\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$;
b. $\tau = 3{,}77 \times 10^4\ \text{N} \cdot \text{m}$

51. $\omega = 28{,}6\ \text{rad/s} \Rightarrow L = 2{,}6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

53. $L_f = \frac{2}{5}M_S(3{,}5 \times 10^3\text{km})^2\frac{2\pi}{T_f}$,

$$(7{,}0 \times 10^5\ \text{km})^2\frac{2\pi}{28\ \text{días}} = (3{,}5 \times 10^3\text{km})^2\frac{2\pi}{T_f} \Rightarrow T_f$$

$$= 28\ \text{días}\frac{(3{,}5 \times 10^3\text{km})^2}{(7{,}0 \times 10^5\text{km})^2} = 7{,}0 \times 10^{-4}\text{día} = 60{,}5\ \text{s}$$

55. $f_\text{f} = 2{,}1\ \text{rev/s} \Rightarrow f_0 = 0{,}5\ \text{rev/s}$

57. $r_P m v_P = r_A m v_A \Rightarrow v_P = 18{,}3\ \text{km/s}$

59. a. $I_\text{disco} = 5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$I_\text{insecto} = 2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,

$$(I_\text{disco} + I_\text{insecto})\omega_1 = I_\text{disco}\omega_2,$$

$\omega_2 = 14{,}0\ \text{rad/s}$
b. $\Delta K = 0{,}014\ \text{J}$;
c. $\omega_3 = 10{,}0\ \text{rad/s}$ de vuelta al valor original;
d. $\frac{1}{2}(I_\text{disco} + I_\text{insecto})\omega_3^2 = 0{,}035\ \text{J}$ de vuelta al valor original;
e. trabajo del insecto arrastrándose por el disco

61. $L_\text{i} = 400{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$,
$L_\text{f} = 500{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\omega$,
$\omega = 0{,}80\ \text{rad/s}$

63. $I_0 = 340{,}48\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$I_\text{f} = 268{,}8\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$\omega_\text{f} = 25{,}33\ \text{rpm}$

65. a. $L = 280\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$,

$I_f = 89{,}6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$\omega_f = 3{,}125\ \text{rad/s}$; b. $K_i = 437{,}5\ \text{J}$,
$K_f = 437{,}5\ \text{J}$

67. Momento de inercia en el giro del disco: $I_0 = 0{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$I_f = 1{,}1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$\omega_f = \frac{I_0}{I_f}\omega_0 \Rightarrow f_f = 155{,}5\ \text{rev/min}$

69. Su velocidad de giro en el aire es $f_f = 2{,}0\ \text{rev/s}$;
Puede dar cuatro vueltas en el aire.

71. Momento de inercia con todos los niños a bordo
$I_0 = 2{,}4 \times 10^5\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$I_f = 1{,}5 \times 10^5\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$f_f = 0{,}3\text{rev/s}$

73. $I_0 = 1{,}00 \times 10^{10}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$I_f = 9{,}94 \times 10^9\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$f_f = 3{,}32\ \text{rev/min}$

75. $I = 2{,}5\ \times\ 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$\omega_P = 0{,}78\ \text{rad/s}$

77. a. $L_{\text{Tierra}} = 7{,}06 \times 10^{33}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$,
$\Delta L = 5{,}63 \times 10^{33}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$;
b. $\tau = 1{,}4 \times 10^{22}\ \text{N} \cdot \text{m}$;
c. Las dos fuerzas en el ecuador tendrían la misma magnitud, aunque diferentes direcciones: una en dirección norte y otra en dirección sur, en el lado opuesto de la Tierra. El ángulo entre las fuerzas y los brazos de palanca hacia el centro de la Tierra es 90°, por lo que un torque dado tendría una magnitud $\tau = FR_E \operatorname{sen} 90° = FR_E$. Ambos proporcionarían un torque en la misma dirección:
$\tau = 2FR_E \Rightarrow F = 1{,}3 \times 10^{15}\ \text{N}$

Problemas Adicionales

79. $a_{CM} = -\frac{3}{10}g$,
$v^2 = v_0^2 + 2a_{CM}x \Rightarrow v^2 = (7{,}0\ \text{m/s})^2 - 2\left(\frac{3}{10}g\right)x$, $v^2 = 0 \Rightarrow x = 8{,}34\ \text{m}$;
b. $t = \frac{v - v_0}{a_{CM}}$, $v = v_0 + a_{CM}t \Rightarrow t = 2{,}38\ \text{s}$;
La esfera hueca tiene un momento de inercia mayor, y por lo tanto es más difícil de poner en reposo que la canica o esfera sólida. La distancia recorrida es mayor y el tiempo transcurrido es más largo.

81. a. $W = -500{,}0\ \text{J}$;
b. $K + U_{\text{gravedad}} = \text{constante}$,
$500\ \text{J} + 0 = 0 + (6{,}0\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)h$,
$h = 8{,}5\ \text{m}$, $d = 17{,}0\ \text{m}$;
El momento de inercia es menor con la esfera hueca, por lo que se requiere menos trabajo para detenerla. Asimismo, rueda por la pendiente una distancia más corta que el aro.

83. a. $\tau = 34{,}0\ \text{N} \cdot \text{m}$;
b. $l = mr^2\omega \Rightarrow \omega = 3{,}6\ \text{rad/s}$

85. a. $d_M = 3{,}85 \times 10^8\ \text{m}$ distancia promedio hasta la Luna; periodo orbital $27{,}32\text{d} = 2{,}36 \times 10^6\text{s}$; rapidez de la Luna $\frac{2\pi 3{,}85 \times 10^8\ \text{m}}{2{,}36 \times 10^6\text{s}} = 1{,}0 \times 10^3\ \text{m/s}$; masa de la Luna $7{,}35 \times 10^{22}\ \text{kg}$,
$L = 2{,}90 \times 10^{34}\ \text{kgm}^2/\text{s}$;
b. radio de la Luna $1{,}74 \times 10^6\ \text{m}$; el periodo orbital es el mismo que (a) $\omega = 2{,}66 \times 10^{-6}\ \text{rad/s}$,
$L = 2{,}37 \times 10^{29}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$;
El momento angular orbital es $1{,}22\ \times\ 10^5$ veces mayor que el momento angular de rotación de la Luna.

87. $I = 0{,}135\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,
$\alpha = 4{,}19\ \text{rad/s}^2$, $\omega = \omega_0 + \alpha t$,
$\omega(5\ \text{s}) = 21{,}0\ \text{rad/s}$, $L = 2{,}84\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$,

$\omega(10\text{ s}) = 41{,}9\text{ rad/s}$, $L = 5{,}66\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$

89. En la ecuación de conservación del momento angular, la tasa de rotación aparece en ambos lados, por lo que mantenemos la notación (rev/min), ya que la velocidad angular puede multiplicarse por una constante para obtener (rev/min)

$L_\text{i} = -0{,}04\text{ kg} \cdot \text{m}^2(300{,}0\text{ rev/min})$,

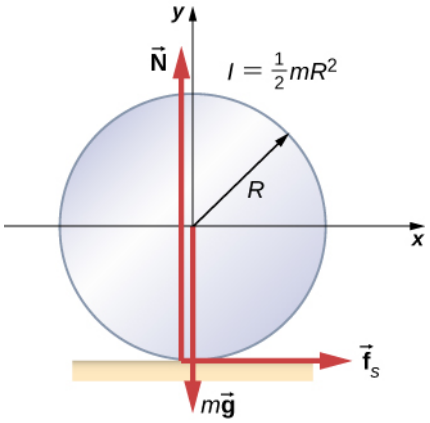
$L_\text{f} = 0{,}08\text{ kg} \cdot \text{m}^2 f_\text{f} \Rightarrow f_\text{f} = -150{,}0\text{ rev/min}$ en el sentido de las agujas del reloj

91. $I_0\omega_0 = I_\text{f}\omega_\text{f}$,
$I_0 = 6120{,}0\text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
$I_\text{f} = 1180{,}0\text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
$\omega_\text{f} = 31{,}1\text{ rev/min}$

93. $L_\text{i} = 1{,}00 \times 10^7\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$,
$I_\text{f} = 2{,}025 \times 10^5\text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
$\omega_\text{f} = 7{,}86\text{ rev/s}$

Problemas De Desafío

95. Supongamos que el rollo de papel acelera hacia delante con respecto al suelo con una aceleración a'. Entonces acelera hacia atrás con respecto al camión con una aceleración $(a - a')$.



También, $R\alpha = a - a'$ $I = \frac{1}{2}mR^2$ $\sum F_x = f_s = ma'$,
$\sum \tau = f_s R = I\alpha = I\frac{a-a'}{R}$ $f_s = \frac{I}{R^2}(a - a') = \frac{1}{2}m(a - a')$,
Resolución de a': $f_s = \frac{1}{2}m(a - a')$; $a' = \frac{a}{3}$,
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$; $d = \frac{1}{3}at^2$; $t = \sqrt{\frac{3d}{a}}$;
por lo tanto, $s = 1{,}5d$

97. a. La tensión en el cordel proporciona la fuerza centrípeta tal que $T \operatorname{sen}\theta = mr_\perp\omega^2$. El componente de la tensión que es vertical se opone a la fuerza gravitacional de tal manera que $T\cos\theta = mg$. Esto da $T = 5{,}7\text{ N}$. Resolvemos para $r_\perp = 0{,}16\text{ m}$. Esto da la longitud del cordel como $r = 0{,}32\text{ m}$.
En $\omega = 10{,}0\text{ rad/s}$, hay un nuevo ángulo, tensión y radio perpendicular a la varilla. Al dividir las dos ecuaciones que implican la tensión para eliminarla, tenemos $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{(0{,}32\text{ m}\operatorname{sen}\theta)\omega^2}{g} \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{0{,}32\text{ m}\omega^2}{g}$;
$\cos\theta = 0{,}31 \Rightarrow \theta = 72{,}2°$; b. $l_\text{inicial} = 0{,}08\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$,
$l_\text{final} = 0{,}46\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$; c. No, el coseno del ángulo es inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad angular, por lo tanto, para lograr que $\theta \to 90°$, $\omega \to \infty$. La varilla tendría que girar infinitamente rápido.

Capítulo 12

Compruebe Lo Aprendido

12.1 $x = 1{,}3$ m
12.2 (b), (c)
12.3 316,7 g; 5,8 N
12.4 $T = 1.963$ N; F = 1.732 N
12.5 $\mu_s < 0{,}5 \cot \beta$
12.6 $\vec{\mathbf{F}}_{\text{puerta en } A} = 100{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{i}} - 200{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{j}}$; $\vec{\mathbf{F}}_{\text{puerta en } B} = -100{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{i}} - 200{,}0\ \text{N}\hat{\mathbf{j}}$
12.7 711,0 N; 466,0 N
12.8 1.167 N; 980 N dirigido hacia arriba en $18°$ sobre la horizontal
12.9 206,8 kPa; $4{,}6 \times 10^{-5}$
12.10 $5{,}0 \times 10^{-4}$
12.11 63 ml
12.12 Los fluidos tienen propiedades mecánicas diferentes a las de los sólidos; los fluidos fluyen.

Preguntas Conceptuales

1. constante
3. magnitud y dirección de la fuerza, y su brazo de palanca
5. Verdadero, ya que la suma de fuerzas no puede ser cero en este caso a menos que la propia fuerza sea cero.
7. Falso, siempre que las fuerzas se sumen a cero como vectores, entonces se puede lograr el equilibrio.
9. Ayuda a un funambulista a mantener el equilibrio.
11. (Prueba)
13. En contacto con el suelo, el estrés en las extremidades de la ardilla es menor que el estrés en las extremidades del ser humano.
15. estrechamente
17. compresión; tracción
19. no
23. Actúa como "refuerzo", y aumenta un rango de valores de tensión antes de que la estructura alcance su punto de rotura.

Problemas

25. 46,8 N · m
27. 4.472 N, 153,4°
29. 23,3 N
31. 80,0 kg
33. 40 kg
35. cable derecho, 444,3 N; cable izquierdo, 888,5 N; peso del equipo 156,8 N; 16,0 kg
37. 784 N, 132,8 N
39. a. 539 N; b. 461 N; c. no dependen del ángulo
41. tensión 778 N; en la bisagra 778 N en $45°$ sobre la horizontal; no
43. 1500 N; 1620 N en $30°$
45. 1,2 mm
47. 9,0 cm
49. $4{,}0 \times 10^2$ N/cm^2
51. 0,149 µm
53. 0,57 mm
55. 8,59 mm
57. $1{,}35 \times 10^9$ Pa
59. 259,0 N
61. 0,01 %

63. 1,44 cm
65. 0,63 cm

Problemas Adicionales

69. $\tan^{-1}(1/\mu_s) = 51{,}3°$
71. a. en la esquina 66,7 N en 30° con la horizontal; en el suelo 177 N en 109° con la horizontal; b. $\mu_s = 0{,}346$
73. a. $1{,}10 \times 10^9 \text{N/m}^2$; b. $5{,}5 \times 10^{-3}$; c. 11,0 mm, 31,4 mm

Problemas De Desafío

75. $F = Mg\tan\theta$; $f = 0$
77. con la horizontal, $\theta = 42{,}2°$; $\alpha = 17{,}8°$ con el lado más inclinado de la cuña
79. $W(l_1/l_2 - 1)$; $Wl_1/l_2 + mg$
81. a. 1,1 mm; b. 6,6 mm a la derecha; c. $1{,}11 \times 10^5$ N

Capítulo 13

Compruebe Lo Aprendido

13.1 La fuerza de la gravedad sobre cada objeto aumenta con el cuadrado de la distancia inversa a medida que caen juntos, y por lo tanto también lo hace la aceleración. Por ejemplo, si la distancia se reduce a la mitad, la fuerza y la aceleración se cuadruplican. Nuestro promedio es exacto únicamente para una aceleración que aumenta linealmente, mientras que la aceleración aumenta realmente a un ritmo mayor. Así que nuestra velocidad calculada es demasiado pequeña. Según la tercera ley de Newton (fuerzas de acción-reacción), la fuerza de gravedad entre dos objetos cualesquiera debe ser la misma. No obstante, las aceleraciones no lo serán si tienen masas diferentes.

13.2 Los edificios más altos del mundo tienen todos menos de 1 km. Dado que g es proporcional a la distancia al cuadrado desde el centro de la Tierra, una simple relación muestra que el cambio de g a 1 km por encima de la superficie de la Tierra es inferior al 0,0001%. No sería necesario tenerlo en cuenta en el diseño estructural.

13.3 El valor de g desciende aproximadamente un 10 % en este cambio de altura. Así que $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$ dará un valor demasiado grande. Si utilizamos $g = 9{,}80$ m/s, entonces obtenemos
$\Delta U = mg(y_2 - y_1) = 3{,}53 \times 10^{10}$ J
que es aproximadamente un 6 % mayor que el hallado con el método correcto.

13.4 La sonda debe superar tanto la atracción gravitatoria de la Tierra como la del Sol. En el segundo cálculo de nuestro ejemplo, hallamos la rapidez necesaria para escapar del Sol desde una distancia de la órbita de la Tierra, no desde la Tierra misma. La forma correcta de hallar este valor es comenzar con la ecuación de energía, Ecuación 13.5, en la que se incluiría un término de energía potencial tanto para la Tierra como para el Sol.

13.5 Cambia la dirección de su velocidad con una fuerza que es perpendicular a la velocidad en todos los puntos. En efecto, deberá ajustar constantemente los propulsores para crear una fuerza centrípeta hasta que su momento cambie de tangencial a radial. Un simple diagrama de vectores de momento indica que el *cambio* neto en el momento es $\sqrt{2}$ veces la magnitud del momento en sí. Esto resulta ser una forma muy ineficiente de llegar a Marte. Se habla de la forma más eficaz en las Leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.

13.6 En la Ecuación 13.7, el radio aparece en el denominador dentro de la raíz cuadrada. Así que el radio deberá aumentar en un factor de 4, para disminuir la velocidad orbital en un factor de 2. La circunferencia de la órbita también ha aumentado por este factor de 4, por lo que con la mitad de la velocidad orbital, el periodo deberá ser 8 veces más largo. Eso también se puede ver directamente en la Ecuación 13.8.

13.7 Se supone que el objeto que orbita es mucho menos masivo que el cuerpo que orbita. Esto no está realmente justificado en el caso de la Luna y la Tierra. Tanto la Tierra como la Luna orbitan alrededor de su centro de masa común. Abordamos este asunto en el siguiente ejemplo.

13.8 Las estrellas del "interior" de cada galaxia estarán más cerca de la otra galaxia; de allí que sentirán una

mayor fuerza gravitatoria que las del exterior. En consecuencia, tendrán una mayor aceleración. Incluso sin esta diferencia de fuerzas, las estrellas interiores estarían orbitando a un radio menor; de allí que se produciría una elongación o estiramiento de cada galaxia. La diferencia de fuerza solo aumenta este efecto.

13.9 El semieje mayor de la órbita altamente elíptica del cometa Halley es de 17,8 UA y es la media del perihelio y del afelio. Se encuentra entre los radios orbitales de 9,5 UA y 19 UA de Saturno y Urano, respectivamente. El radio de una órbita circular es el mismo que el semieje mayor, y dado que el periodo aumenta con el incremento del semieje mayor, es esperable que el periodo de Halley esté entre los periodos de Saturno y Urano.

13.10 Considere la última ecuación anterior. Los valores de r_1 y r_2 se mantienen casi iguales, pero el diámetro de la Luna, $(r_2 - r_1)$, es una cuarta parte de la de la Tierra. Por lo tanto, las fuerzas de marea en la Luna son aproximadamente una cuarta parte de las de la Tierra.

13.11 Dada la increíble densidad necesaria para forzar que un cuerpo del tamaño de la Tierra se convierta en un agujero negro, no esperamos ver agujeros negros tan pequeños. Incluso un cuerpo con la masa de nuestro Sol tendría que estar comprimido por un factor de más de 80 que el de una estrella de neutrones. Se cree que las estrellas de este tamaño no pueden convertirse en agujeros negros. Sin embargo, en el caso de las estrellas con unas pocas masas solares, se cree que el colapso gravitacional al final de la vida de una estrella podría formar un agujero negro. Como veremos más adelante, ahora se cree que los agujeros negros son comunes en el centro de las galaxias. Estos agujeros negros galácticos suelen contener la masa de muchos millones de estrellas.

Preguntas Conceptuales

1. La verdad en última instancia es la verificación experimental. La teoría de campos se desarrolló para explicar cómo se ejerce la fuerza sin que los objetos estén en contacto, tanto para la gravedad como para las fuerzas electromagnéticas que actúan a la velocidad de la luz. Solo a partir del siglo XX hemos podido medir que la fuerza no se transmite inmediatamente.

3. La aceleración centrípeta no se dirige a lo largo de la fuerza gravitatoria y, por tanto, la línea correcta del edificio (es decir, la línea de la plomada) no se dirige hacia el centro de la Tierra. No obstante, los ingenieros utilizan una plomada o un tránsito, que responden tanto a la dirección de la gravedad como a la aceleración. No es necesario hacer ninguna consideración especial por su ubicación en la Tierra.

5. A medida que pasamos a órbitas más grandes, el cambio de energía potencial aumenta, mientras que la velocidad orbital disminuye. De allí que la relación sea más alta cerca de la superficie de la Tierra (técnicamente infinita si orbitamos en la superficie de la Tierra sin cambio de elevación), y se mueve a cero a medida que nos alejamos infinitamente.

7. El periodo de la órbita deberá ser de 24 horas. Además, el satélite deberá situarse en una órbita ecuatorial y orbitar en el mismo sentido que la rotación de la Tierra. Los tres criterios deberán cumplirse para que el satélite permanezca en una posición respecto a la superficie de la Tierra. Se necesitan al menos tres satélites, ya que dos situados en lados opuestos de la Tierra no pueden comunicarse entre sí. (Esto no es técnicamente cierto, ya que se puede elegir una longitud de onda que proporcione suficiente difracción. Sin embargo, esto sería totalmente impráctico).

9. La velocidad es mayor cuando el satélite está más cerca de la gran masa y menor cuando está más lejos, en la periapsis y la apoapsis, respectivamente. Es la conservación del momento angular la que rige esta relación. Pero también se puede deducir de la conservación de la energía que la energía cinética debe ser mayor donde la energía potencial gravitacional es menor (más negativa). La fuerza, y por tanto la aceleración, se dirige siempre hacia M en el diagrama, y la velocidad es siempre tangente a la trayectoria en todos los puntos. El vector de aceleración tiene un componente tangencial a lo largo de la dirección de la velocidad en el lugar superior del eje y; por lo tanto, el satélite está acelerando. Todo lo contrario ocurre en la posición inferior.

11. El rayo láser llegará a la pared más lejana a una altura inferior a la que salió, ya que el suelo está acelerando hacia arriba. En relación con el laboratorio, el rayo láser "cae". Por lo tanto, es de esperar que esto ocurra en un campo gravitacional. La masa de la luz, o incluso de un objeto con masa, no es relevante.

Problemas

13. $7{,}4 \times 10^{-8}$ N

15. a. $7{,}01 \times 10^{-7}$ N; b. La masa de Júpiter es

$$m_{\mathrm{J}} = 1{,}90 \times 10^{27} \text{ kg}$$
$$F_{\mathrm{J}} = 1{,}35 \times 10^{-6} \text{ N}$$
$$\frac{F_{\mathrm{f}}}{F_{\mathrm{J}}} = 0{,}521$$

17. a. $9{,}25 \times 10^{-6}$ N; b. No mucho, ya que la ISS ni siquiera es simétrica, y mucho menos esféricamente simétrica.

19. a. $1{,}41 \times 10^{-15}\,\mathrm{m/s^2}$; b. $1{,}69 \times 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$

21. a. $1{,}62\ \mathrm{m/s^2}$; b. $3{,}75\ \mathrm{m/s^2}$

23. a. 147 N; b. 25,5 N; c. 15 kg; d. 0; e. 15 kg

25. $12\ \mathrm{m/s^2}$

27. $(3/2)R_{\mathrm{E}}$

29. 5000 m/s

31. 1440 m/s

33. 11 km/s

35. a. $5{,}85 \times 10^{10}$ J; b. $-5{,}85 \times 10^{10}$ J; No. Se supone que la energía cinética es recuperable. Esto ni siquiera sería razonable aunque tuviéramos un ascensor entre la Tierra y la Luna.

37. a. 0,25; b. 0,125

39. a. $5{,}08 \times 10^{3}$ km; b. Esto es menos que el radio de la Tierra.

41. $1{,}89 \times 10^{27}$ kg

43. a. $4{,}01 \times 10^{13}$ kg; b. El satélite deberá estar fuera del radio del asteroide, por lo que no puede ser mayor que este. Si fuera de este tamaño, entonces su densidad sería de aproximadamente $1.200\ \mathrm{kg/m^3}$. Esta cifra está justo por encima de la del agua, por lo que parece bastante razonable.

45. a. $1{,}66 \times 10^{-10}\ \mathrm{m/s^2}$; Sí, la aceleración centrípeta es tan pequeña que apoya la afirmación de que un marco de referencia casi inercial puede situarse en el Sol. b $2{,}17 \times 10^{5}\,\mathrm{m/s}$

47. $1{,}98 \times 10^{30}$ kg; los valores coinciden con un margen del 0,05 %.

49. Compare la Ecuación 13.8 y la Ecuación 13.11 para ver que solo se diferencian en que el radio circular, *r*, se sustituye por el semieje mayor, *a*. Por lo tanto, el radio medio es la mitad de la suma del afelio y del perihelio, lo mismo que el semieje mayor.

51. El semieje mayor, 3,78 UA, se obtiene a partir de la ecuación del periodo. Es la mitad de la suma del afelio y del perihelio, lo que da una distancia del afelio de 4,95 UA.

53. 1,75 años

55. 19.800 N; es evidente que no se puede sobrevivir

57. $1{,}19 \times 10^{7}\,\mathrm{km}$

Problemas Adicionales

59. a. $1{,}85 \times 10^{14}$ N; b. ¡No lo haga!

61. $1{,}49 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$

63. El valor de *g* para este planeta es de $3{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, que es una cuarta parte del de la Tierra aproximadamente. Así que son débiles saltadores de altura.

65. En el polo norte, 983 N; en el ecuador, 980 N.

67. a. La velocidad de escape sigue siendo de 43,6 km/s. Al hacer un lanzamiento desde la Tierra en dirección a la velocidad tangencial de la Tierra, se necesita $43{,}4 - 29{,}8 = 13{,}8$ km/s respecto a la Tierra. b. La energía total es cero y la trayectoria es una parábola.

69. 61,5 km/s

71. a. $1{,}3 \times 10^{7}$ m; b. $1{,}56 \times 10^{10}$ J; $-3{,}12 \times 10^{10}$ J; $-1{,}56 \times 10^{10}$ J

73. a. $6{,}24 \times 10^{3}$ s o 1,8 horas aproximadamente. Para ello se usó el diámetro medio de 520 km. b. Está claro

que Vesta no es muy esférica, por lo que tendría que estar por encima de la dimensión más grande, casi 580 km. Y lo que es más importante, la naturaleza no esférica perturbaría la órbita muy rápidamente, por lo que este cálculo no sería muy preciso ni siquiera para una órbita.

75. a. 323 km/s; b. No, solo se necesita la diferencia entre la rapidez orbital del sistema solar y la velocidad de escape, por lo que alrededor de $323 - 228 = 95$ km/s.

77. Configurando $e = 1$, tenemos $\frac{\alpha}{r} = 1 + \cos\theta \rightarrow \alpha = r + r\cos\theta = r + x$; por lo tanto, $r^2 = x^2 + y^2 = (\alpha - x)^2$. Ampliar y recoger para mostrar $x = \frac{1}{-2\alpha} y^2 + \frac{\alpha}{2}$.

79. Sustituya directamente en la ecuación de la energía usando $pv_p = qv_q$ de la conservación del momento angular, y resuelva para v_p.

Problemas De Desafío

81. $g = \frac{4}{3} G\rho\pi r \rightarrow F = mg = \left[\frac{4}{3} Gm\rho\pi\right] r$, y de $F = m\frac{d^2r}{dt^2}$, obtenemos $\frac{d^2r}{dt^2} = \left[\frac{4}{3} G\rho\pi\right] r$ donde el primer término es ω^2. Entonces $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4G\rho\pi}}$ y si sustituimos $\rho = \frac{M}{4/3\pi R^3}$, obtenemos la misma expresión que para el periodo de la órbita R.

83. Usando la masa del Sol y el radio orbital de la Tierra, la ecuación da $2{,}24 \times 10^{15}\,\text{m}^2/\text{s}$. El valor de $\pi R_{\text{ES}}^2/(1 \text{ año})$ da el mismo valor.

85. $\Delta U = U_f - U_i = -\frac{GM_{\text{E}}m}{r_f} + \frac{GM_{\text{E}}m}{r_i} = GM_{\text{E}}m\left(\frac{r_f - r_i}{r_f r_i}\right)$ donde $h = r_f - r_i$. Si $h << R_{\text{E}}$, entonces $r_f r_i \approx R_{\text{E}}^2$, y al sustituirlo, tenemos

$\Delta U = GM_{\text{E}}m\left(\frac{h}{R_{\text{E}}^2}\right) = m\left(\frac{GM_{\text{E}}}{R_{\text{E}}^2}\right) h$ donde reconocemos la expresión con el paréntesis como la definición de g.

87. a. Encuentre la diferencia de fuerza, $F_{\text{marea}} == \frac{2GMm}{R^3}\Delta r$;

b. Para el caso dado, usando el radio de Schwarzschild de un problema anterior, tenemos una fuerza de marea de $9{,}5 \times 10^{-3}$ N. ¡Esto ni siquiera se notará!

Capítulo 14

Compruebe Lo Aprendido

14.1 La presión encontrada en la parte (a) del ejemplo es completamente independiente de la anchura y la longitud del lago; solo depende de su profundidad media en la presa. Por tanto, la fuerza solamente depende de la profundidad media del agua y de las dimensiones de la presa, no de la extensión horizontal del embalse. En el diagrama, obsérvese que el espesor de la presa aumenta con la profundidad para equilibrar la fuerza creciente debido al aumento de la presión.

14.2 La densidad del mercurio es 13,6 veces mayor que la del agua. Se necesitan 76 cm (29,9 in) de mercurio aproximadamente para medir la presión de la atmósfera, mientras que se necesitarían aproximadamente 10 m (34 ft) de agua.

14.3 Sí, seguiría funcionando, pero como el gas es compresible, no funcionaría con la misma eficacia. Cuando se aplica la fuerza, el gas primero se comprime y se calienta. Por lo tanto, hay que purgar el aire de los conductos de los frenos para hacer que estos funcionen correctamente.

Preguntas Conceptuales

1. El mercurio y el agua son líquidos a temperatura ambiente y presión atmosférica. El aire es un gas a temperatura ambiente y presión atmosférica. El vidrio es un material sólido amorfo (no cristalino) a temperatura ambiente y presión atmosférica. En una época se pensaba que el vidrio fluía, pero que lo hacía muy lentamente. Esta teoría surgió de la observación de que los antiguos planos de vidrio eran más gruesos en la parte inferior. Ahora se considera poco probable que esta teoría sea exacta.

3. La densidad del aire disminuye con la altitud. Para una columna de aire de temperatura constante, la

densidad disminuye exponencialmente con la altitud. Esta es una aproximación justa, pero como la temperatura cambia con la altitud, es solamente una aproximación.

5. La presión es la fuerza dividida entre el área. Si un cuchillo está afilado, la fuerza aplicada a la superficie de corte se divide en un área menor que la misma fuerza aplicada con un cuchillo sin filo. Esto significa que la presión sería mayor para el cuchillo más afilado, lo que aumenta su capacidad de corte.

7. Si los dos trozos de hielo tuvieran el mismo volumen, producirían el mismo volumen de agua. Sin embargo, el glaciar provocaría la mayor subida del lago porque parte del trozo de hielo flotante ya está sumergido en el lago y, por tanto, ya está contribuyendo a su nivel.

9. La presión actúa alrededor de su cuerpo y supone que no está en el vacío.

11. Como el nivel del río es muy alto, ha empezado a filtrarse debajo del dique. Se colocan sacos de arena alrededor de la fuga, y el agua retenida por ellos sube hasta alcanzar el mismo nivel del río, momento en el que el agua deja de subir. Los sacos de arena absorberán el agua hasta que esta llegue a la altura del dique.

13. La presión atmosférica no afecta la presión del gas en un tanque rígido, pero sí la presión dentro de un globo. En general, la presión atmosférica afecta la presión del fluido, a menos que este esté encerrado en un recipiente rígido.

15. La presión de la atmósfera se debe al peso del aire que hay encima. La presión, fuerza por área, en el manómetro será la misma a una profundidad de la atmósfera igual.

17. En absoluto. El principio de Pascal dice que el cambio de presión se ejerce a través del fluido. La explicación por la que la bañera llena requiere más fuerza para halar el tapón es por el peso del agua sobre el tapón.

19. La fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado. Cuanto mayor sea la densidad del fluido, menos fluido será necesario desplazar para que el peso del objeto se soporte y flote. Como la densidad del agua salada es mayor que la del agua dulce, se desplazará menos agua salada y el barco flotará más alto.

21. Considere dos tuberías diferentes conectadas a una única tubería de menor diámetro con un fluido que circula desde las dos tuberías hacia la tubería más pequeña. Dado que el fluido es forzado a través de un área de sección transversal más pequeña, debe moverse más rápido a medida que las líneas de flujo se acercan. Del mismo modo, si una tubería con un radio grande alimenta a otra con un radio pequeño, las líneas de corriente se acercarán y el fluido se moverá más rápido.

23. La masa de agua que entra en una sección transversal debe ser igual a la que sale. Por la ecuación de continuidad, sabemos que la densidad por el área por la velocidad debe permanecer constante. Como la densidad del agua no cambia, la velocidad por el área de la sección transversal que entra en una región debe ser igual al área de la sección transversal por la velocidad que sale de la región. Dado que la velocidad de la corriente de la fuente disminuye a medida que asciende debido a la gravedad, el área debe aumentar. Dado que la velocidad del chorro del grifo se acelera al caer, el área debe disminuir.

25. Cuando el tubo se estrecha, el fluido se ve obligado a acelerar, gracias a la ecuación de continuidad y al trabajo realizado sobre el fluido. Cuando el tubo es estrecho, la presión disminuye. Esto significa que el fluido arrastrado se empujará hacia el área estrecha.

27. El trabajo realizado por la presión se puede usar para aumentar la energía cinética y ganar energía potencial. A medida que la altura es mayor, queda menos energía para dar a la energía cinética. Finalmente, habrá una altura máxima que no podrá ser superada.

29. Debido a la velocidad del aire en el exterior del edificio, la presión fuera de la casa disminuye. La mayor presión en el interior del edificio puede hacer volar el tejado o hacer que el edificio explote.

31. El aire dentro de la manguera tiene energía cinética debido a su movimiento. La energía cinética se puede usar para realizar un trabajo contra la diferencia de presión.

33. La energía potencial debido a la posición, la energía cinética debido a la velocidad y el trabajo realizado por una diferencia de presión.

35. El agua tiene energía cinética debido a su movimiento. Esta energía puede convertirse en trabajo contra la diferencia de presión.

37. El agua en el centro de la corriente se mueve más rápido que el agua cerca de la orilla debido a la resistencia entre el agua y la orilla y entre las capas de fluido. También es probable que haya más turbulencia cerca de la orilla, lo que también ralentizará el agua. Al remar corriente arriba, el agua empuja la canoa, por lo que es mejor permanecer cerca de la orilla para minimizar la fuerza que empuja la canoa. Al desplazarse río abajo, el agua empuja la canoa, lo que aumenta su velocidad, y lo más conveniente es

permanecer en el centro de la corriente para maximizar este efecto.

39. Es de esperar que la velocidad sea menor después de la obstrucción. La resistencia aumenta debido a la reducción del tamaño de la abertura, y se creará turbulencia a causa de la obstrucción, y ambas disposiciones harán que el fluido disminuya su velocidad.

Problemas

41. $1{,}610\ \text{cm}^3$

43. La masa es de 2,58 g. El volumen de su cuerpo aumenta por el volumen de aire que inhala. La densidad media de su cuerpo disminuye cuando respira profundamente porque la densidad del aire es sustancialmente menor que la densidad media del cuerpo.

45. 3,99 cm

47. 2,86 veces más denso.

49. $15{,}6\ \text{g/cm}^3$

51. $0{,}760\ \text{m} = 76{,}0\ \text{cm} = 760\ \text{mm}$

53. prueba

55. a. Presión en $h = 7{,}06 \times 10^6\text{N}$;
b. La presión aumenta a medida que aumenta la profundidad, por lo que la presa se debe construir más gruesa hacia el fondo para soportar la mayor presión.

57. 4,08 m

59. 251 atm

61. $5{,}76 \times 10^3$ N fuerza adicional

63. Si el sistema no se mueve, la fricción no tendría importancia. Con la fricción, sabemos que hay pérdidas, por lo que $W_\text{o} = W_\text{i} - W_\text{f}$; por lo tanto, la producción de trabajo es menor que la entrada de trabajo. En otras palabras, para tener en cuenta la fricción, habría que empujar el pistón de entrada con más fuerza de la calculada.

65. a. 99,5 % sumergido; b. 96,9 % sumergido.

67. a. 39,5 g; b $50\ \text{cm}^3$; c. $0{,}79\ \text{g/cm}^3$; alcohol etílico.

69. a. $960\ \text{kg/m}^3$; b. 6,34 %; flota más alto en el agua de mar.

71. a. 0,24; b. 0,72; c. Sí, el corcho flotará en alcohol etílico.

73.
$$\begin{aligned}\text{neta } F &= F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A = (p_2 - p_1)A = (h_2 \rho_\text{fl} g - h_1 \rho_\text{fl} g)\, A \\ &= (h_2 - h_1)\rho_\text{fl} g A, \text{ donde } \rho_\text{fl} = \text{densidad del fluido.} \\ \text{neta } F &= (h_2 - h_1) A \rho_\text{fl} g = V_\text{fl} \rho_\text{fl} g = m_\text{fl} g = w_\text{fl}\end{aligned}$$

75. $2{,}77\ \text{cm}^3/\text{s}$

77. a. 0,75 m/s; b. 0,13 m/s

79. a. 12,6 m/s; b $0{,}0800\ \text{m}^3/\text{s}$; c. No, la tasa de flujo y la velocidad son independientes de la densidad del fluido.

81. Si el fluido es incompresible, la tasa de flujo que pasa por ambos lados será igual:

$$Q = A_1 \bar{v}_1 = A_2 \bar{v}_2, \text{ o } \pi \frac{d_1^2}{4} \bar{v}_1 = \pi \frac{d_2^2}{4} \bar{v}_2 \Rightarrow \bar{v}_2 = \bar{v}_1 (d_1^2/d_2^2) = \bar{v}_1 (d_1/d_2)^2$$

83.
$$\begin{aligned}F &= pA \Rightarrow p = \frac{F}{A}, \\ [p] &= \text{N/m}^2 = \text{N} \cdot \text{m/m}^3 = \text{J/m}^3 = \text{energía/volumen}\end{aligned}$$

85. −135 mm Hg

87. a. $1{,}58 \times 10^6\ \text{N/m}^2$; b. 163 m

89. a. $v_2 = 3{,}28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;
b. $t = 0{,}55$ s
$x = vt = 1{,}81$ m

91. a. $3{,}02 \times 10^{-3}$ N; b. $1{,}03 \times 10^{-3}$

93. prueba

95. 40 m/s

97. $0{,}537r$; el radio se reduce al 53,7 % de su valor normal.
99. a. $2{,}40 \times 10^9$ N · s/m^5; b. 48,3 (N/m^2) · s; c. $2{,}67 \times 10^4$ W
101. a. Boquilla $v = 25{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$N_\text{R} = 1{,}27 \times 10^5 > 2.000 \Rightarrow$
El flujo no es laminar.
b. Manguera: $v = 1{,}96\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$N_\text{R} = 35.100 > 2.000 \Rightarrow$
El flujo no es laminar.
103. $3{,}16 \times 10^{-4}$ m^3/s

Problemas Adicionales

105. 30,6 m

107. a. $p_{120} = 1{,}60 \times 10^4$ N/m^2 ;
$p_{80} = 1{,}07 \times 10^4$ N/m^2
b. Dado que un bebé solo mide 20 pulgadas aproximadamente, mientras que un adulto mide 70 pulgadas aproximadamente, se espera que la presión arterial de un bebé sea menor que la de un adulto. La sangre solo siente una presión de 20 pulgadas en vez de 70 pulgadas, por lo que la presión debería ser menor.
109. a. 41,4 g; b. 41,4 cm^3; c. 1,09 g/cm^3. Está claro que no es la densidad del hueso en todas partes. Las bolsas de aire tendrán una densidad de, aproximadamente, $1{,}29 \times 10^{-3}$ g/cm^3, mientras que el hueso será sustancialmente más denso.
111. 12,3 N
113. a. $3{,}02 \times 10^{-2}$ cm/s. (esta pequeña velocidad permite el tiempo de difusión de los materiales hacia y desde la sangre). b $2{,}37 \times 10^{10}$ capilares (esta gran cifra es una sobreestimación, pero sigue siendo razonable).
115. a. $2{,}76 \times 10^5$ N/m^2; b. $P_2 = 2{,}81 \times 10^5$ N/m^2
117. $8{,}7 \times 10^{-2}$ mm^3/s
119. a. 1,52; b. La turbulencia disminuiría la tasa de flujo de la sangre, lo que requeriría un aumento aún mayor de la diferencia de presión, lo que provocaría una mayor presión arterial.

Problemas De Desafío

121. $p = 0{,}99 \times 10^5$ Pa
123. 800 kg/m^3
125. 11,2 m/s
127. a. 71,8 m/s; b. 257 m/s
129. a. 150 cm^3/s; b. 33,3 cm^3/s; c. 25,0 cm^3/s; d. 0,0100 cm^3/s; e. 0,0300 cm^3/s
131. a. $1{,}20 \times 10^5$ N/m^2; b. La tasa de flujo en el conducto aumenta un 90 %. c. Hay 38 usuarios más por la tarde aproximadamente.

Capítulo 15

Compruebe Lo Aprendido

15.1 La regla es un sistema más rígido, que soporta mayor fuerza para la misma cantidad de desplazamiento. La regla rompe su mano con más fuerza, lo que duele más.
15.2 Puede aumentar la masa del objeto que está oscilando. Otras opciones serían reducir la amplitud o utilizar un resorte menos rígido.
15.3 En el centro de la mesa se encuentra una botella de kétchup sobre una bandeja giratoria. Usted la pone a girar en movimiento circular uniforme. Un juego de luces ilumina la botella, lo que produce una sombra en la pared.
15.4 El movimiento de los péndulos no diferirá en absoluto porque la masa de la pesa no tiene ningún efecto

sobre el movimiento de un péndulo simple. Los péndulos solo se ven afectados por el periodo (el cual está relacionado con la longitud del péndulo) y por la aceleración debido a la gravedad.

15.5 La fricción suele entrar en juego cuando un objeto se mueve. La fricción provoca amortiguación en un oscilador armónico.

15.6 El intérprete debe cantar una nota que corresponda a la frecuencia natural de la copa. Cuando la onda sonora se dirige a la copa, esta responde resonando a la misma frecuencia que la onda sonora. Si se introduce suficiente energía en el sistema, la copa empieza a vibrar y acaba por romperse.

Preguntas Conceptuales

1. La fuerza restauradora debe ser proporcional al desplazamiento y actuar en sentido contrario a la dirección del movimiento, sin fuerzas de arrastre ni de fricción. La frecuencia de oscilación no depende de la amplitud.

3. Ejemplos: Una masa unida a un resorte sobre una mesa sin fricción, una masa colgada de una cuerda y un péndulo simple con una pequeña amplitud de movimiento. Todos estos ejemplos tienen frecuencias de oscilación que son independientes de la amplitud.

5. Como la frecuencia es proporcional a la raíz cuadrada de la constante de fuerza e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa, es probable que el camión esté muy cargado, ya que la constante de fuerza sería la misma tanto si el camión está vacío como si está muy cargado.

7. En un automóvil, la energía potencial elástica se almacena cuando el choque se extiende o se comprime. En algunos zapatos para correr la energía potencial elástica se almacena en la compresión del material de las suelas de los zapatos. En el salto con pértiga, la energía potencial elástica se almacena en la flexión de la pértiga.

9. El sistema general es estable. Puede haber momentos en los que la estabilidad se vea interrumpida por una tormenta, pero la fuerza impulsora proporcionada por el sol devuelve a la atmósfera a un patrón estable.

11. La velocidad máxima es igual a $v_{\text{máx.}} = A\omega$ y la frecuencia angular es independiente de la amplitud, por lo que esta se vería afectada. El radio del círculo representa la amplitud del círculo, lo que hace que la amplitud sea mayor.

13. El periodo del péndulo es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. En verano, la longitud aumenta y el periodo también. Si el periodo debe ser de un segundo, pero el periodo es mayor de un segundo en el verano, oscilará menos de 60 veces por minuto y el reloj funcionará lentamente. En invierno irá rápido.

15. Sistema de suspensión de un automóvil.

17. La segunda ley de la termodinámica establece que las máquinas de movimiento perpetuo son imposibles. Finalmente, el movimiento ordenado del sistema disminuye y vuelve al equilibrio.

19. Todo movimiento armónico es un movimiento armónico amortiguado, pero la amortiguación puede ser insignificante. Esto se debe a las fuerzas de fricción y arrastre. Es fácil calcular cinco ejemplos de movimiento amortiguado: (1) Una masa que oscila sobre un resorte (al final llega al reposo). (2) El sistema de suspensión de un automóvil (por suerte, también llegan a estar en reposo). (3) Un péndulo es un reloj de pie (se añaden pesos para añadir energía a las oscilaciones). (4) Un niño en un columpio (al final se queda parado, a menos que se añada energía empujándolo). (5) Una canica rodando en un bol (al final se detiene). En cuanto al movimiento no amortiguado, incluso una masa sobre un resorte en el vacío acabará por llegar al reposo debido a las fuerzas internas del resorte. La amortiguación puede ser insignificante, pero no puede eliminarse.

Problemas

21. Prueba

23. 0,400 s/latido

25. 12.500 Hz

27. a. 340 km/h; b $11{,}3 \times 10^3$ rev/min

29. $f = \frac{1}{3} f_0$

31. 0,009 kg; 2 %

33. a. $1{,}57 \times 10^5$ N/m; b. 77 kg, sí, es elegible para jugar.

35. a. $6{,}53 \times 10^3$ N/m; b. sí, cuando el hombre está en su punto más bajo en su salto el resorte estará más

comprimido.

37. a. 1,99 Hz; b. 44,3 cm; c. 65,0 cm
39. a. 0,335 m/s; b $5{,}61 \times 10^{-4}$ J
41. a. $x(t) = 2\text{ mcos}\left(0{,}52\text{s}^{-1}t\right)$; b. $v(t) = (-1{,}05\text{ m/s})\text{sen}\left(0{,}52\text{s}^{-1}t\right)$
43. 24,8 cm
45. 4,01 s
47. 1,58 s
49. $9{,}82002\text{ m/s}^2$
51. 6 %
53. 141 J
55. a. $4{,}90 \times 10^{-3}$ m; b. $1{,}15 \times 10^{-2}$ m

Problemas Adicionales

57. 94,7 kg
59. a. 314 N/m; b. 1,00 s; c. 1,25 m/s
61. relación de 2,45
63. La longitud debe aumentar un 0,0116 %.
65. $\theta = (0{,}31\text{ rad})\text{sen}\left(3{,}13\text{ s}^{-1}t\right)$
67. a. 0,99 s; b. 0,11 m

Problemas De Desafío

69. a. $3{,}95 \times 10^6$ N/m; b. $7{,}90 \times 10^6$ J
71. $F \approx -\text{constante } r'$
73. a. 7,54 cm; b $3{,}25 \times 10^4$ N/m

Capítulo 16

Compruebe Lo Aprendido

16.1 La longitud de onda de las ondas depende de la frecuencia y la velocidad de la onda. La frecuencia de la onda sonora es igual a la frecuencia de la onda en la cuerda. Las longitudes de onda de las ondas sonoras y de las ondas de la cuerda son iguales solo si las velocidades de las ondas son las mismas, lo que no siempre ocurre. Si la velocidad de la onda sonora es diferente de la velocidad de la onda en la cuerda, las longitudes de onda son diferentes. Esta velocidad de las ondas sonoras se analizará en la sección Sonido.

16.2 En una onda transversal, la onda puede moverse a una velocidad de propagación constante a través del medio, pero el medio oscila perpendicularmente al movimiento de la onda. Si la onda se mueve en la dirección *x* positiva, el medio oscila hacia arriba y hacia abajo en la dirección *y*. Por tanto, la velocidad del medio no es constante, pero la velocidad y la aceleración del medio son similares a las del movimiento armónico simple de una masa sobre un resorte.

16.3 Sí, una función coseno es igual a una función seno con un deslizamiento de fase, y cualquiera de las dos funciones se puede usar en una función de onda. Cuál función es más conveniente usar depende de las condiciones iniciales. En la Figura 16.11, la onda tiene una altura inicial de $y(0{,}00, 0{,}00) = 0$ y luego la altura de la onda aumenta hasta la altura máxima en la cresta. Si la altura inicial en el tiempo inicial era igual a la amplitud de la onda $y(0{,}00, 0{,}00) = +A$, entonces podría ser más conveniente modelar la onda con una función coseno.

16.4 Esta onda, con amplitud $A = 0{,}5$ m, longitud de onda $\lambda = 10{,}00$ m, periodo $T = 0{,}50$ s, es una solución de la ecuación de onda con una velocidad de la onda $v = 20{,}00$ m/s.

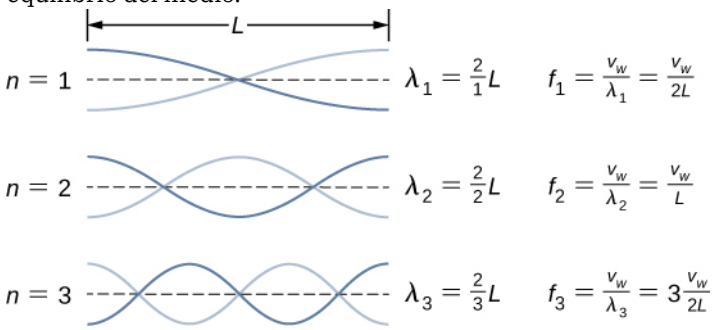
16.5 Dado que la rapidez de una onda en una cuerda tensada es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión dividida entre la densidad lineal, la rapidez de onda aumentaría por $\sqrt{2}$.

16.6 A primera vista, la potencia promediada en el tiempo de una onda sinusoidal en una cuerda puede parecer proporcional a la densidad lineal de la cuerda porque $P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v$; sin embargo, la velocidad

de la onda depende de la densidad lineal. Al sustituir la rapidez de onda con $\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$ se muestra que la potencia es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión y proporcional a la raíz cuadrada de la densidad lineal de masa

$$P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{1}{2}A^2\omega^2\sqrt{\mu F_T}.$$

16.7 Sí, las ecuaciones funcionarían igualmente bien para condiciones de frontera simétricas de un medio libre de oscilar en cada extremo donde hubiera un antinodo en cada extremo. A continuación se muestran los modos normales de los tres primeros modos. La línea punteada muestra la posición de equilibrio del medio.



Observe que el primer modo tiene dos cuartos, o sea, la mitad de una longitud de onda. El segundo modo es un cuarto de longitud de onda, seguido de la mitad de una longitud de onda, seguido de un cuarto de longitud de onda o una longitud de onda completa. El tercer modo es de una longitud de onda y media. El resultado es el mismo que el de la cuerda con un nodo en cada extremo. Las ecuaciones para condiciones de frontera fija funcionan igualmente bien para condiciones de frontera fijas y condiciones de frontera libres. Estos resultados se retomarán en el próximo capítulo cuando se hable de la onda sonora en un tubo abierto.

Preguntas Conceptuales

1. Una onda en una cuerda de guitarra es un ejemplo de onda transversal. La alteración de la cuerda se mueve perpendicularmente a la propagación de la onda. El sonido producido por la cuerda es una onda longitudinal en la que la alteración del aire se mueve en paralelo a la propagación de la onda.

3. La velocidad de propagación es la rapidez de la onda que se propaga a través del medio. Si la rapidez de onda es constante, la velocidad se puede calcular por $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$. La frecuencia es el número de ondas que pasan por un punto por unidad de tiempo. La longitud de onda es directamente proporcional a la rapidez de onda e inversamente proporcional a la frecuencia.

5. No, la distancia a la que mueva la mano hacia arriba y hacia abajo determinará la amplitud de la onda. La longitud de onda dependerá de la frecuencia con la que mueva la mano hacia arriba y hacia abajo y de la velocidad de la onda a través del resorte.

7. La luz del Sol y de las estrellas llega a la Tierra a través del espacio vacío, donde no hay ningún medio.

9. La longitud de onda es igual a la velocidad de la onda por la frecuencia, y el número de onda es igual a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, así que sí, el número de onda dependerá de la frecuencia y también de la velocidad de la onda que se propaga a través del resorte.

11. El medio presenta un movimiento armónico simple mientras la onda se propaga a través del medio, y cambia continuamente de velocidad, por lo que se acelera. La aceleración del medio se debe a su fuerza restauradora, la cual actúa en dirección opuesta al desplazamiento.

13. La rapidez de onda es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión, por lo que la velocidad se duplica.

15. Como la velocidad de una onda en una cuerda es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad lineal de masa, la velocidad sería mayor en la densidad lineal de masa baja de la cuerda.

17. La tensión en el cable se debe al peso del cable eléctrico.

19. La potencia promediada en el tiempo es $P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v$. Si la frecuencia o la amplitud se reducen a la mitad, la potencia disminuye en un factor de 4.

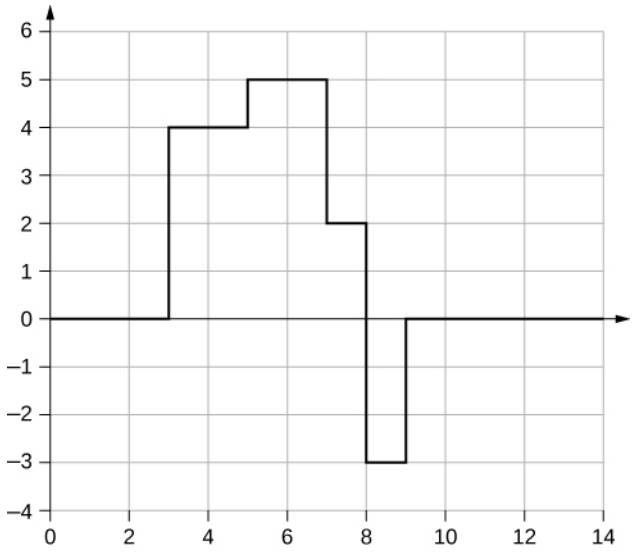
21. Cuando una porción de la cuerda se mueve verticalmente, ejerce una fuerza sobre la porción vecina de la

cuerda, realiza un trabajo sobre la porción y transfiere la energía.

23. La intensidad de una onda esférica es $I = \frac{P}{4\pi r^2}$, si no se disipa energía, la intensidad disminuirá en un factor de nueve a tres metros.

25. En la interfase, el pulso incidente produce un pulso reflejado y un pulso transmitido. El pulso reflejado estaría desfasado con respecto al pulso incidente, y se movería a la misma velocidad de propagación que el pulso incidente, pero lo haría en la dirección opuesta. El pulso transmitido se desplazaría en la misma dirección que el pulso incidente, pero a la mitad de velocidad. El pulso transmitido estaría en fase con el pulso incidente. Tanto el pulso reflejado como el transmitido tendrían amplitudes menores que la del pulso incidente.

27.



29. Puede ser tan fácil como cambiar la longitud o la densidad una pequeña cantidad para que las piezas no resuenen a la frecuencia del motor.

31. La energía se suministra a la copa por el trabajo realizado por la fuerza del dedo sobre la copa. Cuando se suministra a la frecuencia adecuada, se forman ondas estacionarias. La copa resuena y las vibraciones producen sonido.

33. Para la ecuación $y(x,t) = 4{,}00\text{ cm sen}\left(3\text{ m}^{-1}x\right)\cos\left(4\text{ s}^{-1}t\right)$, hay un nodo porque cuando $x = 0{,}00$ m, $\text{sen}\left(3\text{ m}^{-1}\,(0{,}00\text{ m})\right) = 0{,}00$, así que $y(0{,}00\text{ m}, t) = 0{,}00$ m todo el tiempo. Para la ecuación $y(x,t) = 4{,}00\text{ cm sen}\left(3\text{ m}^{-1}x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(4\text{ s}^{-1}t\right)$, hay un antinodo porque cuando $x = 0{,}00$ m, $\text{sen}\left(3\text{ m}^{-1}\,(0{,}00\text{ m}) + \frac{\pi}{2}\right) = +1{,}00$, así que $y(0{,}00\text{ m}, t)$ oscila entre $+A$ y $-A$ como el término del coseno oscila entre +1 y −1.

Problemas

35. $2d = vt \Rightarrow d = 11{,}25$ m

37.
$$\begin{aligned} v &= f\lambda, \text{ por lo que } f = 0{,}125\text{ Hz, por lo que} \\ N &= 7{,}50\text{ veces} \end{aligned}$$

39. $v = f\lambda \Rightarrow \lambda = 0{,}400$ m

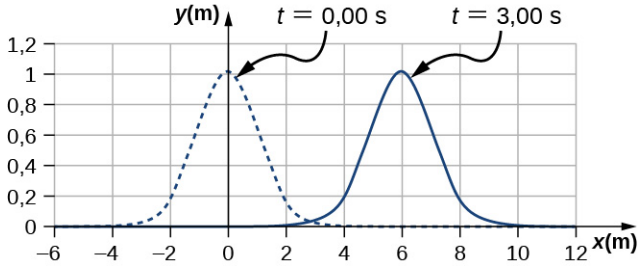
41. $v = f\lambda \Rightarrow f = 2{,}50 \times 10^9$ Hz

43. a. Las ondas P superan a las ondas S en una velocidad de $v = 3{,}20$ km/s; por lo tanto, $\Delta d = 0{,}320$ km. b. Dado que la incertidumbre en la distancia es inferior a un kilómetro, nuestra respuesta a la parte (a) no parece limitar la detección de las detonaciones de bombas nucleares. Sin embargo, si las velocidades son inciertas, la incertidumbre en la distancia aumentaría y podría dificultar la identificación de la fuente de las ondas sísmicas.

45.
$$\begin{aligned} v &= 1.900\text{ m/s} \\ \Delta t &= 1{,}05\ \mu\text{s} \end{aligned}$$

47. $y(x,t) = -0{,}037$ cm

49.



El pulso se moverá $\Delta x = 6{,}00$ m.

51. a. $A = 0{,}25$ m; b. $k = 0{,}30\ \text{m}^{-1}$; c. $\omega = 0{,}90\ \text{s}^{-1}$; d. $v = 3{,}0$ m/s; e. $\phi = \pi/3$ rad; f. $\lambda = 20{,}93$ m; g. $T = 6{,}98$ s

53. $A = 0{,}30$ m, $\lambda = 4{,}50$ m, $v = 18{,}00$ m/s, $f = 4{,}00$ Hz, $T = 0{,}25$ s

55. $y(x,t) = 0{,}23\ \text{m}\ \text{sen}\left(3{,}49\ \text{m}^{-1}x - 0{,}63\ \text{s}^{-1}t\right)$

57. Tienen la misma frecuencia angular, la misma frecuencia y el mismo periodo. Están desplazándose en direcciones opuestas y $y_2(x,t)$ tiene el doble de longitud de onda que $y_1(x,t)$ y se mueve a la mitad de la rapidez de onda.

59. Cada partícula del medio se desplaza una distancia de $4A$ en cada periodo. El periodo se puede calcular al dividir la velocidad entre la longitud de onda: $t = 10{,}42$ s

61. a. $\mu = 0{,}040$ kg/m; b. $v = 15{,}75$ m/s

63. $v = 180$ m/s

65. $v = 547{,}723$ m/s, $\Delta t = 5{,}48$ ms

67. 0,707

69. $v_1 t + v_2 t = 2{,}00$ m, $t = 1{,}69$ ms

71. $v = 288{,}68$ m/s, $\lambda = 0{,}73$ m

73. a. $A = 0{,}0125$ cm; b. $F_T = 0{,}96$ N

75. $v = 74{,}54$ m/s, $P_\lambda = 91{,}85$ W

77. a. $I = 20{,}0\ \text{W/m}^2$; b.
$$I = \frac{P}{A},\ A = 10{,}0\ \text{m}^2$$
$$A = 4\pi r^2,\ r = 0{,}892\ \text{m}$$

79. $I = 650\ \text{W/m}^2$

81.
$$P \propto E \propto I \propto X^2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2$$
$$P_2 = 2{,}50\ \text{kW}$$

83.
$$I \propto X^2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$I_2 = 3{,}38 \times 10^{-5}\ \text{W/m}^2$$

85. $f = 100{,}00$ Hz, $A = 1{,}10$ cm

87. a. $I_2 = 0{,}063 I_1$; b.
$$I_1 4\pi r_1^2 = I_2 4\pi r_2^2$$
$$r_2 = 3{,}16\ \text{m}$$

89. $2\pi r_1 A_1^2 = 2\pi r_2 A_2^2$, $A_1 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2} A_1 = 0{,}17$ m

91. $y(x,t) = 0{,}63$ m

93. $A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$, $\phi = 1{,}17$ rad

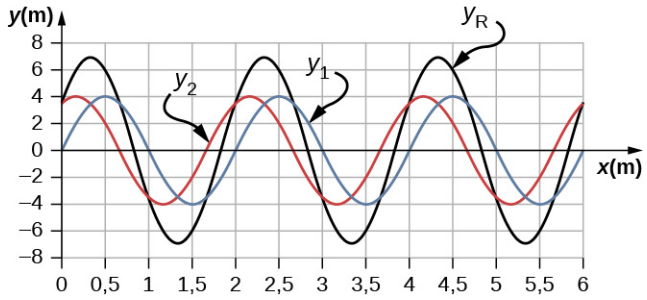
95. $y_R = 1{,}90$ cm

$\omega = 6{,}28\ \text{s}^{-1}$, $k = 3{,}00\ \text{m}^{-1}$, $\phi = \frac{\pi}{8}$ rad,

97.

$A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$, $A = 0{,}37$ m

99. a.



;

b. $\lambda = 2{,}0$ m, $A = 4$ m; c. $\lambda_R = 2{,}0$ m, $A_R = 6{,}93$ m

101. $y_R(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$; El resultado no es sorprendente porque $\cos(\theta) = \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

103.

$\lambda_n = \frac{2{,}00}{n}L$, $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$

$\lambda_1 = 4{,}00$ m, $f_1 = 12{,}5$ Hz

$\lambda_2 = 2{,}00$ m, $f_2 = 25{,}00$ Hz

$\lambda_3 = 1{,}33$ m, $f_3 = 37{,}59$ Hz

105.

$v = 158{,}11$ m/s, $\lambda = 4{,}44$ m, $f = 35{,}61$ Hz

$\lambda_s = 9{,}63$ m

107. $y(x,t) = \left[0{,}60\ \text{cm}\ \text{sen}\left(3\ \text{m}^{-1}x\right)\right]\cos\left(4\ \text{s}^{-1}t\right)$

109.

$\lambda_{100} = 0{,}06$ m

$v = 56{,}8$ m/s, $f_n = nf_1$, $n = 1, 2, 3, 4, 5...$

$f_{100} = 947$ Hz

111. $T = 2\Delta t$, $v = \frac{\lambda}{T}$, $\lambda = 2{,}12$ m

113. $\lambda_1 = 6{,}00$ m, $\lambda_2 = 3{,}00$ m, $\lambda_3 = 2{,}00$ m, $\lambda_4 = 1{,}50$ m

$v = 258{,}20\ \text{m/s} = \lambda f$

$f_1 = 43{,}03$ Hz, $f_2 = 86{,}07$ Hz, $f_3 = 129{,}10$ Hz, $f_4 = 172{,}13$ Hz

115. $v = 134{,}16$ ms, $\lambda = 1{,}4$ m, $f = 95{,}83$ Hz, $T = 0{,}0104$ s

Problemas Adicionales

117. $\lambda = 0{,}10$ m

119. a. $f = 4{,}74 \times 10^{14}$ Hz; b. $\lambda = 422$ nm

121. $\lambda = 16{,}00\text{ m}, \quad f = 0{,}10\text{ Hz}, \quad T = 10{,}00\text{ s}, \quad v = 1{,}6\text{ m/s}$

123. $\lambda = (v_b + v)\,t_b, \quad v = 3{,}75\text{ m/s}, \quad \lambda = 3{,}00\text{ m}$

125.

$$\frac{\partial^2 (y_1+y_2)}{\partial t^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(kx-\omega t) - A\omega^2 \operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi)$$

$$\frac{\partial^2 (y_1+y_2)}{\partial x^2} = -Ak^2 \operatorname{sen}(kx-\omega t) - Ak^2 \operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$-A\omega^2 \operatorname{sen}(kx-\omega t) - A\omega^2 \operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi) = \left(\frac{1}{v^2}\right)\left(-Ak^2 \operatorname{sen}(kx-\omega t) - Ak^2 \operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi)\right)$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

127. $y(x,t) = 0{,}40\text{ m} \operatorname{sen}\left(0{,}015\text{ m}^{-1}x + 1{,}5\text{ s}^{-1}t\right)$

129. $v = 223{,}61\text{ m/s},\ k = 1{,}57\text{ m}^{-1},\ \omega = 142{,}43\text{ s}^{-1}$

131.

$$P = \frac{1}{2}A^2(2\pi f)^2\sqrt{\mu F_T}$$

$$\mu = 2{,}00 \times 10^{-4}\text{ kg/m}$$

133. $P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\frac{\lambda}{T},\ \mu = 0{,}0018\text{ kg/m}$

135. a. $A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right),\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 1,\ \phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$; b.

$$A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right),\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0,\ \phi = 0, \pi, 3\pi, 5\pi\ldots$$

137. $y_R(x,t) = 0{,}6\text{ m} \operatorname{sen}\left(4\text{ m}^{-1}x\right)\cos\left(3\text{ s}^{-1}t\right)$

139. a. (1) $F_T - 20{,}00\text{ kg}\left(9{,}80\text{ m/s}^2\right)\cos 45° = 0$; b.

(2) $m\left(9{,}80\text{ m/s}^2\right) - F_T = 0$

$$m = 14{,}14\text{ kg}$$

$$F_T = 138{,}57\text{ N}$$
$$v = 74{,}45\text{ m/s}$$

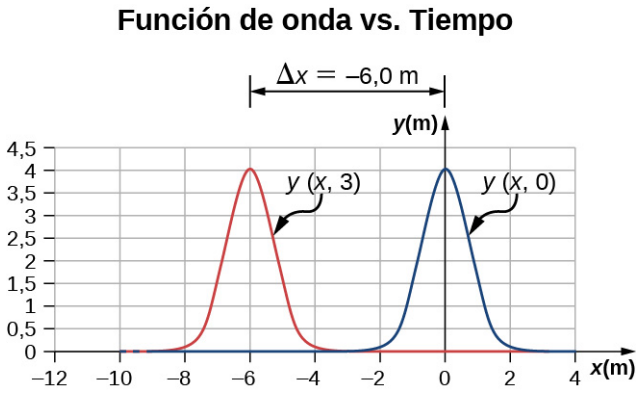
141. $F_T = 2\text{ N}, v = 6{,}73\text{ m/s}$

143. a. $f_n = \frac{nv}{2L},\ v = \frac{2Lf_{n+1}}{n+1},\ \frac{n+1}{n} = \frac{2Lf_{n+1}}{2Lf_n},\ 1 + \frac{1}{n} = 1{,}2,\ n = 5$; b. $F_T = 245{,}76\text{ N}$

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L,\ \lambda_5 = 1{,}6\text{ m},\ \lambda_6 = 1{,}33\text{ m}$$

Problemas De Desafío

145. a. Se mueve en la dirección x negativa con una velocidad de propagación de $v = 2{,}00$ m/s. b. $\Delta x = -6{,}00$ m; c



$$\operatorname{sen}(kx-\omega t) = \operatorname{sen}\left(kx+\tfrac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t+\tfrac{\phi}{2}\right)-\cos\left(kx+\tfrac{\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t+\tfrac{\phi}{2}\right)$$

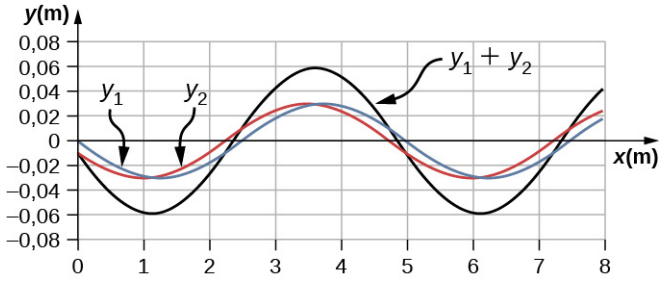
147. $\operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi) = \operatorname{sen}\left(kx+\tfrac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t+\tfrac{\phi}{2}\right)+\cos\left(kx+\tfrac{\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t+\tfrac{\phi}{2}\right)$

$$\operatorname{sen}(kx-\omega t)+\operatorname{sen}(kx+\omega t+\phi) = 2\operatorname{sen}\left(kx+\tfrac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t+\tfrac{\phi}{2}\right)$$

$$y_R = 2A\operatorname{sen}\left(kx+\tfrac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t+\tfrac{\phi}{2}\right)$$

149. $\operatorname{sen}\left(kx+\tfrac{\phi}{2}\right)=0,\ kx+\tfrac{\phi}{2}=0,\pi,2\pi,\ 1{,}26\ \mathrm{m}^{-1}x+\tfrac{\pi}{20}=\pi,2\pi,3\pi$;

$x = 2{,}37\ \mathrm{m}, 4{,}86\ \mathrm{m}, 7{,}35\ \mathrm{m}$



Capítulo 17

Compruebe Lo Aprendido

17.1 Tanto el sonido como la luz se desplazan a velocidades definidas, y la velocidad del sonido es más lenta que la de la luz. El primer proyectil está probablemente muy cerca, por lo que la diferencia de velocidad no es perceptible. El segundo proyectil está más lejos, por lo que la luz llega a sus ojos notablemente antes que la onda sonora a los oídos.

17.2 10 dB: crujido de hojas; 50 dB: oficina regular; 100 dB: fábrica ruidosa

17.3 La amplitud es directamente proporcional a la experiencia del volumen. A medida que aumenta la amplitud, aumenta el volumen.

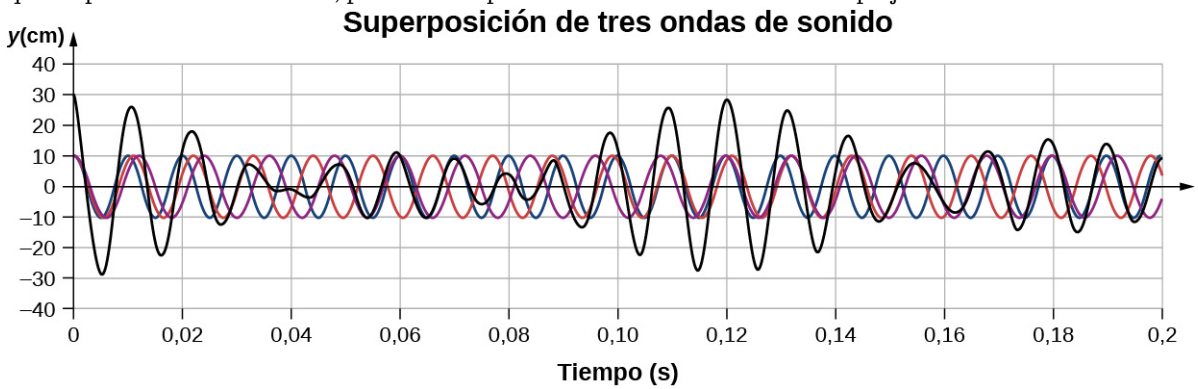
17.4 En el ejemplo, los dos altavoces producían sonido a una sola frecuencia. La música tiene varias frecuencias y longitudes de onda.

17.5 Los auriculares regulares solo bloquean las ondas sonoras con una barrera física. Los auriculares con cancelación de ruido utilizan interferencia destructiva para reducir el volumen de sonidos exteriores.

17.6 Cuando el tubo resuena a su frecuencia natural, el nodo de la onda se sitúa en el extremo cerrado del tubo y el antinodo en el extremo abierto. La longitud del tubo es igual a un cuarto de la longitud de onda de esta onda. Así, si conocemos la longitud de onda de la onda, podemos determinar la longitud del tubo.

17.7 Compare sus tamaños. Los instrumentos de tono agudo suelen ser más pequeños que los de tono grave porque generan una longitud de onda menor.

17.8 Una forma fácil de entender este evento es utilizar un gráfico, como se muestra a continuación. Parece que se producen batimientos, pero con un patrón de interferencia más complejo.



17.9 Si estoy conduciendo y oigo el corrimiento Doppler en la sirena de una ambulancia, podría saber cuándo se está acercando y también si ha pasado de largo. Esto me ayudaría a saber si debía detenerme y dejar pasar a la ambulancia.

Preguntas Conceptuales

1. El sonido es una alteración de la materia (una onda de presión) que se transmite desde su origen hacia el exterior. La audición es la percepción humana del sonido.

3. Considere una onda sonora que se mueve en el aire. La presión del aire es la condición de equilibrio, esto es el cambio de presión que produce la onda sonora.

5. La frecuencia no cambia cuando la onda sonora pasa de un medio a otro. Como la velocidad cambia y la frecuencia no, la longitud de onda debe cambiar. Esto es similar a la fuerza impulsora de un oscilador armónico o una onda en la cuerda.

7. El transductor envía una onda sonora que se refleja en el objeto en cuestión y mide el tiempo que tarda la onda sonora en volver. Dado que la velocidad del sonido es constante, la distancia al objeto se puede hallar al multiplicar la velocidad del sonido por la mitad del intervalo de tiempo medido.

9. Los tapones para los oídos reducen la intensidad del sonido tanto en el agua como en la superficie, pero investigadores de la Armada descubrieron que el sonido bajo el agua se escucha a través de las vibraciones del mastoideo, que es el hueso que está detrás de la oreja.

11. La longitud de onda fundamental de un tubo abierto por cada extremo es de $2L$, mientras que la longitud de onda de un tubo abierto en un extremo y cerrado por otro es de $4L$. El tubo abierto en un extremo tiene la frecuencia fundamental más baja, suponiendo que la velocidad del sonido es la misma en ambos tubos.

13. La longitud de onda en cada uno es el doble de la longitud del tubo. La frecuencia depende de la longitud de onda y de la rapidez de las ondas sonoras. La frecuencia en la habitación B es mayor porque la velocidad del sonido es mayor donde la temperatura es más alta.

15. Cuando resuena a la frecuencia fundamental, la longitud de onda para el tubo C es de $4L$, y para los tubos A y B es de $2L$. La frecuencia es igual a $f = v/\lambda$. El tubo C tiene la frecuencia más baja y los tubos A y B tienen la misma frecuencia, la cual es superior a la del tubo C.

17. Como las condiciones de frontera son ambas simétricas, las frecuencias son $f_n = \frac{nv}{2L}$. Como la velocidad es la misma en cada uno, las frecuencias son las mismas. Si la rapidez de onda se duplicara en la cuerda, las frecuencias en la cuerda serían el doble de las frecuencias en el tubo.

19. La frecuencia del diapasón desconocido es de 255 Hz. No, si solo se utiliza el diapasón de 250 Hz, la escucha de la frecuencia de batimiento solo podría limitar las posibles frecuencias a 245 Hz o 255 Hz.

21. La frecuencia de batimiento es de 0,7 Hz.

23. El observador 1 notará la frecuencia más alta. El observador 2 notará la frecuencia más baja. El observador 3 escuchará una frecuencia más alta que la de la fuente, pero más baja que la notada por el observador 1, a medida que la fuente se acerca y una frecuencia más baja que la de la fuente, pero más alta que la notada por el observador 1, a medida que la fuente se aleja del observador 3.

25. El radar Doppler no solo puede detectar la distancia a la que se encuentra una tormenta, sino también la velocidad y la dirección a la que se desplaza.

27. La velocidad del sonido disminuye a medida que disminuye la temperatura. El número Mach es igual a $M = \frac{v_S}{v}$, por lo que el avión debería reducir su velocidad.

Problemas

29. $s_{\text{máx.}} = 4{,}00\text{ nm},\ \ \lambda = 1{,}72\text{ m},\ \ f = 200\text{ Hz},\ \ v = 343{,}17\text{ m/s}$

31. a. $\lambda = 68{,}60\ \mu\text{m}$; b. $\lambda = 360{,}00\ \mu\text{m}$

33. a. $k = 183{,}09\text{m}^{-1}$;
b. $\Delta P = -1{,}11\text{ Pa}$

35.
$s_1 = 7{,}00\text{ nm},\ \ s_2 = 3{,}00\text{ nm},\ \ kx_1 + \phi = 0\text{ rad}$
$kx_2 + \phi = 1{,}128\text{ rad}$
$k\,(x_2 - x_1) = 1{,}128\text{ rad},\ \ k = 5{,}64\text{ m}^{-1}$
$\lambda = 1{,}11\text{ m},\ \ f = 306{,}31\text{ Hz}$

37.
$k = 5{,}28 \times 10^3\text{ m}$
$s\,(x,t) = 4{,}50\text{ nm}\cos\left(5{,}28 \times 10^3\text{ m}^{-1}\,x - 2\pi\,(5{,}00\text{ MHz})\,t\right)$

39. $\lambda = 3{,}43\text{ mm}$

$\lambda = 6{,}00\text{ m}$

41. $s_{\text{máx.}} = 2{,}00\text{ mm}$

$v = 600\text{ m/s}$

$T = 0{,}01\text{ s}$

43. (a) $f = 100\text{ Hz}$, (b) $\lambda = 3{,}43\text{ m}$

45. $f = 3.400\text{ Hz}$

47. a. $v = 5{,}96 \times 10^3\text{ m/s}$; b. acero (a partir del valor en la Tabla 17.1)

49. $v = 363\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

51. $\Delta x = 924\text{ m}$

53.
$V = 0{,}05\text{ m}^3$
$m = 392{,}5\text{ kg}$
$\rho = 7.850\text{ kg/m}^3$
$v = 5047{,}54\text{ m/s}$

55. $T_C = 35°\text{C},\ \ v = 351{,}58\text{ m/s}$
$\Delta x_1 = 35{,}16\text{ m},\ \ \Delta x_2 = 52{,}74\text{ m}$
$\Delta x = 63{,}39\text{ m}$

57. a. $t_{5{,}00°\text{C}} = 0{,}0180\text{ s},\ \ t_{35{,}0°\text{C}} = 0{,}0171\text{ s}$; b. % de incertidumbre = 5,00%; c. Esta incertidumbre podría

causarle, definitivamente, dificultades al murciélago si no siguiera utilizando el sonido mientras se acerca a su presa. Un 5 % de incertidumbre podría ser la diferencia entre atrapar a la presa por el cuello o por el pecho, lo que significa que podría fallar al agarrar a su presa.

59. $1{,}26 \times 10^{-3}\ \text{W/m}^2$

61. 85 dB

63. a. 93 dB; b. 83 dB

65. $1{,}58 \times 10^{-13}\ \text{W/m}^2$

67. Una disminución de un factor de 10 en la intensidad corresponde a una reducción de 10 dB en el nivel de sonido: $120\ \text{dB} - 10\ \text{dB} = 110\ \text{dB}$.

69. Sabemos que 60 dB corresponden a un factor de 10^6 aumento de la intensidad. Por lo tanto,

$I \propto X^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2$, por lo que $X_2 = 10^{-6}$ atm.

120 dB corresponden a un factor de 10^{12} de aumento$\Rightarrow 10^{-9}\ \text{atm}(10^{12})^{1/2} = 10^{-3}$ atm.

71. 28,2 dB

73. 1×10^6 km

75. $73\ \text{dB} - 70\ \text{dB} = 3\ \text{dB}$; Este cambio en el nivel de sonido se nota fácilmente.

77. 2,5; El tono de 100 Hz debe ser 2,5 veces más intenso que el sonido de 4.000 Hz para que sea audible por esta persona.

79. 0,974 m

81. 11,0 kHz; El oído no es especialmente sensible a esta frecuencia, por lo que no oímos sobretonos debido al canal auditivo.

83. a. $v = 344{,}08$ m/s, $\lambda_1 = 16{,}00$ m, $f_1 = 21{,}51$ Hz;
b. $\lambda_3 = 5{,}33$ m, $f_3 = 64{,}56$ Hz

85.

$v_{\text{cuerda}} = 149{,}07$ m/s, $\lambda_3 = 1{,}33$ m, $f_3 = 112{,}08$ Hz

$\lambda_1 = \frac{v}{f_1}$, $L = 1{,}53$ m

87. a. 22,0°C; b. 1,01 m

89. primer armónico = 180 Hz;
segundo sobretono = 270 Hz;
tercer sobretono = 360 Hz

91. 1,56 m

93. El tubo tiene condiciones de frontera simétricas;

$\lambda_n = \frac{2}{n}L$, $f_n = \frac{nv}{2L}$, $n = 1, 2, 3$

$\lambda_1 = 6{,}00$ m, $\lambda_2 = 3{,}00$ m, $\lambda_3 = 2{,}00$ m

$f_1 = 57{,}17$ Hz, $f_2 = 114{,}33$ Hz, $f_3 = 171{,}50$ Hz

95. $\lambda_6 = 0{,}5$ m
$v = 1.000$ m/s
$F_T = 6.500$ N

97. $f = 6{,}40$ kHz

99. 1,03 o 3%

101.
$$f_B = |f_1 - f_2|$$
$$|128{,}3\text{ Hz} - 128{,}1\text{ Hz}| = 0{,}2\text{ Hz};$$
$$|128{,}3\text{ Hz} - 127{,}8\text{ Hz}| = 0{,}5\text{ Hz};$$
$$|128{,}1\text{ Hz} - 127{,}8\text{ Hz}| = 0{,}3\text{ Hz}$$

103. $v_A = 135{,}87\text{ m/s},\ v_B = 141{,}42\text{ m/s},$
$\lambda_A = \lambda_B = 0{,}40\text{ m}$
$\Delta f = 15{,}00\text{ Hz}$

105. $v = 155{,}54\text{ m/s},$
$f_{\text{cuerda}} = 971{,}17\text{ Hz},\ n = 16{,}23$
$f_{\text{cuerda}} = 1076{,}83\text{ Hz},\ n = 18{,}00$
La frecuencia es de 1.076,83 Hz y la longitud de onda es de 0,14 m.

107.
$f_2 = f_1 \pm f_B = 260{,}00\text{ Hz} \pm 1{,}50\text{ Hz},$
por lo que $f_2 = 261{,}50\text{ Hz}$ o $f_2 = 258{,}50\text{ Hz}$

109.
$f_{\text{ace}} = \frac{f_1 + f_2}{2}; f_B = f_1 - f_2 (\text{asume} f_1 > f_2)$
$f_{\text{ace}} = \frac{(f_B + f_2) + f_2}{2} \Rightarrow$
$f_2 = 4099{,}750\text{ Hz}$
$f_1 = 4100{,}250\text{ Hz}$

111. a. 878 Hz; b. 735 Hz

113. $3{,}79 \times 10^3$ Hz

115. a. 12,9 m/s; b. 193 Hz

117. La primera águila escucha $4{,}23 \times 10^3$ Hz. La segunda águila escucha $3{,}56 \times 10^3$ Hz.

119.
$v_s = 31{,}29\text{ m/s}$
$f_o = 1{,}12\text{ kHz}$

121. Se produce un desplazamiento audible cuando $\frac{f_{\text{obs}}}{f_s} \geq 1{,}003;$ $f_{\text{obs}} = f_s \frac{v}{v - v_s} \Rightarrow \frac{f_{\text{obs}}}{f_s} = \frac{v}{v - v_s} \Rightarrow$
$v_s = 0{,}990\text{ m/s}$

123. $\theta = 30{,}02°$
$v_s = 680{,}00\text{ m/s}$
$\tan\theta = \frac{y}{v_s t},\ t = 21{,}65\text{ s}$

125. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{M}, \quad \theta = 56{,}47°$

$y = 9{,}31\ \text{km}$

$s_1 = 6{,}34\ \text{nm}$

$s_2 = 2{,}30\ \text{nm}$

$kx_1 + \phi = 0\ \text{rad}$

$kx_2 + \phi = 1{,}20\ \text{rad}$

127. $k\,(x_2 - x_1) = 1{,}20\ \text{rad}$

$k = 3{,}00\ \text{m}^{-1}$

$\omega = 1.019{,}62\ \text{s}^{-1}$

$s_1 = s_{\text{máx.}} \cos\,(kx_1 - \phi)$

$\phi = 5{,}66\ \text{rad}$

$s\,(x, t) = 6{,}30\ \text{nm} \cos\left(3{,}00\ \text{m}^{-1}\,x - 1.019{,}62\ \text{s}^{-1}\,t + 5{,}66\right)$

Problemas Adicionales

129. $v_\text{s} = 346{,}40\ \text{m/s};$

$\lambda_n = \frac{2}{n}L \qquad f_n = \frac{v_\text{s}}{\lambda_n}$

$\lambda_1 = 1{,}60\ \text{m} \quad f_1 = 216{,}50\ \text{Hz}$

$\lambda_2 = 0{,}80\ \text{m} \quad f_1 = 433{,}00\ \text{Hz}$

$\lambda_6 = 0{,}40\ \text{m}$

131. a. ; b. $\lambda_\text{s} = 2{,}40\ \text{m}$

$v = 57{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$f_6 = 142{,}89\ \text{Hz}$

$v = 344{,}08\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

133. $v_A = 29{,}05\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_B = 33{,}52\ \text{m/s}$

$f_A = 961{,}18\ \text{Hz},$

$f_B = 958{,}89\ \text{Hz}$

$f_{A,\text{bat}} = 161{,}18\ \text{Hz}, \quad f_{B,\text{bat}} = 158{,}89\ \text{Hz}$

135. $v = 345{,}24\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; a. $I = 31{,}62\,\frac{\mu\text{W}}{\text{m}^2}$; b. $I = 0{,}16\,\frac{\mu\text{W}}{\text{m}^2}$; c. $s_{\text{máx.}} = 104{,}39\ \mu\text{m}$; d. $s_{\text{máx.}} = 7{,}43\ \mu\text{m}$

137. $\frac{f_A}{f_D} = \frac{v + v_\text{s}}{v - v_\text{s}}, \quad (v - v_\text{s})\,\frac{f_A}{f_D} = v + v_\text{s}, \quad v = 347{,}39\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$T_\text{C} = 27{,}70°$

Problemas De Desafío

$$\sqrt{x^2+d^2}-x=\lambda,\ \ x^2+d^2=(\lambda+x)^2$$

139. $$x^2+d^2=\lambda^2+2x\lambda+x^2,\ \ d^2=\lambda^2+2x\lambda$$

$$x=\frac{d^2-\left(\frac{v}{f}\right)^2}{2\frac{v}{f}}$$

141. a. Para los máximos $\Delta r = d\,\text{sen}\,\theta$

$$d\,\text{sen}\,\theta=n\lambda\ \ n=0,\pm1,\pm2....,\ \ \theta=\text{sen}^{-1}\left(n\frac{\lambda}{d}\right)\ \ n=0,\pm1,\pm2....$$

b. Para los mínimos, $\Delta r = d\,\text{sen}\,\theta$

$$d\,\text{sen}\,\theta=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\lambda\ \ n=0,\pm1,\pm2....$$

$$\theta=\text{sen}^{-1}\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}\right)\ \ n=0,\pm1,\pm2....$$

143. a. $v_{\text{cuerda}}=160{,}73\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $f_{\text{cuerda}}=535{,}77\ \text{Hz}$; b. $f_{\text{diapasón}}=512\ \text{Hz}$; c. $f_{\text{diapasón}}=\dfrac{n\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}{2L}$, $F_T=141{,}56\ \text{N}$

145. a. $f=268{,}62\ \text{Hz}$; b. $\Delta f\approx\frac{1}{2}\frac{\Delta F_T}{F_T}f=1{,}34\ \text{Hz}$

147. a. $v=466{,}07\frac{\text{m}}{\text{s}}$; b. $\lambda_9=51{,}11\ \text{mm}$; c. $f_9=9{,}12\ \text{kHz}$; d. $f_{\text{sonido}}=9{,}12\ \text{kHz}$; e. $\lambda_{\text{aire}}=37{,}86\ \text{mm}$

ÍNDICE

A

aceleración angular 488
aceleración angular instantánea 488
aceleración centrípeta 183 , 297 , 499
aceleración de partículas 272
aceleración debida a la gravedad 136
aceleración instantánea 119
aceleración lineal total 500
aceleración media 116
aceleración tangencial 187 , 499
aceleración total 187
adimensional 24
afelio 666
agujero negro 682
alcance 178
amortiguado críticamente 789
amortiguador de masa sintonizada 759
amplitud 761 , 807
ángulo direccional 62
ángulo entre dos vectores 81
anticonmutatividad 84
antinodo 840
antiparalelo 50
armónicos 890
Arquímedes 721
arrastre 732
articulación artificial 288
asociativa 53
audición 864

B

barómetro 712
batimientos 898
Bell 879
Bernoulli 730
bolsa de aire 415
Brahe 640
brazo de palanca 522
bumerán 510

C

caída libre 136 , 228
campo gravitacional 648
cantidad conservada 380
cantidad derivada 16
cantidad escalar 48
cantidad física 15
cantidades base 16
cantidades vectoriales 48
Cavendish 641
cavidades resonantes 894
centrífuga 303
centro de gravedad 595
centro de masa 452
cifras significativas 34
cinemática 105 , 280
cinemática del movimiento rotacional 493
cinturón de seguridad 415
coeficiente de arrastre 306
coeficiente de fricción cinética 286
coeficiente de fricción estática 286
coeficiente de viscosidad 738
combustibles fósiles 393
cometa Halley 671
componentes escalares 61
componentes vectoriales 60
comportamiento plástico 625
compresibilidad 621
compresiones 865
condición de frontera fija 829
condición de frontera libre 829
conmutativa 53
conservación de energía 381
constante de fuerza (k) 762
constante de la gravitación universal 641
constante de torsión 785
construcción geométrica de cola a cabeza 57
coordenada radial 66
coordenadas polares 66
Copérnico 640
corrimiento al rojo 906
corrimiento Doppler 900
cortante 614
cráter Barringer 412
cuerda elástica 359
cuerpo rígido 483
Curie 13
curvas con peralt 299

D

decibeles 879
deformación 614
densidad 700
densidad de masa superficial 515
densidad lineal de masa 458 , 513
deslizamiento de fase 764 , 836
desplazamiento 49 , 106
desplazamiento total 107
deuterón 435
diagrama de cuerpo libre 209 , 268
diagrama de energía potencial 386
diagrama estrés-tensión 625
diapasón 889
diferencia de dos vectores 53
diferencia de energía potencial 368
diferencial exacta 377
dimensión 24
dimensionalmente coherente 25
dinámica 208
dinámica rotacional 527
discrepancia 32
distancia recorrida 108
distributiva 53

E

ecuación de Bernoulli 730
ecuación de continuidad 727

ecuación del cohete 466
ecuación escalar 52
ecuación lineal de onda 818
ecuación vectorial 51
Efecto Doppler 900
Einstein 679
eje paralelo 514
el plasma 699
el principio de Arquímedes 721
elástica 435
elástico 615 , 624
elevador 274
empuje 232
energía cinética 344
energía cinética rotacional 504
energía eléctrica 391
energía eólica 394
energía mecánica 380
energía nuclear 391
energía potencial 368
energía potencial elástica 372 , 770
energía potencial gravitacional 371
energía química 391
energía radiante 391
energía solar 394
energía térmica 391
equilibrio 215 , 592
equilibrio de partículas 270
equilibrio estático 592
equilibrio hidrostático 715
escalares 48
esfuerzo 614
esfuerzo de compresibilidad 614
esfuerzo de tracción 614
esfuerzo de volumen 614
espacio-tiempo 679
estabilidad 773
Estación Espacial Internacional 647 , 660
estela de proa 909
estimación 27
estrella de neutrones 683
exactitud 31
explosión 434
explosión sónica 908

F

factor de conversión 21
fase de la onda 815
fases de la materia 698
Fermi 13
física 8
fluido estático 706
fluidos 698
fluidos ideales 724
flujo laminar 725
flujo turbulento 725
fonio 882
frecuencia 761 , 867
frecuencia angular 185 , 814
frecuencia angular natural 788
frecuencia de batimiento 898
frecuencia fundamental 842
fricción 285
fricción cinética 285
fricción estática 285
fuerza 209
fuerza centrífuga 303
fuerza centrípeta 297
fuerza conservativa 376
fuerza de acción a distancia 679
fuerza de arrastre 272 , 306
fuerza de Coriolis 304
fuerza de flotación 720
fuerza de marea 673
fuerza externa 449
fuerza externa neta 212
fuerza impulsora periódica 790
fuerza inercial 303
fuerza normal 238 , 274
fuerza restauradora 210 , 773
fuerzas de campo 211
fuerzas de contacto 211
fuerzas externas 209
fuerzas ficticias 247
fuerzas internas 450
fuerzas no conservativas 376
funciones de onda 812
fundamental 890

G

galaxia de Andrómeda 644
galaxia Remolino 8
Galileo 135 , 640
gato hidráulico 717
Geiger 440
geometría no euclidiana 680
geosincrónico 692
geotérmica 394
giro circular 350
giroscopio 575
gráficos de barras de energía total 383
gravedad específica 703

H

Halley 672
helicóptero 509
hidráulica 715
horizonte de sucesos 682

I

impulso 410
incertidumbre 32
inelástica 434
inercia 214
intensidad 828
interferencia 831
interferencia constructiva 833
interferencia destructiva 833
Io 677
iPhone 419

J

julio 335

K

Kepler 640
kilogramo 18

L

la forma en componentes de un vector 61
la ley de Hooke 761
La primera ley de Kepler 665
la regla del paralelogramo 55
la resonancia 846
la segunda ley de Newton para la rotación 527
Las ondas de materia 807
ley 14
ley de conservación del momento 426

ley de conservación del momento angular 569
ley de Hooke 341
ley de la inercia 214
ley de Poiseuille 740
ley de Poiseuille para la resistencia 740
leyes del movimiento de Newton 268
límite de 625
límite elástico 624
límite gravitacional 656
líquidos 698
longitud de onda 807 , 867
Los gases 698
los sólidos 698
Los vectores unitarios de los ejes 61

M

magnitud 49
manómetro 711
máquina de Atwood 278
marco de referencia 106
marco de referencia inercial 215
marco de referencia no inercial 303
marcos de referencia 189
mareas muerta 674
mareas viva 674
Marsden 440
masa pendular 780
materia oscura 685
medio 806
método de suma de porcentajes 33
metro 18
modelo 13
modos normales 842
módulo 615
módulo de compresibilidad 615 , 877
módulo de corte 615
módulo de Young 615 , 868
momento 227 , 408
momento angular 560
momento de inercia 505
movimiento armónico amortiguado 786
movimiento armónico simple (Simple Harmonic Motion, SHM) 761
movimiento browniano 161
movimiento circular uniforme 776
movimiento de proyectil 171
movimiento periódico 760
movimiento rodadura 552

N

Newton 208 , 212 , 640
nivel de intensidad del sonido 879
nivel de presión del sonido 882
no renovables 392
nodo 840
notas 882
número de onda 814
número de Reynolds 743
número Mach 907

O

onda 806
onda expansiva 908
onda longitudinal 808
onda transversal 808
ondas electromagnéticas 807
ondas estacionaria 838
ondas estacionarias 889
ondas mecánica 806
ondas sísmicas 874
órbita de Mólniya 585
orbitador climático de Marte 23
orden de magnitud 11
oscilación 761
oscilador armónico simple 761 , 770

P

pascal 714
péndulo de torsión 784
péndulo físico 782
péndulo simple 780
peralte ideal 300
perfectamente inelástica 434
perihelio 666
periodo 760
periodo orbital 658
peso 228
peso aparente 649
Philae 432
plano inclinado 290
Poiseuille 740
porcentaje de incertidumbre 32
posición 106
posición angular 484
posición de equilibrio 762
potencia 352
potencia de una onda mecánica 827
potencia hidráulica 393
potencia instantánea 352
potencia media 352
potencial de Lennard-Jones 6-12 775
precesión 575
precisión 31
presión 620 , 703
presión absoluta 710
presión atmosférica 705 , 710
presión manométrica 710
presión normal 621
primera ley de Newton 213
principio de Bernoulli 732
principio de equivalencia 679
principio de Pascal 715
principio de superposición 819
problema de persecución de dos cuerpos 133
problemas de persecución de dos cuerpos 123
producto cruz 83
producto escalar 79
producto punto 79
producto vectorial 83
propiedad inercial 868
propiedades elásticas 868
proporcionalidad 625
Ptolomeo 640
puente elástico 374
pulsar 585
pulso 812
punto de apoyo 593
punto de equilibrio 388
punto de equilibrio estable 773

punto de inflexión 388
puntos de inflexión 773

R

radiación de Cerenkov 909
radio de Schwarzschild 682
rapidez de onda 808
rapidez instantánea 113
rapidez media 113
rapidez orbital 658
rarefacciones 865
reducción de ruido 888
regla de la mano derecha 84, 486
renovables 392
resistencia del aire 136
resonancia 790, 838, 889
Rutherford 440

S

Schwarzschild 682
segunda ley de Kepler 669
segunda ley de Newton 219
segundo 17
sistema 426
sistema cerrado 426
sistema de coordenadas 60
sistema de coordenadas polares 66
sistema métrico 19
sobreamortiguado 789
sobretono 842
sobretonos 890
sonido 864
subamortiguado 789
suma vectorial 52
superposición 832
sustancia heterogénea 702
sustancia homogénea 702

T

tasa de flujo 726
tasa de flujo de masa 728
tensión 241, 614
tensión de compresibilidad 614
tensión de compresión 614
tensión de corte 293, 614
tensión de rotura 626
tensión de tracción 614
tensión de volumen 614
teorema de trabajo-energía 348
teorema del eje paralelo 514
teorema del momento-impulso 417
teoría 14
teoría de la relatividad general 679
tercera ley de Kepler 671
tercera ley de Newton 230
tiempo de vuelo 178
tiempo transcurrido 108
timbre 882
tono 882
torque 520
torque gravitacional 595
torr 714
Torricelli 712
trabajo 334
trabajo neto 348
trabajo rotacional 531
transductor 878
transferencia de Hohmann 668
trayectoria 170, 178
tubo de Prandtl 734
tubos con condiciones de frontera antisimétricas 893
tubos con condiciones de frontera simétricas 893
túnel de viento 307
turbulencia 736
tweeter 873

U

unidades 15
unidades bas 16
unidades del SI 16
unidades derivadas 16
unidades inglesas 16

V

vector de aceleración 166
vector de desplazamiento 159
vector de posición 158
vector de velocidad 162
vector nulo 71
vector resultante 52
vector unitario 53
vectores 48
vectores iguales 71
vectores ortogonales 50
vectores paralelos 50
velocidad angular 485
velocidad angular instantánea 485
velocidad de escape 655
velocidad de la onda 808
velocidad instantánea 111
velocidad límite 309
velocidad media 108
velocidad relativa 190
velocidad tangencial 779
Venturi 748
Vía Láctea 8, 644
vigas en I 619
viscosidad 724
volantes de inercia 505
volumen 882

W

Wheeler 682
woofer 873